arXiv:2303.05281v1 [math.SG] 9 Mar 2023

通过辫单值化的新代数理论，完整分类 $\mathbb{CP}^2$ 中三次辛曲线的同痕类

Amitesh Datta

2023年3月10日

摘要

我们建立了一套关于正辫及辫群 B_3 中共轭类的新代数理论。运用该理论，我们对 $\mathbb{CP}^2$ 中仅具有 A_n-奇点的三次辛曲线的同痕类作出完整分类，适用于 $n \geq 1$ （ A_n-奇点的局部模型由方程 $z^2 = w^n$ 给出），且不依赖 Gromov 的伪全纯曲线理论。我们证明，如果 C 和 C' 是 $\mathbb{CP}^2$ 中次数为三且每种 $n \geq 1$ 对应的 A_n-奇点数目相同的辛曲线，那么 C 与 C' 同痕。此外，我们的理论提供了一种统一的证明方法，独立建立并整合了关于 $\mathbb{CP}^2$ 中三次辛曲线的若干基本分类结果。具体而言，我们运用该理论证明：(1) $\mathbb{CP}^2$ 中三次光滑辛曲线只有一个同痕类（此结果由 Sikorav 得出）；(2) 节点数是 $\mathbb{CP}^2$ 中三次节点辛曲线同痕类的完全不变量（不可约节点曲线的情形由 Shevchishin 得出，可约节点曲线的情形由 Golla-Starkston 得出）；(3) $\mathbb{CP}^2$ 中三次尖点辛曲线只有一个同痕类（这是 Ohta-Ono 所得结果的推广）。本研究是运用辫群理论中的纯代数方法解决辛同痕猜想的第一步。最后，我们独立地对 $\mathbb{S}^2$ 上的亏格一 Lefschetz 纤维化作出完整分类（此结果由 Moishezon-Livne 得出）。

目录

1 引言 2 1.1 主要结果概要.3

1.2 论文结构.6 1.3 致谢.7

2 背景与动机 7
2.1 $\mathbb{CP}^2$ 中 Hurwitz 曲线与辫单值的理论 . 7 2.2 群中的分解与 Hurwitz 等价理论 13 2.3 辫群 B_n 中正辫幺半群 B_n^+ 的 Garside 标准形.14 2.4 辫群 B_n 中的正半扭转.16

3 辫群 B_3 **18**的代数结构
3.1 B_3 中正辫对偶理论 . . . . . 18 3.2 正半扭转幂的 Garside 标准形 32

4 三次简单 Hurwitz 曲线在同痕意义下的分类，以及辫单值分解在 Hurwitz 等价意义下的分类 39

4.1 Δ^2 的正半扭转幂的标准分解.40 4.2 Δ^2 的正半扭转分解在 Hurwitz 等价下的分类.45 4.3 Δ^2 的正半扭转幂的分解分类.56 4.4 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线奇点的完整分类.90

5 $\mathbb{S}^2$ **93**上的亏格一 Lefschetz 纤维化分类

1 引言

本文发展了一种关于辫群 B_3 的新代数理论，以建立仅具有 A_n-奇点的 $\mathbb{CP}^2$ 中三次辛曲线的同痕类，以及 $\mathbb{S}^2$ 上亏格一 Lefschetz 纤维化的同构类的完整分类。 A_n-奇点在局部由方程 $z^2 = w^n$ 描述（包括节点型和尖点奇点）。

首先，该理论统一并独立地证明了以下作者的结果：Sikorav [16]（光滑辛曲线）、Shevchishin [15]（不可约节点辛曲线）、Golla-Starkston [8]（可约节点辛曲线）、Ohta-Ono [14]（具有单个尖点的尖点辛曲线）以及 Moishezon-Livne [13]（亏格一 Lefschetz 纤维化）。我们方法的创新之处在于避开了 Gromov 的伪全纯曲线理论，

该理论是这些结果原始证明中的主要工具。相反，我们运用新理论对 $\mathbb{CP}^2$ 中三次辛曲线的辫单值分解进行分类。此外，我们以同一种证明方法确立了所有这些结果。

我们还运用我们的理论，完整地确定了 $\mathbb{CP}^2$ 中仅具有 A_n- 奇点的三次辛曲线可能出现的奇点所受的约束。对于代数几何中曲线奇点约束的经典研究方法，是基于经典的 B´ezout 定理（针对代数曲线）。运用我们辫单值理论的方法独立于 B´ezout 定理，也独立于任何基于 Gromov 的伪全纯曲线理论、针对辛曲线的推广。本文以纯代数方法证明了 $\mathbb{CP}^2$ 中仅具有 A_n- 奇点的三次辛曲线同痕类的完整分类。

1.1 主要结果概述

我们将在 $\mathbb{CP}^2$ 中简单 Hurwitz 曲线的框架下展开讨论，因为 $\mathbb{CP}^2$ 中每条仅具有 A_n-奇点的辛曲线都与一条简单 Hurwitz 曲线辛同痕。我们先简要回顾相关定义（Hurwitz 曲线、Hurwitz 曲线的同痕以及辫单值），再概述本文的主要结果，并详细阐述我们的辫群 B_3代数理论。关于背景的详细讨论，请参阅第 2 节。令 $\mathbb{CP}^n$ 表示复射影 n-空间。令 $\pi\colon \mathbb{CP}^2 \setminus [0:0:1] \to \mathbb{CP}^1$ 表示由齐次坐标下的规则 $\pi[z_0:z_1:z_2] = [z_0:z_1]$ 定义的投影。

$\mathbb{CP}^2$ 中的 Hurwitz 曲线是一个带有孤立奇点的二维定向实子流形 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$，满足：(1) C 中奇点以及 π 的纤维与 C 的非退化切触所构成的集合 S 是有限集；(2) $[0:0:1] \notin C$；(3) 除了 S中的点， C 与 π 的纤维均正向相交。Hurwitz 曲线的次数是代数交数 $[C]\cdot[L] > 0$，其中 $L \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条复射影直线。

Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的一个 A_n-奇点（ $n \geq 1$ ）是 C 的奇点，其局部可由局部复坐标（z， w）中（0，0）附近的方程 $z^2 = w^n$ 刻画，其中 z 坐标的等值集与 π的纤维横截。例如， C 的一个 A_1-奇点是 C 与 π的一条纤维之间的非退化切触；一个 A_2-奇点是节点奇点，一个A_3-奇点是尖点奇点，一个 A_4-奇点是二重点奇点。（请注意，我们使用的术语与文献中的术语略有不同——在文献中，一个 A_n-奇点的局部模型由方程$z^2 = w^{n+1}$ 给出；不过，我们使用的术语更适合本文的需要。）

Hurwitz 曲线的同痕是一个单参数族 $\{C_t\}_{t\in[0,1]}$ Hurwitz 曲线，使得对每个 C_t ， $\{C_t\}_{t\in[0,1]}$ 的奇点都与

C_0 的奇点相同。若 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的奇点 C 全都是 A_n奇点，则称其为简单赫尔维茨曲线。

本文的第一个主要结果是对 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线同痕问题的完整解决。

定理 1.1. 若 C、$C' \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是次数为三的简单 Hurwitz 曲线，且对于每个正整数 $n \geq 1$，它们具有相同数量的 A_n-奇点，那么 C 与 C' 同痕。

第二个主要结果是对 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线可能出现的奇点的完整分类。

定理 1.2. 设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线。对于每个正整数 $n \geq 1$，设 ν_n 表示 C 中的 A_n-奇点的数量。我们有奇点公式 $6 = \sum_{n=1}^{6} n\nu_n$，并且 C 的奇点满足以下约束：

(i) C 至多有一个 A_3-奇点（尖点奇点）。(ii) C 不能同时具有一个 A_2-奇点（节点奇点）和一个 A_3-奇点（尖点奇点）。(iii) C 不能同时具有一个 A_2-奇点（节点奇点）和一个 A_4-奇点（二重点奇点）。(iv) 对于 $n \geq 5$，C 没有 A_n-奇点。

定理 1.2 的另一种表述是：若 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线，那么 C 或者是光滑曲线、至多有三个节点的节点曲线、只有一个尖点的尖点曲线，或者是一条仅有一个自切点且没有其他奇点的曲线。以下结论是定理 1.1 和定理 1.2 的推论。

定理 1.3. 若 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线，那么 C 与一条射影代数曲线同痕。

若 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线，那么定理 1.2 和定理 1.3 表明，C 或者与一条光滑三次曲线同痕（如果 C 光滑），与一条节点三次曲线同痕（如果 C 有一个节点），是一直线与一条不可约二次曲线的横截并（如果 C 有两个节点），是三条没有公共交点的直线的横截并（如果 C 有三个节点），与一条尖点三次曲线同痕（如果 C 有一个尖点），或者是不可约二次曲线与其一条切线的并（如果 C 有一个自切点）。

辛同痕猜想认为，$\mathbb{CP}^2$ 中的每条光滑或节点型辛曲线都与 $\mathbb{CP}^2$中的某条射影代数曲线辛同痕。定理 1.3 等价于以下陈述。

定理 1.4. 若 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次辛曲线，且 C 的奇点均为简单奇点（例如节点型、尖点型或切触节点型奇点），那么 C 与一条射影代数曲线辛同痕。

辛同痕猜想的重要性部分源于 Auroux [1] 和 Auroux-Katzarkov [3] 的工作。这些工作的结论是，原则上，闭辛四维流形的分类可归结为 $\mathbb{CP}^2$ 中 Hurwitz 曲线的同痕问题，其中仅有节点型和尖点型奇点。此外，哪些闭辛四维流形是复射影曲面的分类问题，可归结为辛同痕问题（即，哪些仅有节点型和尖点型奇点的辛曲线与射影代数曲线辛同痕？）。

我们指出，Sikorav 在光滑曲线的特殊情形下证明了定理 1.4 [16], Shevchishin 在不可约节点曲线的特殊情形下证明了定理 1.4 [15], Golla-Starkston 在可约节点曲线的特殊情形下证明了定理 1.4 [8], 而 Ohta-Ono 在只有一个尖点的尖点曲线特殊情形下证明了定理 1.4 [14]。这些作者所用的方法基于 Gromov 的伪全纯曲线理论。

我们使用 $\mathbb{CP}^2$中的简单 Hurwitz 曲线的辫单值理论 B_3，以便将本文的主要结果改写为辫群中的代数命题 d 。事实上，次数为 d 的简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的辫单值是 Δ^2 的分解，其各因子是辫群 B_d中正半扭转的幂；其中， Δ是 B_d中的 Garside 元。该分解中的因子数量等于 C 中的奇点数量，也等于 C 与 π的纤维相切时非退化切触的数量。 C 在 C 中的一个 A_n-奇点处的单值化，是 B_d中正半扭转的 n次幂。 C 的辫单值在 Hurwitz 等价意义下定义良好；Hurwitz 等价是 Δ^2 的分解集合上的一种等价关系。Kulikov-Teicher [10] 证明，对于只有节点型和尖点型奇点的 Hurwitz 曲线 C ，其辫单值的 Hurwitz 等价类是 C同痕类的完全不变量。Kharlamov-Kulikov [9] 将这一结果推广到了 $\mathbb{CP}^2$中的所有简单 Hurwitz 曲线。关于背景的更详细讨论，请参阅第 2 节。

本文中，我们运用基于正辫理论及辫群 B_3 中共轭类的全新代数方法，对辫群 B_3 中 Δ^2 的正半扭转的幂的分解进行分类。该理论将在第 3 节中展开。事实上，如果

$$B_3 = \langle \sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \rangle$$

表示辫群 B_3 的 Artin 表示，则 $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$，而正半扭转的 n 次幂属于 σ_1^n 的共轭类。在第 3.1 小节中，我们主要发展了关于 B_3 中方程的理论；在第 3.2 小节中，我们建立了 B_3 中正半扭转幂的显式代数刻画。在第 4 节中，我们利用这些结果对 Δ^2 分解为正

半扭转的分解进行分类。

在本论文的后续工作（[4]）中，我们将关于辫群 B_3 的代数理论推广到所有正整数 $d \geq 1$ 对应的辫群 B_d。我们运用这一代数理论证明， $\mathbb{CP}^2$ 中每一条光滑辛曲线（次数不限）都同痕于一条射影代数曲线，从而在完全一般的情形下肯定地证明了辛同痕猜想。本研究是运用辫单值的纯代数方法解决辛同痕猜想的第一步。

本文还处理了 $\mathbb{CP}^2$ 中奇异三次简单赫尔维茨曲线的情形。事实上，当存在奇点时，定理 1.4 的类似结论并不适用于所有次数的辛曲线。实际上，Moishezon [12] 构造了一些次数至少为十八、具有节点型和尖点型奇点的 $\mathbb{CP}^2$ 中的辛曲线，但这些曲线并不同痕于任何射影代数曲线。

最后，我们建立了二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上亏格一 Lefschetz 纤维化的完全分类。以下结论已由 Moishezon-Livne [13] 证明，但本文利用我们关于辫群 B_3 的理论给出了新的证明。

定理1.5. 奇异纤维的数量是 $\mathbb{S}^2$ 上亏格一 Lefschetz 纤维化同构类的完全不变量。此外， $\mathbb{S}^2$ 上亏格一 Lefschetz 纤维化的奇异纤维数量是 12 的倍数。

1.2 论文概要

本文结构如下。第 2 节回顾了 $\mathbb{CP}^2$ 中 Hurwitz 曲线理论、辫单值分解、辫群中的 Garside 标准形以及辫群中的正半扭转等背景知识。我们还对本文其余部分将使用的术语和记号作了约定。

在第 3 节中，我们将阐述关于辫群 B_3 的代数结构的理论。在第 3.1 小节中，我们将介绍正辫对偶性的理论，这是研究辫群 B_3 中分解的一种工具。在第 3.2 小节中，我们将从代数角度刻画辫群 B_3 中正半扭转的幂的 Garside 标准形。

在第 4 节中，我们运用第 3 节建立的理论，将辫群 B_3 中 Δ^2 分解为正半扭转的幂的分解分类，分类标准为 Hurwitz 等价。在第 4.2 小节中，我们证明，辫群 B_3 中 Δ^2 分解为正半扭转的分解只有一个 Hurwitz 等价类。在第 4.3 小节中，我们证明，辫群中将 Δ^2 分解为正半扭转的幂的分解里，各类型因子的数量构成其 Hurwitz 等价类的一组完备不变量

B_3。在第4.4小节中，我们限定了辫群 B_3 中将 Δ^2 分解为正半扭转的幂的分解中因子的类型。第 4 节中的这些结论结合起来，通过辫单值等价于定理 1.1 和定理 1.2。

在第5节中，我们证明，在映射类群 Mod $\left(\mathbb{T}^2\right) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中，单位元分解为正 Dehn 扭转的分解只有一个 Hurwitz 等价类，其中 $\mathbb{T}^2$ 是二维环面。该陈述等价于定理1.5。

1.3 致谢

作者谨向 Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o 致以谢意，感谢他们对这项工作的关注，并为本文提供了有益的反馈。作者还要感谢 Denis Auroux，感谢他通过电子邮件进行了有益且内容丰富的交流。

2 背景与动机

本节回顾 Hurwitz 曲线与$\mathbb{CP}^2$ 中的辫单值理论（第2.1小节）、群中的分解理论（第2.2小节）、辫群中的 Garside 标准形（第2.3小节）以及辫群中的正半扭转（第2.4小节）的背景知识。我们还将介绍本文中使用的记号和术语。关于 Hurwitz 曲线与辫单值分解理论及其与辛几何的联系，读者可参阅 Auroux [2]，其中有更详尽的介绍性综述。本节内容并无新意，我们的贡献从第3节开始。

2.1 $\mathbb{CP}^2$ 中的 Hurwitz 曲线理论与辫单值

令 $\mathbb{CP}^n$ 表示复射影 n空间。令 $\pi\colon \mathbb{CP}^2 \setminus [0:0:1] \to \mathbb{CP}^1$ 表示由齐次坐标中的规则$\pi[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0 : z_1]$定义的投影。我们回顾本文主要研究对象之一的定义。

定义 2.1. 一个带有孤立奇点的（奇异）闭定向二维实子流形$C \subseteq \mathbb{CP}^2$，若满足以下关于 C 的条件，则称为 Hurwitz 曲线:

(i) 点 $[0:0:1] \notin C$。(ii) C 与 π 的纤维的交点均为横截且正向的，但有限个点除外；这些点恰好是

C 的奇点，以及 C 与 π 的纤维的非退化切触点。我们将这组有限的例外点称为 C 的奇异交点集。

若 $L \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是复射影直线，则同调类 $[L] \in H_2\left(\mathbb{CP}^2\right)$ 是第二同调群的生成元。Hurwitz 曲线 C 的次数是代数交数 $d = [C] \cdot [L] > 0$。（代数交数为正是由条件 (ii) 得出的。）我们可以写作 $[C] = d\,[L]$。

我们回顾一类重要的 Hurwitz 曲线的定义。

定义 2.2. 射影代数曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是齐次多项式 $P(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}\,[z_0, z_1, z_2]$的零点集。射影代数曲线 C 的次数就是多项式 P的次数。

射影代数曲线是相对于一般位置的极点选择 $p \in \mathbb{CP}^2$ 和线性投影 $\mathbb{CP}^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{CP}^1$而言的 Hurwitz 曲线。事实上， $\mathbb{CP}^2$ 中的 Hurwitz 曲线相对于投影 $\pi :\ \mathbb{CP}^2 \setminus [0 : 0 :\ 1] \to \mathbb{CP}^1$的表现类似射影代数曲线。本文将把注意力限制在一类特殊的 Hurwitz 曲线上，其中的奇点足够简单。我们回顾这些特殊类型奇点的定义。

定义 2.3。Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的 A_n 奇点，是指 C 的一个奇点，其局部模型由方程 $z^2 = w^n$ 给出；在原点 (0, 0) 附近的局部复坐标 (z, w) 中， z坐标的等值集与 π的纤维横截相交。例如， C 的 A_1 奇点是 C 与 π的一条纤维之间的非退化相切； C 的 A_2 奇点是节点奇点（其局部模型为两条复直线的横截相交）； C 的 A_3 奇点是尖点奇点；而 C 的 A_4 奇点是二重点奇点。

如果 C 有一个 A_2 奇点，且对于 $n \notin \{1, 2\}$没有 A_n奇点，那么C 就是节点曲线。如果 C 有一个 A_3 奇点，且对于$n \notin \{1, 3\}$没有 A_n奇点，那么 C 就是尖点曲线。

当然， A_1-奇点并非通常意义上 Hurwitz 曲线的奇点，但为方便起见，我们采用这一术语。现在，我们来定义本文将要研究的 Hurwitz 曲线的一个受限类别。

定义 2.4. 如果满足以下条件，则 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条简单赫尔维茨曲线:
(i) C 的奇点全都是 A_n-奇点。(ii) C 的奇异交点在投影 $\pi : \mathbb{CP}^2 \setminus [0 :0: 1] \to \mathbb{CP}^1$下的像互不相同。

我们指出，定义 2.4 中的条件 (ii) 只是为了方便，并非一项约束。事实上，总可以将 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 进行同伦变形（经过具有与 C 相同奇点的 Hurwitz 曲线，具体含义见下文定义 2.5），使其满足定义 2.4 中的条件 (ii)。

一个重要问题是，刻画简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的嵌入拓扑与射影代数曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的嵌入拓扑有多大差异。当然，我们所说的“嵌入的拓扑”指的是 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的同痕类。下面回顾当前语境下同痕的定义。

定义 2.5. Hurwitz 曲线C_0与 $C_1 \subseteq \mathbb{CP}^2$ 之间的同痕是一个单参数族 $\{C_t\}_{t\in[0,1]}$，满足对于每个$t \in [0,1]$，C_t 都是与 C_0 （以及 C_1）具有相同奇点的 Hurwitz 曲线。 $\mathbb{CP}^2$ 中的 Hurwitz 曲线同痕问题，就是将 $\mathbb{CP}^2$ 中的 Hurwitz 曲线按同痕分类的问题。

本文将彻底解决 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线的同痕问题。我们关于 $\mathbb{CP}^2$ 中 Hurwitz 曲线所得的结果也适用于 $\mathbb{CP}^2$ 中的辛曲线。下面回顾 $\mathbb{CP}^2$ 辛几何中的基本定义。

定义 2.6. 令 $\left(\mathbb{CP}^2, \omega\right)$ 表示带有 Fubini-Study 辛形式 ω 的复射影平面。 $\mathbb{CP}^2$ 中的辛曲线是一个闭定向二维实子流形 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$，使得 ω 在 C 上的限制是由其定向所确定的 C 上的辛形式。辛曲线 C 的次数为 $d = [C] \cdot [L] > 0$，其中 $[L] \in H_2\left(\mathbb{CP}^2\right)$ 是复射影直线 $L \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的同调类。（代数交数的正性可由 C 是辛曲线这一条件推出。）

辛曲线 $C_0, C_1 \subseteq \mathbb{CP}^2$ 之间的辛同痕是一个单参数族 $\{C_t\}_{t\in[0,1]}$，其性质是对于每个 $t \in [0,1]$， C_t 都是辛曲线。辛曲线的同痕问题是指将 $\mathbb{CP}^2$ 中的辛曲线按同痕进行分类的问题。

如果 Σ 是定向曲面，且 C 可以表示为光滑映射 $f\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^2$ 对 Σ 的像，那么 C 是辛曲线这一条件可以用关于 f 的导数 df 的不等式来表达。如果 C 的次数为三，那么引言中的定理 1.4 意味着存在光滑映射 $\{f_t\}_{t\in[0,1]}$的一个同痕，其中 $f_t\colon \Sigma \to \mathbb{CP}^2$ 满足关于导数 df_t、 $f_0 = f$ 的同一不等式，且像 $f_1(\Sigma)$ 满足一个齐次多项式方程。

本文将通过辫单值理论研究简单 Hurwitz 曲线的同痕类，下面先回顾相关理论。设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$

为一条次数为 d 的简单 Hurwitz 曲线，且 $q_1, q_2, \ldots, q_k$ 为 C 的奇异交点，其中 $p_j = \pi(q_j)$，对任意 $1 \leq j \leq k$ 均成立。投影 $\pi\colon \mathbb{CP}^2 \setminus [0:0:1] \to \mathbb{CP}^1$ 在 $C \subseteq \mathbb{CP}^2 \setminus [0:0:1]$ 上的限制次数为 d，因为 C 与 π 的纤维的交点 $C \cap \pi^{-1}(p)$ 的基数为 d，除非 $p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$。我们将定义简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 相对于底空间 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 中一条简单闭曲线的单值化。首先，回顾辫群的以下一种解释。

定义 2.7. 若 $d \geq 1$ 是正整数，则复平面 $\mathbb{C}$ 中 d 个点的无序构形空间为

$$\mathrm{Conf}_d(\mathbb{C}) = \{\{z_1, z_2, \ldots, z_d\} : z_i \in \mathbb{C} \text{ and } z_i \neq z_j \text{ for } i \neq j\}.$$

d 股的辫群 B_d 是无序构形空间中 d 个点的基本群 $B_d = \pi_1(\mathrm{Conf}_d(\mathbb{C}))$。

现在，我们定义简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 关于底空间 $\mathbb{CP}^1$ 中一条简单环路的单值化；该环路不经过 C 的奇异交点的投影。

定义 2.8. 设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 为一条简单赫尔维茨曲线，q_1、q_2、...、q_k 为 C 的奇异交点，其中 $p_j = \pi(q_j)$，对 $1 \leq j \leq k$ 成立。不失一般性，假设 $[0:1] \notin \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$。令 $[\alpha] \in \pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$ 为 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 中闭曲线 α 的同伦类。

我们固定纤维丛 $\pi\colon \mathbb{CP}^2 \setminus [0:0:1] \to \mathbb{CP}^1$ 在可缩开子集 $\mathbb{CP}^1 \setminus [0:1] \subseteq \mathbb{CP}^1$ 上的一个平凡化。利用纤维丛的平凡化来将 π 在 $\mathbb{CP}^1 \setminus [0:1]$ 上方的纤维与 $\mathbb{C}$ 识别，闭曲线 α 可提升为 $\mathrm{Conf}_d(\mathbb{C})$ 中的一条闭曲线。C 关于 $[\alpha]$ 的单值化是 $B_d \cong \pi_1(\mathrm{Conf}_d(\mathbb{C}))$ 中相应的元素。

根据定义 2.8，次数为 d 的简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的单值化可解释为映射 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right) \to B_d$。该映射在辫群 B_d 中仅在整体共轭意义下确定（这对应于在 $\mathbb{CP}^1 \setminus [0:1]$ 上方的纤维丛的平凡化选择）。我们可以通过定义简单赫尔维茨曲线的辫单值分解，更具体地概括这些数据。首先，我们回顾群中分解的定义，并引入相关记号。

定义 2.9. 设 G 为一个群，且设 $g \in G$。g 的一个分解是一个 k 元组 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$，满足 $g = \prod_{j=1}^{k} g_j$，其中对于 $1 \leq j \leq k$，$g_j \in G$。我们将每个 g_j 称为该分解中的一个因子，并将 k 称为该分解的因子数量。因子 g_j 的类型是 g_j 在 G 中的共轭类。我们用记号 $g \equiv (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 表示 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是 g 的一个分解。

现在我们定义 $\mathbb{CP}^2$ 中简单赫尔维茨曲线的辫单值分解。

定义 2.10. 设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条次数为 d 的简单赫尔维茨曲线，q_1、q_2、…、q_k 是 C 与 $p_j = \pi(q_j)$ 的奇异交点，其中 $1 \leq j \leq k$。设 $[\gamma] \in \pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$ 是 γ 在 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 中的同伦类，且 $[\gamma]$ 在 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$ 中是平凡的。设 γ_1、γ_2、…、γ_k 是 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ 中的闭曲线，使得 $\{[\gamma_1], [\gamma_2], \ldots, [\gamma_k]\}$ 是秩为 k 的自由群 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$ 的生成集，并且 $[\gamma] = [\gamma_1][\gamma_2]\cdots[\gamma_k]$。

我们固定纤维丛 $\pi: \mathbb{CP}^2 \setminus [0:0:1] \to \mathbb{CP}^1$ 在可缩开子集 $\mathbb{CP}^1 \setminus [0:1] \subseteq \mathbb{CP}^1$ 上的一个平凡化。令 $g \in B_d$ 为 C 关于环路 γ 的单值化，令 g_j 为 C 关于环路 γ_j 的单值化。Hurwitz 曲线 C 关于生成集 $\{[\gamma_1], [\gamma_2], \ldots, [\gamma_k]\}$ 的辫单值分解为分解 $g \equiv (g_1, g_2, \ldots g_k)$。

事实上，存在一个特殊元素 $\Delta \in B_d$（Garside 元），使得 Δ^2 生成 B_d 的中心。一个重要的观察是，简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 关于 $[\gamma]$ 的单值化等于 Δ^2，因此在定义 2.10 中有 $g = \Delta^2$。特别地，C 关于 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0$ 的生成集 $\{[\gamma_1], [\gamma_2], \ldots, [\gamma_k]\}: 1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$ 的辫单值分解是分解 $\Delta^2 \equiv (g_1, g_2, \ldots, g_k)$，它由 B_d 中的 k 个元素构成，其中 g_j 是 C 关于 $[\gamma_j]$ 的单值化。

当然，关于 $\{[\gamma_1'], [\gamma_2'], \ldots, [\gamma_k']\}$ 的另一组生成集 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0:1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$，$C$ 的辫单值是 k 中由 $\Delta^2 = g_1' g_2' \cdots g_k'$ 个元素构成的另一个分解，其中 g_j' 是关于 $\left[\gamma_j'\right]$ 的 C 的单值化。我们可以通过 Hurwitz 等价的概念来理解关于 C 的辫单值分解在不同生成集下的关系，下面给出其定义。

定义 2.11。设 G 是一个群。对分解 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 进行一次 Hurwitz 变换，是指对某个 $1 \leq j \leq k-1$，第 j 个因子和第 $(j+1)$ 个因子进行以下修改之一：

$$(g_1, \ldots, g_j, g_{j+1}, \ldots, g_k) \sim \left(g_1, \ldots, g_j g_{j+1} g_j^{-1}, g_j, \ldots, g_k\right)$$
$$(g_1, \ldots, g_j, g_{j+1}, \ldots, g_k) \sim \left(g_1, \ldots, g_{j+1}, g_{j+1}^{-1} g_j g_{j+1}, \ldots, g_k\right).$$

如果 $g \in G$ 不是中心的，那么 g 的两个分解 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 Hurwitz 等价的，当且仅当 $\mathcal{F}'$ 可以通过有限次 Hurwitz 变换由 $\mathcal{F}$ 得到。

对中心元 $g \in G$ 的分解 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 施以由 $h \in G$ 给出的全局共轭变换，所得分解为

$$h\,(g_1, g_2, \ldots, g_k)\,h^{-1} = \left(hg_1h^{-1}, hg_2h^{-1}, \ldots, hg_kh^{-1}\right)$$

g的。如果 $g \in G$ 是中心的，那么 g 的两个分解 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 Hurwitz 等价的，当且仅当 $\mathcal{F}'$ 可以由 $\mathcal{F}$ 经过有限次 Hurwitz 变换和整体共轭变换得到。

我们注意到，Hurwitz 等价关系在分解上定义了一种等价关系。事实上，自反性和传递性显然成立；对称性则源于这样一个事实：Hurwitz 变换或整体共轭变换的逆变换分别也是 Hurwitz 变换或整体共轭变换。

简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$的辫单值分解与纤维丛 π 在$\mathbb{CP}^1 \setminus [0$ 上的平凡化选择 $1]$ 以及 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0$ 的生成集 $1]$、p_1、p_2、……、$p_k\}\right)$无关（至 Hurwitz 等价）。事实上，辫群 B_k 作为 $\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0$ 的映射类 $1]$、p_1、p_2、……、$p_k\}$作用，从而诱导出 B_k在$\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0$ 的生成集 $1]$、p_1、p_2、……、$p_k\}\right)$上的传递作用。对辫单值分解施加的 Hurwitz 变换，对应于 B_k 的一个生成集在$\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0$ 上的作用 $1]$、p_1、p_2、……、$p_k\}\right)$；对分解施加的整体共轭变换，则对应于纤维丛 π 在 $\mathbb{CP}^1 \setminus [0$ 上的不同平凡化选择 $1]$。

定义 2.12. 设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是次数为 d的简单赫尔维茨曲线，$q_1, q_2, \ldots, q_k$ 是 C的奇异交点，其中 $p_j = \pi(q_j)$ 对应于 $1 \le j \le k$。C 的辫单值是 C 相对于 $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{[0$ 的任意生成集 $1], p_1, p_2, \ldots, p_k\}\right)$所得辫单值分解的 Hurwitz 等价类。

最后，我们回顾次数为 d 的简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$的辫单值因子的如下刻画。设 γ_j 是 Definition 2.10 中环绕点 p_j 的一条小的简单闭曲线，其中 q_j 是 C 的一个 A_n-奇点，对应某个正整数 $n \ge 1$。C 关于 $[\gamma_j]$ 的单值化 g_j 是辫群 B_d中一个正半扭转的 n次幂。特别地，C 的辫单值是将 Δ^2 分解为辫群 B_d中正半扭转的幂所得分解的 Hurwitz 等价类。

研究简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的辫单值化的动机源于 Kharlamov-Kulikov [9] 的以下结果。

定理 2.13（Kharlamov-Kulikov）。如果 C、$C' \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是简单赫尔维茨曲线，那么 C 与 C' 同痕，当且仅当 C 的辫单值与 C' 的辫单值相等。

（我们指出，Kulikov-Teicher [10] 证明了，对于仅具有 A_n 类奇点的简单赫尔维茨曲线，$n \leq 3$（即非退化切触、节点和尖点）的辫单值是其同痕类的完全不变量；本文大部分内容只需要这一特例。）

定理 2.13 表明，$\mathbb{CP}^2$ 中次数为 d 的简单 Hurwitz 曲线的同痕问题，等价于在辫群 B_d 中将 Δ^2 分解为正半扭转的幂、并按 Hurwitz 等价分类的问题。本文将利用这种联系，完整分类 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线的同痕类（引言中的定理 1.1）。在后续文章 [4] 中，我们将把这些结果推广到 $\mathbb{CP}^2$ 中所有次数的光滑曲线。

2.2 群中的分解理论与 Hurwitz 等价

本小节回顾一些关于群中分解理论与 Hurwitz 等价的基本论述，本文将用到这些内容。

命题 2.14. 设 G 是一个群，且 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 和 $\mathcal{F}' = (g_1', g_2', \ldots, g_k')$ 是 G 中的分解。若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 G 中 Hurwitz 等价的分解，且 $C \subseteq G$ 是 G 的一个共轭类，则 $\mathcal{F}$ 中类型为 C 的因子数量等于 $\mathcal{F}'$ 中类型为 C 的因子数量。

如果 H 是一个群，且 $\phi : G \to H$ 是一个群同态，则定义 $\phi(\mathcal{F}) = (\phi(g_1) \quad \phi(g_2) \ldots, \phi(g_k))$ 和 $\phi(\mathcal{F}') = (\phi(g_1') \quad \phi(g_2') \ldots, \phi(g_k'))$。如果 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 G 中 Hurwitz 等价的分解，那么 $\phi(\mathcal{F})$ 和 $\phi(\mathcal{F}')$ 是 H 中 Hurwitz 等价的分解。（Hurwitz 等价具有函子性。）

证明。第一个结论源于这样一个事实：如果 $C \subseteq G$ 是 G 的一个共轭类，那么 Hurwitz 变换和整体共轭变换不会改变类型为 C 的因子数量。第二个结论源于群同态与 Hurwitz 变换可交换这一事实。 □

我们指出，对分解 $\mathcal{F}$ 施加整体共轭变换，可能得到一个无法仅通过有限次 Hurwitz 变换与 $\mathcal{F}$ 等价的分解。例如，单位元 $e \in G$（它在 G 中是中心的）分解为两个因子的分解 $\left(g, g^{-1}\right)$，仅与其自身以及 $e \in G$ 的分解 $\left(g^{-1}, g\right)$ Hurwitz 等价。然而，如果 $\{g, g^{-1}\}$ 不是一个共轭类，则还存在其他可由这些分解通过整体共轭得到的 e 的分解。

我们记录下面这个有用的陈述。

命题 2.15。全局共轭变换与 Hurwitz 变换可交换。特别地，中心元的两个分解 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 Hurwitz 等价的，当且仅当存在某个 $h \in G$，使得 $\mathcal{F}'$ 可以通过有限次 Hurwitz 变换从 $h^{-1}\mathcal{F}h$ 得到。

证明。第一条结论是由整体共轭是 G 的一个（内）自同构这一事实得出的。第二条结论则由第一条结论以及整体共轭变换的复合本身仍是一个整体共轭变换这一事实得出。

□

如果 G 是一个群，那么，将 G 中元素的分解按 Hurwitz 等价进行分类的问题，称为群 G 中的 Hurwitz 问题。一般而言，群中的 Hurwitz 问题很难，甚至可能是不可判定的。事实上，在 $n \geq 5$ 对应的辫群 B_n 中，如果对分解 [11] 中因子的类型不作任何限制，那么将 Δ^2 的分解按 Hurwitz 等价进行分类是一个不可判定问题。然而，本文关注的是将辫群 B_3 中 Δ^2 的分解按 Hurwitz 等价进行分类，其中因子是正半扭转的幂。第 4 节中，我们将证明，将 Δ^2 分解为辫群 B_3 中正半扭转的幂时，各类型因子的数量构成该分解的 Hurwitz 等价类的一组完备不变量；这一结论等价于引言中的定理 1.1。

2.3 Garside 标准形与辫群 B_n中正辫的幺半群 B_n^+

本小节回顾 Garside 标准形以及 B_n中的正辫幺半群 B_n^+。我们将在辫群 B_n的一般情形下回顾本节的记号、术语和结果，但本文其余部分只涉及辫群 B_3。关于本小节所述思想和证明的原始表述，请参阅经典参考文献 [7] 。

定义 2.16。辫群 B_n 的 Artin 表示为

$$B_n = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} : \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \rangle ,$$

其中 $1 \leq i \leq n-2$ 属于第一组关系，$|i-j| > 1$ 属于第二组关系。如果 $1 \leq i \leq n-1$，那么生成元 σ_i 称为 Artin 生成元。B_n 中的正辫是由 σ_1、σ_2、……、σ_{n-1}生成的 B_n 子幺半群中的一个辫子。正辫的乘积展开是将该正辫表示为 Artin 生成元的非负次幂的乘积（正辫的乘积展开中不允许使用生成元的逆元）。正辫乘积展开的长度是该乘积展开中生成元的个数。

正辫子幺半群在 B_n 的代数结构中起着基础性作用。事实上，我们回顾 Garside [7] 的以下结果。

定理 2.17（[7]）。设 B_n^+ 为具有 Artin 表示的幺半群

$$B_n^+ = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} : \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \rangle ,$$

其中，$1 \le i \le n-2$ 出现在第一组关系中，$|i-j|>1$ 出现在第二组关系中。自然映射 $B_n^+ \to B_n$ 是一个幺半群嵌入，其像恰好等于 B_n中的正辫子幺半群。

下文将 B_n 中的正辫子幺半群记作 B_n^+。定理 2.17 指出，如果 B_n 中的一对正辫相等，那么它们可以通过在幺半群 B_n^+中有限次应用 Artin 关系而得出相等。特别是，在这样有限次应用 Artin 关系的过程中，我们不会在任何阶段引入生成元的逆元。定理 2.17 是本文研究 B_3中的正辫子幺半群 B_3^+ 的乘积展开组合学的关键要素。我们将在第 3.1 小节开头进一步讨论这一点。在第 3.1 小节中，我们广泛运用定理 2.17，以建立关于幺半群 B_3^+的重要技术结果。

定理 2.17 的一个推论是，正辫子的长度定义良好，且与乘积展开的选择无关。事实上，Artin 表示中每条关系两边的生成元数量相同。特别地，正辫子的乘积展开集合是有限集，因为所有展开的长度都相同。

现在我们回顾 Garside 关于辫群 [7] 的基本定理，并概述其证明 [7]。

定理 2.18（[7]）。B_n 的 Garside 元为

$$\Delta = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})\,(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-2})\cdots(\sigma_1\sigma_2)\,\sigma_1.$$

若 $g \in B_n$，则 g 可唯一地表示为乘积 $\Delta^k\sigma$，其中 $k \in \mathbb{Z}$，且 $\sigma \in B_n^+$ 是一个不能被 Δ 整除的正辫（即，对于任意正辫 $\tau \in B_n^+$，均有 $\sigma \neq \Delta\tau$）。我们将这一表达式称为辫 g 的 Garside 标准形。我们将 k 称为辫 g 的 Garside 幂。

证明。首先，我们证明 g 的 Garside 标准形存在。Garside 元 $\Delta \in B_n^+$ 满足基本方程 $\Delta\sigma_i = \sigma_{n-i}\Delta$，对每个 $1 \le i \le n-1$ 均成立。此外，对每个 $1 \le i \le n-1$，$\Delta\sigma_i^{-1} \in B_n^+$ 都是一个正辫。特别地，若 $g \in B_n$，则存在一个正整数 $k \ge 0$，使得 $\Delta^k g \in B_n^+$ 是一个正辫。因此，对于某个整数 $k \in \mathbb{Z}$ 和某个正辫 $\sigma \in B_n^+$，我们可以写成 $g = \Delta^k\sigma$。在可能先提出一个 Δ 的幂之后，我们可以选择 $\sigma \in B_n^+$ 使其不可被 Δ 整除。

从 σ 中提出 Δ 的幂。事实上，整除 σ 的 Δ 的最大幂至多为 σ 的字长除以 $n(n-1)/2$，因此这总是可行的。

其次，我们证明 g 的 Garside 标准形的唯一性。若对于某个 k，有 $\Delta^k\sigma = g = \Delta^{k'}\sigma'$，且 σ、$\sigma' \in B_n^+$ 满足 σ、σ' 均不能被 Δ 整除，那么当 $k \geq k'$ 时，我们可以写成 $\Delta^{k-k'}\sigma = \sigma'$；当 $k' \geq k$ 时，则可以写成 $\Delta^{k'-k}\sigma' = \sigma$。无论哪种情况，由于 σ、σ' 均不能被 Δ 整除，我们必有 $k = k'$。当然，这也意味着 $\sigma = \sigma'$。因此，g 的 Garside 标准形是唯一的。□

一个重要事实是，辫群 B_n 的中心是无限循环群 $\langle\Delta^2\rangle$，这进一步有力地支持了定理 2.18 的论述。事实上，在将 B_n 拓扑解释为相对于边界的 n 次标记圆盘的映射类群时，Garside 元的平方是关于边界的一个 Dehn 扭转。特别地，由 Δ^2 共轭就是单位元。我们还可以通过回顾每个 $1 \leq i \leq n-1$ 都成立的恒等式 $\Delta^{-1}\sigma_i\Delta = \sigma_{n-i}$，从代数上证明这一点。我们引入以下记号，用于描述 Garside 元 Δ 的幂所对应的共轭。本文将广泛使用这一记号。

定义 2.19. 设 $\sigma \in B_n^+$ 是一个正辫。我们将 $\sigma_{(l)} = \Delta^{-l}\sigma\Delta^l$ 记作 $l \in \mathbb{Z}$。注意到，由于 Δ^2 是 B_n 中的中心元，$\sigma_{(l)}$ 只取决于 l 的奇偶性。特别地，当 l 为偶数时，$\sigma_{(l)} = \sigma$；当 l 为奇数时，$\sigma_{(l)} = \sigma_{(1)}$。

我们通过指出以下事实来结束本小节：

$$B_3 = \langle\sigma_1, \sigma_2 : \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2\rangle$$

B_3 的 Artin 表示是 $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \in B_3^+$，而 B_3 的 Garside 元是 $\Delta = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \in B_3^+$。本文余下部分将采用 B_3 的这一表示。

2.4 辫群 B_n 中的正半扭转

本小节简要回顾一个众所周知的结论：若 $e \geq 1$，则辫群 B_n 中正半扭转的 e 次幂构成 B_n 中的一个共轭类。更详细的讨论请参阅 [6]。

定义 2.20. 用 $\mathbb{D}_n$ 表示带有 n 个标记点的圆盘，并回顾辫群 B_n 可解释为 $\mathbb{D}_n$ 的映射类群。带有 n 个标记点的圆盘中的简单弧，是满足 γ(0) 和 γ(1) 为标记点的嵌入 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{D}_n$。（在当前语境中，我们不考虑端点位于边界上的弧。）用 H_γ 表示相对于 γ 的正半扭转。

固定一个 B_n 与 $\mathbb{D}_n$ 的映射类群之间的同构。标准正半扭转是某个 $1 \leq i \leq n-1$ 对应的 σ_i。非标准正半扭转是指不是标准正半扭转的正半扭转。

我们回顾以下经典且重要的观察，并简述其证明。

引理 2.21. n 次标记圆盘的映射类群在 n 次标记圆盘中的简单弧上具有传递作用。

证明. 我们回顾定向曲面的分类定理：若两个定向曲面具有相同数量的标记点、相同数量的边界分支以及相同的欧拉示性数，则存在保向同胚将其中一个映到另一个。我们将说明该结论可由定向曲面的分类定理推出。事实上，若 γ 和 γ' 是 n 次标记圆盘 $\mathbb{D}_n$中的简单弧，则我们可以沿 γ 和 γ' 切开 $\mathbb{D}_n$，得到一对定向曲面 Σ_γ 和$\Sigma_{\gamma'}$，它们各有 $n-2$ 个标记点、两个边界分支，且欧拉示性数相同。事实上，这些曲面各自的一个边界分支来自 $\mathbb{D}_n$ 的边界，另一个边界分支则来自相应简单弧的管状邻域的边界。我们将 Σ_γ 的后一边界分支称为 $\partial\gamma$，并将 $\Sigma_{\gamma'}$ 的后一边界分支称为 $\partial\gamma'$。曲面 Σ_γ 和 $\Sigma_{\gamma'}$ 的欧拉示性数相同，因为 γ 和 γ' 是简单弧。定向曲面的分类定理意味着存在一个从 Σ_γ 到 $\Sigma_{\gamma'}$ 的保向同胚，将 $\partial\gamma$ 映到 $\partial\gamma'$。因此，存在一个 n 次标记圆盘上的保向同胚，将 γ 映到 γ'。

□

我们记录引理 2.21 的以下推论，这对我们的目的很重要。

推论 2.22. 若 $e \geq 1$，则 B_n 中正半扭转的 e 次幂构成标准正半扭 σ_1 的 e 次幂 σ_1^e 的共轭类。

证明。设 γ 和 γ' 是 $\mathbb{D}_n$中的简单弧，且 H_γ 和 $H_{\gamma'}$ 分别是相对于 $\mathbb{D}_n$中的简单弧 γ 和 γ' 的正半扭转。若 ϕ是 $\mathbb{D}_n$ 的一个映射类，满足 $\phi(\gamma) = \gamma'$，则有 $H_{\gamma'} = \phi H_\gamma \phi^{-1}$。由引理 2.21，以及映射类作用下 $\mathbb{D}_n$ 中的简单弧的像仍是 $\mathbb{D}_n$中的简单弧这一事实，即得结论。

□

3 辫群的代数结构B_3

本节中，我们将建立关于辫群 B_3的代数结构的理论。在第 4 节中，我们将应用本节的结果，对辫群 B_3中 Δ^2 的正半扭转的幂的分解进行完整分类，从而确立引言中的主要结果。

本节的安排如下。在第 3.1 小节中，我们将在 B_3 中发展正辫的对偶理论。在第 3.2 小节中，我们将明确确定 B_3 中正半扭转之幂的 Garside 标准形。我们还将建立有关此类 Garside 标准形的技术性结论，并在第 4 节中频繁运用这些结论。

3.1 B_3 中正辫的对偶理论

下面介绍我们的对偶理论，并概述它在研究辫群 B_3 的代数结构时所发挥的作用。我们关注辫群 B_3中的方程，具体而言，是将 Δ^2 分解为 B_3 中正半扭转的幂。我们的思路是， B_3 中的 Garside 标准形将对 B_3 中方程的研究转化为对幺半群 B_3^+ 中正辫方程的研究。对偶理论的目标是建立关于幺半群 B_3^+ 中正辫方程的理论。

从 B_3 化简到 B_3^+ 的第一步，是根据各因子的 Garside 标准形来理解乘积的 Garside 标准形。若 $g = \Delta^k\sigma$ 和 $h = \Delta^l\tau$ 分别是 g 和 h 的 Garside 标准形，那么 $gh = \Delta^{k+l}\sigma_{(l)}\tau$ 不一定是 gh 的 Garside 标准形；这一观察正是我们正辫对偶理论的起源（记号 $\sigma_{(l)}$ 出自定义 2.19）。表达式 $\Delta^{k+l}\sigma_{(l)}\tau$ 是 gh 的 Garside 标准形，当且仅当 $\sigma_{(l)}\tau$ 不能被 Δ 整除。此外，为了确定 gh 的 Garside 标准形，我们必须确定整除乘积 $\sigma_{(l)}\tau$ 的 Δ 的最大幂。若 Δ^ω 是整除乘积$\sigma_{(l)}\tau$ 的 Δ 的最大幂，那么我们将看到，对于正辫 σ'、σ''、τ'、$\tau'' \in B_3^+$，可以写成 $\sigma = \sigma'\sigma''$ 和 $\tau = \tau''\tau'$，使得 $\sigma''_{(l)}\tau'' = \Delta^\omega$（命题 3.2）。在这种情况下， gh 的 Garside 标准形是 $\Delta^{k+l+\omega}\sigma'_{(l+\omega)}\tau'$ （命题 3.17）。我们将等式 $\sigma''_{(l)}\tau'' = \Delta^\omega$ 描述为 $\sigma''_{(l)}$ 与 τ'' 对偶（定义 3.3）；对该等式的研究就是对偶理论。

最后，定理 2.17 表明，可以通过直接检查来验证正辫幺半群 B_3^+ 中的方程。设 σ、$\tau \in B_3^+$ 是 B_3 中相等的正字。定理 2.17 指出， σ 和 τ 可通过有限次辫关系变换相互关联，且每次应用辫子关系时，辫子关系的一侧都嵌入相关字中。

另一方面，对于 B_3 中不一定是正辫的任意辫子，这一结论的某种形式并不成立。例如，我们无法直接对方程 $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1^{-1}$ 的任一侧应用辫子关系，但该方程仍然成立，因为 $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\Delta\Delta^{-1}\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^{-1}\Delta\sigma_1^{-1}\sigma_2\Delta^{-1}\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1^{-1}$。我们引入了一个乘积 $\Delta\Delta^{-1}$，然后应用辫关系来证明该方程；然而，对于正辫幺半群 B_3^+ 中的方程，定理 2.17 的要旨在于，这样做并无必要。

现在开始研究辫群 B_3 中的正辫及对偶理论。我们可以将正辫的 Garside 标准形视为将正辫分解为 Δ 的非负幂与一个不能被 Δ 整除的正辫的分解。第一步是对幺半群 B_3^+ 中不能被 Garside 元 Δ 整除的元素建立一个简单的刻画。正辫乘积展开中的孤立生成元，是指在乘积展开中前面紧邻和后面紧邻的项都不是其他 σ_i 的生成元 σ_i 。

命题 3.1。如果 $\sigma \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，那么 σ 有唯一的乘积展开，且该乘积展开中除了开头或结尾处可能出现的孤立生成元外，不含孤立生成元。

证明。如果 $\sigma \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，那么考虑 σ 的一个乘积展开。该乘积展开不含 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ 或 $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$，因为 σ 不能被 Δ 整除；如果 $\{i, i'\} = \{1, 2\}$，则也不含 $\Delta\sigma_i = \sigma_{i'}\Delta$。特别地，我们无法应用辫子关系来修改 σ 的乘积展开。由此，定理 2.17 表明 σ 有唯一的乘积展开。因此，结论得证。 □

元素 $\Delta \in B_3^+$并非通常意义上的“素元”，因为一对正辫的乘积可能被 Δ 整除，即使这两个因子各自都不能被 Δ整除。一个简单的例子是 $\sigma_1\sigma_2$ 与 σ_1的乘积。 Δ 不是“素元”，这造成了一些技术困难；否则，根据各因子的 Garside 标准形来计算辫子乘积的 Garside 标准形将十分容易。下面的技术结果使我们能够精确研究这样一些情形：一对正辫的乘积能被 Δ 整除，即使两个因子都不能被 Δ整除。

命题 3.2. 设 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。乘积 $\rho\tau$ 能被 Δ 整除，当且仅当我们可以写成 $\rho = \rho'\rho''$ 和 $\tau = \tau''\tau'$，使得 $\rho''\tau'' = \Delta$。实际上， $\rho\tau$ 能被 Δ 整除，当且仅当以下情况之一成立： ρ 以 $\sigma_i\sigma_{i'}$ 结尾，且 τ 以某个 σ_i 开头；或者 ρ 以 σ_i 结尾，且 τ 以某个 $\sigma_{i'}\sigma_i$ 开头，其中 $\{i, i'\} = \{1, 2\}$、 $\{i, i'\} = \{1, 2\}$ 分别满足相应条件。

证明。假设 $\rho\tau$ 能被 Δ 整除。由命题 3.1 可知，ρ 中最后一个生成元的指标与 τ 中第一个生成元的指标不同，因为 ρ 和 τ 都不能被 Δ 整除。此外，由命题 3.1 可知，ρ 中最后一个生成元和 τ 中第一个生成元至少有一个是孤立的；同样，这是因为 ρ 和 τ 都不能被 Δ 整除。我们可以如下选取 ρ'' 和 τ''。如果 ρ 中最后一个生成元是孤立的，那么 ρ'' 是 ρ 中最后两个生成元的乘积，而 τ'' 是 τ 中第一个生成元。如果 τ 中第一个生成元是孤立的，那么 ρ'' 是 ρ 中最后一个生成元，而 τ'' 是 τ 中前两个生成元的乘积。至此，我们证明了正向蕴含。反向蕴含显然成立。因此，命题得证。 □

若 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，则考虑最大的正整数 k，使得我们能够写出 $\rho = \rho'\rho''$ 和 $\tau = \tau''\tau'$，且满足 $\rho''\tau'' = \Delta^k$。考虑以此 k 值对 ρ 和 τ 作这样的分解，有助于分离出 ρ 中的部分和 τ 中的部分；它们在 $\rho\tau$ 的 Garside 标准形中“负责”产生 Δ 的幂。首先，我们引入一些术语，以研究方程 $\rho''\tau'' = \Delta^k$；该方程在本文中至关重要。

定义 3.3。设 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。若 $\rho\tau$ 是 Δ 的一个（非负）幂，我们称 ρ 与 τ 互为对偶。或者，ρ 与 τ 互为对偶，当且仅当 $\tau^{-1} = \Delta^{-\omega(\tau)}\rho$ 是 τ^{-1} 的 Garside 标准形，其中 ω（τ）是依赖于 τ 的非负整数。若 ρ 与 τ 互为对偶，则称 τ 是 ρ 的右对偶（或称 τ 是 ρ 的右对偶），而 ρ 是 τ 的左对偶（或称 ρ 是 τ 的左对偶）。

一般来说，如果我们说对于正辫 ρ、$\tau \in B_3^+$，ρ 与 τ 互为对偶，就默认 ρ 和 τ 不可被 Δ 整除；不过若上下文需要强调这一点，我们仍可能会特别说明。下面给出关于对偶元唯一性的结论。

命题 3.4. 若 ρ、ρ'、$\tau \in B_3^+$ 是不可被 Δ 整除的正辫，且 ρ 与 τ 互为对偶，ρ' 与 τ 互为对偶，则 $\rho = \rho'$。特别地，定义 3.3 中的整数 $\omega(\tau)$ 由 τ 唯一确定。

证明. 该结论等价于 τ^{-1} 的 Garside 标准形的唯一性（这是定理 2.18 的一个特例）。事实上，由于 $\rho \in B_3^+$ 是不可被 Δ 整除的正辫，ρ 与 τ 互为对偶，当且仅当 τ^{-1} 的 Garside 标准形为 $\tau^{-1} = \Delta^{-\omega(\tau)}\rho$。特别地，若 ρ' 也与 τ 互为对偶，则 $\rho = \rho'$。基于同样的理由，整数 $\omega(\tau)$ 也由 τ 唯一确定。因此，该结论得证。 □

对偶性关系并不对称，也就是说，左对偶与右对偶并不相同。例如，σ_1 是 $\sigma_2\sigma_1$ 的对偶，但 $\sigma_2\sigma_1$ 不是对偶

于 σ_1。 σ_1 的左对偶是 $\sigma_1\sigma_2$ ，而 σ_1 的右对偶是 $\sigma_2\sigma_1$。不过，正辫的左对偶和右对偶之间可以通过对 Δ的某个幂进行共轭而关联起来。为陈述以下关于对偶的伪对称性，我们回顾定义 2.19 中的记号。

命题 3.5. 设 $\rho,\tau \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。 ρ 与 τ 互为对偶（其中 $\rho\tau = \Delta^{\omega(\tau)}$）当且仅当 τ 与 $\rho_{(\omega(\tau))}$ 互为对偶（其中 $\tau\rho_{(\omega(\tau))} = \Delta^{\omega(\tau)}$）。特别地，如果 ρ 与 τ 互为对偶，那么 $\omega(\rho) = \omega(\tau)$。

证明. 我们注意到，第二个等式 $\tau\rho_{(\omega(\tau))} = \Delta^{\omega(\tau)}$ 是第一个等式 $\rho\tau = \Delta^{\omega(\tau)}$ 的重新排列。此外， $\rho_{(\omega(\tau))} \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。因此，命题得证。 □

我们回顾以下标准术语，因为它们在后续讨论中会很有用。

定义 3.6. 设 $\sigma \in B_3^+$ 为正辫。如果存在某个正辫 $\sigma'' \in B_3^+$，使得 $\sigma = \sigma'\sigma''$ ，那么正辫 $\sigma' \in B_3^+$ 是 σ 的左因子。如果存在某个正辫 $\sigma' \in B_3^+$，使得 $\sigma = \sigma'\sigma''$ ，那么正辫 $\sigma'' \in B_3^+$ 是 σ 的右因子。 σ 的因子是同时作为 σ 的左因子和右因子的正辫。 σ 的真左因子/右因子/因子分别是 σ 的左因子/右因子/因子，且不等于 σ。

我们注意到，Garside 元 Δ 是正辫 $\sigma \in B_3^+$ 的因子，当且仅当 Δ 是 σ 的左因子或右因子。

一个自然的问题是，在由不被 Δ 整除的 B_3 中正辫构成的集合上定义的函数 ω 是否可加。更确切地说，若 ρ'、$\rho'' \in B_3^+$ 是不被 Δ 整除的正辫，且 $\rho'\rho''$ 也不被 Δ 整除，那么 $\omega(\rho'\rho'') = \omega(\rho') + \omega(\rho'')$ 是否成立? 换言之，“对偶的乘积”是否等于“乘积的对偶”? 下面的陈述结合了因子与正辫对偶性的概念。

命题 3.7. 设 $\rho = \rho'\rho''$，其中 ρ、ρ'、$\rho'' \in B_3^+$ 是不被 Δ 整除的正辫， ρ'' 与 τ'' 互为对偶，且 $\rho'_{(\omega(\rho''))}$ 与 τ' 互为对偶。若 $\tau = \tau''\tau'$，则 $\rho\tau = \Delta^{\omega(\rho')+\omega(\rho'')}$。特别地， ρ 与 τ 互为对偶，当且仅当 τ 不被 Δ 整除。此外，我们有 $\omega(\rho) \leq \omega(\rho')+\omega(\rho'')$，且等号成立当且仅当 τ 不被 Δ 整除。

证明。我们有以下方程

$$\rho\tau = \rho'\rho''\tau''\tau' = \rho'\Delta^{\omega(\rho'')}\tau' = \Delta^{\omega(\rho'')}\rho'_{(\omega(\rho''))}\tau' = \Delta^{\omega(\rho')+\omega(\rho'')}.$$

对偶的唯一性（命题 3.4）意味着， ρ 是 τ 的对偶，当且仅当 τ不能被 Δ整除。在这种情况下， $\omega(\rho) = \omega(\rho') + \omega(\rho'')$。然而，

如果 τ 能被 Δ整除，那么方程 $\rho\tau = \Delta^{\omega(\rho')+\omega(\rho'')}$ 意味着$\omega(\rho) < \omega(\rho') + \omega(\rho'')$。事实上，若 $\tau = \Delta^k\tau_0$ 是τ的 Garside 标准形，则有 $\rho(\tau_0)_{(k)} = \Delta^{\omega(\rho')+\omega(\rho'')-k}$，其中 $(\tau_0)_{(k)} \in B_3^+$是一个不能被 Δ整除的正辫。特别地，在这种情况下，$\omega(\rho)+k = \omega(\rho')+\omega(\rho'')$。因此，该论述得证。 □

在命题 3.7 中，假设 $\tau = \tau''\tau'$ 不能被 Δ 整除，对于要使 ρ 与 τ互为对偶至关重要。事实上，正辫 $\sigma \in B_3^+$ 的右因子的右对偶未必是 σ的右对偶的左因子。例如，σ_2 是 $\sigma_1\sigma_2$ 的右因子，而 $\sigma_1\sigma_2$ 的右对偶是 σ_1。另一方面，σ_2 的右对偶是 $\sigma_1\sigma_2$，它不是 σ_1的左因子。在这种情况下，$\sigma_2 = (\sigma_1)^{(1)}$ 的右对偶与 σ_2 的右对偶的乘积并非 $\sigma_1\sigma_2$的右对偶，因为该乘积是 $\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2$，而它可被 Δ整除。不过，如果从这个乘积中提取出因子 Δ（如命题 3.7 的证明中所做），就会得到 σ_1，它是乘积 $\sigma_1\sigma_2$的右对偶。

现在我们希望刻画正辫ρ的那些右因子 ρ''，使得 ρ'' 的右对偶是 ρ的右对偶的左因子。研究 ρ 的这类右因子在本文中具有根本重要性。

定义 3.8. 设 ρ、ρ'、$\rho'' \in B_3^+$是不能被 Δ 整除的正辫，且满足 $\rho = \rho'\rho''$。设 ρ 与 τ互为对偶，$\rho'_{(\omega(\rho''))}$ 与 τ'互为对偶，且 ρ'' 与τ''互为对偶。若 $\tau = \tau''\tau'$，则称 ρ' 是 ρ 的切左因子，并称 ρ'' 是 ρ的切右因子。

若 $\rho = \rho'\rho''$，其中 ρ、ρ'、$\rho'' \in B_3^+$是不能被 Δ整除的正辫，则命题 3.7 推出 $\omega(\rho) = \omega(\rho') + \omega(\rho'')$当且仅当 ρ'是 ρ 的切左因子，且 ρ'' 是 ρ的切右因子。

现在，我们给出一个简单的判据，用以确定正辫 ρ 的左因子或右因子是否分别是 ρ 的切左因子或切右因子。

引理 3.9. 若 $\rho = \rho'\rho''$ 对于正辫 ρ、ρ'、$\rho'' \in B_3^+$ 不可被 Δ 整除，则 ρ' 是 ρ 的切左因子且 ρ'' 是 ρ 的切右因子，当且仅当 ρ' 中最后一个生成元的指标等于 ρ'' 中第一个生成元的指标。

证明。令 $\rho'_{(\omega(\rho''))}$ 与 τ' 互为对偶，并令 ρ'' 与 τ''互为对偶。我们断言，$\tau = \tau''\tau'$ 不能被 Δ 整除，当且仅当 ρ' 中最后一个生成元的指标等于 ρ'' 中第一个生成元的指标。由于命题 3.7 表明，ρ 与 τ 互为对偶，当且仅当 τ 不能被 Δ整除，因此该陈述等价于这一断言。我们将对 ρ的长度使用归纳法来证明这一断言。若 $\rho'' = \rho$，则该断言显然成立；因此，假设 ρ'' 的长度严格小于 ρ 的长度，并应用归纳假设。

我们可以将 $\rho'' = \sigma_i \xi''$ 写成 $i \in \{1,2\}$ 与一个正辫 $\xi'' \in B_3^+$的形式。首先，我们将证明，若 ρ' 中最后一个生成元的指标不同于 ρ''中第一个生成元的指标，则 $\tau = \tau''\tau'$ 可被 Δ 整除。事实上，此时根据命题 3.1，ξ'' 中第一个生成元的指标与i 相同，因为 ρ 不能被 Δ整除。因此，我们可以应用归纳假设，推得 ξ'' 是 ρ''的一个切右因子。特别地，τ'' 以不同生成元的乘积 $(\sigma_{i'}\sigma_i)_{(\omega(\xi''))}$ 结尾，其中 $i \neq i' \in \{1,2\}$，而根据命题 3.7，该乘积为 $(\sigma_i\sigma_{i'})_{(\omega(\rho''))}$。然而，$\tau'$以 $(\sigma_i)_{\omega(\rho'')}$开头。事实上，$\rho'_{(\omega(\rho''))}$ 与 τ' 互为对偶，且根据假设，ρ' 中的最后一个生成元是 $\sigma_{i'}$。特别地，命题 3.2 表明，$\tau = \tau''\tau'$可被 Δ整除。

其次，我们将证明，如果 ρ' 中最后一个生成元的指标与 ρ'' 中第一个生成元的指标相同，那么 $\tau = \tau''\tau'$ 不能被 Δ 整除。我们根据 ξ'' 中第一个生成元的指标分情况讨论。如果 ξ'' 中第一个生成元的指标与 i 相同，那么我们已经证明 τ'' 以不同生成元的乘积 $(\sigma_i\sigma_{i'})_{(\omega(\rho''))}$ 结尾，其中 $i \neq i' \in \{1,2\}$ 如此。不过，在这种情况下，τ' 以 $(\sigma_{i'})_{(\omega(\rho''))}$ 开头。事实上，$(\rho')_{(\omega(\rho''))}$ 与 τ' 对偶，并且根据假设，ρ' 中最后一个生成元是 σ_i。特别地，命题 3.2 表明，在这种情况下，$\tau = \tau''\tau'$ 不能被 Δ 整除。

最后，我们假设 ξ'' 中第一个生成元的指标不同于 i，并将证明 $\tau''\tau'$ 不能被 Δ 整除。在这种情况下，我们可以将 $\rho'' = \sigma_i\sigma_{i'}\xi_0''$ 写成一个正辫 $\xi_0'' \in B_3^+$（我们有 $\xi'' = \sigma_{i'}\xi_0''$）。根据命题 3.1，由于 ρ 不能被 Δ 整除，ξ_0'' 中第一个生成元的指标与 i' 相同。因此，我们可以应用归纳假设，推出 ξ_0'' 是 ρ'' 的一个切右因子。特别地，τ'' 以 $(\sigma_i)_{(\omega(\xi_0''))}$ 结尾，而根据命题 3.7，这就是 $(\sigma_{i'})_{(\omega(\rho''))}$。然而，在这种情况下，$\tau'$ 以 $(\sigma_{i'})_{(\omega(\rho''))}$ 开始。事实上，$(\rho')_{(\omega(\rho''))}$ 与 τ' 对偶，并且根据假设，ρ' 中最后一个生成元是 σ_i。特别地，在这种情况下，命题 3.2 意味着 $\tau = \tau''\tau'$ 不能被 Δ 整除。因此，该命题得证。

□

如果 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是正辫，且 ρ 与 τ 互为对偶，那么命题 3.4 表明，τ 由 ρ 唯一确定。现在，我们利用引理 3.9，明确刻画 τ 与 ρ 的关系。值得注意的是，如果 ρ 是某个 $i \in \{1,2\}$ 对应的生成元 σ_i，或是某个 $\{i,i'\} = \{1,2\}$ 对应的不同生成元之乘积 $\sigma_i\sigma_{i'}$，那么确定 τ 就很直接。第一种情况下，$i \neq i' \in \{1,2\}$ 的 $\tau = \sigma_{i'}\sigma_i$，第二种情况下，$\tau = \sigma_i$。（辫群 B_3 中的生成元或不同生成元的乘积，在 B_3 中称为置换辫。）

引理 3.10. 设 $\rho,\tau \in B_3^+$ 为正辫，且 ρ 是 τ 的对偶。设 $\rho = \prod_{j=1}^k \rho_j$ 是 ρ 的乘积分解，其中对于每个 $1 \leq j \leq k$，ρ_j 都是单个生成元或两个不同生成元的乘积，并且

对于每个 $1 \leq j \leq k-1$，ρ_j 中最后一个生成元的指标等于 ρ_{j+1} 中第一个生成元的指标。

如果对于每个 $1 \leq j \leq k$，ρ_j 都与 τ_j 对偶，那么 $\tau = \prod_{j=1}^{k} (\tau_{k+1-j})^{(j+1)}$。特别是，如果 ρ 以两个不同生成元的乘积结尾，那么 τ 以两个具有相同指标的生成元的乘积开头（除非 τ 本身是一个生成元），反之亦然。如果 ρ 以两个不同生成元的乘积开头，那么 τ 以两个具有相同指标的生成元的乘积结尾（除非 τ 本身是一个生成元），反之亦然。最后，我们有 $k = \omega(\tau)$。

证明。由引理 3.9 以及对 k 的归纳法可得 ρ 与 τ 对偶这一结论。如果 ρ 以两个不同生成元的乘积结尾，那么 ρ_k 是两个不同生成元的乘积，我们可以将 $\rho_k = \sigma_i \sigma_{i'}$ 写成 $\{i, i'\} = \{1, 2\}$。在这种情况下，$\tau_k = \sigma_i$ 是一个单独的生成元。如果 $\rho \neq \rho_k$，那么命题 3.1 蕴含 ρ_{k-1} 中最后一个生成元是 σ_i，因为 ρ 不能被 Δ 整除。此外，在这种情况下，τ_{k-1} 中第一个生成元是 $\sigma_{i'}$。特别是，$(\tau_{k-1})^{(3)}$ 中第一个生成元是 σ_i，而 τ 中前两个生成元的乘积是 $\sigma_i \sigma_i$。关于 ρ 的开头/结尾与 τ 的结尾/开头之间关系的其他结论，证明类似。最后，由命题 3.7 以及对 k 的归纳法可得 $k = \omega(\tau)$，因为对于每个 $1 \leq j \leq k$，$\omega(\rho_j) = 1$。因此，结论得证。

□

现在我们进一步细化命题 3.7，以证明 ω 不可加的程度是最小的。

命题 3.11. 若 ρ、ρ'、$\rho'' \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，且 $\rho = \rho'\rho''$，则对于某个 $\epsilon \in \{0, 1\}$，有 $\omega(\rho) = \omega(\rho') + \omega(\rho'') - \epsilon$。此外，$\epsilon = 0$ 当且仅当 ρ' 是 ρ 的切左因子，或 ρ'' 是 ρ 的切右因子。

证明. 若 ρ' 是 ρ 的切左因子，或 ρ'' 是 ρ 的切右因子，则由命题 3.7 可知 $\omega(\rho) = \omega(\rho') + \omega(\rho'')$。若 ρ' 不是 ρ 的切左因子，则由引理 3.9 可知，ρ' 中最后一个生成元的指标与 ρ'' 中第一个生成元的指标不同。设 σ_i 是 ρ' 中最后一个生成元，且对于 $i \neq i' \in \{1, 2\}$，$\sigma_{i'}$ 是 ρ'' 中第一个生成元。

命题 3.1 表明，ρ'' 中的第二个生成元不是 σ_i，因为ρ 不能被 Δ整除。由此，引理 3.9 表明，$\rho'\sigma_{i'}$ 是 ρ的一个切左因子。此外，引理 3.10 表明，$\omega(\rho'\sigma_{i'}) = \omega(\rho')$。事实上，命题 3.1 表明，$\rho'$ 中倒数第二个生成元不是 $\sigma_{i'}$，因为ρ 不能被 Δ整除。引理 3.10 还表明，$\omega\left(\sigma_{i'}^{-1}\rho''\right) = \omega(\rho'') - 1$，因为 ρ'' 中的第二个生成元不是 σ_i。最后，命题 3.7 表明，$\omega(\rho) = \omega(\rho'\sigma_{i'}) + \omega\left(\sigma_{i'}^{-1}\rho''\right)$。因此，命题得证。

□

我们证明一些关于切除因子的有用结论，这些结论可以直接由迄今为止的结果推出。

命题 3.12. 设 $\rho \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。设 ρ' 和 ρ'' 是 ρ 的左因子。若 ρ' 是 ρ 的切左因子，且 ρ' 是 ρ'' 的左因子，则 ρ' 是 ρ'' 的切左因子。反之，若 ρ' 是 ρ'' 和 $\rho' \neq \rho''$ 的切左因子，则 ρ' 是 ρ 的切左因子。

证明. 该结论可由引理 3.9 直接推出。 □

现在我们证明函数 ω 在不能被 Δ 整除的正辫上具有单调性。

命题 3.13. 设 $\rho \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。设 ρ' 和 ρ'' 是 ρ 的左因子。若 ρ' 是 ρ'' 的左因子，则 $\omega(\rho') \leq \omega(\rho'')$。若 ρ' 和 ρ'' 是 ρ 的切左因子，则 ρ' 是 ρ'' 的左因子当且仅当 $\omega(\rho') \leq \omega(\rho'')$，且等号成立当且仅当 $\rho' = \rho''$。

证明。我们利用这样一个事实：$\omega(\sigma) > 0$ 当且仅当 $\sigma \in B_3^+$是非单位元正辫。若 ρ' 是 ρ''的左因子，则由命题 3.11可知 $\omega(\rho') \leq \omega(\rho'')$。若 ρ' 和 ρ'' 是 ρ的左因子，则由命题 3.1可知，要么 ρ' 是 ρ'' 的左因子，要么 ρ'' 是 ρ'的左因子。若 ρ'和 ρ'' 是 ρ的切左因子，则由命题 3.12可知，要么 ρ'是 ρ'' 的切左因子，要么 ρ'' 是 ρ'的切左因子。现在由命题 3.7可知，ρ' 是 ρ'' 的左因子当且仅当 $\omega(\rho') \leq \omega(\rho'')$，且等号成立当且仅当 $\rho' = \rho''$。因此，命题得证。

□

命题 3.1 表明，针对某种性质，称一个被 Δ 不可整除的正辫的“极大左因子”或“最大右因子”是有意义的。下面的结论有助于在许多情况下构造切除因子。

引理 3.14. 设 ρ、$\sigma \in B_3^+$ 是被 Δ 不可整除的正辫，且 $\rho\sigma$ 可被 Δ 整除。ρ 的最大右因子 ρ'' 若与 σ 的某个左因子对偶，则它是 ρ 的切右因子。特别地，若 ρ 与 τ 对偶，且 ρ'' 与 σ 的左因子 σ'' 对偶，则 σ'' 是 τ 的左因子。

证明. 若 ρ'' 不是 ρ 的切右因子，则由引理 3.9 可知，对于某个正辫 $\rho' \in B_3^+$，有 $\rho = \rho'\rho''$，且 ρ' 中最后一个生成元的指标与 ρ'' 中第一个生成元的指标不同。我们将证明，在这种情况下，ρ'' 不是 ρ 的、与 σ 的某个左因子对偶的最大右因子。

首先，对于正辫 σ'、$\sigma'' \in B_3^+$，我们记 $\sigma = \sigma''\sigma'$，使得 ρ'' 与 σ'' 互为对偶。对于 $i \in \{1, 2\}$，我们可以将 $\rho'' = \sigma_i\rho_0''$ 写成一个正辫 $\rho_0'' \in B_3^+$。在这种情况下，ρ_0'' 中第一个生成元的指标与

命题 3.1 中的 i 相同，因为 ρ 不能被 Δ 整除。因此，引理 3.10 意味着 σ'' 以不同生成元的乘积 $(\sigma_{i'}\sigma_i)(\omega(\rho_0''))$ 结尾，其中 $i \neq i' \in \{1,2\}$。我们可以将 $\sigma'' = \sigma_0''$ 写成 $(\sigma_{i'}\sigma_i)(\omega(\rho_0''))$，其中 $\sigma_0'' \in B_3^+$ 是正辫（σ_0'' 是 ρ_0'' 的右对偶）。然而，这意味着 $(\sigma_{i'})$ ρ'' 与 $\sigma_0''(\sigma_{i'})(\omega(\rho_0''))$ 互为对偶，这表明 ρ'' 不是 ρ 的极大右因子；该因子与 σ 的一个左因子互为对偶。

切右因子的定义（定义 3.8）表明， σ'' 是 τ的左因子。因此，结论得证。 □

现在我们来建立引理 3.14 陈述中最大因子的刻画。

命题 3.15. 设 σ、 $\tau \in B_3^+$ 是不可被 Δ整除的正辫。设σ'' 是 σ 的右因子，并且与 τ的左因子 τ'' 对偶。记$\sigma = \sigma'\sigma''$和 $\tau = \tau''\tau'$为正辫 σ'、 $\tau' \in B_3^+$。若 σ''是 σ 的最大右因子，且它是 τ某个左因子的左对偶，则乘积（σ'）$_{(\omega(\sigma''))}\tau'$不可被 Δ整除。反过来，若乘积（σ'）$_{(\omega(\sigma''))}\tau'$不可被 Δ 整除，且 σ'' 是 σ的切右因子，则 σ'' 是 σ 的最大右因子，且它是 τ某个左因子的左对偶。

证明。令 k 为满足 Δ^k 整除 $\sigma\tau$ 的最大正整数。命题 3.2 表明， $\sigma''\tau'' = \Delta^k$ 当且仅当 $(\sigma')_{(\omega(\sigma''))}\tau'$ 不可被 Δ 整除。当然，若 σ'' 是 σ 的最大右因子，且它与 τ 的某个左因子左对偶，则 $\sigma''\tau'' = \Delta^k$。反过来，若 $\sigma''\tau'' = \Delta^k$，且 σ'' 是 σ 的一个切右因子，则命题 3.13 和引理 3.14 表明， σ'' 是 σ 的最大右因子，且它与 τ 的某个左因子对偶。因此，该命题得证。 □

我们注意到，引理 3.14 陈述中的最大因子还有另一种刻画。

命题 3.16。设 σ、 $\tau \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。设 σ'' 是 σ 的一个右因子，且与 τ 的左因子 τ'' 对偶。记 $\sigma = \sigma'\sigma''$ 和 $\tau = \tau''\tau'$ 分别为正辫 σ'、 $\tau' \in B_3^+$。

σ'' 的右因子 σ 是 σ 的最大右因子，且它与 τ 的一个左因子对偶，当且仅当 σ'' 是 σ 的切右因子，并且满足以下条件之一:

(i) τ'是 τ的右因子，但不是 τ的切右因子。在这种情况下，$(\sigma')_{(\omega(\sigma''))}$ 中最后一个生成元的指标等于 τ'中第一个生成元的指标。(ii) 如果 τ'是 τ的右因子，且是 τ的切右因子，那么 σ 的左因子 σ' 不会以两个不同生成元的乘积结尾，而 τ 的右因子 τ' 不会以两个不同

生成元的乘积开头。在这种情况下，$(\sigma')_{(\omega(\sigma''))}$中最后一个生成元的指标不同于 τ'中第一个生成元的指标。

证明。引理 3.14 和命题 3.15 表明，σ'' 是 σ 的最大右因子，且它对偶于 τ 的一个左因子，当且仅当 σ'' 是 σ 的切右因子，并且乘积 $(\sigma')_{(\omega(\sigma''))}\tau'$ 不能被 Δ整除。然而，命题 3.2 和引理 3.9 表明，乘积 $(\sigma')_{(\omega(\sigma''))}\ \tau'$不能被 Δ 整除，当且仅当陈述中的某个条件成立。

□

对偶理论的一个重要应用是，根据各个因子的 Garside 标准形确定它们乘积的 Garside 标准形。

命题 3.17。设 $g=\Delta^k\sigma$ 和 $h=\Delta^l\tau$ 分别是 g、$h\in B_3$的 Garside 标准形。设 $\sigma''_{(l)}$ 是$\sigma_{(l)}$ 的最大右因子，且它对偶于 τ的一个左因子。若 $\sigma''_{(l)}$对偶于 τ''，则将正辫 σ'、$\tau'\in B_3^+$分别记为 $\sigma=\sigma'\sigma''$和$\tau=\tau''\tau'$。此时，gh的 Garside 标准形为 $gh=\Delta^{k+l+\omega(\sigma'')}\sigma'_{(l+\omega(\sigma''))}\tau'$。

证明。该陈述等价于 $\sigma'_{(l+\omega(\sigma''))}\tau'$ 不能被 Δ整除。然而，这是命题 3.15 的推论。因此，该陈述得证。

□

我们可以将辫子的 Garside 幂视为衡量该辫子复杂度的指标。事实上，B_3 中不能被 Δ 整除的正辫足够简单，便于研究，因为根据命题 3.1，每个这样的正辫都有唯一的乘积展开。命题 3.17 的以下推论刻画了这一复杂度指标如何随乘积而变化。

命题 3.18。设 $g=\Delta^k\sigma$ 和 $h=\Delta^l\tau$ 分别是 g、$h\in B_3$的 Garside 标准形。若 $\sigma''_{(l)}$是$\sigma_{(l)}$的最大右因子，且它与 τ的一个左因子左对偶，则 gh的 Garside 幂等于 g的 Garside 幂、h的 Garside 幂与 $\omega\left(\sigma''_{(l)}\right)$之和。特别地，$gh$ 的 Garside 幂至少等于 g 的 Garside 幂与 h的 Garside 幂之和；当且仅当$\sigma_{(l)}\tau$ 不能被 Δ整除时，等号成立。

证明。该结论是命题 3.17 的直接推论。 □

我们将命题 3.18 中的不等式称为 Garside 幂的反三角不等式。

我们研究了 Garside 元 Δ 在正辫幺半群 B_3^+中不是素元的情形。特别是，我们已经看到，一个乘积

$\sigma\tau$ 正辫 $\sigma,\tau \in B_3^+$可能被 Δ 整除，即使 σ 和τ 都不能被 Δ整除。现在我们希望考察这一陈述在三重乘积中的一种变化。若 $\sigma,\sigma',\sigma'' \in B_3^+$是正辫，那么即使 $\sigma\sigma'\sigma''$ 能被 Δ整除， $\sigma\sigma'$ 和 $\sigma'\sigma''$ 也可能不能被 Δ 整除。例如，当 $\sigma' = \sigma_i$ 是 $i \in \{1,2\}$的一个生成元，且 σ 中最后一个生成元的指标与 σ'' 中第一个生成元的指标相同，并且二者都不同于 i时，就会出现这种情况。在这种情形下，Garside 元 Δ 的一份副本与 $\sigma\sigma'\sigma''$中的三个因子都重叠，也就是说，这份 Δ 的副本中有一个生成元分别落在这三个因子中。然而，如果我们安排使得 σ 不以两个不同生成元的乘积结尾，且 σ'' 不以两个不同生成元的乘积开头，那么命题 3.2 蕴含 $\sigma\sigma'$和 $\sigma'\sigma''$ 不能被 Δ整除。我们证明，这就是这一现象发生的唯一情形。

引理 3.19. 设 σ、σ'、$\sigma'' \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，且 σ' 不是生成元（即 σ' 的字长大于一）。若 $\sigma\sigma'$ 和 $\sigma'\sigma''$ 不能被 Δ 整除，则 $\sigma\sigma'\sigma''$ 不能被 Δ 整除。

证明. 若 $\sigma\sigma'\sigma''$ 能被 Δ 整除，则由命题 3.1 可知，在表示 σ、 σ' 和 σ'' 的字的乘积中必定有一个 Δ 的副本。此外，该 Δ 的副本必须与这些字中的每一个重叠，否则就会与 $\sigma\sigma'$ 和 $\sigma'\sigma''$ 不能被 Δ 整除这一假设矛盾。然而，这将迫使 σ' 成为长度为一的字，这同样会导致矛盾。因此，命题得证。 □

我们有如下引理 3.19 的推广，它精确刻画了任意多个正辫的乘积何时不能被 Δ 整除。我们将在第 4 节中多次应用这一结论。

引理 3.20. 设 $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。乘积 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_k$ 不能被 Δ 整除，当且仅当满足以下条件：

(i) 若 $1 \le j \le k-1$，则乘积 $\xi_j\xi_{j+1}$ 不能被 Δ 整除（例如，若 ξ_j 中最后一个生成元的指标等于 ξ_{j+1} 中第一个生成元的指标，则满足此条件）。
(ii) 若 $1 \le j \le k-2$，且 ξ_{j+1} 是一个生成元，则三重乘积$\xi_j\xi_{j+1}\xi_{j+2}$ 不能被 Δ 整除。

证明. 该陈述是命题 3.1 的推论，证明与引理 3.19 的证明类似。

□

以下记号和术语将在第 3.2 小节中使用，届时我们将研究辫群 B_3 中正半扭转的幂的 Garside 标准形。

定义 3.21. 设 $\sigma \in B_3^+$ 是一个不能被 Δ 整除的正辫，并记 $\sigma = \sigma'\sigma''$，其中 σ'、$\sigma'' \in B_3^+$ 是正辫。 σ' 的切闭包是 σ 的最小切左因子 σ'，且 σ' 是它的左因子。

类似地， σ'' 的切闭包是 σ的最小切右因子 $\overline{\sigma''}$，且 σ'' 是其右因子。

最后，我们将 σ 的右切闭包定义为满足以下条件的最大正辫 $\overline{\sigma}$ （不能被 Δ整除）： σ 是 $\overline{\sigma}$ 的左因子，且 σ 的切闭包为$\overline{\sigma}$。类似地，将前一句中的“左”和“右”互换，即可定义左切闭包。

左切闭包和右切闭包使用相同的记号，但根据上下文即可清楚我们指的是哪一种。类似地，当我们提到正辫的切闭包时，根据上下文即可清楚我们指的是它作为另一正辫的因子的切闭包，还是单独考察时的切闭包。更准确地说，如果显然存在一个底层正辫 σ，使得 σ' 是 σ的左因子，那么 $\overline{\sigma'}$ 总表示 σ' 作为 σ的左因子时的切闭包。我们将频繁使用以下观察结果。

命题 3.22. 若 $\sigma \in B_3^+$是一个不能被 Δ整除的正辫，且 σ'或者是 σ 的左因子，或者是 σ的右因子，则 $\omega\left(\overline{\sigma'}\right) = \omega(\sigma')$。

证明。该命题是引理 3.10 的推论。 □

我们以一项重要的技术结果结束本小节，稍后将在第 3.2 小节中用到它。目前看来，该结果的陈述或许缺乏动机，但我们在此给出它，因为其证明基于本小节中发展的对偶理论。我们将在第 3.2 小节中运用这一结果，根据 g_1 和 g_2的 Garside 标准形，计算正半扭转 g_2 的幂经正半扭转 g_1的幂共轭后所得的 $g_1 g_2 g_1^{-1}$的 Garside 标准形。若我们借助对偶理论，将这一计算归约为正辫幺半群 B_3^+中的计算，那么在第 3.2 小节中便会看到，我们实际上可将问题归结为以下命题。

命题 3.23. 设 $\rho, \tau \in B_3^+$和 $\xi, \chi \in B_3^+$为正辫，使得 ρ 与 τ 对偶，且 ξ 与 χ对偶。设 ξ'' 为 ξ 的最大右因子，它与切闭包 $(\overline{\rho})^{(\omega(\rho))}$的某个左因子左对偶。将 $(\overline{\rho})^{(\omega(\rho))}$ 的相关左因子记为 $(\rho'')^{(\omega(\rho))}$。设 χ'' 为 χ 的切左因子，它与 ξ'' 右对偶；设 τ'' 为 τ的右因子，它与 $\left(\overline{\rho''}\right)_{(\omega(\rho)-\omega(\rho''))}$右对偶。将正辫 $\chi', \tau' \in B_3^+$分别记为 $\chi = \chi''\chi'$ 和 $\tau = \tau'\tau''$。

(i) 假设 ρ'' 是 ρ 的真截切左因子。在这种情况下， τ' 以两个不同生成元 $\alpha \in B_3^+$ 的乘积结尾，而正

辫 $\alpha\tau''$ 是 τ 的最大右因子，并且它是与 χ 的某个左因子互为左对偶的因子。χ 的相关左因子是 $\chi''\beta$，其中 $\beta \in B_3^+$ 是位于 χ' 开头的单个生成元。

(ii) 假设 $\overline{\rho''} = \overline{\rho}$。在这种情况下，$\tau''$ 是 χ'' 的左对偶，而 τ 本身是 τ 的最大右因子，且它是某个 χ 的左因子的左对偶。若 $\rho'' = \rho$，则相关的 χ 左因子是 χ''。若 $\rho'' = \overline{\rho} \neq \rho$，则 τ' 是单个生成元，且该生成元的指标（τ'）$_{(\omega(\tau''))}$等于 χ' 中第一个生成元的指标。

(iii) 假设 ρ'' 是 ρ 的左因子，但 ρ'' 不是 ρ 的切左因子。在这种情况下，τ'' 中的第一个生成元 α 是 τ'' 的切左因子，而 χ'' 中的最后一个生成元 β 是 χ'' 的切右因子。此外，正辫 $\alpha^{-1}\tau''$ 是 τ 的最大右因子，且它是某个 χ 的左因子的左对偶。相关的 χ 左因子是 $\chi''\beta^{-1}$。

证明。对偶的伪对称性（命题 3.5）意味着一对对偶正辫的 ω-数相等。例如，$\omega(\rho) = \omega(\tau)$、$\omega(\xi) = \omega\chi$、$\omega(\xi'') = \omega\rho''$、$\omega(\rho'') = \omega\tau''$，以及 $\omega(\xi'') = \omega\chi''$。在本证明中，我们将交替使用这类配对中相等的 ω-数值。

(i) 令我们将 $\rho = \rho''\rho'$ 记作一个正辫 $\rho' \in B_3^+$。假设 $(\rho'')_{(\omega(\rho)-\omega(\rho''))}$ 与 τ'' 左对偶，由对偶的伪对称性（命题 3.5 ）可知，τ'' 与 $(\rho'')_{(\omega(\rho))}$ 左对偶。由对偶的唯一性（命题 3.4）可知 $\tau'' = \xi''$，因此 τ'' 与 χ'' 左对偶。若 ρ'' 是 ρ 的真截切左因子，则命题 3.16 表明，ξ' 不以两个不同生成元的乘积结尾，且 ρ' 不以两个不同生成元的乘积开头。此外，命题 3.16 表明，若 ξ' 中最后一个生成元为 $(\sigma_i)_{(\omega(\rho)+\omega(\rho''))}$，其中 $i \in \{1,2\}$，则 ρ' 中第一个生成元为 $\sigma_{i'}$，其中 $i \neq i' \in \{1,2\}$。假设 ρ'' 是 ρ 的切左因子，且 ξ'' 是 ξ 的切右因子（引理 3.14），由此可知 ρ' 与 τ' 左对偶，且 $(\xi')_{(\omega(\rho''))}$ 与 χ' 左对偶。由引理 3.10 可知，τ' 以 $(\sigma_i\sigma_{i'})_{(\omega(\rho')-1)}$ 结尾，而 χ' 以 $(\sigma_{i'}\sigma_i)_{(\omega(\rho))}$ 开头。特别地，$(\tau')_{(\omega(\tau''))}$ 以 $(\sigma_{i'}\sigma_i)_{(\omega(\rho))}$ 结尾（命题 3.7 表明 $\omega(\rho) = \omega(\rho') + \omega(\rho'')$，因为 ρ'' 是 ρ 的切左因子）。由此得出，$(\tau')_{(\omega(\tau''))}$ χ' 可被 Δ 整除，但 $(\tau')_{(\omega(\tau''))}$ χ' 不可被 Δ^2 整除。事实上，命题 3.1 表明，$(\tau')_{(\omega(\tau''))}$ 末尾的 $(\sigma_{i'}\sigma_i)_{(\omega(\rho))}$ 前面没有 $(\sigma_i)_{(\omega(\rho))}$。我们可以应用命题 3.2 证明，$(\tau')_{(\omega(\tau''))}$ χ' 不可被 Δ^2 整除。因此，命题 3.15 表明，取 $\alpha = (\sigma_i\sigma_{i'})_{(\omega(\rho')-1)}$ 和 $\beta = (\sigma_{i'})_{(\omega(\rho))}$ 时，结论成立。

(ii) 若 $\overline{\rho''}=\overline{\rho}$，则或者 $\rho''=\rho$，或者 $\rho''=\overline{\rho}\neq\rho$。若 $\rho''=\rho$，则 ρ'' 与 $\tau=\tau''$ 对偶。由对偶的伪对称性（命题 3.5）可知，τ 与 $(\rho'')^{(\omega(\rho))}$ 左对偶。由对偶的唯一性（命题 3.4）可知 $\tau=\xi''$，因此 τ 与 χ'' 左对偶。因此，若 $\rho''=\rho$，则结论成立。

若 $\rho''=\overline{\rho}\neq\rho$，则切闭包 $\overline{\rho}$ 以不同生成元 $\sigma_i\sigma_{i'}$的乘积结束，其中 $\{i,i'\}=\{1,2\}$，ρ中的最后一个生成元是 σ_i，且 σ_i 在 ρ中不是孤立的。引理 3.10 意味着 τ 以不同生成元 $\sigma_{i'}\sigma_i$的乘积开始，因为 ρ 与 τ对偶。在这种情况下，$\tau'=\sigma_{i'}$且 $\overline{\rho}$是 $\tau''=(\tau')^{-1}\tau$的左对偶。此外，引理 3.10 意味着 ξ''以 $(\sigma_{i'})^{(\omega(\rho)+\omega(\rho)-1)}=\sigma_i$开始，而 χ''以不同生成元 $(\sigma_{i'}\sigma_i)^{(\omega(\rho)-1)}$的乘积结束。特别地，命题 3.1 意味着 χ' 以 $(\sigma_{i'})^{(\omega(\rho))}$开始，因为 χ 不能被 Δ整除。当然，$(\tau')^{(\omega(\tau''))}=(\sigma_{i'})^{(\omega(\rho))}$。命题 3.2 现在意味着 $(\tau')^{(\omega(\tau''))}\chi'$ 不能被 Δ 整除。因此，命题 3.15 意味着该结论。

(iii) 如果 ρ'' 是 ρ 的左因子，但不是 ρ 的切左因子，那么 ρ'' 是其切闭包 $\overline{\rho''}$ 的真左因子。此外，切闭包 $\overline{\rho''}$ 以由不同生成元构成的乘积 $\sigma_i\sigma_{i'}$ 结尾，其中 $\{i,i'\}=\{1,2\}$ 和 σ_i 是 ρ'' 的最后一个生成元。记正辫 $\rho'\in B_3^+$ 为 $\rho=\overline{\rho''}\rho'$。

引理 3.10 意味着 ξ'' 以由不同生成元组成的乘积 $(\sigma_i\sigma_{i'})^{(\omega(\rho)+\omega(\rho'')-1)}$ 开始，因为 ξ'' 是 $(\rho'')^{(\omega(\rho))}$ 的左对偶；而 τ'' 以 $(\sigma_i)^{(\omega(\rho'))}$ 开始，因为 $\left(\overline{\rho''}\right)_{(\omega(\rho'))}$ 是 τ'' 的左对偶（命题 3.7 和命题 3.22 意味着 $\omega(\rho')+\omega(\rho'')=\omega(\rho)$）。同样，引理 3.10 意味着 χ'' 以 $(\sigma_i)^{(\omega(\rho))}$ 结尾。此外，引理 3.10 意味着 τ'' 开头的生成元是 τ 的切左因子，而 χ'' 末尾的生成元是 χ'' 的切右因子。

本段中的以下陈述均是引理 3.10 的推论。若 $\alpha'=\sigma_i$ 和 $\alpha=(\sigma_i)^{(\omega(\rho'))}$，则正辫$\left(\rho''(\alpha')^{-1}\right)^{(\omega(\rho')+1)}$是 $\alpha^{-1}\tau''$ 的左对偶。若 $\beta'=(\sigma_i\sigma_{i'})^{(\omega(\rho)+\omega(\rho'')-1)}$且 $\beta=(\sigma_i)^{(\omega(\rho))}$，则 $(\beta')^{-1}\xi''$ 是 $\chi''\beta^{-1}$ 的左对偶。最后，$(\beta')^{-1}\xi''$ 是 $\left(\rho''(\alpha')^{-1}\right)^{(\omega(\rho))}$ 的左对偶。

对偶的伪对称性（命题 3.5）意味着 $\alpha^{-1}\tau''$左对偶于 $\left(\rho''(\alpha')^{-1}\right)^{(\omega(\rho))}$。对偶的唯一性（命题 3.4）意味着 $\alpha^{-1}\tau''=(\beta')^{-1}\xi''$，因此 $\alpha^{-1}\tau''$ 左对偶于 $\chi''\beta^{-1}$。然而，$(\alpha)^{(\omega(\tau''))}=(\sigma_i)_{(\omega(\rho))}=\beta$。命题 3.2 现在意味着 $(\tau'\alpha)^{(\omega(\tau''))}\beta\chi'$ 不能被 Δ整除。因此，命题——

命题 3.15 蕴含该结论。
因此，陈述中的所有情形均已得到证明，证明完毕。

□

3.2 正半扭转幂的 Garside 标准形

在本小节中，我们将明确刻画辫群 B_3中正半扭转的幂的 Garside 标准形，或者等价地，刻画在 $\mathbb{CP}^2$ 中相对于 A_n-奇点的三次简单 Hurwitz 曲线的单值化。我们利用第 3.1 小节中的正辫对偶理论，建立这一新的刻画。首先，我们描述正辫对偶理论在研究 B_3中的共轭类时所起的作用。

我们回顾一下，在 B_3 中由 Garside 元进行共轭有一个简单的描述（定义 2.19）。特别地，利用 B_3 中的 Garside 标准形，我们注意到，要研究 B_3 中的共轭，只需研究正辫被正辫共轭的情形。此外，要研究正辫被正辫共轭，必须研究正辫的逆。若 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，那么我们回顾一下， ρ 是 τ 的对偶，当且仅当存在某个非负整数 ω，使得 τ^{-1} 的 Garside 标准形为 $\Delta^{\omega(\tau)}\rho$（$\tau$） ≥ 0（定义 3.3）。

我们将利用第 3.1 小节中建立的对偶性性质，对每个正整数 $n \geq 1$，给出 B_3 中 σ_1^n 的共轭类的明确刻画（推论 2.22 表明，这就是 B_3 中正半扭转的 n 次幂的集合）。

我们还将建立一项重要的技术结果，研究 Hurwitz 变换对辫群 B_3 中由正半扭转的幂构成的分解所产生的影响。事实上，我们回顾一下，Hurwitz 变换对分解的局部作用为（$\ldots, g_j, g_{j+1}, \ldots$）
$\to \left(\ldots, g_j g_{j+1} g_j^{-1}, g_j, \ldots\right)$。若 g_j 和 g_{j+1} 是正半扭转的幂，那么为了计算 Hurwitz 变换，我们需要计算正半扭转的某个幂被另一个正半扭转的幂共轭所得的共轭元。我们利用对偶理论（具体而言，命题 3.23）来求出该共轭元的 Garside 标准形（引理 3.32）。

在第 4 节中，我们将分解的复杂度定义为各因子的 Garside 幂的绝对值之和。本小节最后给出一项技术结果，讨论施行 Hurwitz 变换后分解复杂度的变化。我们将在第 4 节中广泛运用这一技术结果，对 Δ^2 分解为正半扭转的幂进行分类。

事实上，分类中的一个关键步骤是证明存在

能够降低复杂度的 Hurwitz 变换：对于复杂度为正的分解（在分解为正半扭转的情形下）、复杂度大于一的分解（在分解为正半扭转的幂且不存在正半扭转的四次方的情形下），或复杂度大于二的分解（在分解为正半扭转的幂且包含正半扭转的四次方的情形下）。最终，我们将利用这一步骤，把 Δ^2 的正半扭转幂分解的分类，化归为复杂度为 0 或 1（若包含正半扭转的四次方，则为 2）的此类分解的分类。后一步要简单得多。

现在我们陈述并证明正半扭转的幂的 Garside 标准形的明确刻画。

定理 3.24. 设 $g \in B_3$ 是正半扭转的 e 次幂，其中 $e \geq 1$ 是正整数。g 的 Garside 标准形为

$$g = \Delta^{-\omega(\tau)} \rho \sigma_i^e \tau,$$

其中 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是正辫，且 ρ 与 τ 互为对偶，并且 $i \in \{1,2\}$。

证明. 推论 2.22 表明 g 与 σ_1^e 共轭。定理 2.18（Garside 定理）表明，对于一个不能被 Δ 整除的正辫 $\tau \in B_3^+$，$g = \left(\Delta^l \tau\right)^{-1} \sigma_1^e \left(\Delta^l \tau\right)$，以及一个整数 $l \in \mathbb{Z}$。然而，我们可以写成

$$g = \left(\Delta^l \tau\right)^{-1} \sigma_1^e \left(\Delta^l \tau\right) = \tau^{-1} \left(\sigma_1\right)_{(l)}^e \tau = \Delta^{-\omega(\tau)} \rho \left(\sigma_1\right)_{(l)}^e \tau,$$

其中 ρ 与 τ 互为对偶。当且仅当 $\rho(\sigma_1)^{e}{}_{(l)}\,\tau$ 不能被 Δ 整除时，该表达式是 g 的 Garside 标准形。我们声称，若在 g 的所有此类表达式中，$\omega(\tau)$ 取最小值，则该表达式就是 g 的 Garside 标准形。

事实上，令 $i \in \{1,2\}$ 使得 $\sigma_i = (\sigma_1)^{(l)}$。引理 3.10 表明，$\rho$ 中最后一个生成元的指标与 τ 中第一个生成元的指标不同。命题 3.1 表明，对于 $i \neq i' \in \{1,2\}$，$\rho \sigma_i^e \tau$ 可被 Δ 整除，当且仅当 ρ 中最后两个生成元的乘积是 $\sigma_i \sigma_{i'}$，或者 τ 中最前两个生成元的乘积是 $\sigma_{i'} \sigma_i$。引理 3.10 表明，在前一种情况下，τ 中第一个生成元是 σ_i；在后一种情况下，ρ 中最后一个生成元是 σ_i。在前一种情况下，令 $\rho' = \left(\rho (\sigma_i \sigma_{i'})^{-1}\right)_{(1)}$ 且 $\tau' = (\sigma_i)^{-1} \tau$。在后一种情况下，令 $\rho' = \left(\rho \sigma_i^{-1}\right)_{(1)}$ 且 $\tau' = (\sigma_{i'} \sigma_i)^{-1} \tau$。无论哪种情况，$\rho'$、$\tau' \in B_3^+$ 都是不可被 Δ 整除的正辫，且 ρ' 与 τ' 互为对偶；命题 3.7 表明 $\omega(\tau') + 1 = \omega(\tau)$。现在我们可以写出

$$g = \Delta^{-\omega(\tau')} \rho' \sigma_i^e \tau'$$

在前一种情况下，以及

$$g = \Delta^{-\omega(\tau')}\rho'\sigma_{i'}^{e}\tau'$$

在后一种情况下。当然，这与 $\omega(\tau)$ 的极小性矛盾。因此，该命题得证。

□

现在，我们来刻画所有正半扭转的幂中标准正半扭转的幂（对于某个 $i \in \{1,2\}$ 和正整数 $e \geq 1$，σ_i^e）。

推论 3.25. 若 $g \in B_3$ 是正半扭转的幂，则 g 是标准正半扭转的幂，当且仅当 g 的 Garside 幂为零。

证明. 定理 3.24 指出，正半扭转 g 的 Garside 标准形可表示为

$$g = \Delta^{-\omega(\tau)}\rho\sigma_i^e\tau,$$

其中 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是正辫，且 ρ 与 τ 对偶，$i \in \{1,2\}$，而 $e \geq 1$ 是正整数。若 $\tau \in B_3^+$ 是正辫，则 $\omega(\tau) \geq 0$，等号成立当且仅当 τ 是单位元。此外，ρ 是单位元当且仅当 τ 是单位元。因此，该命题得证。

□

在定理 3.24 的证明中，我们观察到了正半扭转的幂的 Garside 标准形具有一些特殊性质。这些性质在后文中十分重要，因此我们将它们单独列出。

命题 3.26. 设 $g = \Delta^{-\omega(\tau)}\rho\sigma_i^e\tau$ 是非标准正半扭转的 e 次幂的 Garside 标准形，其中 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是正辫，满足 ρ 与 τ 对偶，$i \in \{1,2\}$，且 $e \geq 1$ 是正整数（定理 3.24）。记 $\xi = \rho\sigma_i^e\tau$，并注意到 $\xi \in B_3^+$ 是一个不能被 Δ 整除的正辫，其中 ρ 是其左因子，τ 是其右因子。

在这种情况下，ρ 以一个孤立生成元结尾，或 τ 以一个孤立生成元开头，但两者不会同时发生。在前一种情况下，切割闭包 $\overline{\rho} = \rho$ 和 $\overline{\tau} = \sigma_i\tau$。在后一种情况下，切割闭包 $\overline{\rho} = \rho\sigma_i$ 和 $\overline{\tau} = \tau$。一般而言，$\xi = \overline{\rho}\sigma_i^{e-1}\overline{\tau}$。

证明。该结论由定义 3.21（切闭包的定义）以及命题 3.1 和引理 3.10 的结合得出。

□

我们来考察正半扭转的幂的 Garside 标准形的另一项性质。

命题 3.27. 设 $g=\Delta^{-\omega(\tau)}\rho\sigma_i^e\tau$ 为正半扭转的 e 次幂的 Garside 标准形，其中 ρ、$\tau\in B_3^+$ 是正辫，满足 ρ 与 τ 对偶，$i\in\{1,2\}$ 且 $e\geq 1$ 为正整数（定理 3.24）。记 $\xi=\rho\sigma_i^e\tau$，并注意到 $\xi\in B_3^+$ 是一个不能被 Δ 整除的正辫，其中 ρ 是左因子，而 τ 是右因子。

若 ρ' 是切闭包 $\overline{\rho}$的切左因子，则 $(\rho')^{(\omega(\tau)-\omega(\rho'))}$ 右对偶于 τ的一个右因子。若 τ'是切闭包 $\overline{\tau}$的切右因子，则 $(\tau')^{(\omega(\tau)-\omega(\tau'))}$ 右对偶于 ρ的一个左因子。

证明。我们证明第一个结论，因为第二个结论的证明类似。若 ρ' 是 ρ的左因子，则由命题 3.5 和命题 3.7 可得该结论。事实上，在这种情况下，命题 3.12 蕴含ρ' 是 ρ 的切左因子。

若 ρ' 不是 ρ的左因子，则 $\rho'=\overline{\rho}$ 和 ρ 是$\overline{\rho}$的真左因子。若 $i\neq i'\in\{1,2\}$，则命题 3.26 蕴含 $\overline{\rho}$ 以 $\sigma_{i'}\sigma_i$ 结尾，且ρ 以 σ_i结尾。命题 3.1 蕴含 ρ 中的最后一个 $\sigma_{i'}$ 不是孤立的，因为 ξ 不能被 Δ整除。引理 3.10 蕴含 τ 以不同生成元 $\sigma_i\sigma_{i'}$的乘积开头，因为 ρ 是 τ的对偶。再应用一次引理 3.10，便可得出 $\overline{\rho}$ 是 τ的右因子 $\sigma_i^{-1}\tau\in B_3^+$的对偶。因此，结论得证。 □

若 $g\in B_3$ 是一个正半扭转的幂，其 Garside 标准形为 $g=\Delta^k\xi$，则 k 与 $\omega(\xi)$ 之间存在特殊关系。

命题 3.28. 设 $g\in B_3$ 是一个非标准正半扭转的 e 次幂，其中 $e\geq 1$ 是正整数。若 $g=\Delta^k\xi$ 是 g 的 Garside 标准形，则 $\omega(\xi)=-2k+e-1$。

证明. 定理 3.24 蕴含 $k=-\omega(\tau)$ 以及 $\xi=\rho\sigma_i^e\tau$，其中 ρ、$\tau\in B_3^+$ 是正辫，且 ρ 与 τ 对偶，并且 $i\in\{1,2\}$。命题 3.26 蕴含 $\xi=\overline{\rho}\sigma_i^{e-1}\overline{\tau}$，其中 $\overline{\rho}$ 是 $\overline{\rho}\sigma_i^{e-1}$ 的切左因子，而 $\overline{\tau}$ 是 ξ 的切右因子。此外，引理 3.10 蕴含 $\omega(\overline{\rho})=\omega(\rho)$、$\omega(\overline{\tau})=\omega(\tau)$，以及 $\omega\left(\sigma_i^{e-1}\right)=e-1$。当然，根据对偶的伪对称性（命题 3.5），$\omega(\rho)=\omega(\tau)$。最后，命题 3.7 蕴含

$$\omega(\xi)=\omega(\overline{\rho})+\omega\left(\sigma_i^{e-1}\right)+\omega(\overline{\tau})=2\omega(\tau)+e-1.$$

因此，该命题得证。 □

我们指出，若 g 是标准正半扭的 e 次幂，则命题 3.28 不成立。事实上，$\omega(\sigma_i^e)=e$ 当 $i\in\{1,2\}$ 且 $e\geq 1$ 为正整数时。

最后，我们确定非标准正半扭转的逆元的 Garside 标准形，特别是其 Garside 幂。（如果 $i\in$

$\{1,2\}$，那么标准正半扭转 σ_i 的逆元 σ_i^{-1} 的 Garside 标准形为 $\Delta^{-1}\sigma_i\sigma_{i'}$，其中 $i \neq i' \in \{1,2\}$。）本文不会用到这一结论，读者可以放心略过。不过，我们将其收录以供日后参考，因为正半扭转的负幂自然地出现在 Hurwitz 曲线的辫单值理论中。例如，Hurwitz 曲线的负节点所对应的辫单值是一个正半扭转的逆元的平方。

第 4 节中将 Δ^2 分解为正半扭转的正幂之乘积的分类结果证明方法，应该可以推广到因子可能是正半扭转的负幂的情形。这种推广将基于以下命题。

定理3.29. 设 g 为一个非标准正半扭转，并将其写作

$$g = \Delta^{-\omega(\tau)}\rho\sigma_i\tau$$

g的 Garside 标准形，其中 ρ、$\tau \in B_3^+$为正辫，且 ρ与 τ对偶，并且 $i \in \{1,2\}$（定理 3.24）。设 $\rho' \in B_3^+$为 ρ 的切左因子，$\tau' \in B_3^+$为 τ 的切右因子，使得$\omega(\rho') = \omega(\rho) - 1 = \omega(\tau) - 1 = \omega(\tau')$。负半扭 g^{-1} 的 Garside 标准形为

$$g^{-1} = \Delta^{-\omega(\tau)}\rho'\sigma_{i'}^2\tau',$$

其中 ρ'、$\tau' \in B_3^+$ 是正辫，满足 ρ' 与 $(\tau')^{(1)}$ 互为对偶，且 $i \neq i' \in \{1,2\}$。

证明。首先，引理 3.10 表明 ρ' 与 $(\tau')^{(1)}$ 互为对偶。命题 3.26 和引理 3.10 表明 $\rho'\sigma_{i'}$ 与 $\overline{\tau}$ 互为对偶，且 $\overline{\rho}$ 与 $\sigma_{i'}\tau'$ 互为对偶。对偶的伪对称性（命题 3.5）表明 $\sigma_{i'}\tau'$ 与 $(\overline{\rho})^{(\omega(\tau))}$ 互为对偶。命题 3.2 表明 $\rho'\sigma_{i'}\sigma_{i'}\tau'$ 不能被 Δ 整除，而命题 3.26 表明 $\rho\sigma_i\tau = \overline{\rho\tau}$。最后，命题 3.7 表明 $\rho'\sigma_{i'}^2\tau'$ 与 $(\overline{\rho\tau})^{(\omega(\tau))}$ 互为对偶，且 $\omega(\overline{\rho\tau}) = 2\omega(\tau)$。因此，结论得证。

□

我们注意到，定理3.29陈述中的非标准负半扭（即非标准正半扭转的逆元）的 Garside 标准形，与定理 3.24 中正半扭转的平方的 Garside 标准形看起来颇为相似，但这种相似具有迷惑性。然而，在定理3.29的陈述中，g^{-1} 并非正半扭转的平方，因为 $\omega(\tau) = \omega(\tau') + 1 > \omega(\tau')$，且 ρ'与 τ'并非对偶。另一方面，如果 $\omega(\tau')$出现在 Δ的指数中，而不是 $\omega(\tau)$，并且如果 ρ'与 τ'对偶，那么这个表达式便是正半扭转的平方的 Garside 标准形。

我们之前提到过，可以将辫子的 Garside 幂视为衡量辫子复杂度的指标。以下陈述非常有用，因为在共轭中自然会出现辫子的逆元。

命题 3.30. 设 g 是非标准正半扭转的 e 次幂，其中 $e \geq 1$ 是正整数。若 g 的 Garside 幂为 k，则 g^{-1} 的 Garside 幂为 $k - e + 1$。特别地，若 g 是非标准正半扭转，则 g^{-1} 的 Garside 幂等于 g 的 Garside 幂。

证明. 若 $g = \Delta^k \xi$ 是 g 的 Garside 标准形，则由命题 3.28 可知 $\omega(\xi) = -2k + e - 1$。若 χ 与 ξ 对偶，此时 ξ^{-1} 的 Garside 标准形为 $\xi^{-1} = \Delta^{-\omega(\xi)}\chi$，则 g^{-1} 的 Garside 标准形为 $g^{-1} = \Delta^{-k-\omega(\xi)}\chi_{(k)}$。由此可得，$g^{-1}$ 的 Garside 幂为 $-k - \omega(\xi) = k - e + 1$。因此，命题得证。□

以下设定将在第 4 节中占据极其重要的地位。事实上，为避免陈述中重复，我们常会在第 4 节的陈述开头写道：“我们采用设定 3.31.....”。该设定为我们在辫群 B_3 中考虑正半扭转的幂的分解时固定了记号。

设定 3.31. 令 $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$ 为 B_3 中正半扭转的幂所组成的集合，其中，对于每个 $1 \leq j \leq k$，g_j 是正半扭转的 e_j 次幂，且 $e_j \geq 1$ 是正整数。我们用 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 表示 $g_1 g_2 \cdots g_k$ 的相应分解。由定理 3.24 可知，我们可以将 g_j 的 Garside 标准形写为

$$g_j = \Delta^{-\omega(\tau_j)} \left(\rho_j \sigma_{i_j}^{e_j} \tau_j \right)_{(\omega_j)},$$

其中 $\rho_j, \tau_j \in B_3^+$ 是正辫，且 ρ_j 是 τ_j, $i_j \in \{1, 2\}$ 的对偶，$\omega_j = \sum_{j'=1}^{j} \omega\left(\tau_{j'}\right)$ 也是如此。记 $\xi_j = \rho_j \sigma_{i_j}^{e_j} \tau_j$。我们注意到，由于 $g_j = \Delta^{-\omega(\tau_j)}(\xi_j)_{(\omega_j)}$ 是 g_j 的 Garside 标准形，因此 $\xi_j \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫。此外，$g_1 g_2 \cdots g_k = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k \Delta^{-\omega_k}$。

设 $g_j^{-1} = \Delta^{-\omega(\tau_j) - e_j + 1}(\chi_j)_{(\omega_j + \omega(\tau_j) + e_j - 1)}$ 为 g_j^{-1} 的 Garside 标准形，其中 $\chi_j \in B_3^+$ 是与 ξ_j 右对偶的正辫。（g_j^{-1} 的 Garside 幂的显式值已在命题 3.30 中确定。）

设定 3.31 背后的动机是：关于辫群 B_3 中乘积 $g_1 g_2 \cdots g_k$ 的分解 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 的陈述，可以转化为关于 B_3 中正辫幺半群 B_3^+ 内乘积 $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k$ 的分解 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)$ 的陈述。事实上，设定 3.31 借助 Garside 标准形实现了这一点。我们将在第 4 节陈述并证明有关将 Δ^2 分解为正半扭转的幂

的结果，方法是将其转化为关于幺半群 B_3^+ 中 Δ 的幂的分解的陈述。最后，我们将通过应用第 3.1 小节中的正辫对偶理论，刻画幺半群 B_3^+ 中的这类分解。事实上，第 3.1 小节的结果非常适合研究如下形式的方程：$\Delta^l = \xi_1\xi_2\cdots\xi_k$，其中 ξ_1、ξ_2、…、$\xi_k \in B_3^+$ 是不能被 Δ 整除的正辫，而 $l \geq 1$ 是某个正整数。若 $k = 2$，则这就是对偶方程。

我们以一项技术结果结束本小节；该结果对于分析作用于 Δ^2 的正半扭转幂分解上的 Hurwitz 变换十分重要。此结果基于我们的正辫对偶性理论，具体而言，是第 3.1 小节中的命题 3.23。

引理 3.32。对于 $k = 2$，我们采用设定 3.31。令 $\xi_1'' \in B_3^+$ 为 ξ_1 的最大右因子，且它左对偶于 ξ_2 的一个左因子。假设相关的 ξ_2 的左因子 ρ_2'' 是切闭包 $\overline{\rho_2}$ 的左因子。令 χ_1'' 为 χ_1 的切左因子，它右对偶于 ξ_1''；再令 τ_2'' 为 τ_2 的右因子，它右对偶于 $\left(\overline{\rho_2''}\right)_{(\omega(\rho_2)-\omega(\rho_2''))}$。将正辫 ξ_1'、ρ_2'、χ_1'、$\tau_2' \in B_3^+$ 分别记为 $\xi_1 = \xi_1'\xi_1''$、$\rho_2 = \rho_2''\rho_2'$、$\chi_1 = \chi_1''\chi_1'$ 和 $\tau_2 = \tau_2'\tau_2''$。

(i) 假设 ρ_2'' 是 ρ_2 的切左因子。在这种情况下，τ_2' 以两个不同生成元 $\alpha \in B_3^+$ 的乘积结尾。令 $\beta \in B_3^+$ 为 χ_1' 开头的单个生成元。$g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 标准形为

$$\xi_1' \left(\rho_2'\sigma_{i_2}^{e_2}\left(\tau_2'\alpha^{-1}\right)\right)_{\left(\omega\left(\xi_1''\right)\right)} \left(\beta^{-1}\chi_1'\right)_{(\omega(\tau_2)+1)} \Delta^{-\omega(\tau_2)-e_1+1+2\left(\omega\left(\xi_1''\right)-\omega(\tau_1)\right)+1}.$$

(ii) 如果 $\rho_2'' = \overline{\rho_2} \neq \rho_2$，那么 $g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 标准形为

$$\xi_1' \left(\sigma_{i_2}^{e_2}\right)_{\left(\omega\left(\xi_1''\right)\right)} \left(\chi_1'\right)_{(\omega(\tau_2))} \Delta^{-\omega(\tau_2)-e_1+1+2\left(\omega\left(\xi_1''\right)-\omega(\tau_1)\right)}.$$

如果 $\rho_2'' = \rho_2$，那么 $g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 标准形要么是

$$\xi_1' \left(\sigma_{i_2}^{e_2}\right)_{\left(\omega\left(\xi_1''\right)\right)} \left(\chi_1'\right)_{(\omega(\tau_2))} \Delta^{-\omega(\tau_2)-e_1+1+2\left(\omega\left(\xi_1''\right)-\omega(\tau_1)\right)},$$

要么 $g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 幂大于 $-\omega(\tau_2) - e_1 + 1 + 2\left(\omega\left(\xi_1''\right) - \omega(\tau_1)\right)$。

(iii) 假设 ρ_2'' 是 ρ_2 的左因子，但 ρ_2'' 不是 ρ_2 的切左因子。令 α 为 τ_2'' 中的第一个生成元，令 β 为 χ_2'' 中的最后一个生成元。$g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 标准形为

$$\xi_1' \left(\rho_2'\sigma_{i_2}^{e_2}\left(\tau_2'\alpha\right)\right)_{\left(\omega\left(\xi_1''\right)\right)} \left(\beta\chi_1'\right)_{(\omega(\tau_2)+1)} \Delta^{-\omega(\tau_2)-e_1+1+2\left(\omega\left(\xi_1''\right)-\omega(\tau_1)\right)-1}.$$

证明。在设定 3.31 的记号中， $g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 标准形为

$$\begin{aligned} g_1g_2g_1^{-1} &= \left(\Delta^{-\omega(\tau_1)}\left(\xi_1\right)_{(\omega_1)}\right)\left(\Delta^{-\omega(\tau_2)}\left(\xi_2\right)_{(\omega_2)}\right)\left(\left(\chi_1\right)_{(\omega_1)}\Delta^{-\omega(\tau_1)-e_1+1}\right) \\ &= \xi_1\xi_2\left(\chi_1\right)_{(\omega(\tau_2))}\Delta^{-\omega(\tau_2)-e_1+1-2\omega(\tau_1)}. \end{aligned}$$

当然，命题 3.26 蕴含 $\xi_2 = \overline{\rho_2}\sigma_{i_2}^{e_2-1}\overline{\tau_2}$。我们可以利用命题 3.17 计算 $\xi_1\overline{\rho_2}$ 的 Garside 标准形。我们可以利用命题 3.23 和命题 3.17 计算 $\overline{\tau_2}(\chi_1)_{(\omega(\tau_2))}$ 的 Garside 标准形。最后，我们可以利用引理 3.19 计算乘积 $\xi_1\overline{\rho_2}\sigma_{i_2}^{e_2-1}\overline{\tau_2}(\chi_1)_{(\omega(\tau_2))}$ 的 Garside 标准形，由此即可得到该结论。

□

在第 4 节中，我们将把分解的复杂度定义为各因子的 Garside 幂的绝对值之和。我们将经常使用以下结论，以确定对正半扭转的幂进行分解后，应用一次 Hurwitz 变换所引起的复杂度变化。

引理 3.33。我们采用引理 3.32 中的设定。$g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 幂为 $-\omega(\tau_2) - e_1 + 1 + 2(\omega(\xi_1'') - \omega(\tau_1)) - \epsilon$，其中在引理 3.32 的情形 (i) 中， $\epsilon = -1$；在情形 (ii) 中， $\epsilon \leq 0$ ；在情形 (iii) 中， $\epsilon = 1$ 。特别地，若 k 是 g_2 的 Garside 幂，则 $g_1g_2g_1^{-1}$ 的 Garside 幂为 $k - e_1 + 1 + 2(\omega(\xi_1'') - \omega(\tau_1)) - \epsilon$。

证明。该结论直接由引理 3.32 得出。 □

4 三次简单 Hurwitz 曲线在同痕意义下的分类，以及辫单值分解在 Hurwitz 等价意义下的分类

本节中，我们将确立关于 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线同痕类分类的主要结果。我们运用第 3 节中建立的理论来完成分类。实际上，这些结果等价于对辫群 B_3 中 Δ^2 的正半扭转幂分解进行 Hurwitz 等价分类。本节安排如下。

在第 4.1 小节中，我们将定义 Δ^2 的正半扭转的幂的标准分解（定义 4.5）。在第 4.2 至 4.4 小节中，我们将证明， Δ^2 的正半扭转的幂的每一种分解都与定义 4.5 中的一种标准分解 Hurwitz 等价。

首先，在第 4.2 小节中，我们将证明， Δ^2 的正半扭转的每一种分解都与标准分解 $\Delta^2 \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$ Hurwitz 等价（定理 4.24）。等价地， $\mathbb{CP}^2$ 中任意两条光滑三次 Hurwitz 曲线都同痕（这是定理 1.1 的一个特例）。我们还将建立关于分解的技术性结论，并在第 4.3 小节中使用这些结论。

将 Δ^2 分解为正半扭转的幂时，因子的类型是指数 n ，即该因子是某个正半扭转的 n 次幂。在第 4.3 节中，我们将证明，将 Δ^2 分解为正半扭转的幂时，各类型因子的数量是该分解的 Hurwitz 等价类的完全不变量。该陈述等价于引言中的定理 1.1。

最后，在第4.4小节中，我们将证明引言中的定理 1.2，该定理约束了 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线可能具有的奇点。具体而言，我们将给出将 Δ^2 分解为正半扭转的幂时，因子类型所满足的一组完全约束。

本节证明的策略可简述如下。我们将为 Δ^2 的正半扭转幂分解赋予一种复杂度概念。我们将利用引理 4.8（引理 3.33 的一种改述），对这类分解施行降低复杂度的 Hurwitz 变换，从而将问题归结为对 Δ^2 的低复杂度（零或一）分解进行分类。

4.1 Δ^2 分解为正半扭转的幂的标准分解

本小节旨在阐述关于辫群 B_3 中 Δ^2 分解为正半扭转的幂的一些简单结论。我们还将着重说明这些结论与 $\mathbb{CP}^2$ 中三次简单 Hurwitz 曲线理论之间的联系。

以下关于辫群 B_3 中分解的术语将在下文中使用。

定义 4.1. 设 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是正半扭转的幂的乘积分解。因子 g_j 在 $\mathcal{F}$ 中的类型，是指满足以下条件的正整数 e_j ： g_j 是正半扭转的 e_j 次幂。

命题 2.14 意味着，将正半扭转的幂分解为 $\mathcal{F}$ 时，各类型因子的数量是 $\mathcal{F}$ 的 Hurwitz 等价类的不变量。第一步是利用辫群 B_3 上的共轭类不变量，来约束正半扭转的幂分解中各类型因子的数量。若 G 是一个群，则 G 上的共轭类不变量是定义在 G 上、在

G 中的共轭类上为常数的函数。G 上一个简单而有趣的共轭类不变量是阿贝尔化同态 $G \to H_1(G) = G/[G,G]$，其中 $[G,G]$ 表示 G 的交换子子群。注意，$H_1(B_3) \cong \mathbb{Z}$，并引入记号来指称 B_3 上的这个共轭类不变量。

定义 4.2. 令 $\epsilon\colon B_3 \to \mathbb{Z}$ 表示阿贝尔化同态，它由规则 $\epsilon(\sigma_1) = 1 = \epsilon(\sigma_2)$ 唯一确定。映射 ϵ 是 B_3 上的共轭类不变量。

我们使用阿贝尔化同态 ϵ，以建立关于将一个辫分解为正半扭转的幂的分解的以下初步约束。

命题 4.3. 设 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是 $g \in B_3$ 的一个由正半扭转的幂构成的分解。若 ν_n 是 $\mathcal{F}$ 中等于正半扭转的 n 次幂的因子数量（即 $\mathcal{F}$ 中类型为 n 的因子数量），则 $\epsilon(g) = \sum_{n=1}^{\epsilon(g)} n\nu_n$。

特别地，若 $g = \Delta^2$，则 $6 = \sum_{n=1}^{6} n\nu_n$。此外，若 $g = \Delta^2$ 且对每个 $1 \le j \le k$，g_j 都是正半扭转，则 $k = 6$。

证明。如果 g_j 是正半扭转的 n 次幂，那么我们有 $\epsilon(g_j) = n$，因为 $\epsilon\colon B_3 \to \mathbb{Z}$ 是 B_3 上的共轭类不变量，且 $\epsilon(\sigma_1^n) = n$。如果 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是 g 的一个分解，那么 $\epsilon(g) = \epsilon(g_1 g_2 \cdots g_k)$。第一条结论由此得出，因为 $\epsilon\colon B_3 \to \mathbb{Z}$ 是一个同态。第二条和第三条结论由第一条得出，因为 $\epsilon\left(\Delta^2\right) = 6$。□

我们回顾一下，若 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条简单赫尔维茨曲线，那么 C 的辫单值分解的 Hurwitz 等价类是 C 的同痕类的不变量。此外，C 的辫单值分解中一个类型为 n 的因子，对应于 C 中一个 A_n-奇点的辫单值。特别地，C 的辫单值分解中类型为 n 的因子数量，等于 C 中 A_n-奇点的数量。

命题 4.3 的几何解释是以下关于三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的 A_n-奇点数量的公式，其中 $n \ge 1$ 为正整数。

引理 4.4. 设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线。若 $n \ge 1$ 是正整数，则令 ν_n 表示 C 中 A_n 奇点的数量。我们有如下奇点公式：

$$\sum_{n=1}^{6} n\nu_n = 6.$$

证明. C 的辫单值分解是将 Δ^2 分解为正半扭转的幂所得的分解 $\mathcal{F}$。根据 C 的辫单值定义， $\mathcal{F}$ 中为正半扭转的 n 次幂的因子数量为 ν_n。因此，该结论由命题 4.3 得出。

□

我们将引理 4.4 陈述中的公式称为奇点公式。

本节的目标是证明，在 Δ^2 分解为正半扭转的幂时，各类型因子的数量构成该分解的 Hurwitz 等价类的一组完备不变量。等价地，若 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线，那么对于每个正整数 $n \geq 1$，C 中 A_n 奇点的数量构成 C 同痕类的一组完备不变量（引言中的定理 1.1）。

令 ν_n 表示简单 Hurwitz 曲线 C 中 A_n 奇点的数量。在第4.4小节中，我们将证明，奇点公式（引理 4.4）并非简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的奇点所受到的唯一约束。事实上，并非每个预先指定的非负整数元组 $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$，只要满足 $\sum_{n=1}^{6} n\nu_n = 6$，就都对应一条简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$。现在，我们定义与那些在代数层面上可实现的预先指定元组相对应的 Δ^2 的正半扭转幂标准分解。（这些就是所有可能元组这一陈述，正是引言中定理 1.2 的内容。我们将在定理 4.58 中对此作出明确证明。）

定义 4.5. 令 $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ 为以下非负整数元组之一。我们定义 Δ^2 的标准分解如下：

(i) 若 $\nu_1 = 2, \nu_4 = 1$ 和 $\nu_j = 0$ 满足 $j \neq 1,4$，则 Δ^2 分解为两个正半扭转和一个正半扭转的四次方的标准分解为

$$\Delta^2 \equiv \left(\sigma_1^4, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right).$$

(ii) 若 $\nu_2 = 3$ 和 $\nu_j = 0$ 满足 $j \neq 2$，则 Δ^2分解为三个正半扭转的平方的标准分解为

$$\Delta^2 \equiv \left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1, \sigma_2^2\right).$$

(iii) 若 $\nu_1 = 3, \nu_3 = 1$ 和 $\nu_j = 0$ 满足 $j \neq 1, 3$，则 Δ^2 分解为三个正半扭转和一个正半扭转的立方的标准分-解为

$$\Delta^2 \equiv \left(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right).$$

(iv) 若 $\nu_1 = 2$、$\nu_2 = 2$ 和 $\nu_j = 0$ 对于 $j \neq 1$、2 成立，则 Δ^2 的标准分解为两个正半扭转和两个正半扭转的平方：

$$\Delta^2 \equiv \left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\right).$$

(v) 若 $\nu_1 = 4$、 $\nu_2 = 1$ 和 $\nu_j = 0$ 对于 $j \neq 1$、2 成立，则 Δ^2 的标准分解为四个正半扭转和一个正半扭转的平方：

$$\Delta^2 \equiv \left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right).$$

(vi) 若 $\nu_1 = 6$ and $\nu_j = 0$ for $j \neq 1$，则 Δ^2分解为六个正半扭转的标准分解为

$$\Delta^2 \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1).$$

在第4.4小节中，我们将证明，不存在其他与 Δ^2 分解为正半扭转的幂相对应的元组 $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$。证明将基于我们的正辫对偶理论，以及第 3 节中对 B_3 内正半扭转幂的代数刻画。不过，在接下来的第 4.2 小节和第 4.3 小节中，我们将证明， Δ^2 分解为正半扭转的幂的每个分解 $\mathcal{F}$，都 Hurwitz 等价于定义 4.5 中唯一的标准分解；该标准分解中每种类型因子的数量与分解 $\mathcal{F}$中的相同。

策略是为分解赋予一种复杂度概念，并通过对复杂度进行归纳法来证明该结论。若 $g \in B_n$，则回顾一下， g 的 Garside 幂是 Garside 元Δ 在 g的 Garside 标准形中出现的指数。

定义4.6. 若 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是 $g_1 g_2 \cdots g_k$ 的一个分解，则分解 $\mathcal{F}$ 的复杂度是因子 $g_1, g_2, \ldots, g_k$ 的 Garside 幂的绝对值之和。我们用 $c(\mathcal{F})$ 表示 $\mathcal{F}$ 的复杂度。

以下结论是在我们的研究方法中一个有用的观察：通过对复杂度进行归纳，来分类正半扭转的幂的分解。

命题 4.7. 一个由正半扭转的幂组成的分解 $\mathcal{F}$ 的复杂度为 $c(\mathcal{F}) = 0$，当且仅当 $\mathcal{F}$ 是由标准正半扭转的幂组成的分解。

证明. 该结论由推论 3.25 得出。推论 3.25 指出，正半扭转的幂的 Garside 幂的绝对值为零，当且仅当相关的正半扭转是标准正半扭转。

□

在定义 4.5 中，(i) 中的标准分解复杂度为二，(ii)–(iii) 中的标准分解复杂度为一，而 (iv)–(vi) 中的标准分解复杂度为零。在第 4.2 小节中，我们将证明，如果 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个由正半扭转构成的分解，且

$c(\mathcal{F}) > 0$，那么我们总能对 $\mathcal{F}$施行降低复杂度的 Hurwitz 变换。在第 4.3 小节中，我们将证明，如果 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2的一个由至少一个正半扭转和正半扭转的平方构成的分解，且$c(\mathcal{F}) > 0$，那么我们总能对 $\mathcal{F}$施行降低复杂度的 Hurwitz 变换。在第 4.3 小节中，我们还将证明，如果 $\mathcal{F}$ 是Δ^2 的一个由正半扭转的幂构成的分解，且 $c(\mathcal{F}) > 1$，并且其中没有正半扭转的四次方，那么我们总能对 $\mathcal{F}$施行降低复杂度的 Hurwitz 变换。最后，在第 4.3 小节中，我们将证明，如果 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个由正半扭转的幂构成的分解，且 $c(\mathcal{F}) > 2$，并且其中包含正半扭转的四次方，那么我们总能对 $\mathcal{F}$ 施行降低复杂度的 Hurwitz 变换。

我们证明中的关键内容，是以下关于 Hurwitz 变换对分解复杂度影响的计算。我们回顾设定 3.31，本节将大量运用该设定，以避免在陈述中重复说明。

引理 4.8。我们采用设定 3.31，并取 $k = 2$。令 $\xi_1'' \in B_3^+$ 为 ξ_1 的最大右因子，且它是某个左因子的左对偶，该左因子是 ξ_2 的左因子。假设相关的 ξ_2 左因子 ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$的切闭包的左因子。

若 $\mathcal{F}' = \left(g_1 g_2 g_1^{-1}, g_1\right)$ 是对分解 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 施加 Hurwitz 变换所得的结果，则有以下公式，用以关联 $\mathcal{F}'$ 的复杂度与 $\mathcal{F}$ 的复杂度：

$$c\left(\mathcal{F}'\right) = c\left(\mathcal{F}\right) + e_1 - 1 - 2\left[\omega\left(\xi_1''\right) - \omega\left(\tau_1\right)\right] + \epsilon,$$

其中 $\epsilon \leq 1$。此外，当且仅当 ρ_2'' 是 ρ_2 的左因子，但 ρ_2'' 不是 ρ_2 的切左因子时，$\epsilon = 1$。

证明。该陈述可由引理 3.33 直接推出。引理 3.33 是一个基于引理 3.32 的公式，它将 $g_1 g_2 g_1^{-1}$ 的 Garside 幂与 g_2 的 Garside 幂联系起来。（注意，我们取 Garside 幂的绝对值来确定复杂度。）

□

关于引理 4.8 的陈述，一个重要的观察是：与 $\omega(\tau_1)$ 和 e_1 的值相比，ξ_1 的右因子 ξ_1'' 越大，复杂度 $c(\mathcal{F}')$ 就越小。我们将利用这一观察，严格约束其 Hurwitz 等价类中具有最小复杂度的 Δ^2 的正半扭转的幂分解。最终，我们将证明，所有此类分解的复杂度均为零、一或二（具体取决于分解中各类型因子的数量）。

我们还指出，对于 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2) \rightarrow \left(g_2, g_2^{-1} g_1 g_2\right)$，存在引理 4.8 的对称版本，以区别于 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2) \rightarrow \left(g_1 g_2 g_1^{-1}, g_1\right)$。本文不再重复对称表述；提及引理 4.8 时，既可以指按原文表述的引理 4.8，也可以指其对称版本。

4.2 将 Δ^2 分解为正半扭转的分解在 Hurwitz 等价下的分类

本小节将证明， Δ^2 的每一种正半扭转分解 $\mathcal{F}$ 都 Hurwitz 等价于标准分解 $\Delta^2 \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$（定义 4.5）。等价地，若 $C, C' \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是三次光滑 Hurwitz 曲线，则 C 与 C' 同痕；这是定理 1.1 的一个特例。特别地， $\mathbb{CP}^2$ 中的每条三次光滑 Hurwitz 曲线都与一条射影代数曲线同痕；这是定理 1.3 的一个特例。

证明的策略是对将 Δ^2 分解为正半扭转的分解的复杂度进行归纳。事实上，命题 4.7 表明，将 Δ^2 分解为正半扭转的分解 $\mathcal{F}$ 是将 Δ^2 分解为标准正半扭转，当且仅当复杂度 $c(\mathcal{F}) = 0$。若 $\mathcal{F}$ 是将 Δ^2 分解为正半扭转的分解，且复杂度为 $c(\mathcal{F}) > 0$，那么我们将证明，可以对 $\mathcal{F}$ 施行有限次 Hurwitz 变换，得到一个将 Δ^2 分解为正半扭转的分解 $\mathcal{F}'$，其复杂度为 $c(\mathcal{F}') < c(\mathcal{F})$。

最后，我们将证明，每个将 Δ^2 分解为标准正半扭转的分解，都与标准分解 $\Delta^2 \equiv (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$ Hurwitz 等价。事实上，最后这一步很直接（基于 Garside 定理（定理 2.17）），我们还将证明，在 B_3 中，同一个辫的任意一对标准正半扭转分解都 Hurwitz 等价。

下面简要说明：如果分解 $\mathcal{F}$ of Δ^2 into 正半扭转中的至少一个因子 $\mathcal{F}$ 是非标准正半扭转，我们将如何找到一个有限的 Hurwitz 变换序列来降低该分解的复杂度。事实上，如果 $\mathcal{F}$ 中的每个因子都是非标准正半扭转，我们将证明存在一个单独的降低复杂度的 Hurwitz 变换。此结论的证明将基于第 3.1 小节中正辫对偶理论的组合学。具体而言，在将 Δ^2 分解为正半扭转的分解 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 中，对于至少一个 $1 \leq j \leq k-1$，相邻因子 g_j 和 g_{j+1} 如何组合受到严格约束。我们首先运用正辫对偶理论研究正辫幺半群 B_3^+ 中的分解，从而陈述这些约束。事实上，若采用设定 3.31，则 $(g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是 Δ^2 的分解这一说法，等价于方程 $\Delta^{2+\omega_k} = \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_k$。

我们将运用对偶理论，为以下至少一种情况建立下界： (1) ξ_j 的极大右因子的大小，该右因子与 ξ_{j+1} 的左因子左对偶；或 (2) ξ_j 的极大左因子的大小，该左因子与 ξ_{j-1}的右因子右对偶；其中至少有一个 $1 \leq j \leq k$（如果这些因子都不是标准正半扭转）。事实上，我们将证明，如果 ξ_j的这些因子的大小

对于每个 $1 \le j \le k$都小于 ξ_j 大小的一半，那么方程不成立。特别地，我们将证明，对于至少一个 $1 \le j \le k$， ξ_j 的这些因子之一的大小严格大于 ξ_j 大小的一半。

最后，我们将利用这一约束，证明在此情形下，可以对数对 (g_j, g_{j+1}) 或 (g_{j-1}, g_j) 局部应用一个降低复杂度的 Hurwitz 变换。最后一步将以引理 4.8 为依据，该引理计算了应用 Hurwitz 变换后分解复杂度的变化（另见引理 4.8 后的讨论）。

如果分解中存在标准正半扭转，那么只要分解中还存在非标准正半扭转，仍然可以通过有限序列的 Hurwitz 变换来降低分解的复杂度。这一论证与上一段所述情形十分相似，区别在于前一情形中的因子均非标准正半扭转。不过，由于标准正半扭转的长度为一，因此需要多次 Hurwitz 变换。具体而言，即使 $\xi_j\xi_{j+1}$ 和 $\xi_{j+1}\xi_{j+2}$ 均不能被 Δ 整除，三重乘积 $\xi_j\xi_{j+1}\xi_{j+2}$ 仍可能被 Δ 整除，其中 ξ_{j+1} 是一个正半扭转（另见引理 3.19 前的讨论）。如果 ξ_j 也是标准正半扭转，我们将证明，可以对数对 (g_{j+1}, g_{j+2}) 应用一次不改变复杂度的 Hurwitz 变换。随后，我们便可归约到能够应用降低复杂度的 Hurwitz 变换的情形（接下来应用于数对 $\left(g_j, g_{j+1}g_{j+2}g_{j+1}^{-1}\right)$）。

我们开始证明。首先，我们证明，在分解中局部应用辫子关系可以通过 Hurwitz 变换实现。我们将利用这一结论证明：若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是Δ^2 的标准正半扭转分解，则 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$Hurwitz 等价。我们在辫群 B_n 的一般情形下证明这一结论，因为这样并不会增加额外工作。

命题 4.9. 设 $g \in B_n$。设 $\mathcal{F}$ 是 g 的一个分解，其局部包含形如 $(\dots, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \dots)$ 的三元组，其中 $1 \le i \le n-1$。设 $\mathcal{F}'$ 是 g 的分解，它与 g的分解 $\mathcal{F}$ 相同，唯一区别是将 $\mathcal{F}$中前述局部三元组改为 $(\dots, \sigma_{i+1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}, \dots)$。在这种情况下， g 的分解 $\mathcal{F}$ 与 g 的分解$\mathcal{F}'$ Hurwitz 等价，且可通过有限序列的 Hurwitz 变换实现，无需整体共轭。

证明。首先，只需证明在辫群 B_3 中， Δ 的分解 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$ 与 Δ 的分解 $(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2)$ Hurwitz 等价，并且可通过有限次 Hurwitz 变换实现，而不包含整体共轭。事实上，Hurwitz 等价具有函子性（命题 2.14），并且我们有一个由规则 $\sigma_1 \to \sigma_i$ 和 $\sigma_2 \to \sigma_{i+1}$ 定义的映射 $B_3 \to B_n$。

我们有以下两个 Hurwitz 变换

$$(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1) \sim \left(\sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2, \sigma_1\right) \sim (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2)\,.$$

事实上，$\sigma_1^{-1}\left(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)\sigma_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2$，这就证明了第二个 Hurwitz 变换中的等式。因此，该命题得证。 □

当然，在分解中局部应用交换关系显然可以通过 Hurwitz 变换实现。事实上，若 g_j 与 g_{j+1} 可交换，则在第 j 个位置对分解 $(\cdots, g_j, g_{j+1}, \cdots)$ 应用 Hurwitz 变换，所得分解为 $(\cdots, g_{j+1}, g_j, \cdots)$。表示正辫 $\sigma \in B_n^+$ 的 Artin 生成元正字定义了将 σ 分解为标准正半扭转的分解。对这样的正字应用 Artin 关系会产生其他此类正字，进而定义正辫 σ 的其他标准正半扭转分解。特别地，命题 4.9 表明，正辫分解为标准正半扭转的唯一性在 Hurwitz 等价意义下，并不会在 B_n^+ 的 Artin 关系层面就失效。我们将上述讨论总结为命题 4.9 的以下推论。

引理 4.10. 若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是正辫 $\sigma \in B_n^+$分解为标准正半扭转的分解，则通过一系列有限的 Hurwitz 变换（不包括整体共轭）， $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$ Hurwitz 等价。

证明. 将正辫$\sigma \in B_n^+$ 分解为标准正半扭转，等价于用 Artin 生成元 σ_1、σ_2、……、σ_{n-1}表示 σ 的乘积展开。Garside 定理（定理 2.17）表明，正辫 $\sigma \in B_n^+$的任意一对乘积展开（用 Artin 生成元表示）都可通过正辫幺半群 B_n^+ 中的一系列有限 Artin 关系相互关联。命题 4.9，以及在分解中局部应用交换关系可通过 Hurwitz 变换实现这一显然事实，表明幺半群 B_n^+ 中的每个 Artin 关系都可通过一系列有限的 Hurwitz 变换实现，且不包括整体共轭。因此，命题得证。

□

事实上，若 $\mathcal{F}'$ 是 Δ^2 的正半扭转分解，且 Hurwitz 等价于 Δ^2 的标准分解 $\mathcal{F} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$（定义 4.5），那么在 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$ 之间的任何 Hurwitz 等价中，全局共轭变换都是多余的。虽然后文不会用到下面的陈述，读者可以略过其证明，但我们将其列出作为动机。实际上，在本小节中，我们不会使用全局共轭变换。另一方面，对于 Δ^2 的正半扭转幂的分解之间的 Hurwitz 等价，全局共轭变换并非多余。在第 4.3 节和第 4.4小节对这类分解进行分类时，我们将使用全局共轭变换。

引理 4.11. 若 $\mathcal{F}'$ 是 Δ^2 的正半扭转分解，且 Hurwitz 等价于 Δ^2 的标准分解 $\mathcal{F}$，则可以通过有限次 Hurwitz 变换（不包括全局共轭）将 $\mathcal{F}$ 变为 $\mathcal{F}'$。

证明。命题 2.15 指出，整体共轭与 Hurwitz 变换可交换。因此，只需证明：若 $\mathcal{F}'$ 是由 Δ^2 的标准分解 $\mathcal{F} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1)$ 经过一次整体共轭变换得到的，则结论成立。

由元素 $g \in B_3$ 实施的一次整体共轭，是一列有限个初等整体共轭变换的复合，其中每个初等整体共轭变换都是由某个 Artin 生成元 σ_i（其中 $i \in \{1, 2\}$）实施的整体共轭。特别地，只需证明：若 $\mathcal{F}'$ 是由 Δ^2 的标准分解 $\mathcal{F}$ 经过一次初等整体共轭变换得到的，则结论成立。由 σ_1 对标准分解实施整体共轭，得到

$$\left(\sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1\right) \sim (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1),$$

其中 Hurwitz 等价 $\sim$ 由两次 Hurwitz 变换实现。然而，引理 4.10 表明，Δ^2 的这一分解（由标准正半扭转构成）与 Δ^2 的标准分解 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价，而且可通过有限次不涉及整体共轭的 Hurwitz 变换得到。

同样，通过对称论证，$\mathcal{F}$ 被 σ_2 整体共轭后得到的结果，与 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价；这一等价关系可通过有限次不涉及整体共轭的Hurwitz 变换得到。（或者，我们可以观察到，$\mathcal{F}$ 被 Δ 共轭后得到的是 Δ^2 的一个由标准正半扭转构成的分解，且$B_3 = \langle\sigma_1、\ \Delta\rangle$。）因此，结论得证。 □

如果 $\mathcal{F}$ 是其Hurwitz 等价类中复杂度最小的 Δ^2 正半扭转分解，那么策略就是证明c（$\mathcal{F}$）$= 0$。最终，以下对引理 4.10 的改述将完成证明。

引理 4.12. 若 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个正半扭转分解，且 c（$\mathcal{F}$）$= 0$，那么 $\mathcal{F}$ 与标准分解$\Delta^2 \equiv$（σ_1、σ_2、σ_1、σ_1、σ_2、σ_1）Hurwitz 等价。

证明。该陈述等价于引理 4.10。事实上，命题 4.7 表明，$c(\mathcal{F}) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{F}$是 Δ^2 由标准正半扭转构成的分解。

□

在证明的其余部分，我们将确立对Δ^2 分解的约束：该分解由正半扭转构成，并且在其 Hurwitz

等价类中具有最小复杂度。最终，我们将利用这些约束证明，每个这样的分解的复杂度均为零。下文将采用以下术语。

定义 4.13。如果一个分解的复杂度在其 Hurwitz 等价类中最小，我们就称其为最小复杂度分解。我们也会说一个分解具有最小复杂度，表示它是一个最小复杂度分解。

一般而言，我们将对由正半扭转构成的最小复杂度分解施加严格约束（甚至包括对除 Δ^2 以外的元素的分解）。以下术语是后续陈述所必需的。

定义 4.14。如果 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ 是 $g_1 g_2 \cdots g_k$ 的一个分解，那么 $\mathcal{F}$ 的子分解是指对某个 $1 \le j' \le j \le k$，由 $\mathcal{F}' = \left(g_{j'}, g_{j'+1}, \ldots, g_j\right)$ 构成的 $g_{j'} g_{j'+1} \cdots g_j$ 的一个分解。

以下观察是前述定义的主要动机。

命题 4.15. 若 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解，则 $\mathcal{F}$ 的每个子分解也都是最小复杂度分解。

证明. 若 $\mathcal{F}'$ 是 $\mathcal{F}$的一个子分解，则对 $\mathcal{F}'$ 施加有限次 Hurwitz 变换，对应于对 $\mathcal{F}$施加有限次 Hurwitz 变换。因此，结论得证。

□

特别地，$\mathcal{F}$ 在其 Hurwitz 等价类中的复杂度达到最小，这一条件也意味着一组局部条件：$\mathcal{F}$ 的每个子分解 $\mathcal{F}'$ 在其 Hurwitz 等价类中的复杂度都达到最小。我们利用这一简单观察，将注意力限制在为因子数较少的最小复杂度分解建立约束上。

我们回顾引理 4.8，该引理计算了对一个由正半扭转的幂构成的分解施加 Hurwitz 变换后，其复杂度的变化。引理 4.8 的以下推论是刻画由正半扭转构成的最小复杂度分解的一项重要技术步骤。

引理 4.16。我们采用设定 3.31，其中 $k = 2$，且 g_1 和 g_2 是非标准正半扭转的幂。如果 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 是 $g_1 g_2$ 的最小复杂度分解，则满足以下条件：

(i) 若 g_1 是非标准正半扭转，则 ξ_1 中与 $\overline{\rho_2}$ 的某个左因子左对偶的最大右因子 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$的右因子。

(ii) 若 g_2 是非标准正半扭转，则 ξ_2 中与 $\overline{\tau_1}$ 的某个右因子右对偶的极大左因子 ξ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$ 的左因子。

证明。我们证明 (i)，因为 (ii) 的证明类似。首先，引理 3.14 表明 ξ_1'' 是 ξ_1 的一个切右因子。此外，命题 3.13 表明，ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，当且仅当 $\omega(\xi_1'') \leq \omega(\overline{\tau_1})$。考虑对 g_1g_2 的分解 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 施加 Hurwitz 变换后得到的 g_1g_2 的分解 $\left(g_1g_2g_1^{-1}, g_1\right)$。如果 $\omega(\xi_1'') > \omega(\tau_1)$，那么由引理 4.8 和 $e_1 = 1$ 可知，分解$\left(g_1g_2g_1^{-1}, g_1\right)$ 的复杂度严格小于 $\mathcal{F}$ 的复杂度，因为 $\epsilon \leq 1$。当然，这将与 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解这一假设矛盾。因此，结论得证。

□

下面的技术性陈述讨论了在正半扭转的最小复杂度分解 $\mathcal{F}$ 中，从我们的对偶理论角度看，相邻因子的乘积如何组合。该陈述是对引理 4.16 的改进。

引理 4.17. 我们采用设定 3.31，其中 $k = 2$，并且 g_1 和 g_2 是非标准正半扭转。设 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 是 g_1g_2的一个最小复杂度分解。

在这种情况下，ξ_1 的极大右因子 ξ_1'' 若与 ξ_2 的一个左因子左对偶，则它是切闭包 $\overline{\tau_1}$的右因子。此外，ξ_2 的极大左因子 ξ_2'' 若与 ξ_1 的一个右因子右对偶，则它是切闭包 $\overline{\rho_2}$的左因子。

最后，ξ_1'' 与 $\overline{\rho_2}$ 不左对偶，且 ξ_2'' 与$\overline{\tau_1}$不右对偶。

证明。我们将证明第一个陈述，即 ξ_1'' 是切闭包 $\overline{\tau_1}$的右因子。证明 ξ_2'' 是切闭包 $\overline{\rho_2}$ 的左因子的方法类似。

首先，引理 3.14 表明 ξ_1'' 是 ξ_1的切右因子。为导出矛盾，假设 ξ_1'' 不是切闭包 $\overline{\tau_1}$的右因子，或者等价地，$\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1''的真右因子。在这种情况下，命题 3.12 表明 $\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1''的真切右因子。

我们注意到，ξ_2 的左因子 χ_1'' 与 ξ_1'' 右对偶，因此不可能是 $\overline{\rho_2}$的左因子。事实上，根据引理 4.16，如果 χ_1'' 是 $\overline{\rho_2}$的左因子，就会与 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解这一假设矛盾。由此我们推得，$\overline{\rho_2}$ 是 χ_1''的真左因子。

如果 ρ_2'' 是 χ_1'' 的左因子，且与 $\overline{\tau_1}$ 右对偶，那么根据引理 4.16，ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$ 的左因子。然而，我们已假设 $\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1'' 的真右因子。特别地，我们可推出 $\omega(\rho_2'') = \omega(\overline{\rho_2})$。事实上，如果 $\omega(\rho_2'') < \omega(\overline{\rho_2})$，那么 $\overline{\rho_2}$ 与 ξ_1'' 的一个右因子右对偶，而 $\overline{\tau_1}$ 是该因子的真右因子。然而，根据引理 4.16，这与 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解的假设矛盾。

我们利用约束 $\omega(\rho_2'') = \omega(\overline{\rho_2})$ 得出矛盾，从而完成第一个陈述的证明。命题 3.26 表明，$\overline{\tau_1}$ 以两个不同生成元的乘积开头。引理 3.10 表明，ρ_2'' 不以两个不同生成元的乘积结尾，因为 $\overline{\tau_1}$ 与 ρ_2'' 左对偶。特别地，$\rho_2'' \neq \overline{\rho_2}$，因为命题 3.26 表明 $\overline{\rho_2}$ 以两个不同生成元的乘积结尾。

然而，若 $\rho_2'' \neq \overline{\rho_2}$，则 ρ_2'' 不是 ξ_2 的切左因子。命题 3.16 (i) 现在推出，$\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1 中最大的右因子，且它是某个 ξ_2 左因子的左对偶。当然，这与我们最初假设的 $\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1'' 的真右因子相矛盾。

最后一个结论是命题 3.16 (ii) 的推论，因为根据命题 3.26，$\overline{\rho_2}$ 是 ξ_2 的切左因子，且其后接着两个不同生成元的乘积。因此，这些结论得以证立。

□

现在我们来考察最小复杂度分解 $\mathcal{F}$ 中的标准正半扭转，该分解是由正半扭转的幂构成的。为便于将标准正半扭转因子策略性地置于适当位置，我们将通过有限次 Hurwitz 变换重新排列 $\mathcal{F}$ 中的因子。然而，这一系列有限的 Hurwitz 变换不得改变 $\mathcal{F}$ 的复杂度。

首先，我们考虑一种特殊情况：标准正半扭转与非标准正半扭转的幂相邻。（如果不费额外功夫，我们将尽可能以更一般的形式建立结论，即讨论正半扭转的幂的分解，而不只是正半扭转的分解。我们将在第 4.3 小节和第4.4小节中使用这些更一般的结论。）

命题 4.18。我们采用设定 3.31，其中包含 $k = 3$。假设$\xi_1\xi_2\xi_3$ 可被 Δ整除，但 $\xi_1\xi_2$ 和 $\xi_2\xi_3$ 都不能被 Δ整除。在这种情况下，ξ_2 是一个 Artin 生成元。

如果 g_1 是一个非标准正半扭转的幂，那么 Hur- witz 变换 (g_1, g_2, g_3) $\to \left(g_2, g_2^{-1}g_1g_2, g_3\right)$ 不会改变分解的复杂度。如果 g_3 是一个非标准正半扭转的幂，那么 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_1, g_2g_3g_2^{-1}, g_2\right)$ 不会改变分解的复杂度。

证明。首先，引理 3.19 表明 ξ_2 是一个 Artin 生成元。此外，若将 $\xi_2 = \sigma_k$ 写作某个 $k \in \{1, 2\}$，则命题 3.2 表明 ξ_1 以 $\sigma_{k'}$ 结尾，且 ξ_3 以 $\sigma_{k'}$ 开头，其中 $k \neq k' \in \{1, 2\}$。

考虑 g_1 是非标准正半扭转的幂的情形，因为 g_3 是非标准正半扭转的幂的情形与之类似。在这种情况下，我们可以写成 $\xi_1 = \rho_1\sigma_{i_1}^{e_1}\tau_1$，其中 ρ_1、$\tau_1 \in B_3^+$ 是非单位元正辫，且 ρ_1 与 τ_1 互为对偶。引理 3.10

意味着 ξ_1 以 $(\sigma_k)^{(\omega(\tau_1))}$ 开始。特别地，$g_2^{-1}g_1g_2$ 的 Garside 幂等于 g_1 的 Garside 幂，因为 $g_1 = \Delta^{-\omega(\tau_1)}(\xi_1)^{(\omega(\tau_1))}$ 和 $g_2 = (\xi_2)^{(\omega(\tau_1))}$，如设定 3.31 所示。因此，分解 $\left(g_2、\ g_2^{-1}g_1g_2、\ g_3\right)$ 的复杂度等于分解 $(g_1、\ g_2、\ g_3)$ 的复杂度。

□

设 $\mathcal{F}$ 是一个分解，其中 $\mathcal{F}$ 中有三个相邻因子，它们是标准正半扭转，且其乘积等于 Δ。在这种情况下，我们可以通过有限次 Hurwitz 变换将这三个因子移到 $\mathcal{F}$ 的开头，同时不改变复杂度。事实上，我们有以下更一般的结论。

命题 4.19。采用设定 3.31。若 $g_2g_3\cdots g_k = \Delta$，则由 $k-1$ 次 Hurwitz 变换构成的复合

$$(g_1, g_2, \ldots, g_k) \to \left(g_2, g_3, \ldots, g_k, \left(g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}\cdots g_2^{-1}\right) g_1 \left(g_2g_3\cdots g_k\right)\right)$$

不会改变分解的复杂度。

证明。若 $g_2g_3\cdots g_k = \Delta$，则 $\left(g_k^{-1}g_{k-1}^{-1}\cdots g_2^{-1}\right) g_1 (g_2g_3\cdots g_k) = \Delta^{-1}g_1\Delta$，其 Garside 幂与 g_1 相同。因此，结论得证。

□

我们总结命题 4.18 和命题 4.19，以找到每个正半扭转幂分解的一种规范重排，其中标准正半扭转被策略性地排列。

引理 4.20. 设 $\mathcal{F}' = (g_1', g_2', \ldots, g_k')$ 是一个由正半扭转的幂构成的分解。分解 $\mathcal{F}'$ 与一个分解 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)$ Hurwitz 等价，且后者具有以下性质；对于 $\mathcal{F}$，我们采用设定 3.31 中的记号。

(i) 复杂度 $c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{F}')$。(ii) 若 $\xi_{j-1}\xi_j\xi_{j+1}$ 可被 Δ 整除，且 g_{j-1} 和 g_{j+1} 都不是标准正半扭转的幂，则对每个 $2 \le j \le k-1$，$\xi_{j-1}\xi_j$ 或 $\xi_j\xi_{j+1}$ 至少有一个可被 Δ 整除。(iii) 存在一个（可能为空的）全序子集 $S = \{1, 2, \ldots, 3m\}$，使得对每个 $j \in S$，g_j 都是标准正半扭转；对每个 $0 \le l \le m-1$，乘积 $g_{3l+1}g_{3l+2}g_{3l+3} = \Delta$；并且不存在满足 $g_jg_{j+1}g_{j+2} = \Delta$ 的三元组 $\{j, j+1, j+2\} \subseteq \{1, \ldots, k\} \setminus S$，其中 g_j、g_{j+1}、g_{j+2} 都是标准正半扭转。

证明。该结论是反复应用命题 4.18 和命题 4.19 的结果。

□

现在，我们希望了解标准正半扭转在最小复杂度分解中所起的作用。我们将分别探讨单个标准正半扭转以及两个相邻标准正半扭转所起的作用。首先，我们考虑其中一个因子为标准正半扭转的分解。

引理 4.21。对于 $k=2$，我们采用设定 3.31，其中 g_1 是一个非标准正半扭转的幂，而 g_2 是一个标准正半扭转。若 $\mathcal{F}=(g_1,g_2)$ 是 g_1g_2 的最小复杂度分解，则 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ 整除。

证明。反设 $\xi_1\xi_2$ 可以被 Δ整除，从而得到矛盾。若对于某个 $k\in\{1,2\}$ 有 $\xi_2=\sigma_k$，则由命题 3.2 可知，ξ_1 以不同生成元的乘积 $\sigma_k\sigma_{k'}$ 结尾，其中 $k\neq k'\in\{1,2\}$。我们可以写成$\xi_1=\rho_1\sigma_{i_1}^{e_1}\tau_1$，其中 ρ_1、$\tau_1\in B_3^+$是非单位元正辫，且ρ_1 与 τ_1对偶。引理 3.10 表明，ξ_1 以 $(\sigma_k)_{(\omega(\tau_1))}$ 开始。我们推得，$g_2^{-1}g_1g_2$ 的 Garside 幂比 g_1的 Garside 幂小一，因为按照设定 3.31，$g_1=\Delta^{-\omega(\tau_1)}(\xi_1)_{(\omega(\tau_1))}$ 且 $g_2=(\xi_2)_{(\omega(\tau_1))}$。特别地，分解 $\big(g_2,g_2^{-1}g_1g_2\big)$ 的复杂度比 $\mathcal{F}=(g_1,g_2)$ 的复杂度小一，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解的假设矛盾。因此，结论得证。

□

现在我们考虑两个相邻因子均为标准正半扭转的分解。

引理 4.22. 采用设定 3.31，其中 $k=3$，g_1 是一个非标准正半扭转的幂，而 g_2 和 g_3 是标准正半扭转。若 $\mathcal{F}=(g_1,g_2,g_3)$ 是 $g_1g_2g_3$ 的最小复杂度分解，则 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ整除。

证明. 反设 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 能被 Δ整除。引理 4.21 推出 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ整除。特别地，若 ξ_1 中的最后一个生成元是某个 $k\in\{1,2\}$对应的 σ_k，则由命题 3.2 可知，$\xi_2=\sigma_{k'}$ 和 $\xi_3=\sigma_k$，其中 $k\neq k'\in\{1,2\}$。此外，ξ_1 中的最后两个生成元都是 σ_k。我们可以写成 $\xi_1=\rho_1\sigma_{i_1}^{e_1}\tau_1$，其中 ρ_1和 $\tau_1\in B_3^+$是非单位元正辫，且 ρ_1 与 τ_1对偶。引理 3.10 推出 ξ_1 以不同生成元的乘积 $(\sigma_{k'}\sigma_k)_{(\omega(\tau_1))}$ 开头。

我们来考虑 Hurwitz 变换的复合 $\mathcal{F}=(g_1,g_2,g_3)\ \to\big(g_2,g_3,g_3^{-1}g_2^{-1}g_1g_2g_3\big)$。我们注意到，$g_3^{-1}g_2^{-1}g_1g_2g_3$ 的 Garside 幂比 g_1 的 Garside 幂小 1，因为 $g_1=\Delta^{-\omega(\tau_1)}(\xi_1)_{(\omega(\tau_1))}$、$g_2=(\xi_2)_{(\omega(\tau_1))}$ 和 $g_3=(\xi_3)_{(\omega(\tau_1))}$，如设定 3.31 所示。由此可推得，分解 $\big(g_2,g_3,g_3^{-1}g_2^{-1}g_1g_2g_3\big)$ 的复杂度比

$\mathcal{F} = (g_1, g_2, g_3)$ 的复杂度小 1，这与假设 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解相矛盾。因此，该命题得证。

□

现在我们可以证明本小节的主要结果了。

定理 4.23. 若 $\mathcal{F}$ 是由正半扭转构成的 Δ^k 的分解，其中 k 为某个正整数，则 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价于一个由标准正半扭转构成的 Δ^k 的分解。

证明. 设 $\mathcal{F}$ 是由正半扭转构成的 Δ^k 的最小复杂度分解。我们将证明 $\mathcal{F}$ 的复杂度为零。反设 $c(\mathcal{F}) > 0$，则会导致矛盾。我们将运用本小节关于最小复杂度分解的技术性结果来约束分解 $\mathcal{F}$，并导出矛盾。经过适当替换，我们可以假设分解 $\mathcal{F}$ 满足引理 4.20 的条件；若有必要，可用另一个最小复杂度分解替换 $\mathcal{F}$。

采用设定 3.31。命题 4.3 表明，该分解中有 $3k$ 个因子，因为 $\epsilon\left(\Delta^k\right) = 3k$。我们有 $\Delta^{\omega_{3k}+k} = \xi_1\xi_2\cdots\xi_{3k}$。令 $J \subsetneq \{1, 2, \ldots, 3k\}$ 为所有满足 g_j 是标准正半扭转的 $j \in \{1, 2, \ldots, 3k\}$ 构成的真子集，并令 $J' = \{1, 2, \ldots, 3k\} \backslash J$ 为 J 的补集。经过适当替换，我们可以假设引理 4.20 条件 (iii) 中的子集 S 为空：若 $S = \{1, 2, \ldots, 3k'\}$，则可将 Δ^k 的分解 $(g_1, g_2, \ldots, g_{3k})$ 替换为 $\Delta^{k-k'}$ 的分解 $(g_{3k'+1}, g_{3k'+2}, \ldots, g_{3k})$。在这种情况下，该分解中不存在乘积等于 Δ 的相邻三个标准正半扭转。

若 $j \in \{1, 2, \ldots, 3k\}$，则定义 ξ''_j 为 ξ_j 的最大右因子，它是 ξ_{j+1} 的某个左因子的左对偶。我们将 ξ_{j+1} 的相关左因子记为 χ''_j。引理 4.17 意味着，对于每个满足 $j+1 \in J'$ 的 $j \in J'$，ξ''_j 都是 $\overline{\tau_j}$ 的右因子。引理 4.17 还意味着，对于每个满足 $j \in J'$ 的 $j+1 \in J'$，χ''_j 都是 $\overline{\rho_{j+1}}$ 的真左因子。若 $j \in J$ 或 $j+1 \in J$ 成立，则引理 4.21 意味着 ξ''_j 是恒等辫。类似地，若 $j \in J$ 或 $j+1 \in J$ 成立，则引理 4.21 意味着 χ''_j 是恒等辫。

我们定义 $\zeta_j \in B_3^+$ 为满足 $\xi_j = \chi''_{j-1}\zeta_j\xi''_j$ 的正辫。若$j \in J'$，则由命题 3.26 和引理 4.17 可得 $\chi''_{j-1}\xi''_j \neq \xi_j$。若$j \in J$，则 χ''_{j-1} 和 ξ''_j 是恒等辫。由此可知，对每个 $j \in \{1, 2, \ldots, 3k\}$，$\zeta_j$ 都不是恒等辫。令 $\omega''_j = \sum_{j'=1}^{j-1} \omega\left(\xi''_{j'}\right)$。我们断言，$\xi_1\xi_2\cdots\xi_{3k}$的 Garside 标准形为

$$\xi_1\xi_2\cdots\xi_{3k} = \left[\prod_{j=1}^{3k} (\zeta_j)_{(\omega''_j)}\right] \Delta^{\omega''_{3k}},$$

其中方括号内的正辫不能被 Δ 整除。当然，这将与假设 $\Delta^{\omega_{3k}+k} = \xi_1\xi_2\cdots\xi_{3k}$ 矛盾，因为方括号内不能被 Δ 整除的正辫长度至少为 $3k$。

证明这一断言。首先，根据 ζ_j 的定义以及 ξ''_j 是 χ''_j 的左对偶这一事实，可得该等式。因此，我们只需证明 $\prod_{j=1}^{3k}(\zeta_j)(\omega''_j)$ 不能被 Δ 整除。当然，每个因子 $(\zeta_j)(\omega''_j)$ 都不能被 Δ 整除；我们将利用引理 3.20 来证明乘积 $\prod_{j=1}^{3k}(\zeta_j)(\omega''_j)$ 不能被 Δ 整除。

我们可以将 J 写成 $J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_s$ 与补集 $J' = \{1, 2, \ldots, 3k\} \setminus J$ 的并集。我们可以安排使得，对于每个 $1 \le r \le s$，J_r 是 J 的极大全序子集，而 J'_r 是 J' 的极大全序子集，并且 $\sup J_r < \inf J'_r$，$\sup J'_r < \inf J_{r+1}$（其中对每个 $1 \le r \le s$，$J_1 = \emptyset$ 或 $J'_s = \emptyset$ 可能成立，也可能两者都成立）。

如果 $j \in J'_r$ 不是 J'_r 的最大元素，那么命题 3.15 和 ξ''_j 的最大性表明，$(\zeta_j)(\omega''_j)\,(\zeta_{j+1})(\omega''_{j+1})$ 不能被 Δ 整除。如果 ζ_j 是一个 Artin 生成元（字长为一的正辫），那么命题 3.26 和引理 4.17 表明，$\left(\chi''_{j-1}\right)^{-1}\overline{\rho_j} = \zeta_j$ 是一个 Artin 生成元，且 $\xi''_j = \overline{\tau_j}$。特别地，如果 $j \in J'_r$，那么 j 既不是 J'_r 的最大元素，也不是其最小元素。此外，命题 3.26 表明，$\overline{\rho_j}$ 以两个不同生成元的乘积结尾，因此引理 3.9 表明，χ''_{j-1} 不是 $\overline{\rho_j}$ 的切左因子。命题 3.16 (i) 表明，$(\zeta_{j-1})(\omega''_{j-1})$ 中最后一个生成元的指标与 $(\zeta_j)(\omega''_j)$ 中第一个生成元的指标相同。最后利用引理 3.20 可得，对于每个 $1 \le r \le s$，乘积 $\prod_{j\in J'_r}(\zeta_j)(\omega''_j)$ 不能被 Δ 整除。

若对于某个 $1 \le r \le s$，$J_r = \{j_0\}$，则乘积

$$\left(\prod_{j\in J'_{r-1}}(\zeta_j)_{(\omega''_j)}\right)\zeta_{j_0}\left(\prod_{j\in J'_r}(\zeta_j)_{(\omega''_j)}\right)$$

不能被 Δ 整除。事实上，若不然，则由于分解 $\mathcal{F}$ 满足引理 4.20 中的条件 (ii)，$\left(\prod_{j\in J'_{r-1}}(\zeta_j)(\omega''_j)\right)\zeta_{j_0}$ 或 $\zeta_{j_0}\left(\prod_{j\in J'_r}(\zeta_j)(\omega''_j)\right)$ 中必有一个可被 Δ 整除。然而，根据引理 4.21，这将与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解这一假设相矛盾。

乘积 $\prod_{j\in J_r}(\zeta_j)(\omega''_j)$ 对每个 $1 \le r \le s$ 都不能被 Δ 整除，因为分解 $\mathcal{F}$ 满足引理 4.20 中的条件 (iii)，且我们已归结到 $S = \emptyset$ 的情形。此外，若 $1 \le r \le s$，且 J_r 的基数至少为二，那么乘积 $\left(\prod_{j\in J_r}(\zeta_j)(\omega''_j)\right)\left(\prod_{j\in J'_r}(\zeta_j)(\omega''_j)\right)$ 和 $\left(\prod_{j\in J'_{r-1}}(\zeta_j)(\omega''_j)\right)\left(\prod_{j\in J_r}(\zeta_j)(\omega''_j)\right)$ 都不能被 Δ 整除。事实上，这

是引理 4.21 和引理 4.22 的推论，因为 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解。最后，引理 3.20 蕴含 $\prod_{j=1}^{3k}(\zeta_j)(\omega_j'')$ 不能被 Δ 整除。由此我们得出，$\xi_1\xi_2\cdots\xi_{3k}$ 的 Garside 标准形为

$$\xi_1\xi_2\cdots\xi_{3k}=\left[\prod_{j=1}^{3k}(\zeta_j)_{(\omega_j'')}\right]\Delta^{\omega_{3k}''}.$$

因此，该论断得证。 □

我们总结本小节的结果。

定理 4.24. 若 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的正半扭转分解，则 $\mathcal{F}$ 与标准分解 Hurwitz 等价

$$\Delta^2\equiv(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1).$$

证明. 定理 4.23 表明，$\mathcal{F}$ 与由标准正半扭转构成的 Δ^2 的一个分解 Hurwitz 等价。引理 4.12 表明，由标准正半扭转构成的 Δ^2 的一个分解与标准分解 $\Delta^2\equiv(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1)$ Hurwitz 等价。因此，该论断得证。

□

我们给出定理 4.24 的几何改述。

定理 4.25. 若 C、$C'\subseteq\mathbb{CP}^2$ 是三次光滑 Hurwitz 曲线，则 C 与 C' 同痕。

证明。三次光滑 Hurwitz 曲线的辫单值分解是一个由正半扭转构成的 Δ^2 的分解。此外，该曲线的辫单值分解的 Hurwitz 等价类完全确定了该曲线的同痕类。

定理 4.24 表明，C 的辫单值分解与 C' 的辫单值分解 Hurwitz 等价。因此，命题得证。

□

事实上，在光滑曲线这一特殊情形下，定理 4.24 等价于引言中的定理 1.1、定理 1.3 和定理 1.4。在下一小节中，我们将对一般情形（即带有奇点的曲线）证明这些结果。

4.3 将 Δ^2 分解为正半扭转幂的分解分类

在本小节中，我们将把第 4.2 小节中将 Δ^2分解为正半扭转的分类，扩展为将 Δ^2分解

为正半扭转的幂的分类。设 $\mathcal{F}$ 是将 Δ^2 分解为正半扭转的幂的一种分解。假设 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\mathcal{F}'$ （见定义 4.5）具有相同数量的各类型因子。我们将证明 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$Hurwitz 等价。特别地，我们将证明，若 $\mathcal{F}$ 是将 Δ^2 分解为正半扭转及正半扭转的平方的一种分解，则 $\mathcal{F}$ 中正半扭转平方的数量是 $\mathcal{F}$的 Hurwitz 等价类的完全不变量。相应的几何结论是，三次节点型 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 中的节点数量是 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$的同痕类的完全不变量。（命题 4.3 意味着，三次节点型 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 中的节点数量是 $\{1, 2, 3\}$的一个元素。）

我们还将证明，在 Hurwitz 等价意义下， Δ^2 有唯一一种分解，即一个正半扭转的立方与三个正半扭转的分解。相应的几何结论是：具有一个尖点奇点的三次简单 Hurwitz 曲线只有一个同痕类。最后，我们将证明，在 Hurwitz 等价意义下，Δ^2 有唯一一种分解，即一个正半扭转的四次方与两个正半扭转的分解。相应的几何结论是：具有一个二重点奇点的三次简单 Hurwitz 曲线只有一个同痕类。在第4.4小节中，我们将证明 $\mathbb{CP}^2$中的三次简单 Hurwitz 曲线不可能具有其他奇点配置，部分证明将使用本小节中建立的技术性结论。

本小节中的证明在风格上与第 4.2 小节中的证明非常相似。例如，我们需要一个类似于引理 4.21 的结论（涉及分解中的标准正半扭转），但该结论针对的是分解中标准正半扭转的平方。我们还需要一些类似于引理 4.17 的结论（涉及最小复杂度分解中的相邻因子为正半扭转的情形），但这些结论针对的是最小复杂度分解中相邻因子为正半扭转的幂的情形。

然而，我们需要考虑对 Δ^2 分解为正半扭转的幂所作的整体共轭变换，尽管整体共轭变换在第 4.2 小节中并未发挥作用。事实上，对于将 Δ^2 分解为正半扭转的幂的情形，引理 4.11 的类似结论未必成立。换言之，两个将 Δ^2 分解为正半扭转的幂的分解，若可通过有限次 Hurwitz 变换和整体共轭变换互相等价，则未必能仅通过有限次 Hurwitz 变换互相等价。

让我们开始对 Δ^2 中正半扭转的幂的分解进行分类。首先，我们要为某些由正半扭转的幂分解而成的 Δ^2 建立一个判据，以确定是否存在可应用于它们的降低复杂度的全局共轭变换。回顾一下， B_3 中的置换辫要么是一个 Artin 生成元，要么是两个

不同 Artin 生成元的乘积（这一约定与文献中的用法略有不同；在文献中，Δ 也常被视为置换辫）。令 $g \in B_3$ 为一个非标准正半扭转的幂。我们首先通过共轭在 B_3 中降低 g 的 Garside 幂的绝对值，来确立一项相关的技术结果。我们考察在 B_3 中由置换辫进行的共轭，因为 B_3 中的每个共轭操作都可以分解为一系列由置换辫进行的共轭操作的复合。

命题 4.26. 设 $g \in B_3$ 是一个非标准正半扭转的幂，并将 g 的 Garside 标准形写作

$$g = \Delta^{-\omega(\tau)} \rho \sigma_i^e \tau,$$

其中 ρ、$\tau \in B_3^+$是正辫，且 ρ 与 τ互为对偶，$e \geq 1$ 是一个正整数，并且 $i \in \{1, 2\}$（定理 3.24）。设 $\tau' \in B_3^+$是 $\overline{\tau}$的切闭包的一个右因子置换辫。若 τ'是 $\overline{\tau}$的切右因子，则 $\tau' g (\tau')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g的 Garside 幂的绝对值。

证明. 若 $\tau' \in B_3^+$是 $\overline{\tau}$的切右因子置换辫，则我们断言$(\tau')^{(\omega(\tau))} \rho$ 可被 Δ整除。当然，这一断言意味着 $\tau' \Delta^{-\omega(\tau)} \rho$ 的 Garside 幂严格大于 $-\omega(\tau)$。此外，Garside 幂的反三角不等式（命题 3.18）意味着 $\tau' g (\tau')^{-1} = \left(\tau' \Delta^{-\omega(\tau)} \rho\right) \left(\sigma_i^e \tau (\tau')^{-1}\right)$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g的 Garside 幂的绝对值，因为 $\left(\sigma_i^e \tau (\tau')^{-1}\right)$ 的 Garside 幂为 0。换言之，这一断言蕴含了所述结论。

我们来证明这个断言。若 τ'是 $\overline{\tau}$的切右因子，则命题 3.27 意味着存在 ρ的一个左因子 ρ'，使得 $(\rho')^{(\omega(\tau)-1)}$ 是 τ'的左对偶。对偶的伪对称性（命题 3.5）意味着 $(\tau')^{(1)}$是 $(\rho')^{(\omega(\tau)-1)}$的左对偶。由此可得，$(\tau')^{(\omega(\tau))}$是 ρ'的左对偶。特别地，$(\tau')^{(\omega(\tau))} \rho$ 可被 Δ 整除，因此断言成立。于是，结论得证。 □

设 $g \in B_3$ 是一个非标准正半扭转的幂。现在我们来刻画这样的情形：用一个置换辫对 g 进行共轭，不会增大 Garside 幂的绝对值。

命题 4.27。设 $\tau' \in B_3^+$ 是一个置换辫。设 $g \in B_3$ 是某个非标准正半扭转的幂，并将 g 的 Garside 标准形写为

$$g = \Delta^{-\omega(\tau)} \rho \sigma_i^e \tau,$$

其中 ρ、$\tau \in B_3^+$ 是正辫，且 ρ 与 τ 对偶，$e \geq 1$ 是正整数，并且 $i \in \{1,2\}$（定理 3.24）。$\tau' g \left(\tau'\right)^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g 的 Garside 幂的绝对值，当且仅当 $(\tau')_{(\omega(\tau))} \overline{\rho}$ 可被 Δ 整除，或 τ' 是 $\overline{\tau}$ 的右因子。

证明。我们有

$$\tau' g \left(\tau'\right)^{-1} = \Delta^{-\omega(\tau)} \left[\left(\tau'\right)_{(\omega(\tau))} \rho \sigma_i^e \tau \left(\tau'\right)^{-1}\right].$$

特别地，$\tau' g (\tau')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值等于 g 的 Garside 幂（即 $\omega(\tau)$）的绝对值与 $-\epsilon$ 之和，其中 ϵ 是括号内辫的 Garside 幂。此外，ϵ 等于 $(\tau')_{(\omega(\tau))} \overline{\rho} \sigma_i^{e-1}$ 的 Garside 幂与 $\overline{\tau} (\tau')^{-1}$ 的 Garside 幂之和。事实上，这是命题 3.26 的推论，它意味着 $\rho \sigma_i^e \tau = \overline{\rho} \sigma_i^{e-1} \overline{\tau}$；同时也是命题 3.18 的推论，因为 τ' 是一个置换辫。

$(\tau')_{(\omega(\tau))} \overline{\rho} \sigma_i^{e-1}$ 的 Garside 幂是 $\{0,1\}$ 的一个元素，而 $\overline{\tau} (\tau')^{-1}$ 的 Garside 幂是 $\{-1,0\}$ 的一个元素，这同样是因为 τ' 是一个置换辫。此外，$(\tau')_{(\omega(\tau))} \overline{\rho} \sigma_i^{e-1}$ 的 Garside 幂等于 1，当且仅当 $(\tau')_{(\omega(\tau))} \overline{\rho}$ 可被 Δ 整除；$\overline{\tau} (\tau')^{-1}$ 的 Garside 幂等于 0，当且仅当 τ' 是 $\overline{\tau}$ 的右因子。因此，命题得证。

□

我们将利用命题 4.26，为某些可分解为 Δ^2 个正半扭转幂的分解寻找能够降低复杂度的整体共轭变换。不过，我们需要证明整体共轭降低的是分解的（总体）复杂度，而不仅仅是某个因子的 Garside 幂的绝对值。我们可以将命题 4.26 与以下技术结果结合起来实现这一点。

命题 4.28。我们采用设定 3.31，其中包含 $k = 2$，且 g_1 和 g_2 是非标准正半扭转的幂。假设 $\xi_1 \xi_2$ 可被 Δ 整除。令 $\tau_1' \in B_3^+$ 为置换辫。若 $\tau_1' g_1 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_1 的 Garside 幂的绝对值，则 $\tau_1' g_2 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_2 的 Garside 幂的绝对值。

证明。若 $\tau_1' g_1 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_1 的 Garside 幂的绝对值，则命题 4.27 表明，$\tau_1' \overline{\rho_1}$ 可被 Δ 整除，或者 $(\tau_1')_{(\omega(\tau_1))}$ 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子（采用设定 3.31 中的记号，该记号与命题 4.27 陈述中的记号略有不同）。我们将分别考察这两种情况。我们将证明，$(\tau_1')_{(\omega(\tau_1))} \xi_2$ 可被 Δ 整除，或者

$(\tau_1')^{\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2)}$ 是 $\overline{\tau_2}$ 的右因子。事实上，采用设定 3.31 中的记号，我们有 $g_2 = \Delta^{-\omega(\tau_2)}(\xi_2)^{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$，因此，这两个结论中的任意一个都将意味着 $\tau_1' g_2 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_2 的 Garside 幂的绝对值。

首先，如果 $(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}$ 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，那么我们分别根据 $(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}$ 是否为 $\overline{\tau_1}$ 的切右因子来讨论不同情形。如果 $(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}$ 是 $\overline{\tau_1}$ 的切右因子，那么 $\xi_1\xi_2$ 可被 Δ 整除这一假设意味着 $(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}\ \xi_2$ 可被 Δ 整除。事实上，τ_1' 是一个置换辫，因此我们可以应用命题 3.2 和引理 3.9。特别地，在这种情况下，$\tau_1' g_2 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_2 的 Garside 幂的绝对值。

如果 $(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}$ 不是 $\overline{\tau_1}$ 的切右因子，那么引理 3.9 表明，$\overline{\tau_1}$ 以由不同生成元组成的乘积 $\sigma_k\sigma_{k'}$ 结尾，其中 $\{k,k'\} = \{1,2\}$ 和 $\tau_1' = (\sigma_{k'})^{(\omega(\tau_1))}$。$\xi_1\xi_2$ 可被 Δ 整除这一假设与命题 3.2 表明，ρ_2 以 σ_k 开头。引理 3.10 表明，τ_2 以 $(\sigma_{k'})^{(\omega(\tau_2))}$ 结尾。由此可得，$(\tau_1')^{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 是 $\overline{\tau_2}$ 的右因子。特别地，在这种情况下，$\tau_1' g_2 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_2 的 Garside 幂的绝对值。

其次，如果 $\tau_1'\overline{\rho_1}$ 可被 Δ 整除，那么 τ_1' 是 $\overline{\rho_1}$ 的一个左因子 ρ_1' 的左对偶，因为 τ_1' 是一个置换辫。我们分别根据 ρ_1' 是否是 $\overline{\rho_1}$ 的切左因子来讨论各种情况。如果 ρ_1' 是 $\overline{\rho_1}$ 的切左因子，那么命题 3.27 表明，$(\rho_1')^{(\omega(\tau_1)-1)}$ 是 τ_1 的一个右因子的左对偶。然而，对偶的伪对称性（命题 3.5）表明，$(\rho_1')^{(1)}$ 是 τ_1' 的左对偶。由此可知，$(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}$ 是 τ_1 的一个右因子。然而，我们已经证明，在这种情况下，$\tau_1' g_2 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不超过 g_2 的 Garside 幂的绝对值。

如果 ρ_1' 不是 $\overline{\rho_1}$ 的切左因子，那么由引理 3.9 可知，$\overline{\rho_1}$ 以不同生成元的乘积 $\sigma_k\sigma_{k'}$ 开头，其中 $\{k,k'\} = \{1,2\}$ 和 $\rho_1' = \sigma_k$。此时，$\tau_1' = \sigma_k\sigma_{k'}$，因为 τ_1' 是 ρ_1' 的左对偶。由引理 3.10 可知，τ_1 以 $(\sigma_k)^{(\omega(\tau_1)-1)}$ 结尾。假设 $\xi_1\xi_2$ 可被 Δ 整除，再由命题 3.2 可知，ρ_2 以 $(\sigma_{k'})^{(\omega(\tau_1)-1)}$ 开头。然而，乘积 $(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}\,(\sigma_{k'})^{(\omega(\tau_1)-1)} = \Delta$。由此可得，$(\tau_1')^{(\omega(\tau_1))}\ \xi_2$ 可被 Δ 整除。特别地，在此情况下，$\tau_1' g_2 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_2 的 Garside 幂的绝对值。

因此，该结论在所有情况下均已得到证明。 □

我们得出结论：对于某些将 Δ^2 分解为非标准正半扭转的幂的分解，可以应用降低复杂度的全局共轭变换。

引理 4.29。我们采用设定 3.31，其中对于每个 $1 \leq j \leq k$，g_j 都是一个非标准正半扭转的幂。如果对于每个$1 \leq j \leq k-1$，$\xi_j\xi_{j+1}$ 都能被 Δ 整除，那么我们可以对分解 $\mathcal{F}$ 应用降低复杂度的全局共轭变换。

证明。该结论由命题 4.26 和命题 4.28 得出。事实上，若 τ_1' 是 ξ_1 中与某个左因子左对偶的极大置换辫右因子，则命题 3.2 和引理 3.9 蕴含 τ_1' 是 ξ_1的一个切右因子。 g_1 是某个非标准正半扭转的幂这一假设，蕴含 τ_1' 是$\overline{\tau_1}$的一个切右因子。命题 4.26 蕴含$\tau_1' g_1 (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_1的 Garside 幂的绝对值。此外，反复应用命题 4.28 可知，对于每个 $1 \leq j \leq k$，$\tau_1' g_j (\tau_1')^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值至多为 g_j 的 Garside 幂的绝对值。因此，我们得到关于复杂度 $c\left(\tau_1'\mathcal{F}(\tau_1')^{-1}\right) < c(\mathcal{F})$ 的所需不等式，结论得证。

□

目标是证明，每个由正半扭转的幂构成的 Δ^2 分解都 Hurwitz 等价于一个（唯一的）标准分解（见定义 4.5）。首先，我们证明，每个由正半扭转的幂构成的 Δ^2 复杂度为零的分解都 Hurwitz 等价于一个（唯一的）标准分解。该陈述类似于引理 4.10 中关于由正半扭转构成的 Δ^2 复杂度为零的分解的结论。我们将分几个步骤证明这一陈述。

引理 4.30。设 $\mathcal{F}$ 是由正半扭转及正半扭转的平方构成的 Δ^2 分解。另假设 $\mathcal{F}$ 中至少有一个且至多有两个正半扭转的平方。如果复杂度$c(\mathcal{F}) = 0$，那么 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价于定义 4.5 中唯一的标准分解，且两者各类型因子的数量与 $\mathcal{F}$ 相同。

证明。首先，我们考虑分解 $\mathcal{F}$ 中有一个正半扭转的平方的情形。对 $\mathcal{F}$ 进行 Δ 的幂所给出的整体共轭后，我们可以假设 $\mathcal{F}$ 中的正半扭转的平方为 σ_1^2。若$1 \leq j \leq 5$，则定义 $\mathcal{F}_j$ 为 Δ^2 的一个分解，其中在第 j 个位置有一个正半扭转的平方 σ_1^2，并且将 $\mathcal{F}_j$ 的因子排列成一个圆圈时，σ_1^2 后面依次是因子 σ_2、σ_1、σ_1、σ_2 （顺时针或逆时针均可）。

例如，$\mathcal{F}_1 = \left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$（定义 4.5 中的标准分解）以及 $\mathcal{F}_2 = \left(\sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1, \sigma_1\right)$。假设 $c(\mathcal{F}) = 0$，且 $\mathcal{F}$是 Δ^2 的一个分解，这意味着对于某个 $1 \leq j \leq 5$，有 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_j$。我们将证明，对于每一对 j，$j' \in \{1, 2, \ldots, 5\}$，$\mathcal{F}_j$ 都与 $\mathcal{F}_{j'}$ Hurwitz 等价。

事实上，我们将证明 $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_3$ 和 $\mathcal{F}_4$ Hurwitz 等价；对于其他情况，对称的论证也同样适用。首先，我们对 Hurwitz 变换作如下两次复合

$$\mathcal{F}_1 \sim \left(\sigma_2, \sigma_1, (\sigma_2\sigma_1)^{-1}\sigma_1^2(\sigma_2\sigma_1), \sigma_1, \sigma_2\right) = \left(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2^2, \sigma_1, \sigma_2\right),$$

并且 $\mathcal{F}_3 = \left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1\right)$ 是对后一个分解施以 Δ整体共轭的结果。由此可推得， $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_3$Hurwitz 等价。其次，我们有如下 Hurwitz 变换的复合

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &\sim \left(\sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)\\ &\sim \left(\sigma_2, \sigma_1, \sigma_2, (\sigma_1\sigma_2)^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2(\sigma_1\sigma_2), \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)\\ &\sim \left(\sigma_2, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2, \sigma_2^2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)\end{aligned}$$

并且 $\mathcal{F}_4 = \left(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\right)$ 是对后一个分解施以 $\Delta\sigma_2$整体共轭的结果。由此可推得， $\mathcal{F}_1$ 与 $\mathcal{F}_4$Hurwitz 等价。

现在考虑分解 $\mathcal{F}$中有两个正半扭转的平方的情形。假设 $c(\mathcal{F}) = 0$，且 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个分解，这意味着 $\mathcal{F}$ 中不存在相邻的两个因子都是正半扭转的平方。由此可推得，对于某个 $\{i, i'\} = \{1, 2\}$，要么 $\mathcal{F} = \left(\sigma_i^2, \sigma_{i'}, \sigma_i^2, \sigma_{i'}\right)$，要么 $\mathcal{F} = \left(\sigma_{i'}, \sigma_i^2, \sigma_{i'}, \sigma_i^2\right)$。对 $\mathcal{F}$ 施以 Δ 的某个幂的整体共轭后，不妨设要么 $\mathcal{F} = \left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\right)$，要么 $\mathcal{F} = \left(\sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2\right)$。我们将证明，$\left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\right)$与 $\left(\sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2\right)$Hurwitz 等价。事实上，施以两次 Hurwitz 变换后， $\left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\right)$ 与 $\left(\sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1^2\sigma_2\right)$ Hurwitz 等价。最后，对后一个分解施以 σ_2 整体共轭，得到$\left(\sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2\right)$。

因此，该陈述得证。 □

现在，我们来确立Δ^2 的正半扭转幂的复杂度为零的分解所满足的基本约束。

引理 4.31. 设 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个分解，其为标准正半扭转幂的乘积。若 $n \geq 3$, 则标准正半扭转的 n次幂不能是 $\mathcal{F}$ 的因子。此外，分解 $\mathcal{F}$ 不能由三个因子构成，且这三个因子均为标准正半扭转的平方。

证明。若 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个分解，且其为标准正半扭转的幂的乘积，那么 $\mathcal{F}$ 的每个因子都具有 σ_i^n 的形式，其中 $i \in \{1, 2\}$ 且 $n \geq 1$ 为某个正整数。然而，若 $n \geq 3$, 则正辫 σ_i^n 不是正辫幺半群 B_3^+ 中 Δ^2 的因子。事实上，在这种情况下，我们有 $\omega(\sigma_i^n) = n \geq 3$；根据对偶性的定义（定义 3.3），$\Delta^{\omega(\sigma)}$ 是 Δ 的最小幂，且 σ 是 B_3^+ 中它的因子。我们

由此得出，若 $n \geq 3$，则标准正半扭转的 n 次幂不能是 $\mathcal{F}$ 中的因子。

最后， $\mathcal{F}$ 不可能由三个标准正半扭的平方因子组成，因为这类平方的乘积不可能等于 Δ^2。事实上，命题 3.1 表明，这类平方的乘积不能被 Δ 整除。因此，结论得证。

□

我们已经完整分类了 Δ^2 分解为标准正半扭转的幂的情形（在 Hurwitz 等价意义下）。

引理 4.32. 若 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 是 Δ^2 分解为标准正半扭转的幂的分解，则 $\mathcal{F}$ 与 $\mathcal{F}'$ Hurwitz 等价，当且仅当 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{F}'$ 中每种类型的因子数量相同。此外， Δ^2 分解为标准正半扭转的幂的分解中，标准正半扭的平方因子至多有两个，并且对于任意 $n \geq 3$，都不含标准正半扭转的 n 次幂因子。

证明。该结论可由引理 4.30 和引理 4.31 立即推出。

□

现在我们着重对 Δ^2 分解为正半扭转及正半扭转的平方的 Hurwitz 等价类进行分类。之后，我们将对 Δ^2 分解为正半扭转的幂的 Hurwitz 等价类进行分类，其中出现类型为 n 且具有 $n \geq 3$ 的因子。证明策略与第 4.2 小节中对 Δ^2 分解为正半扭转的 Hurwitz 等价类进行分类的策略非常相似。事实上，在证明过程中，我们将建立相应的技术性结论。首先，我们考虑最小复杂度分解中标准正半扭转的平方这一情形。（在引理 4.21 和引理 4.22 中，我们考虑了最小复杂度分解中的标准正半扭转。）

命题 4.33。我们采用带有 $k = 2$ 的设定 3.31，其中 g_2 是一个标准正半扭转的平方。若 $\mathcal{F}$ 是 $g_1 g_2$ 的一个最小复杂度分解，则 $\xi_1 \xi_2$ 要么不能被 Δ 整除，要么 $\mathcal{F} = \left(\sigma_{i_2'} \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2'}^{-1}, \sigma_{i_2'}^2\right)$，其中 $i_2 \neq i_2' \in \{1, 2\}$。

证明。假设 $\xi_1 \xi_2$ 能被 Δ 整除。在这种情况下， g_1 必须是一个非标准正半扭转的幂，因为 g_2 是一个标准正半扭转的平方。我们将证明 $\mathcal{F} = \left(\sigma_{i_2'} \sigma_{i_1}^{e_1} \sigma_{i_2'}^{-1}, \sigma_{i_2'}^2\right)$。

在设定 3.31 中，我们有 $\xi_2 = \sigma_{i_2}^2$，而命题 3.2 意味着 ξ_1 以不同生成元的乘积 $\sigma_{i_2} \sigma_{i_2'}$ 结尾，其中 $i_2 \neq i_2' \in \{1, 2\}$。事实上，命题 3.1 意味着 ξ_1 以 $\sigma_{i_2} \sigma_{i_2} \sigma_{i_2'}$ 结尾，因为 ξ_1 不可整除

根据 Δ。在设定 3.31 中，我们还有 $\xi_1 = \rho_1 \sigma_{i_1}^{e_1} \tau_1$，其中 ρ_1、$\tau_1 \in B_3^+$ 是非单位正辫，且 ρ_1 与 τ_1 互为对偶。

如果 $\omega(\tau_1) > 1$，那么 τ_1 也以 $\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$结尾。此外，引理 3.10 蕴含 ρ_1 以 $(\sigma_{i_2}\sigma_{i_2})_{(\omega(\tau_1))}$ 开头。如果 $\omega(\tau_1) > 1$，那么我们可以推知，$g_2^{-1} g_1 g_2$ 的 Garside 幂至少比 g_1的 Garside 幂小一，因为 $g_1 = \Delta^{-\omega(\tau_1)} (\xi_1)_{(\omega(\tau_1))}$ 且 $g_2 = \left(\sigma_{i_2}^2\right)_{(\omega(\tau_1))}$，如设定 3.31 所示。特别地，如果 $\omega(\tau_1) > 1$，那么分解 $\left(g_2, g_2^{-1} g_1 g_2\right)$的复杂度至少比 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 的复杂度小一。我们得出结论，$\omega(\tau_1) = 1$且 $\tau_1 = \sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$。现在我们有 $\rho_1 = \sigma_{i_2'}$和 $\xi_1 = \sigma_{i_2'}\sigma_{i_1}^{e_1}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$。因此，$g_1 = \sigma_{i_2'}\sigma_{i_1}^{e_1}\sigma_{i_2'}^{-1}$ 且 $g_2 = \sigma_{i_2'}^2$。 □

以下这个引理 4.16 的加强版，针对的是非标准正半扭转的平方，而不只是非标准正半扭转；它是刻画由正半扭转和正半扭转的平方构成的最小复杂度分解的一项重要技术步骤。

引理 4.34. 我们采用设定 3.31，其中 $k = 2$，且 g_1 和 g_2 是非标准正半扭转的幂。若 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 是 $g_1 g_2$的一个最小复杂度分解，则满足以下条件:

(i) 若 g_1 是非标准正半扭转或非标准正半扭转的平方，则 ξ_1 的最大右因子 ξ_1''，若其左对偶于 $\overline{\rho_2}$ 的一个左因子，则它是 $\overline{\tau_1}$的右因子。(ii) 若 g_2 是非标准正半扭转或非标准正半扭转的平方，则 ξ_2 的极大左因子 ξ_2''，若其右对偶于 $\overline{\tau_1}$ 的一个右因子，则它是 $\overline{\rho_2}$的左因子。

证明。我们证明 (i)，因为 (ii) 的证明类似。若 g_1 是非标准正半扭转，则该命题等价于引理 4.16 (i)，因此我们假设 g_1 是一个非标准正半扭转的平方。首先，引理 3.14 蕴含 ξ_1''是 ξ_1的切右因子。此外，命题 3.13 蕴含 ξ_1''是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，当且仅当 $\omega(\xi_1'') \leq \omega(\overline{\tau_1})$。

我们反设 $\omega(\xi_1'') > \omega(\tau_1)$。我们将对 $e_1 = 2$应用引理 4.8，并利用 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解这一假设。令 ρ_2'' 为 $\overline{\rho_2}$ 的左因子，且它与 ξ_1''右对偶。若 $\omega(\xi_1'') - \omega(\tau_1) \geq 2$，则由对 $e_1 = 2$应用引理 4.8 立即得到矛盾。若 $\omega(\xi_1'') - \omega(\tau_1) = 1$，则我们断言 ρ_2''是$\overline{\rho_2}$的切左因子，这蕴含了引理 4.8 陈述中的 $\epsilon \leq 0$。当然，在这种情况下，由对 $e_1 = 2$应用引理 4.8 也可得到矛盾。

我们来证明 ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$的切左因子。首先，命题 3 26 $\xi_1 = \overline{\rho_1}\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ $\overline{\rho_1}$ $\sigma_{i_1'}\sigma_{i_1}$ $i_1 \neq$. 意味着 并以，结尾，其 $i_1' \in \{1,2\}$ $\xi_1'' = \sigma_{i_1'}\overline{\tau_1}$ ξ_1'' 中。特别地，并以两个生成元的乘积开头

这两个生成元具有相同的指标。由引理 3.10 可知，ρ_2'' 现在以两个不同生成元的乘积结尾，因为 ξ_2'' 是 ρ_2'' 的左对偶。最后，由引理 3.9 可知，ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$ 的切左因子。

我们得出 $\omega(\xi_1'') \leq \omega(\overline{\tau_1})$。因此，该结论得以确立。

□

现在我们来证明引理 4.17 的一个加强版本，其中一个或两个因子是非标准正半扭转的平方，而不只是非标准正半扭转。证明与引理 4.17 完全相同，但依据的是引理 4.34，而非引理 4.16。

引理 4.35。采用设定 3.31，其中 $k = 2$，且对于每个 $j \in \{1, 2\}$，g_j 要么是非标准正半扭转，要么是非标准正半扭转的平方。设 $\mathcal{F}$ 是 $g_1 g_2$ 的一个最小复杂度分解。

在此情形下，ξ_1 的极大右因子 ξ_1'' 若与 ξ_2 的一个左因子左对偶，则它是切闭包 $\overline{\tau_1}$ 的右因子。此外，ξ_2 的极大左因子 ξ_2'' 若与 ξ_1 的一个右因子右对偶，则它是切闭包 $\overline{\rho_2}$ 的左因子。

最后，如果 g_2 是正半扭转，那么 ξ_1'' 不是 $\overline{\rho_2}$ 的左对偶；如果 g_1 是正半扭转，那么 ξ_2'' 不是 $\overline{\tau_1}$ 的右对偶。

证明。引理 4.17 的证明同样适用于 g_1 或 g_2（或两者）是非标准正半扭转的平方的情形。唯一的改动是：每次应用引理 4.16 时，都改为应用引理 4.34。

□

我们指出，在引理 4.35 的陈述中，如果 g_2 是正半扭转的平方，那么 ξ_1'' 可能是 $\overline{\rho_2}$ 的左对偶；类似地，如果 g_1 是正半扭转的平方，那么 ξ_2'' 可能是 $\overline{\tau_1}$ 的右对偶。事实上，如果 g_2 是正半扭转的平方，那么命题 3.26 蕴含 $\overline{\rho_2}$ 后面不会接着出现 ξ_2 中的两个不同生成元的乘积，而命题 3.16 并未排除 ξ_1'' 是 $\overline{\rho_2}$ 的左对偶的可能性。另一方面，如果 g_2 是正半扭转，那么 $\overline{\rho_2}$ 后面接着出现两个不同生成元的乘积，且命题 3.16 蕴含 ξ_1'' 不是 $\overline{\rho_2}$ 的左对偶（如引理 4.17 的证明所示）。

事实上，这一点值得注意。否则，将 Δ^2 分解为正半扭转和正半扭转平方的分解分类证明，会与将 Δ^2 分解为正半扭转的分解分类证明（定理 4.23）非常相似。主要区别在于，定理 4.23 的证明中每次应用引理 4.17，都要改为应用引理 4.35；此外，我们还必须借助命题 4.33 来处理分解中的标准正半扭转平方。

我们将使用以下技术性陈述来处理引理 4.35 陈述中更一般结论不成立的情况，并据此调整定理 4.23 的证明，使其适用于当前情形。

引理 4.36。我们采用设定 3.31，其中 $k = 3$。假设对于每个 $j \in \{1,3\}$，g_j 要么是非标准正半扭转，要么是非标准正半扭转的平方，而 g_2 是非标准正半扭转的平方。若 $j \in \{1,2\}$，则令 ξ_j'' 为 ξ_j 的最大右因子，且它是某个 ξ_{j+1} 的左因子的左对偶。将 ξ_{j+1} 中相关的左因子记为 χ_j''。将正辫 ξ_1'、$\xi_3' \in B_3^+$ 分别记为 $\xi_1 = \xi_1'\xi_1''$ 和 $\xi_3 = \chi_2''\xi_3'$。

假设 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$、$\chi_1'' = \overline{\rho_2}$、$\xi_2'' = \overline{\tau_2}$ 的右因子，且 χ_2'' 是 $\overline{\rho_3}$ 的左因子。令 ξ_1''' 为 ξ_1' 的最大右因子，使得 ξ_1''' 是 $(\sigma_{i_2})^{(\omega(\tau_2))}\ \xi_3'$ 的某个左因子的左对偶。将 $(\sigma_{i_2})^{(\omega(\tau_2))}\ \xi_3'$ 中相关的左因子记为 $(\sigma_{i_2})^{(\omega(\tau_2))}\ \xi_3'''$。

如果 $\xi_1'''\xi_1''$ 是 ξ_1 的右因子，但不是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，或者 $\chi_2''\xi_3'''$ 是 $\overline{\rho_3}$ 的左因子，但不是 $\overline{\rho_3}$ 的左因子，则以下陈述成立：

(i) 先对 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_2, g_2^{-1}g_1g_2, g_3\right)$ 施行 Hurwitz 变换，再对第二和第三个因子施行 Hurwitz 变换，这一复合不会增加分解的复杂度。(ii) 先对 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_1, g_2g_3g_2^{-1}, g_2\right)$ 施行 Hurwitz 变换，再对第一个和第二个因子施行 Hurwitz 变换，这一复合不会增加分解的复杂度。

证明。我们假设 $\xi_1'''\xi_1''$ 是 ξ_1 的右因子，但不是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，并证明 (i)。其他情形的证明类似。引理 4.8 的（对称版本）结合 $e_2 = 2$ 可知，Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_2, g_2^{-1}g_1g_2, g_3\right)$ 会使分解的复杂度增加一，因为 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 和 $\chi_1'' = \overline{\rho_2}$ 的切右因子。然而，假设 $\xi_1'''\xi_1''$ 不是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，这意味着引理 4.35 第一条陈述的结论不适用于 $\left(g_2, g_2^{-1}g_1g_2, g_3\right)$ 中的第二和第三个因子。事实上，这可由引理 3.32 的（对称版本）推出，该引理确定了 $g_2^{-1}g_1g_2$ 的 Garside 标准形。根据引理 4.35 的逆否命题，我们可以对分解 $\left(g_2^{-1}g_1g_2, g_3\right)$ 施行降低复杂度的 Hurwitz 变换。因此，结论得证。

□

我们将调整定理 4.23 的证明，使其适用于当前情形。为限制那些为正半扭转的平方的因子，我们将使用以下关于 Δ^2 分解为正半扭转和正半扭转的平方的最小复杂度的预备性结论。

定理 4.37。我们采用设定 3.31。假设 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 分解为正半扭转和正半扭转的平方的一种最小复杂度分解，并且 $\mathcal{F}$ 中至少有一个因子是正半扭转的平方。在这种情况下，对某个 $1 \leq j \leq k$，因子 g_j 是标准正半扭转的平方，并且 $\xi_{j-1}\xi_j$ 或 $\xi_j\xi_{j+1}$ 可被 Δ 整除。

证明。假设结论不成立。我们将导出矛盾，其证明与定理 4.23 的证明非常相似，但会作一些调整，下面将对此作出说明。经过可能的替换，我们可以假设分解 $\mathcal{F}$ 满足引理 4.20 中的条件；替换时使用另一个复杂度最小的分解（如定理 4.23 的证明所示）。我们采用设定 3.31，并有等式 $\Delta^{\omega_k+2} = \xi_1\xi_2\cdots\xi_k$。此外，如果$1 \leq j \leq k$，那么对于$\xi''_j$、$\chi''_j$、$\omega''_j$和 ζ_j，我们采用定理 4.23 证明中的记号。不过，我们将 $J \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ 定义为所有满足g_j 是标准正半扭转或标准正半扭转的平方的$1 \leq j \leq k$ 的集合，而不只是所有满足g_j 是标准正半扭转的 $1 \leq j \leq k$的集合（后者是定理 4.23 证明中J 的定义）。

我们还应用引理 4.35，而非引理 4.17（如定理 4.23 的证明中那样），以得出对于每个 $1 \leq j \leq k$，ζ_j 都不是恒等辫。我们简要阐述这一点。若 $1 \leq j \leq k$，则引理 4.35 表明，χ''_{j-1} 是 $\overline{\rho_j}$ 的左因子，且 ξ''_j 是 $\overline{\tau_j}$的右因子；但当 g_j 是一个非标准正半扭转的平方时，我们未必能得出 χ''_{j-1} 是 $\overline{\rho_j}$ 的真左因子。不过，如果 g_j 是一个非标准正半扭转的平方，那么命题 3.26 表明 $\xi_j = \overline{\rho_j}\sigma_{i_j}\overline{\tau_j}$。另一方面，如果 g_j 是一个非标准正半扭转，此时 $\xi_j = \overline{\rho_j\tau_j}$，则引理 4.17（如定理 4.23 的证明中那样）表明 χ''_{j-1} 是 $\overline{\rho_j}$ 的真左因子。根据定义 ζ_j 的方程 $\xi_j = \chi''_{j-1}\zeta_j\xi''_j$，我们现在得出，对于每个 $1 \leq j \leq k$，ζ_j 都不是恒等辫。

我们也有相同的等式

$$\xi_1\xi_2\cdots\xi_k = \left[\prod_{j=1}^{k} (\zeta_j)_{(\omega''_j)}\right] \Delta^{\omega''_k},$$

与定理 4.23 的证明中一样。如果 g_j 是一个非标准正半扭转的平方，而 ζ_j 不是 Artin 生成元，那么定理 4.23 的证明同样表明，这个表达式就是 $\xi_1\xi_2\cdots\xi_k$ 的 Garside 标准形。

事实上，在这种情况下，假设不存在 $1 \leq j \leq k$ 使得g_j 是标准正半扭转的平方，且 $\xi_{j-1}\xi_j$ 或$\xi_j\xi_{j+1}$ 可被 Δ整除；利用引理 3.20可知，$\prod_{j=1}^{k} (\zeta_j)_{(\omega''_j)}$不可被 Δ整除。这个论证中的一个重要之处是，

若g_j 是非标准正半扭转，且 ζ_j 是一个 Artin 生成元，则$(\zeta_{j-1})(\omega''_{j-1})$中最后一个生成元的指标等于$(\zeta_j)(\omega''_j)$中第一个生成元的指标。

另一方面，如果当g_j 是非标准正半扭转的平方时， ζ_j 是一个 Artin 生成元，那么$(\zeta_j)(\omega''_j)$的指标可能不同于$(\zeta_{j-1})(\omega''_{j-1})$中最后一个生成元的指标以及$(\zeta_{j+1})(\omega''_{j+1})$中第一个生成元的指标。若情况如此，则乘积$(\zeta_{j-1})(\omega''_{j-1})$ $(\zeta_j)($ $\omega''_j)$ $(\zeta_{j+1})(\omega''_{j+1})$可被 Δ整除，因此乘积$\prod_{j=1}^{k}(\zeta_j)(\omega''_j)$也可被 Δ整除。现在我们相应地调整定理 4.23 的证明，以处理这种情况。事实上，我们断言，在任何情况下， $\prod_{j=1}^{k}(\zeta_j)(\omega''_j)$都不是 Δ 的幂，这与等式 $\Delta^{\omega_k+2}=\xi_1\xi_2\cdots\xi_k$矛盾。我们根据分解 $\mathcal{F}=(g_1,g_2,\ldots,g_k)$中正半扭转的平方的数量来分别论证。如果当$g_j$ 是非标准正半扭转的平方时， ζ_j 不是 Artin 生成元，那么我们已经证明了这一断言（实际上，还证明了更强的结论，即 $\prod_{j=1}^{k}(\zeta_j)(\omega''_j)$不能被 Δ整除）。特别地，我们将假设，对于某个 $1\le j\le k$，当g_j 是非标准正半扭转的平方时， ζ_j 是一个 Artin 生成元。

首先，我们考虑 $\mathcal{F}$ 中恰有一个正半扭的平方的情形，并令 g_j 为正半扭的平方。定理 4.23 的证明同样表明， $\prod_{j'=1}^{j-1}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}$ 和 $\prod_{j'=j+1}^{k}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}$ 不能被 Δ 整除。此外，如定理 4.23 的证明所示，命题 3.16 (i) 表明，若 $\chi''_{j-2}=\rho_{j-1}\neq\overline{\rho_{j-1}}$，则 $(\zeta_{j-2})(\omega''_{j-2})$ 的最后一个生成元的指标与 $(\zeta_{j-1})(\omega''_{j-1})$ 的第一个生成元的指标相同。我们假设 ζ_j 是一个 Artin 生成元，特别是， $\left(\prod_{j'=1}^{j-1}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}\right)(\zeta_j)(\omega''_j)$ 与 $\prod_{j'=j+1}^{k}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}$ 对偶（即， $\left(\prod_{j'=1}^{j-1}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}\right)(\zeta_j)(\omega''_j)$ 不能被 Δ 整除）。当然，若 $j=1$, 则 ζ_j 不是 Artin 生成元，因为 $\xi_1=\zeta_1\xi''_1$，且 ξ''_1 是$\overline{\tau_1}$的右因子。假设在所有与 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价且复杂度与 $\mathcal{F}$ 相同的分解中，正半扭的平方 g_j 位于最左侧（即，j 最小）。我们有 $j>1$。若 ζ_j 是一个 Artin 生成元，则引理 4.35 表明 $\chi''_{j-1}=\overline{\rho_j}$ 且 $\xi''_j=\overline{\tau_j}$。

尤其是，如果 $\chi''_{j-2}=\rho_{j-1}\neq\overline{\rho_{j-1}}$，则 $(\zeta_{j-2})(\omega''_{j-2})$ 中最后一个生成元的指标等于 $(\zeta_{j-1})(\omega''_{j-1})$ 中第一个生成元的指标；如果 $\xi''_{j+1}=\overline{\tau_{j+1}}$，则 $($ $\zeta_{j+1})(\omega''_{j+1})$ 中最后一个生成元的指标等于 $(\zeta_{j+2})(\omega''_{j+2})$ 中第一个生成元的指标（这也是命题 3.16 的推论），

以及 $\left(\prod_{j'=1}^{j-1}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}\right)(\zeta_j)(\omega''_j)$ 与 $\prod_{j'=j+1}^{k}\left(\zeta_{j'}\right)_{\left(\omega''_{j'}\right)}$ 互为对偶这一事实，意味着三元组 (g_{j-1}, g_j, g_{j+1}) 满足引理 4.36 的假设。

由此可得，存在一系列 Hurwitz 变换，可将分解中的正半扭转的平方 g_j 移至第 $j-1$ 位，同时不改变分解的复杂度。当然，这与正半扭转的平方 g_j 位于最左端这一假设矛盾，因此当 $\mathcal{F}$ 中恰有一个正半扭转的平方时，命题得证。

其次，我们考虑 $\mathcal{F}$ 中有两个正半扭转的平方的情形。命题 4.3 意味着 $k = 4$。此外，在这种情形下， ζ_1 和 ζ_4 都不是 Artin 生成元，除非 g_1 或 g_4 分别是标准正半扭转（因为我们假设结论不成立，以导出矛盾）。然而，我们假设，当 g_j 是某个非标准正半扭转的平方时，对某个 $1 \leq j \leq k$，ζ_j 是 Artin 生成元。特别地，与前一种情形相同的论证表明，若某个正半扭转的平方位于 $\mathcal{F}$ 的一端，那么我们可以通过一系列 Hurwitz 变换，将另一个正半扭转的平方 g_j 移至 $\mathcal{F}$ 的另一端，同时不改变分解的复杂度（根据我们的假设，ζ_j 是 Artin 生成元）。然而，若 $\mathcal{F}$ 中的两个正半扭转的平方都位于 $\mathcal{F}$ 的两端，则会产生矛盾，因为 ζ_1 和 ζ_4 都不可能是 Artin 生成元。

现在假设 $\mathcal{F}$ 中两个正半扭转的平方都位于 $\mathcal{F}$ 的中间。如果对于每个 $j \in \{1,2,3,4\}$，g_j 都是一个非标准正半扭转的幂，并且对于每个 $j \in \{1,2,3\}$，$\xi_j\xi_{j+1}$ 都可被 Δ 整除，那么引理 4.29 表明，我们可以对 $\mathcal{F}$ 应用降低复杂度的全局共轭变换，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解这一假设矛盾。然而，在所有其他情况下，定理 4.23 的证明仍然成立，因为我们在证明开头假设了结论不成立。事实上，如果 $\xi_2\xi_3$ 不能被Δ 整除，那么对于每个 $1 \leq j \leq 4$，ζ_j 都不是 Artin 生成元，这就产生了矛盾。此外，如果 g_1 是标准正半扭转，那么引理 4.21 表明 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ 整除；如果 g_4 是标准正半扭转，那么引理 4.21 表明 $\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ 整除。因此，基于结论不成立这一假设，我们推断 g_2 和 g_3 都是非标准正半扭转的平方，并且 $\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ 整除。

如果 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ整除，那么 ζ_2 就不是 Artin 生成元，因此我们可以推得 ζ_3 是 Artin 生成元。在这种情况下，引理 4.36 表明，我们可以通过两次 Hurwitz 变换将 g_2 移到 $\mathcal{F}$ 的最右端，同时不改变 $\mathcal{F}$的复杂度。不过，我们已经

讨论过正半扭转的平方之一位于分解末尾的情形，并由此得到了矛盾。如果 $\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ整除，也可采用类似的论证；至此，在 $\mathcal{F}$中恰有两个正半扭转的平方的情形下，该结论得以证明。

最后，我们考虑 $\mathcal{F}$ 中存在三个正半扭转的平方的情形。在这种情况下，命题 4.3 蕴含 $k = 3$。首先，我们将证明 $\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ 整除。事实上，反设 $\xi_1\xi_2$ 和 $\xi_2\xi_3$ 都能被 Δ 整除。在这种情况下，证明开头关于结论不成立的假设意味着，对于每个 $j \in \{1, 2, 3\}$，g_j 都是一个非标准正半扭转的平方。然而，如果对于每个 $j \in \{1, 2, 3\}$，g_j 都是一个非标准正半扭转的平方，那么由引理 4.29 可知，我们可以对 $\mathcal{F}$ 应用降低复杂度的全局共轭变换，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解的假设矛盾。由此可推知，$\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ 整除。如果 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ 整除，那么 $\xi_1\xi_2\xi_3 = \xi_1\zeta_2(\zeta_3)(\omega_3'')^{\Delta^\omega}(\xi_2'')$ 就是 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 的 Garside 标准形，这与 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 是 Δ 的幂这一事实矛盾。若 $\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ 整除，也可作类似论证；由此便证明了当 $\mathcal{F}$ 中恰有三个正半扭转的平方时，该结论成立。

当然，命题 4.3 意味着，$\mathcal{F}$ 中正半扭转的平方的数量是 $\{1, 2, 3\}$的一个元素。因此，在所有情况下我们都得出了矛盾，论断得证。

□

现在我们证明，定理 4.37 中的结论足以唯一确定由正半扭转和正半扭转的平方构成的 Δ^2 的分解的 Hurwitz 等价类。

定理 4.38。我们采用设定 3.31，并假设 $\mathcal{F}$ 是由正半扭转和正半扭转的平方构成的 Δ^2 的一个分解。此外，假设对于某个 $1 \leq j \leq k$，因子 g_j 是一个标准正半扭的平方，并且 $\xi_{j-1}\xi_j$ 或 $\xi_j\xi_{j+1}$ 能被 Δ 整除。在这种情况下，$\mathcal{F}$ 与标准分解（见定义 4.5）Hurwitz 等价，且两者中每种类型的因子数量相同。

证明。若 $\mathcal{F}$ 中没有因子是正半扭转的平方，则该结论由定理 4.23 得出。设 $\mathcal{F}$ 中至少有一个因子是正半扭转的平方。若 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是正半扭转的平方，则我们将证明 $\mathcal{F}$ 与 $(\sigma_1^2、\ \sigma_2、\ \sigma_1、\ \sigma_1、\sigma_2)$ Hurwitz 等价。若 $\mathcal{F}$ 中恰有两个因子是正半扭转的平方，则我们将证明 $\mathcal{F}$ 与 $(\sigma_1^2、\ \sigma_2、\ \sigma_1^2、\ \sigma_2)$ Hurwitz 等价。若 $\mathcal{F}$ 中恰有三个因子是正半扭转的平方，则我们将证明 $\mathcal{F}$ 与 $(\sigma_1^2、\ \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1、\ \sigma_2^2)$ Hurwitz 等价。当然，命题 4.3 表明

这些就是分解 $\mathcal{F}$ 中正半扭转的平方的数量可能出现的所有情况。

反设 $\mathcal{F}$ 是满足假设且复杂度最小的一个分解，但它不 Hurwitz 等价于标准分解。由引理 4.32 可知，复杂度 $c(\mathcal{F}) > 0$。我们考察 $\mathcal{F}$ 中的因子 g_j，它是某个标准正半扭转的平方，且 $\xi_{j-1}\xi_j$ 或 $\xi_j\xi_{j+1}$ 可被 Δ 整除。对 $\mathcal{F}$ 施加 Δ 的某个幂所对应的全局共轭变换后，可将其写为 $g_j = \sigma_1^2$。不妨设 $\xi_j\xi_{j+1}$ 可被 Δ 整除，因为另一种情形的证明类似。在这种情况下，g_{j+1} 是一个非标准正半扭转的幂。我们分别考察 g_{j+1} 是非标准正半扭转，以及 g_{j+1} 是非标准正半扭转的平方这两种情形。

首先，我们考虑 g_{j+1} 是非标准正半扭转的情形。在这种情况下，命题 4.33 蕴含 $g_{j+1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1$ 和乘积 $g_j g_{j+1} = \Delta$。特别地，命题 4.19 蕴含，我们可以通过一系列有限的 Hurwitz 变换，将这一对相邻因子 $(g_j,\ g_{j+1})$ 移到分解 $\mathcal{F}$ 的开头，而且不改变分解的复杂度。因此，我们可以假设 $j = 1$ 和$\mathcal{F} = \big(\sigma_1^2、\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1、\ \dots\big)$。现在，通过考察 $\mathcal{F}$ 中除前两个因子以外的所有因子，我们得到 Δ 的一个分解 $\mathcal{F}'$，其中包含正半扭转和正半扭转的平方。我们根据 $\mathcal{F}'$ 中每种类型因子的数量分情况讨论。

如果 $\mathcal{F}'$ 中有三个正半扭转，那么 $\mathcal{F}' = (g_3,\ g_4,\ g_5)$，而定理 4.23 蕴含 $\mathcal{F}'$ 与 Δ 的标准分解 $(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_1)$ Hurwitz 等价。由此可得，$\mathcal{F}$ 与 Δ^2 的分解 $\big(\sigma_1^2,\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_1\big)$ Hurwitz 等价。对后一分解中的第四和第五个因子再施行一次 Hurwitz 变换，可知 $\mathcal{F}$ 与 $\big(\sigma_1^2,\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1,\ \sigma_1,\ \sigma_1,\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\big)$ Hurwitz 等价。最后，通过 σ_1 施行全局共轭变换，可知 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\big(\sigma_1^2,\ \sigma_2,\ \sigma_1,\ \sigma_1,\ \sigma_2\big)$ Hurwitz 等价，这就产生了矛盾。

如果 $\mathcal{F}'$ 中有一个正半扭的平方，那么根据命题 4.3，$\mathcal{F}' = (g_3, g_4)$ 是 Δ 的一个分解，其中包含一个正半扭的平方和一个正半扭。此外，$\mathcal{F}'$ 是 Δ 的一个复杂度最小的分解。命题 4.33 现在推出 $\mathcal{F}' = \big(\sigma_i^2, \sigma_i^{-1}\sigma_{i'}\sigma_i\big)$，其中 $i \neq i' \in \{1, 2\}$，并且可以先对 $\mathcal{F}'$ 中的因子施加一次 Hurwitz 变换以交换它们的位置（这取决于 g_3 还是 g_4 是标准正半扭的平方）。特别地，$\mathcal{F} = \big(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_i^2, \sigma_i^{-1}\sigma_{i'}\sigma_i\big)$。

如果 $i = 1$，那么通过对 $\mathcal{F}$ 进行 σ_1 的整体共轭可知，$\mathcal{F}$ Hurwitz 等价于标准分解 $\big(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\big)$，这就产生了矛盾。如果 $i = 2$，那么 $\mathcal{F} = \big(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_2^2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\big)$。我们有如下

对分解 $\mathcal{F}$ 施加的一串有限 Hurwitz 变换：

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &\sim \left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}, \sigma_2^2\right)\\ &\sim \left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_2^2\right)\\ &\sim \left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\right).\end{aligned}$$

第一个 Hurwitz 等价是通过对 $\mathcal{F}$ 中的第三个和第四个因子应用 Hurwitz 变换得到的。第二个 Hurwitz 等价是通过对第二个分解中的第二个和第三个因子应用 Hurwitz 变换得到的。第三个 Hurwitz 等价是通过对第三个分解中的第三个和第四个因子应用 Hurwitz 变换得到的。最后，对第四个分解应用由 σ_1 给出的全局共轭变换，表明 $\mathcal{F}$ 与 $\left(\sigma_1^2, \sigma_2, \sigma_1^2, \sigma_2\right)$ Hurwitz 等价，这就产生了矛盾。对于 g_{j+1} 是非标准正半扭转的情形，我们已经考虑了 $\mathcal{F}$ 的所有可能性。

其次，我们考虑 g_{j+1} 是非标准正半扭转的平方的情形。在这种情况下，命题 4.33 意味着 $g_{j+1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1$ 4 3 。

当然，命题 . 意味着： $\mathcal{F}$ 中要么有三个正半扭转的平方，要么 $\mathcal{F}$ 中有两个正半扭转的平方（g_j 和 g_{j+1}），且 $\mathcal{F}$ 中有两个正半扭转。我们分别考虑这些子情形。如果 $\mathcal{F}$ 中有三个正半扭转的平方，那么方程 $g_j g_{j+1} = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1$ 唯一确定第三个因子，因为 $\Delta^2 = g_1 g_2 g_3$。事实上，如果 $j = 1$，那么第三个因子 $g_3 = \sigma_2^2$，且 $\mathcal{F} = \left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1, \sigma_2^2\right)$ 是标准分解。如果 $j = 2$，那么第三个因子 $g_1 = \sigma_2^2$，且 $\mathcal{F} = \left(\sigma_2^2, \sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1\right)$。然而，在这种情况下，对 $\mathcal{F}$ 中的第一个和第二个因子应用 Hurwitz 变换，表明 $\mathcal{F}$ 与 $\left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-2}\sigma_2^2\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1\right)$ Hurwitz 等价。若对后一个分解应用由 σ_1 给出的全局共轭变换，则可见 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\left(\sigma_1^2, \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1, \sigma_2^2\right)$ Hurwitz 等价，这就产生了矛盾。

另一方面，如果 $\mathcal{F}$ 中有两个正半扭转的平方，那么 $\mathcal{F}$ 有四个因子，其中这两个正半扭转的平方分别为 g_j 和 g_{j+1}。我们分别根据 $\mathcal{F}$ 中的两个正半扭转的平方是位于 $\mathcal{F}$ 的一端，还是位于 $\mathcal{F}$ 的中间，对各个子情形进行考察。如果这两个正半扭转的平方位于 $\mathcal{F}$ 的一端，那么不失一般性，可以假设 $j = 3$；在这种情况下，$g_3 = \sigma_1^2$ 和 $g_4 = \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1$（若 $j = 1$，证明类似）。如果 $j = 3$，且 g_1 和 g_2 是标准正半扭转，那么 $\xi_1 = \sigma_2 = \xi_2$，因为 $g_3 g_4 = \sigma_1\sigma_2^2\sigma_1$ 和 $g_1 g_2 g_3 g_4 = \Delta^2$。在这种情况下，通过对第二个和第三个因子应用一次 Hurwitz 变换，$\mathcal{F} = \left(\sigma_2、\ \sigma_2、\ \sigma_1^2、\ \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1\right)$ 与 $\left(\sigma_2、\ \sigma_2\sigma_1^2\sigma_2^{-1}、\ \sigma_2、\ \sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1\right)$ Hurwitz 等价。然而，对后一个分解应用由 σ_2^{-1} 给出的全局共轭变换，可知 $\mathcal{F}$ 与 $\left(\sigma_2、\ \sigma_1^2、\ \sigma_2、\ \sigma_1^2\right)$ Hurwitz 等价，因为 $\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\Delta\sigma_1 = \sigma_1^2$。显然，这就产生了矛盾，

因此我们得出结论， g_1 或 g_2 至少有一个是非标准正半扭转。特别地，$g_2 \neq \sigma_2$，因为否则方程 $g_1 g_2 g_3 g_4 = \Delta^2$ 将推出 $g_1 = \sigma_2$。

如果 $\xi_2 \xi_3$ 可被 Δ整除，那么我们面对的就是已经考虑过的情形。事实上，在这种情况下， g_2 和 g_3 构成一对相邻因子，其中一个因子是非标准正半扭转（g_2），另一个因子是标准正半扭转的平方（g_3）。特别地，我们可以假设 $\xi_2 \xi_3$ 不可被 Δ整除。根据设定 3.31 中的记号，有 $\xi_3 \xi_4 = \left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))} \Delta$。我们声称，$\xi_2 \left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)_{\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2)}$不可被 Δ整除。否则， ξ_2 就以 $(\sigma_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 结尾。当然，$\xi_2 \neq (\sigma_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$，否则便会有 $g_2 = \sigma_2$ （根据设定 3.31 中的记号），而这已被排除。此外， ξ_2 不以 $(\sigma_1 \sigma_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 结尾，因为 $\xi_2 \xi_3$ 不可被 Δ整除（并且根据设定 3.31 中的记号，有 $\xi_3 = \left(\sigma_1^2\right)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$）。由此可知， ξ_2 以 $(\sigma_2 \sigma_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 结尾，而命题 3.26 蕴含 $\overline{\tau_2}$ 也以 $(\sigma_2 \sigma_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 结尾。特别地，引理 3.9 蕴含 $\overline{\tau_2}$ 末尾的 $(\sigma_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 是 $\overline{\tau_2}$的一个切右因子，而命题 3.27 蕴含 $\overline{\rho_2}$ 以 $(\sigma_1 \sigma_2)_{(\omega(\tau_1))}$ 开始。我们推得，$\left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)^{-1} g_2 \left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_2的 Garside 幂的绝对值，因为 $g_2 = \Delta^{-\omega(\tau_2)} (\xi_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$ 且 $\omega\left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right) = 2$。

当然， $g_3 g_4 = \sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1$。由此可知，两个 Hurwitz 变换的复合（$g_1, g_2, g_3, g_4$） $\rightarrow \left(g_1, g_3, g_4, g_4^{-1} g_3^{-1} g_2 g_3 g_4\right)$ 降低了该分解的复杂度，这与假设 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解相矛盾。因此，我们的断言成立，并且 $\xi_2 \left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$不能被 Δ整除。

令 ξ_1'' 为 ξ_1 的最大右因子，且它是某个 ξ_2 左因子的左对偶。令 χ_1'' 为 ξ_2 中相关的左因子，并写作 $\xi_1 = \xi_1' \xi_1''$ 和 $\xi_2 = \chi_1'' \chi_1'$。引理 4.17 表明， ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，且 χ_1'' 是 $\overline{\rho_2}$的左因子。由此可知， $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ 的 Garside 标准形为 $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4 = \xi_1' (\chi_1')_{(\omega(\xi_1''))} \left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2)+\omega(\xi_1''))} \Delta^{\omega(\xi_1'')+1}$，这与假设 $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ 是 Δ 的幂相矛盾。因此，两个正半扭转的平方不位于 $\mathcal{F}$ 的末端。

然而，如果两个正半扭转的平方位于$\mathcal{F}$的中间，那么 $j = 2$，此时 $g_2 = \sigma_1^2$ 和 $g_3 = \sigma_1^{-1} \sigma_2^2 \sigma_1$。在这个子情形中，我们将通过一个与刚刚考察的子情形 $j = 3$ 仅略有不同的论证得出矛盾。

如果 $\xi_1 \xi_2$ 可被 Δ整除，那么我们遇到的情形便是之前已经讨论过的。事实上，在这种情况下， g_1 和 g_2 构成一对相邻因子，其中一个因子是非标准正半扭转（g_1），另一个因子是标准正半扭转的平方（g_2）。特别地，我们可以假设 $\xi_1 \xi_2$ 不能被 Δ整除。在这种情况下，$\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \xi_1 \left(\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_1\right)_{(\omega(\tau_1))} \Delta$。

此外，$\xi_1\left(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1\right)_{(\omega(\tau_1))} \in B_3^+$是一个不能被 Δ 整除的正辫，理由与我们刚刚讨论的子情形 $j=3$ 相同。

如果 $\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ整除，那么 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 的 Garside 标准形为 $\xi_1\left(\sigma_1\sigma_2^2\sigma_1\right)_{(\omega(\tau_1))}(\xi_4)_{(1)}\Delta$，这与 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ的幂这一假设矛盾。特别地，我们可以假设 $\xi_3\xi_4$ 能被 Δ整除，而引理 4.21 表明 g_4 不是标准正半扭转，因为 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解。令 ξ_3'' 为 ξ_3 的最大右因子，且它是 ξ_4的某个左因子的左对偶。令 χ_3'' 为 ξ_4 的相关左因子，并写作 $\xi_3=\xi_3'\xi_3''$ 和 $\xi_4=\chi_3''\chi_3'$。引理 4.35 表明 ξ_3'' 是 $\overline{\tau_3}$ 的右因子，且 χ_3'' 是 $\overline{\rho_4}$的左因子。引理 3.14 表明 ξ_3''是 ξ_3的切右因子；又由于 ξ_3'' 不是恒等辫，我们可推出 $\xi_3''=(\sigma_2\sigma_1)_{(\omega(\tau_1)+1)}$（采用设定 3.31 中的记号）。此外，在这种情况下，$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 的 Garside 标准形为 $\xi_1(\sigma_1\sigma_2)_{(\omega(\tau_1))}\ \chi_4'\Delta^2$，这也与 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂这一假设矛盾。因此，这两个正半扭转的平方不在 $\mathcal{F}$的中间。

因此，所有情况下都导出了矛盾，命题得证。

□

我们来总结本小节的结果。

定理 4.39. 若 $\mathcal{F}$ 是由正半扭转及正半扭转的平方构成的 Δ^2 的一个分解，则 $\mathcal{F}$ 与标准分解（见定义 4.5）Hurwitz 等价，且两者中每种类型因子的数量都与 $\mathcal{F}$ 相同。

证明. 该结论直接由定理 4.37 和定理 4.38 得出。

□

我们给出定理 4.39 的几何表述。

定理 4.40. 若 C、$C'\subseteq\mathbb{CP}^2$ 是三次节点Hurwitz曲线，则C 与 C' 同痕，当且仅当 C 中节点的数量等于 C' 中节点的数量。

证明。三次节点Hurwitz曲线的辫单值分解是 Δ^2 的正半扭转及正半扭转的平方的分解。此外，该曲线的辫单值分解的 Hurwitz 等价类完全确定了该曲线的同痕类。

节点型 Hurwitz 曲线中的节点数量，等于该曲线的辫单值分解中由正半扭转的平方构成的因子数量。特别地，定理 4.39 表明，C 的辫单值分解与 C' 的辫单值分解 Hurwitz 等价，当且仅当 C 中的节点数量等于 C' 中的节点数量。因此，该命题得证。

□

本小节的下一步是证明，在 $\mathbb{CP}^2$ 中，恰有一个尖点且没有其他奇点的三次简单 Hurwitz 曲线只有一个同痕类。在第4.4小节中，我们将证明，至少有一个尖点的三次简单 Hurwitz 曲线恰有一个尖点且没有其他奇点。特别地，这将完成对 $\mathbb{CP}^2$中三次尖点赫尔维茨曲线同痕类的分类。

我们将证明， Δ^2 分解为一个正半扭转的立方和三个正半扭转时，存在唯一的 Hurwitz 等价类。首先，我们对最小复杂度分解中的标准正半扭转的立方给出一个刻画。

命题 4.41。我们采用设定 3.31，其中 $k=2$，且 g_1 是一个非标准正半扭转， g_2 是一个标准正半扭转的立方。若 $\mathcal{F}$ 是 g_1g_2 的一个最小复杂度分解，则以下条件恰有一个成立：

(i) 若 ξ_1'' 是 ξ_1 的最大右因子，且它与 ξ_2 的一个左因子左对偶，则 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，并且 $\omega(\xi_1'') \leq 1$。(ii) 分解 $\mathcal{F}=\left(\sigma_{i_2'}\sigma_{i_1}\sigma_{i_2'}^{-1},\sigma_{i_2'}^3\right)$，其中 $i_2 \neq i_2' \in \{1,2\}$，并且$g_1g_2=\sigma_{i_2}\Delta$。

证明。当然，引理 3.14 意味着 ξ_1'' 是 ξ_1的切右因子。假设 ξ_1'' 不是 $\overline{\tau_1}$的右因子。在这种情况下，命题 3.13 意味着 $\omega(\xi_1'') > \omega(\overline{\tau_1})$。我们有 $\xi_2=\sigma_{i_2}^3$（采用设定 3.31 中的记号），尤其是 $\omega(\xi_1'') \leq \omega(\xi_2)=3$。命题 3.26 意味着 $\xi_1=\overline{\rho_1\tau_1}$，其中 ρ_1、$\tau_1 \in B_3^+$是非单位正辫，且 ρ_1 是 τ_1的左对偶，因为 g_1 是非标准正半扭转。由此可得 $\omega(\xi_1'')>1$，因为 $\omega(\overline{\tau_1}) \geq 1$。此外，若 $\omega(\overline{\tau_1})=1$，则$\overline{\tau_1}=\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$，这意味着 $\xi_1=\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}=\xi_1''$且 $\omega(\xi_1'')=2$。

特别是，如果 $\omega(\xi_1'')=3$，那么 $\omega(\overline{\tau_1})=2$。然而，这意味着 $\overline{\tau_1}=\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$，因为在此情形下， ξ_1'' 是$\sigma_{i_2}^3$ 的左对偶。引理 3.10 和命题 3.27 表明， ρ_1 以 $\sigma_{i_2}^2$开头。然而，我们有$g_1=\Delta^{-\omega(\tau_1)}(\rho_1\sigma_{i_1}\tau_1)^{(\omega(\tau_1))}=\Delta^{-2}\rho_1\sigma_{i_1}\tau_1$且 $g_2=(\sigma_{i_2})^{3(\omega(\tau_1))}=\sigma_{i_2}^3$（采用设定 3.31 中的记号）。特别是， $g_2^{-1}g_1g_2$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_1的 Garside 幂的绝对值。由此可知，Hurwitz 变换 $(g_1,g_2) \to \left(g_2,g_2^{-1}g_1g_2\right)$ 降低了分解的复杂度，这与$\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解的假设相矛盾。

唯一的可能性是 $\omega(\xi_1'')=2$。此外，若 $\omega(\xi_1'')=2$，则$\omega(\overline{\tau_1})=1$，这意味着 $\overline{\tau_1}=\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$。然而，在此情况下， $\xi_1=\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}=\xi_1''$，这意味着 $g_1=\Delta^{-1}(\xi_1)_{(1)}=\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}^{-1}$且$g_2=\sigma_{i_2'}^3$。由此可知，要么 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，要么 (ii) 成立。

最后，如果 ξ_1'' 是$\overline{\tau_1}$的右因子，且 $\omega(\xi_1'')>1$，那么$\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$是$\overline{\tau_1}$的右因子。类似于本文

证明第二段中的论证表明，Hurwitz 变换 $(g_1, g_2) \to \left(g_2, g_2^{-1} g_1 g_2\right)$ 会降低分解的复杂度，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解这一假设矛盾。因此，命题得证。

□

命题 4.41 对 Δ^2 的一种最小复杂度分解施加局部约束：该分解由一个标准正半扭的立方和三个正半扭转组成。下面的技术性陈述将使我们能够利用这一局部约束，对此类分解施加全局约束。

命题 4.42。对于 $k = 4$，我们采用设定 3.31。假设 g_j 是一个非标准正半扭转，g_{j+1} 是一个标准正半扭的立方，并且乘积为 $g_j g_{j+1} = \left(\sigma_{i'_{j+1}}\right)^{(\omega_{j+1})}\Delta$，其中 $i_{j+1} \neq i'_{j+1} \in \{1, 2\}$（即，命题 4.41 (ii) 对 $g_j g_{j+1}$ 的分解 (g_j, g_{j+1}) 成立）。若 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个最小复杂度分解，则 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\left(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$（见定义 4.5）Hurwitz 等价。

证明。我们采用设定 3.31。$g_j g_{j+1} = \left(\sigma_{i'_{j+1}}\right)^{(\omega_{j+1})}\Delta$这一假设等价于如下陈述：$g_j = \left(\sigma_{i_{j+1}}\sigma_{i_j}\sigma_{i_{j+1}}^{-1}\right)^{(\omega_{j+1})}$且 $g_{j+1} = \left(\sigma_{i_{j+1}}^3\right)^{(\omega_{j+1})}$（如命题 4.41 (ii) 所示）。若对分解施以 Δ 的幂对应的全局共轭变换，则可假设 $g_{j+1} = \sigma_1^3$，此时 $g_j = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$。若 $j = 1$，则我们将证明 $g_3 = \sigma_2$ 和$g_4 = \sigma_1$ 是标准正半扭转，且 $\mathcal{F} = \left(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1^3, \sigma_2, \sigma_1\right)$。

事实上，如果 $j = 1$，那么 $g_1 g_2 = \Delta\sigma_1$。首先，我们将证明 $\sigma_2\xi_3$不能被 Δ整除。根据设定 3.31 的记号，我们有 $g_3 = (\xi_3)^{(1)}$。如果$\sigma_2\xi_3$ 能被 Δ整除，那么 g_3 就是一个非标准正半扭转，而 $(g_1 g_2)\, g_3\, (g_1 g_2)^{-1}$ 的 Garside 幂的绝对值比 g_3的 Garside 幂的绝对值小一。特别地，两个 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3, g_4) \to \left((g_1 g_2)\, g_3\, (g_1 g_2)^{-1}, g_1, g_2, g_4\right)$ 的复合降低了分解的复杂度，这与$\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解的假设相矛盾。由此可知，$\sigma_2\xi_3$ 不能被 Δ整除。

我们回顾设定 3.31 中的记号下的方程 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \Delta^{\omega_4+2}$，因为 $g_1 g_2 g_3 g_4 = \Delta^2$。在设定 3.31 的记号下，我们还有 $\xi_1\xi_2 = \Delta^2\sigma_2$。如果 g_3 或 g_4 是标准正半扭转，那么引理 4.21 表明 $\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ 整除，因为 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解。如果 $g_3 = \sigma_2$，那么 $g_4 = \sigma_1$ 由方程 $g_1 g_2 g_3 g_4 = \Delta^2$ 唯一确定，且 $\mathcal{F} = \left(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}、\ \sigma_1^3、\ \sigma_2、\ \sigma_1\right)$。如果 $g_3 = \sigma_1$，那么 $\xi_3 = \sigma_2$，并且 $\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ 整除。我们有 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \Delta^2\sigma_2\sigma_2\xi_4$，而引理 3.19 表明 $\sigma_2\sigma_2\xi_4$ 不能被 Δ 整除。当然，这与

假设 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂相矛盾。我们得出结论： g_3 是一个非标准正半扭转。类似地，如果 g_4 是标准正半扭转，那么 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \Delta^2\sigma_2\xi_3\xi_4$，且引理 3.19 表明 $\sigma_2\xi_3\xi_4$ 不能被 Δ 整除，除非 $\mathcal{F} = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$、$\sigma_1^3$、$\sigma_2$、$\sigma_1)$。当然，这与假设 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂相矛盾。我们得出结论： g_3 和 g_4 都是非标准正半扭转。

令 ξ_3'' 为 ξ_3 中与 ξ_4 的某个左因子左对偶的最大右因子。令 χ_3'' 为 ξ_4 中相关的左因子。对于正辫 ξ_3'、$\chi_3' \in B_3^+$，可写作 $\xi_3 = \xi_3'\xi_3''$ 和 $\xi_4 = \chi_3''\chi_3'$。引理 4.17 表明， ξ_3'' 是 $\overline{\tau_3}$ 的右因子，且 χ_3'' 是 $\overline{\rho_4}$ 的左因子，因为 g_3 和 g_4 是非标准正半扭转。在此情况下， $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 的 Garside 标准形为 $\sigma_2\xi_3'(\chi_4')(\omega(\xi_3''))\ \Delta^{2+\omega}(\xi_3'')$，因为命题 3.15 和引理 3.19 表明， $\sigma_2\xi_3'(\chi_4')(\omega(\xi_3''))$ 不能被 Δ 整除。当然，这与 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂这一假设矛盾。

我们得出，如果 $j = 1$，那么 $\mathcal{F} = (\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1^3, \sigma_2, \sigma_1)$。类似的论证表明，如果 $j = 3$，那么 $\mathcal{F} = (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1^3)$。然而，这两种分解都与标准分解 $(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ Hurwitz 等价。事实上，分解 $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1^3, \sigma_2, \sigma_1)$ 通过先对前两个因子应用一次 Hurwitz 变换，再对后两个因子应用一次 Hurwitz 变换，与分解 $(\sigma_1^3, \sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^2, \sigma_1, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1)$ 等价。对后一个分解应用以 σ_1 为共轭元的全局共轭变换可知，若 $j = 1$，则 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ Hurwitz 等价。

类似的论证表明，如果 $j = 3$，那么 $\mathcal{F} = (\sigma_2, \sigma_1, \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}, \sigma_1^3)$ 与 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1)$ Hurwitz 等价。先复合两次 Hurwitz 变换 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1) \to \left((\sigma_1\sigma_2)\,\sigma_1^3\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\right)$，再复合两次 Hurwitz 变换 $(\sigma_2^3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1) \to \left(\sigma_2^3, (\sigma_1\sigma_2)\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)$，可得 $\mathcal{F}$ 与 $\left(\sigma_2^3, (\sigma_1\sigma_2)\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}, \sigma_1, \sigma_2\right)$ Hurwitz 等价。若对后一分解中最后两个因子应用一次 Hurwitz 变换，则可推出 $\mathcal{F}$ 与 $\left(\sigma_2^3, (\sigma_1\sigma_2)\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}, \sigma_2, \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)$ Hurwitz 等价。随后，若对后一分解应用以 $(\sigma_1\sigma_2)^{-1}$ 为共轭元素的整体共轭变换，则可得出结论： $\mathcal{F}$ 与标准分解$(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ Hurwitz 等价。

最后，我们讨论 $j = 2$ 的情形。回想一下，按照设定 3.31 的记号，$g_1 = \Delta^{-\omega(\tau_1)}(\xi_1)_{(\omega(\tau_1))}$。如果 $\xi_1(\sigma_2)_{(\omega(\tau_1))}$ 可被 Δ 整除，那么应用两次 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3, g_4) \to \left(g_2, g_3, (g_2g_3)^{-1}\,g_1\,(g_2g_3)\ \ g_4\right)$会降低分解的复杂度，因为 $g_2g_3 = \sigma_2\Delta$。当然，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解这一假设矛盾。特别地， $\xi_1(\sigma_2)_{(\omega(\tau_1))}$ 不能被 Δ 整除；类似的论证表明——

可以证明 $(\sigma_2)^{(\omega(\tau_1))}\xi_4$ 不能被 Δ 整除，因为 $g_2g_3 = \Delta\sigma_1$，并且按照设定 3.31 的记号，$g_4 = \Delta^{-\omega(\tau_4)}(\xi_4)^{(\omega(\tau_1)+1+\omega(\tau_4))}$。

如果 $g_1 = \sigma_1$，那么方程 $g_1g_2g_3g_4 = \Delta^2$ 唯一确定 $g_4 = \sigma_2$ 和 $\mathcal{F} = (\sigma_1、\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}、\sigma_1^3、\sigma_2)$。在这种情况下，如果我们对 $\mathcal{F}$ 施加由 σ_1^{-1} 给出的整体共轭变换，就可推得 $\mathcal{F}$ 与 $(\sigma_1、\sigma_2、\sigma_1^3、\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1)$ Hurwitz 等价；而我们在证明前文中已经证明，后一个分解与标准分解 $(\sigma_1^3、\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1、\sigma_1、\sigma_2)$ Hurwitz 等价。根据设定 3.31 中的记号，我们有 $\xi_2\xi_3 = \Delta^2(\sigma_2)^{(\omega(\tau_1))}$。如果 $g_1 = \sigma_2$，那么 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \Delta^2(\sigma_2\sigma_2)^{(\omega(\tau_1))}\xi_4$。特别地，引理 3.19 意味着 $(\sigma_2)^{(\omega(\tau_1))}\xi_4$ 可被 Δ 整除，因为 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂，这就导致了矛盾。因此，我们可以假设 g_1 不是标准正半扭转；类似的论证表明，g_4 也不是标准正半扭转。

我们注意到，两次 Hurwitz 变换的复合 $(g_1, g_2, g_3, g_4) \to \left(g_2, g_3, (g_2g_3)^{-1}g_1(g_2g_3)\ \ g_4\right)$ 至多使分解的复杂度增加 1，因为 $g_2g_3 = \sigma_2\Delta$。然而，假设 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂，这意味着 $\xi_1(\sigma_2)^{(\omega(\tau_1))}$ 是 ξ_4的左对偶。当然，ξ_1 不是 $\overline{\tau_1}$的右因子，这意味着引理 4.17 第一条陈述的结论对 $\left(g_2, g_3, (g_2g_3)^{-1}g_1(g_2g_3)\ \ g_4\right)$中的第三和第四个因子不成立。引理 4.17 的逆否命题表明，我们可以对分解 $\left((g_2g_3)^{-1}g_1(g_2g_3)\ \ g_4\right)$应用一次降低复杂度的 Hurwitz 变换。由此可知，$\mathcal{F}$与一个满足假设且 $j = 1$的最小复杂度分解 Hurwitz 等价。然而，我们已经处理过这种情况，因此可推得，若 $j = 2$，则 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ Hurwitz 等价。

我们已经考虑了 $j \in \{1, 2, 3\}$ 的所有可能性。因此，该命题得以证明。□

下面的命题是引理 4.16 的一个类似结果，适用于最小复杂度分解中的一对相邻因子，其中一个因子是非标准正半扭转的立方，另一个因子是非标准正半扭转。

引理 4.43。我们采用设定 3.31，其中 $k = 2$，且 g_1 是非标准正半扭转的立方，g_2 是非标准正半扭转。若 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 是 g_1g_2 的最小复杂度分解，则满足以下条件：

(i) 与$\overline{\rho_2}$的某个左因子左对偶的 ξ_1 的最大右因子 ξ_1''，是 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的一个右因子。若 $\xi_1'' = \sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$，则 Hurwitz 变换 $(g_1,\ g_2) \to (g_1g_2g_1^{-1},\ g_1)$ 不会增加因式分解的复杂度。(ii) 与$\overline{\tau_1}$ 的某个右因子右对偶的 ξ_2 的极大左因子 ξ_2''，是 $\overline{\rho_2}$的一个左因子。

证明。陈述 (ii) 是引理 4.16 (ii) 的一个特例。我们利用引理 4.8 证明 (i)。首先，引理 3.14 推出 ξ_1'' 是 ξ_1的一个切右因子。命题 3.26 推出 $\xi_1 = \overline{\rho_1}\sigma_{i_1}^2\overline{\tau_1}$，而引理 3.9 推出 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 也是 ξ_1的一个切右因子。此外，根据命题 3.12，$\overline{\tau_1}$ 是 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的一个切右因子；命题 3.7 因而推出 $\omega(\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}) = \omega(\tau_1) + 1$。

命题 3.13 现在表明，ξ_1'' 是$\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 的右因子，当且仅当 $\omega(\xi_1'') \leq \omega(\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}) = \omega(\tau_1) + 1$。然而，若 $\omega(\xi_1'') > \omega(\tau_1) + 1$，则由引理 4.8 和 $e_1 = 3$ 可知，Hurwitz 变换 $(g_1, g_2) \to (g_1 g_2 g_1^{-1}, g_1)$ 会降低分解的复杂度。当然，这与假设 $\mathcal{F}$ 是一个具有最小复杂度的分解相矛盾。由此可得，ξ_1'' 是 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的右因子。

最后，若$\xi_1'' = \sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$，且 ξ_1'' 是$\overline{\rho_2}$的左因子 ρ_2'' 的左对偶，则ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$的切左因子。事实上，引理 3.10 表明 ρ_2'' 以不同生成元的乘积结尾，而引理 3.9 表明ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$的切左因子。特别地，$\epsilon \leq 0$ 满足引理 4.8 的条件。由引理 4.8 和 $e_1 = 3$ 可知，Hurwitz 变换 $(g_1, g_2) \to (g_1 g_2 g_1^{-1}, g_1)$ 不会增加分解的复杂度。

因此，该结论得以证明。 □

现在我们证明引理 4.17 的一个类似结论，其中一个因子是非标准正半扭转的立方，另一个因子是非标准正半扭转。

引理 4.44。我们采用设定 3.31，其中 $k = 2$。假设 g_1 是非标准正半扭转的立方，g_2 是非标准正半扭转，且 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 是 $g_1 g_2$ 的一个最小复杂度分解。

在这种情况下，ξ_1 的极大右因子 ξ_1'' 左对偶于 ξ_2 的一个左因子，且是 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的右因子。此外，$\xi_2$ 的极大左因子 ξ_2'' 右对偶于 ξ_1 的一个右因子，且是切闭包 $\overline{\rho_2}$的左因子。然而，$\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 不与 $\overline{\rho_2}$左对偶。

最后，如果 $\xi_1'' = \sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$，那么 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2) \to (g_1 g_2 g_1^{-1}, g_1)$不会增加分解的复杂度。

证明。我们将基于引理 4.43 证明第一个结论，即 ξ_1''是 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的右因子。证明 ξ_2'' 是切闭包$\overline{\rho_2}$ 的左因子的过程类似，同样基于引理 4.43。我们采用与引理 4.17 的证明（该证明基于引理 4.16，而非引理 4.43）相似的论证，但还需额外证明 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 不与$\overline{\rho_2}$左对偶。

首先，引理 3.14 表明 ξ_1''是 ξ_1 的切右因子。引理 3.9 表明 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1 的切右因子，因为命题 3.26 表明 $\xi_1 = \overline{\rho_1}\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$。反设 ξ_1'' 不是$\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的右因子，亦即 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$是 ξ_1'' 的真右因子。

在这种情况下，命题 3.12 表明 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1'' 的真切右因子。

我们注意到， χ_1'' 是 ξ_2 的一个右对偶于 ξ_1'' 的左因子，但它不可能是 $\overline{\rho_2}$ 的左因子。事实上，若 χ_1'' 是 $\overline{\rho_2}$的左因子，就会与引理 4.43 (i) 中关于 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解的假设矛盾。由此可得， $\overline{\rho_2}$ 是χ_1''的真左因子。

令ρ_2'' 为χ_1'' 中右对偶于 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$的左因子。首先，引理 3.10 表明 ρ_2'' 以两个不同生成元的乘积结尾，因为命题 3.26 表明，对于 $i_1 \neq i_1' \in \{1,2\}$，$\overline{\tau_1}$ 以$\sigma_{i_1}\sigma_{i_1'}$开头。根据引理 3.9，我们得出 ρ_2''是 ξ_2的切左因子。

我们声称， ρ_2'' 是$\overline{\rho_2}$的左因子。命题 3.13 表明， ρ_2'' 是$\overline{\rho_2}$的左因子，当且仅当 $\omega(\rho_2'') \leq \omega(\overline{\rho_2})$。然而，若 $\omega(\rho_2'') > \omega(\overline{\rho_2})$，则 $\omega(\rho_2'') > \omega(\overline{\rho_2}) + 1$。事实上，命题 3.26 表明， $\overline{\tau_1}$ 以两个不同生成元$\sigma_{i_1}\sigma_{i_1'}$ 的乘积开头，其中$\sigma_{i_1}\sigma_{i_1'}$ 对应于 $i_1 \neq i_1' \in \{1,2\}$；若 $\omega(\rho_2'') = \omega(\overline{\rho_2}) + 1$，则命题 3.26 表明， ρ_2'' 以$\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$结尾，其中$\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}$对应于 $i_2 \neq i_2' \in \{1,2\}$。然而，这与引理 3.10 矛盾，因为 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$是 ρ_2''的左对偶。另一方面，若 $\omega(\rho_2'') > \omega(\overline{\rho_2}) + 1$，则$\overline{\tau_1}$ 是 ξ_2 的某个左因子的左对偶，而 $\overline{\rho_2}$ 是该左因子的真左因子。当然，这与引理 4.43 (ii) 矛盾。

事实上，我们断言 $\rho_2'' = \overline{\rho_2}$。我们假设 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 是 ξ_1'' 的真右因子，并将利用这一点证明 $\omega(\rho_2'') = \omega(\overline{\rho_2})$。我们已经证明 ρ_2'' 是 $\overline{\rho_2}$ 的左因子。若 $\omega(\rho_2'') < \omega(\overline{\rho_2})$，则 $\overline{\rho_2}$ 是 ξ_1'' 某个右因子的右对偶，而 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 是该右因子的真右因子。然而，根据引理 4.43 (i)，这与 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解的假设矛盾。由此可知 $\omega(\rho_2'') = \omega(\overline{\rho_2})$，且命题 3.13 蕴含 $\rho_2'' = \overline{\rho_2}$。因此，$\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$是 $\overline{\rho_2}$的左对偶。

我们将从陈述 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$ 是 $\overline{\rho_2}$的左对偶导出一个矛盾。命题 3.26 意味着 $\xi_1 = \overline{\rho_1}\sigma_{i_1}^2\overline{\tau_1}$ 和 $\xi_2 = \overline{\rho_2\tau_2}$。引理 3.10 意味着 $\overline{\rho_2}$以 $\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}$结尾，因为 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$是 $\overline{\rho_2}$的左对偶。现在，引理 3.10 和命题 3.26 意味着 $\overline{\tau_2}$以 $\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}$开头，因为 g_2是一个非标准正半扭转。

令 $\rho_1' \in B_3^+$为满足 $\rho_1'\sigma_{i_1} = \overline{\rho_1}$的正辫。引理 3.10 意味着 ρ_1' 是 $\overline{\tau_1}$的左对偶，因为 ρ_1 是 τ_1的左对偶。令 $\rho_2' \in B_3^+$为满足$\overline{\rho_2} = \rho_2'\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}$的正辫。引理 3.10 意味着 $\overline{\tau_1}$是 ρ_2'的左对偶，因为 $\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$是 $\overline{\rho_2}$的左对偶。命题 3.7 意味着 $\omega(\overline{\rho_2}) = \omega(\rho_2') + 1$。对偶的伪对称性（命题 3.5）意味着 $(\rho_2')^{(\omega(\tau_1))}$ 是 $\overline{\tau_1}$的左对偶，而对偶的唯一性（命题 3.4）则意味着 $(\rho_2')^{(\omega(\tau_1))} = \rho_1'$。

按照设定 3.31 中的记号，我们有 $g_1 = \Delta^{-\omega(\tau_1)}\left(\rho_1\sigma_{i_1}^3\tau_1\right)_{(\omega(\tau_1))}$以及 $g_2 = \Delta^{-\omega(\tau_2)}(\rho_2\sigma_{i_2}\tau_2)_{(\omega(\tau_1)+\omega(\tau_2))}$。命题 3.26 表明 $\xi_1 =$

$\rho_1'\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$，其中 $\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\overline{\tau_1}$是 ξ_2的左因子 $\overline{\rho_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}$的左对偶。此外，对偶的伪对称性（命题 3.5）和命题 3.7 表明 $\omega(\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\sigma_{i_1}\overline{\tau_1})$ $=\omega\left(\overline{\rho_2}\sigma_{i_2}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2'}\sigma_{i_2}\right)=\omega(\rho_2)+2$以及 $\omega(\rho_1')=\omega(\rho_2')=\omega(\rho_2)-1$。命题 3.30 表明 g_2^{-1}的 Garside 幂等于 g_2的 Garside 幂，即 $-\omega(\rho_2)$。特别地，$g_2^{-1}g_1g_2$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_1的 Garside 幂的绝对值。由此可知，Hurwitz 变换 $(g_1,g_2)\to\left(g_2,g_2^{-1}g_1g_2\right)$降低了分解的复杂度，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解这一假设矛盾。

最后的结论是引理 4.43 (i) 的推论。 □

最后，我们建立引理 4.36 的一个类似结论，适用于分解中的三个因子：中间因子是正半扭转的立方，另外两个因子则是非标准正半扭转。

引理 4.45。我们采用设定 3.31，其中 $k=3$。假设对于每个 $j\in\{1,3\}$，g_j 都是非标准正半扭转，且 g_2 是正半扭转的立方。若 $j\in\{1,2\}$，则令 ξ_j'' 为 ξ_j 的最大右因子，它与 ξ_{j+1}的一个左因子互为左对偶。将 ξ_{j+1} 的相关左因子记为 χ_j''。将正辫 ξ_1'、$\xi_3'\in B_3^+$ 分别记作 $\xi_1=\xi_1'\xi_1''$ 和 $\xi_3=\chi_2''\xi_3'$。

假设 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，且 χ_2'' 是$\overline{\rho_3}$的左因子。若 g_2 是某个非标准正半扭转的立方，则假设 $\chi_1''=\overline{\rho_2}\sigma_{i_2}$ 和 $\xi_2''=\overline{\tau_2}$，或者 $\chi_1''=\overline{\rho_2}$ 和 $\xi_2''=\sigma_{i_2}\overline{\tau_2}$。若 g_2 是某个标准正半扭的立方，则假设 $\chi_1''=\sigma_{i_2}$ 和 $\xi_2''=\sigma_{i_2}$。（两种情况下都有 $\xi_2=\chi_1''\sigma_{i_2}\xi_2''$。）令 ξ_1''' 为 ξ_1' 的最大右因子，它是 $(\sigma_{i_2})_{(\omega(\tau_2))+1}\,\xi_3'$ 的某个左因子的左对偶。将相关的 $(\sigma_{i_2})_{(\omega(\tau_2)+1)}\,\xi_3'$ 左因子记为 $(\sigma_{i_2})_{(\omega(\tau_2)+1)}\,\xi_3'''$。

如果 $\xi_1'''\xi_1''$ of ξ_1 不是$\overline{\tau_1}$ 的右因子，或者 $\chi_2''\xi_3'''$ 不是$\overline{\rho_3}$的左因子，则以下陈述成立：

(i) 如果 g_2 是标准正半扭转的立方，那么先进行 Hurwitz 变换 (g_1,g_2,g_3) $\to\left(g_2,g_2^{-1}g_1g_2,g_3\right)$，再对第二和第三个因子应用 Hurwitz 变换，不会增加分解的复杂度。如果 g_2 是非标准正半扭转的立方，且满足 $\chi_1''=\overline{\rho_2}\sigma_{i_2}$ 和 $\xi_2''=\overline{\tau_2}$，那么先进行 Hurwitz 变换 $(g_1,g_2,g_3)\to\left(g_2,g_2^{-1}g_1g_2,g_3\right)$，再对第二和第三个因子应用 Hurwitz 变换，会降低分解的复杂度。

(ii) 如果 g_2 是一个标准正半扭的立方，那么 Hurwitz 变换 $(g_1,g_2,g_3)\to\left(g_1,\right.$ $\left.g_2g_3g_2^{-1},g_2\right)$ 与随后作用于第一和第二个因子的 Hurwitz 变换的复合，不会增加分解的

复杂度。如果 g_2 是一个非标准正半扭转的立方，且有 $\chi_1'' = \overline{\rho_2}$ 和 $\xi_2'' = \sigma_{i_2}\overline{\tau_2}$，那么 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_1, g_2 g_3 g_2^{-1}, g_2\right)$ 与随后作用于第一和第二个因子的 Hurwitz 变换的复合，会降低分解的复杂度。

证明。我们假设 ξ_1 的右因子 $\xi_1'''\xi_1''$ 不是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，并证明 (i)。其他情形的证明类似。若 g_2 是某个非标准正半扭转的立方，则根据引理 4.8 的一个对称版本以及 $e_2 = 3$，Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_2, g_2^{-1} g_1 g_2, g_3\right)$ 不会增加分解的复杂度，因为 ξ_1'' 是 $\overline{\tau_1}$ 和 $\chi_1'' = \overline{\rho_2}\sigma_{i_2}$ 的切右因子。若 g_2 是某个标准正半扭转的立方，则 Hurwitz 变换 $(g_1, g_2, g_3) \to \left(g_2, g_2^{-1} g_1 g_2, g_3\right)$ 使分解的复杂度至多增加一。

然而，假设 $\xi_1'''\xi_1''$ 不是 $\overline{\tau_1}$ 的右因子，这意味着引理 4.17 第一条陈述中的结论不适用于 $\left(g_2、\ g_2^{-1} g_1 g_2、\ g_3\right)$中的第二个和第三个因子。事实上，这是引理 3.32（及其对称版本）的推论，该引理确定了 $g_2^{-1} g_1 g_2$的 Garside 标准形。引理 4.17 的逆否命题表明，我们可以对分解$\left(g_2^{-1} g_1 g_2、\right.$ $\left.g_3\right)$应用降低复杂度的 Hurwitz 变换。因此，该陈述得证。

□

现在，我们已准备好对 Δ^2 分解为正半扭转的幂的情形进行分类，其中一个因子是正半扭转的立方，其余因子均为正半扭转。

定理 4.46. 如果 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个分解，由三个正半扭转和一个正半扭转的立方组成，那么 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价于标准分解 $\left(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$（见定义 4.5）。

证明. 我们采用设定 3.31。设 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ 是 Δ^2 的一个分解，由三个正半扭转和一个正半扭转的立方组成。我们将证明，$\mathcal{F}$ Hurwitz 等价于标准分解$\left(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$。反设 $\mathcal{F}$ 是一个复杂度最小、但不与标准分解 $\left(\sigma_1^3,\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$Hurwitz 等价的因子分解。引理 4.32 蕴含复杂度$c($ $\mathcal{F}) > 0$。

我们将导出一个矛盾，其证明与定理 4.23 的证明非常相似，只是有所调整，稍后将予以说明。必要时，可用另一个最小复杂度分解替换 $\mathcal{F}$（如定理 4.23 的证明中所做），从而假设分解 $\mathcal{F}$ 满足引理 4.20 中的条件。此外，若 $1 \le j \le 4$，则我们沿用定理 4.23 的证明中关于 ξ_j''、χ_j'' 和 ζ_j 的记号。事实上，若 $1 \le j \le 4$，则定义 ξ_j'' 为 ξ_j 的最大右因子，且它与某个左因子左对偶。我们将 ξ_{j+1} 的相关左因子记为 χ_j''。我们还

定义 $\zeta_j \in B_3^+$ 为满足 $\xi_j = \chi''_{j-1}\zeta_j\xi''_j$ 的正辫。最后，定义 $J \subseteq \{1,2,3,4\}$ 为所有满足以下条件的 $1 \le j \le 4$ 的集合：g_j 是一个标准正半扭转；并令 $J' = \{1,2,3,4\} \setminus J$ 为 J 的补集。

设 $g_{k'}$ 是 $\mathcal{F}$ 中正半扭转的立方，其中 $1 \le k' \le 4$。我们将对 χ''_{j-1} 和 ξ''_j 建立约束，由此可推出，对每个 $1 \le j \le 4$，ζ_j 都不是恒等辫；必要时可将 $\mathcal{F}$ 替换为一个 Hurwitz 等价的最小复杂度分解。首先，考虑 $g_{k'}$ 是非标准正半扭转的立方的情形。引理 4.44 表明，$\xi''_{k'}$ 是 $\sigma_{i_{k'}}\overline{\tau_{k'}}$ 的右因子。若 $\xi''_{k'} = \sigma_{i_{k'}}\overline{\tau_{k'}}$ 且 $k' < 4$，则引理 4.44 表明，Hurwitz 变换 $(\ldots,\ g_{k'},\ g_{k'+1},\ \ldots) \to \left(\ldots,\ g_{k'}g_{k'+1}g_{k'}^{-1},\ g_{k'},\ \ldots\right)$ 不会改变分解的复杂度。特别地，必要时将 $\mathcal{F}$ 替换为一个 Hurwitz 等价分解后，我们可以假设 $\xi''_{k'}$ 是 $\sigma_{i_{k'}}\overline{\tau_{k'}}$ 的真右因子。引理 4.44 还表明，$\chi''_{k'-1}$ 是 $\overline{\rho_{k'}}\sigma_{i_{k'}}$ 的左因子。若 $j \ne k'$ 且 $j \in J'$，则引理 4.17 和引理 4.44 表明，ξ''_j 是 $\overline{\tau_j}$ 的右因子，而 χ''_{j-1} 是 $\overline{\rho_j}$ 的真左因子。若 $j \in J$，则引理 4.21 表明，ξ''_j 和 χ''_{j-1} 都是恒等辫。若 $g_{k'}$ 是非标准正半扭转的立方，则根据等式 $\xi_j = \chi''_{j-1}\zeta_j\xi''_j$，我们得出对每个 $1 \le j \le 4$，ζ_j 都不是恒等辫。事实上，命题 3.26 表明 $\xi_{k'} = \overline{\rho_{k'}}\sigma_{i_{k'}}^2\overline{\tau_{k'}}$；若 $j \ne k'$ 且 $j \in J'$，则还有 $\xi_j = \overline{\rho_j\tau_j}$。

另一方面，如果 $g_{k'}$ 是一个标准正半扭的立方，并且 $\xi''_{k'-1}$ 不是 $\overline{\tau_{k'-1}}$ 的右因子（等价地，根据命题 4.41，$\chi''_{k'-1}$ 不是 $\sigma_{i_{k'}}$ 的左因子），或者 $\chi''_{k'}$ 不是 $\overline{\rho_{k'+1}}$ 的左因子（等价地，根据命题 4.41，$\xi''_{k'}$ 不是 $\sigma_{i_{k'}}$ 的右因子），那么命题 4.41 表明，分解 $\mathcal{F}$ 满足命题 4.42 的假设。

在这种情况下，命题 4.42 表明 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\left(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$ Hurwitz 等价，这就导致矛盾。如果 $j \ne k'$ 和 $j \in J'$，那么引理 4.17 以及上述推理表明，ξ''_j 是 $\overline{\tau_j}$ 的右因子，且 χ''_{j-1} 是 $\overline{\rho_j}$ 的真左因子。此外，如果 $g_{k'}$ 是一个标准正半扭的立方，那么 $\chi''_{k'-1}$ 是 $\sigma_{i_{k'}}$ 的左因子，且 $\xi''_{k'}$ 是 $\sigma_{i_{k'}}$ 的右因子。当然，如果 $j \in J$，那么引理 4.21 表明 ξ''_j 和 χ''_{j-1} 都是恒等辫。由此我们得出结论：对于所有情况中的每个 $1 \le j \le 4$，ζ_j 都不是恒等辫。

我们采用设定 3.31 中的记号 $\Delta^{\omega_4+2} = \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$。令 $\omega''_j = \sum_{j'=1}^{j-1}\omega\left(\xi''_{j'}\right)$。我们有如下等式（如定理 4.23 的证明中所示）

$$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \left[\prod_{j=1}^{4}(\zeta_j)_{(\omega''_j)}\right]\Delta^{\omega''_4}$$

但括号中的正辫不一定能被 Δ 整除（与

定理 4.23 的证明中不同）。

命题 3.15 和 ξ_j'' 的极大性意味着，对于每个 $1 \leq j \leq 4$，$(\zeta_{j-1})(\omega_{j-1}'')\,(\zeta_j)(\omega_j'')$ 都不能被 Δ 整除。引理 3.20 意味着，如果 ζ_j 不是 Artin 生成元，那么对于每个 $1 \leq j \leq 4$，$\prod_{j=1}^{4}(\zeta_j)(\omega_j'')$ 都不能被 Δ 整除。我们将分析 ζ_j 为 Artin 生成元时的各种可能情形，并证明在每种情形下，乘积 $\prod_{j=1}^{4}(\zeta_j)(\omega_j'')$ 都不是 Δ 的幂，这与 $\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂这一事实矛盾。

首先，若 $k' \neq j, \{j, j+1\} \subseteq J'$（即 g_j 和 g_{j+1} 都不是标准正半扭转），且 ζ_j 是 Artin 生成元，那么生成元 $(\zeta_j)(\omega_j'')$ 的指标等于 $(\zeta_{j+1})(\omega_{j+1}'')$ 中第一个生成元的指标（根据命题 3.16 (i)，并采用与定理 4.23 证明中相同的推理即可得出这一结论）。此外，若 $g_{k'}$ 是标准正半扭转的立方，那么 $g_{k'}$ 后面（分别前面）不会紧接着两个标准正半扭转 $g_{k'+1}$ 和 $g_{k'+2}$（分别为 $g_{k'-1}$ 和 $g_{k'-2}$），使得 $\xi_{k'}\xi_{k'+1}\xi_{k'+2}$（分别为 $\xi_{k'-2}\xi_{k'-1}\xi_{k'}$）能被 Δ 整除。事实上，若此结论不成立，那么 $c(\mathcal{F}) > 0$ 这一事实意味着分解中存在一个非标准正半扭转。因此，在不改变分解复杂度的前提下，我们可以酌情连续施行两次 Hurwitz 变换，并假设 $g_{k'}$ 与一个非标准正半扭转相邻。然而，此时分解 $\mathcal{F}$ 满足命题 4.42 的假设。命题 4.42 意味着 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\left(\sigma_1^3, \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2\right)$ Hurwitz 等价，这就产生了矛盾。

现在我们利用上一段中的结论导出矛盾。若 $k' \neq j+1$，则引理 4.21、引理 4.22、引理 3.19，以及 $\mathcal{F}$ 满足引理 4.20 中条件这一假设，意味着 $(\zeta_j)(\omega_j'')\,(\zeta_{j+1})(\omega_{j+1}'')\,(\zeta_{j+2})(\omega_{j+2}'')$ 不能被 Δ 整除。由引理 3.20 可知，$\prod_{j'=1}^{k'}\left(\zeta_{j'}\right)(\omega_{j'})$ 和 $\prod_{j'=k'+1}^{4}\left(\zeta_{j'}\right)(\omega_{j'})$ 不能被 Δ 整除。此外，若 $\zeta_{k'}$ 不是 Artin 生成元，则由引理 3.20 可知，$\prod_{j'=1}^{4}\left(\zeta_{j'}\right)(\omega_j'')$ 不能被 Δ 整除，这就产生了矛盾。假设 $\zeta_{k'}$ 是一个 Artin 生成元。若 $g_{k'}$ 是某个标准正半扭转的立方，则再假设 $g_{k'}$ 在与 $\mathcal{F}$ Hurwitz 等价的最小复杂度分解中位于最右侧。$\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4$ 是 Δ 的幂这一事实意味着，$\prod_{j'=1}^{k'}\left(\zeta_{j'}\right)(\omega_{j'})$ 是 $\prod_{j'=k+1}^{4}\left(\zeta_{j'}\right)(\omega_{j'})$ 的左对偶。然而，若 $g_{k'}$ 是某个标准正半扭转的立方，则引理 4.45 与 $g_{k'}$ 位于最右侧这一假设相矛盾；若 $g_{k'}$ 是某个非标准正半扭转的立方，则引理 4.45 与 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解这一假设相矛盾。

因此，该命题得证。 □

我们给出定理 4.46 的几何重述。

定理 4.47. 设 C、$C' \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是三次简单 Hurwitz 曲线。如果 C 和 C' 各有一个尖点且没有其他奇点，那么 C 与 C' 同痕。

证明。带有一个尖点且无其他奇点的三次 Hurwitz 曲线的辫单值分解，是由 Δ^2 分解为三个正半扭转和一个正半扭转的立方。此外，该曲线的辫单值分解的 Hurwitz 等价类完全决定了曲线的同痕类。

定理 4.46 表明， C 的辫单值分解与 C'的辫单值分解 Hurwitz 等价。因此，命题得证。

□

我们以证明如下结论结束本小节：在 $\mathbb{CP}^2$ 中，恰有一个自切点且无其他奇点的三次简单 Hurwitz 曲线只有一个同痕类。在第4.4小节中，我们将证明，至少有一个自切点的三次简单 Hurwitz 曲线恰有一个自切点且无其他奇点。特别地，这将完成对 $\mathbb{CP}^2$ 中带有自切点的三次简单 Hurwitz 曲线的分类。

我们将证明， Δ^2 分解为一个正半扭转的四次方和两个正半扭转，只有一个 Hurwitz 等价类。首先，我们将证明一条技术性结论，涉及 Δ^2 分解为三个正半扭转的幂时的最小复杂度分解。

引理 4.48. 对于 $k = 3$，我们采用设定 3.31。假设 $\mathcal{F}$是 Δ^2 的一个分解，且并非由三个正半扭转的平方构成。首先，如果 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解，那么经过可能的替换，将$\mathcal{F}$ 换成一个复杂度相同且与之 Hurwitz 等价的分解后，我们可以假设 $\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_2\xi_3$ 不可被 Δ整除。

如果 $1 \leq j \leq 3$，那么当g_j 是一个非标准正半扭转的幂时，我们定义 $\delta_j = 1$ ；当g_j 是一个标准正半扭转的幂时，我们定义 $\delta_j = 0$ 。如果 $\xi_1\xi_2$ 不可被 Δ整除，那么我们定义 $\epsilon \in \{0, 1\}$ ，使得 $\omega(\xi_1\xi_2) = \omega(\xi_1) + \omega(\xi_2) - \epsilon$ （命题 3.11）。如果 $\xi_1\xi_2$ 不可被 Δ整除，那么

$$2 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \epsilon$$

and

$$\omega(\rho_3) = 2 + \omega(\rho_1) + \omega(\rho_2) + \delta_3 - e_3.$$

证明。我们采用设定 3.31。首先，我们证明，经过可能将分解 $\mathcal{F}$ 替换为复杂度相同的 Hurwitz 等价分解后， $\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_2\xi_3$ 必有一个不能被 Δ整除。假设 $\xi_1\xi_2$ 和 $\xi_2\xi_3$ 都能被 Δ整除。若 $\mathcal{F}$ 中的每个因子都是非标准正半扭转的幂，则由引理 4.29 可知，存在一个全局共轭变换，使分解 $\mathcal{F}$的复杂度降低，这

与复杂度 $c(\mathcal{F})$的最小性矛盾。因此，我们可以假设 $\mathcal{F}$ 中至少有一个因子是标准正半扭转的幂。

首先，引理 4.31 蕴含 $\mathcal{F}$ 中的三个因子都不可能是标准正半扭转的幂。假设 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是标准正半扭转的幂。在这种情况下，要么这个因子位于 $\mathcal{F}$ 的一端，要么 g_2 是标准正半扭转的幂。如果该因子位于 $\mathcal{F}$ 的一端，那么我们将证明存在一个全局共轭变换，使分解 $\mathcal{F}$ 的复杂度降低，这与复杂度 c（$\mathcal{F}$）的最小性矛盾。事实上，不失一般性，我们可以假设 g_1 是标准正半扭转的幂，且 $g_1 = \sigma_{i_1}^{e_1}$（采用设定 3.31 中的记号）。令 τ' 为 ξ_2 的切左因子，使得 ω（τ'）$= 1$。首先，命题 3.2 蕴含 $(\tau')^{-1} g_1 \tau'$ 是标准正半扭转的幂，因为 $\xi_1\xi_2$ 可被 Δ 整除。命题 4.26 蕴含 $(\tau')^{-1} g_2 \tau'$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_2 的 Garside 幂的绝对值，因为 $\xi_1\xi_2$ 可被 Δ 整除。命题 4.28 蕴含 $(\tau')^{-1} g_3 \tau'$ 的 Garside 幂的绝对值不大于 g_3 的 Garside 幂的绝对值，因为 $\xi_2\xi_3$ 可被 Δ 整除。由此可得，在这种情况下，复杂度 $c\Big(\ (\tau')^{-1}\mathcal{F}\tau'\Big) < c$（$\mathcal{F}$）。

另一方面，假设 g_2 是标准正半扭转的幂，且 $g_2 = \left(\sigma_{i_2}^{e_2}\right)(\omega(\tau_1))$（采用设定 3.31 中的记号）。我们将证明，存在一种全局共轭变换，可以将 $\mathcal{F}$ 替换为一个复杂度相同的分解，使得第二个和第三个因子都是标准正半扭转的幂（此时，第二个和第三个因子的乘积不能被 Δ 整除）。由命题 4.26 可知，$(\sigma_{i_2})(\omega(\tau_1))\ g_3\ (\sigma_{i_2})^{-1}(\omega(\tau_1))$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_3 的 Garside 幂的绝对值，因为 $\xi_2\xi_3$ 能被 Δ 整除。当然，无论如何，$(\sigma_{i_2})(\omega(\tau_1))\ g_1\ (\sigma_{i_2})^{-1}(\omega(\tau_1))$ 的 Garside 幂的绝对值至多比 g_1 的 Garside 幂的绝对值大一。由此得出，复杂度$c\Big((\sigma_{i_2})(\omega(\tau_1))\ \mathcal{F}(\sigma_{i_2})^{-1}(\omega(\tau_1))\Big) \leq c(\mathcal{F})$。若依次应用这类全局共轭变换，最终就能得到一个分解，使得第二个和第三个因子都是标准正半扭转的幂。事实上，每次这样的变换都不会改变 g_2 的 Garside 幂，并会降低 g_3 的 Garside 幂的绝对值。因此，如果 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是标准正半扭转的幂，我们便证明了第一个结论。

如果 $\mathcal{F}$ 中恰有两个因子是标准正半扭转的幂，那么它们不可能是相邻因子，因为我们已假设 $\xi_1\xi_2$ 和 $\xi_2\xi_3$ 都能被 Δ 整除。在这种情况下，g_1 和 g_3 是标准

正半扭转的幂。引理 4.21 表明，g_1 和 g_3 都不是标准正半扭转，因为 $\mathcal{F}$ 的复杂度最小，且 $\xi_1\xi_2$ 和 $\xi_2\xi_3$ 都能被 Δ 整除。特别地，$e_1 = 2$ 或 $e_3 = 2$，因为根据命题 4.3，$6 = e_1 + e_2 + e_3$。不妨假设 $e_1 = 2$，此时 $g_1 = \sigma_{i_1}^2$。命题 4.33 表明 $g_2 = \sigma_{i_1}^{-1}\sigma_{i_2'}^{e_2}\sigma_{i_1}$，其中 $i_2 \neq i_2' \in \{1, 2\}$，因为 $\mathcal{F}$ 的复杂度最小，且 $\xi_1\xi_2$ 能被 Δ 整除。我们可以写成 $g_3 = \sigma_{i_3'}^{e_3}$，其中 $i_3 \neq i_3' \in \{1, 2\}$，因为我们已假设 g_3 是标准正半扭转的幂。

现在可以将方程 $\Delta^2 = g_1g_2g_3$ 重写为 $\Delta^2 = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2'}^{e_2}\sigma_{i_1}\sigma_{i_3'}^{e_3}$。由于乘积 $\xi_2\xi_3$ 可被 Δ 整除，因此 $i_2' = i_3'$。特别地，我们得到方程 $\Delta = \sigma_{i_1'}\sigma_{i_2}^{e_2-1}\sigma_{i_3'}^{e_3-1}$。然而，这是一个矛盾，因为 $e_2 \neq 2$（根据假设，$\mathcal{F}$ 并非由三个正半扭转的平方组成）。由此，如果 $\mathcal{F}$ 中恰有两个因子是标准正半扭转的幂，我们便证明了第一个陈述。现在我们已在所有情况下证明，要么 $\xi_1\xi_2$，要么 $\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ 整除；必要时，可将 $\mathcal{F}$ 替换为一个复杂度相同且与之 Hurwitz 等价的分解。

现在我们来证明这些公式。若 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ 整除，则 $\xi_1\xi_2$ 是 ξ_3 的对偶，因为乘积 $\xi_1\xi_2\xi_3$ 是 Δ 的幂。由命题 3.5 可知，$\omega(\xi_1\xi_2) = \omega(\xi_3)$；由命题 3.11 可知，对于某个 $\epsilon \in \{0, 1\}$，$\omega(\xi_1\xi_2) = \omega(\xi_1) + \omega(\xi_2) - \epsilon$。此外，由命题 3.28 可知，对于每个 $1 \leq j \leq 3$，$\omega(\xi_j) = 2\omega(\tau_j) + e_j - \delta_j$。最后，根据设定 3.31 中的记号，$\xi_1\xi_2\xi_3 = \Delta^{2+\omega_3}$，因为 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个分解。由此我们推出 $\omega(\xi_3) = 2 + \omega(\tau_1) + \omega(\tau_2) + \omega(\tau_3)$。方程 $6 = e_1 + e_2 + e_3$ 现在意味着

$$2 = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \epsilon$$

and

$$\omega(\rho_3) = 2 + \omega(\rho_1) + \omega(\rho_2) + \delta_3 - e_3.$$

因此，该陈述得以证实。 □

以下技术性陈述是引理 4.48 的补充。

引理 4.49. 我们采用设定 3.31，其中包含 $k = 3$。假设 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个最小复杂度分解，且它不由三个正半扭转的平方组成（即满足引理 4.48 的假设），并且 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ 整除。如果 $\mathcal{F}$ 中有两个非标准正半扭转的幂，那么它们必定是 g_1 和 g_2。

证明。我们将证明，g_3 与 g_j 中恰有一个适用于 $j \in \{1, 2\}$ 的项不可能同时是非标准正半扭转的幂。为导出矛盾，假设结论不成立。由于另一种情形的证明类似，我们考虑 g_2 和 g_3 是非标准正半扭转的幂的情形，因为证明在

另一种情形下类似。我们将证明，可以对 $\mathcal{F}$应用降低复杂度的全局共轭变换，这与 $\mathcal{F}$ 是最小复杂度分解的假设矛盾。

首先，引理 4.48 蕴含 $\epsilon = 0$。特别地，引理 3.9 蕴含 ξ_1 的最后一个生成元的指标等于 ξ_2 的第一个生成元的指标。令 τ' 为 ξ_2 的切左因子，其中 $\omega(\tau') = 1$。我们根据 τ' 是单个生成元还是两个不同生成元的乘积来分类讨论。一般而言，命题 4.26 蕴含 $(\tau')^{-1} g_2 \tau'$ 的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_2 的 Garside 幂的绝对值。此外，$\xi_1\xi_2$ 对偶于 ξ_3 这一假设与引理 3.19 蕴含 $\xi_2\xi_3$ 可被 Δ 整除，因为 g_2 是一个非标准正半扭转的幂。

如果 τ' 是单个生成元，那么 $(\tau')^{-1} g_1 \tau' = g_1$ 是一个标准正半扭转的幂。命题 4.28 蕴含 $(\tau')^{-1} g_3 \tau'$ 的 Garside 幂的绝对值至多等于 g_3 的 Garside 幂的绝对值，因为 $\xi_2\xi_3$ 可被 Δ 整除。我们推得，当 τ' 是单个生成元时，$c\left((\tau')^{-1}\mathcal{F}\tau'\right) < c(\mathcal{F})$。

如果 τ' 是两个不同生成元的乘积，那么$(\tau')^{-1} g_1 \tau'$ 的 Garside 幂的绝对值至多比 g_1的 Garside 幂的绝对值大一。命题 3.2、引理 3.10 和命题 4.26 表明，$(\tau')^{-1} g_3 (\tau')$的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_3的 Garside 幂的绝对值。由此我们推得，如果 τ'是两个不同生成元的乘积，那么$c\left((\tau')^{-1}\mathcal{F}\tau'\right) < c(\mathcal{F})$。

因此，该结论得以证实。 □

现在我们可以对 Δ^2 分解为正半扭转的幂进行分类，其中一个因子是正半扭转的四次方，其余因子均为正半扭转。

定理 4.50. 若 $\mathcal{F}$ 是 Δ^2 的一个分解，其中包含两个正半扭转和一个正半扭转的四次方，则 $\mathcal{F}$ 与标准分解 $\left(\sigma_1^4、\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1、\ \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)$（见定义 4.5）Hurwitz 等价。

证明. 我们采用设定 3.31。反设 $\mathcal{F}$ 是一个最小复杂度分解，但它不与标准分解 $\left(\sigma_1^4、\ \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1、\ \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\right)$Hurwitz 等价。引理 4.31 蕴含复杂度 $c(\mathcal{F}) > 0$。引理 4.48 蕴含，经由可能将 $\mathcal{F}$ 替换为一个 Hurwitz 等价的最小复杂度分解，我们可以假设$\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ整除。不失一般性，假设 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ整除。

我们采用引理 4.48 中的记号。这些公式表明，要么 $\mathcal{F}$ 中恰有两个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 0$；要么 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 1$。

首先，我们假设 $\mathcal{F}$ 中恰有两个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 0$。如果 g_1 和 g_2 是非标准正半扭转的幂，那么引理 4.48 表明 $e_3 = 2+\omega(\rho_1)+\omega(\rho_2)$。特别地，$e_3 = 4$ 和 $\omega(\rho_1) = 1 = \omega(\rho_2)$。我们推得 $\mathcal{F} = \left(\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1、\ \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2、\ \sigma_1^4\right)$；可能需要先对 $\mathcal{F}$ 应用关于 Δ 的整体共轭变换。这里使用引理 3.10，因为 $\xi_1\xi_2$ 是 ξ_3 的对偶。在这种情况下，$\mathcal{F}$ 经两次 Hurwitz 变换后与标准分解 Hurwitz 等价。引理 4.49 表明，g_1 和 g_2 中恰有一个不能是非标准正半扭转的幂。

其次，我们假设 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 1$。如果 g_j 是 $j \in \{1,2\}$ 的非标准正半扭转的幂，那么引理 4.48 表明，$\omega(\rho_j) = e_3 - 2$。特别地，$e_3 = 4$。经过可能对 $\mathcal{F}$ 应用由 Δ 给出的全局共轭变换后，我们可以假设 $g_3 = \sigma_1^4$。我们推得，若 $j = 1$，则 $\mathcal{F} = \left(\sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^2、\ \sigma_2、\ \sigma_1^4\right)$；若 $j = 2$，则 $\mathcal{F} = \left(\sigma_2、\ \sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^{-2}、\ \sigma_1^4\right)$。这里使用了引理 3.10，因为 $\xi_1\xi_2$ 是 ξ_3 的对偶。在这两种情况下，$\mathcal{F}$ 都 Hurwitz 等价于标准分解。

如果 $j = 3$，那么引理 4.48 表明 $0 < \omega(\rho_3) = 3 - e_3$。特别地，$e_3 = 1$ 和 $\omega(\rho_3) = 2$。如果 $e_1 = 4$，那么在可能对 $\mathcal{F}$应用由 Δ 进行的全局共轭变换后，我们可以假设 $g_1 = \sigma_1^4$。由于 $\xi_1\xi_2$ 是 ξ_3的对偶，我们利用引理 3.10 推得$\mathcal{F} = \left(\sigma_1^4, \sigma_2, \sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^{-2}\right)$。如果 $e_2 = 4$，那么在可能对 $\mathcal{F}$应用由 Δ进行的全局共轭变换后，我们可以假设 $g_2 = \sigma_1^4$。由于 $\xi_1\xi_2$ 是 ξ_3的对偶，我们利用引理 3.10 推得 $\mathcal{F} = \left(\sigma_2, \sigma_1^4, \sigma_1^{-2}\sigma_2\sigma_1^2\right)$。在每种情况下，$\mathcal{F}$都 Hurwitz 等价于标准分解。

因此，该陈述得证。 □

我们给出定理 4.50 的几何重述。

定理 4.51. 设 C、$C' \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是三次简单 Hurwitz 曲线。若 C 和 C' 各有一个自切点且没有其他奇点，则 C 与 C' 同痕。

证明. 一个具有单个自切点且没有其他奇点的三次 Hurwitz 曲线的辫单值分解，是 Δ^2 分解为两个正半扭转和一个正半扭转的四次方。此外，该曲线的辫单值分解的 Hurwitz 等价类完全决定了该曲线的同痕类。

定理 4.50 意味着 C 的辫单值分解与 C' 的辫单值分解 Hurwitz 等价。因此，该陈述得证。

□

我们将本小节的结果概括为以下陈述。

定理 4.52. 设 C、$C' \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是三次简单 Hurwitz 曲线，且对于每个正整数 $n \geq 1$，它们的 A_n-奇点数相同。考虑以下对曲线 C 和 C'的 A_n-奇点数的约束之一。

(i) 这些曲线是节点型的（即唯一的奇点是节点奇点）。(ii) 每条曲线都只有一个奇点，且该奇点是尖点奇点。(iii) 每条曲线都只有一个奇点，且该奇点是切触节点型奇点。

如果满足其中一项约束，那么 C 与 C' 同痕。

证明。该陈述是定理 4.40、定理 4.47 和定理 4.51 的推论。

□

4.4 CP2 中三次简单 Hurwitz 曲线奇点的完整分类

本小节的目标是确立三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的 A_n-奇点数目所满足的一组完整约束。奇点公式（引理 4.4）表明，对于 $n \geq 4$， C 中至多有两个 A_3-奇点（尖点奇点），而 C 中至多有一个 A_n-奇点。

在本小节中，我们将加强奇点公式，以证明在 C 中至多存在一个 A_3-奇点，并且对于$n \geq 5$， C 中不存在 A_n-奇点。我们将证明，三次简单 Hurwitz 曲线 C中， A_3-奇点与 A_2-奇点（节点奇点）不能同时出现。我们还将证明，三次简单 Hurwitz 曲线 C中， A_4-奇点（二重点奇点）与 A_2-奇点不能同时出现。这些结论合起来即为引言中的定理 1.2。

定理 1.2 等价于以下代数命题：在辫群 B_3 中， Δ^2 不存在由正半扭转的幂构成且因子至多为三个的分解，除非这三个因子全都是正半扭转的平方，或者这三个因子由一个正半扭转的四次方和两个正半扭转组成。我们将运用第 3 节中的正辫对偶理论以及 B_3 中的共轭类理论，来证明这一代数命题。对三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 可能出现的奇点所作的刻画，将完成我们对$\mathbb{CP}^2$中三次简单 Hurwitz 曲线同痕类的分类。事实上，定理 1.2 表明，定理 4.25 与定理 4.52 合起来等价于引言中的定理 1.1。

现在我们已准备好建立关于 Δ^2 分解为正半扭转的幂时因子数量的第一个约束。

引理 4.53。将 Δ^2 分解为正半扭转的幂，至少需要三个因子。

证明。为导出矛盾，假设存在一种将 Δ^2 分解为至多两个正半扭转的幂之乘积的分解。首先，该分解必须恰有两个因子。事实上， Δ^2 本身不是正半扭转的幂，因为 Δ^2 是中心的，且构成其自身的共轭类。

为导出矛盾，假设 $\mathcal{F} = (g_1, g_2)$ 是将 Δ^2 分解为两个正半扭转的幂之乘积的一种分解，且具有最小复杂度。我们采用设定 3.31，其中 $k = 2$。首先，引理 4.31 表明复杂度 $c(\mathcal{F}) > 0$。事实上，要么 $e_1 \geq 3$，要么 $e_2 \geq 3$，因为 $e_1 + e_2 = 6$（采用设定 3.31 中的记号）。我们将证明，总能对分解 $\mathcal{F}$ 应用降低复杂度的全局共轭变换，从而与复杂度 $c(\mathcal{F})$ 的最小性矛盾，并完成证明。

当然， ξ_1 是 ξ_2 的对偶（采用设定 3.31 中的记号）。如果 g_1 和g_2 都是非标准正半扭转的幂，那么由引理 4.29 可知，我们可以对分解 $\mathcal{F}$应用降低复杂度的全局共轭变换。由此可知，至少有一个因子是标准正半扭转的幂。

不失一般性，设 g_1 是标准正半扭转的幂，并记为$g_1 = \sigma_{i_1}^{e_1}$。由命题 3.2 可知， ρ_2以$\sigma_{i_1'}\sigma_{i_1}$开头，其中 $i_1 \neq i_1' \in \{1, 2\}$。由引理 3.10 可知， τ_2 以$(\sigma_{i_1})^{(\omega(\tau_2))}$ 结尾，并且$(\sigma_{i_1})^{(\omega(\tau_2))}$ 是 τ_2的一个切右因子。由命题 4.26 可知，$\sigma_{i_1} g_2 \sigma_{i_1}^{-1}$的 Garside 幂的绝对值严格小于 g_2的 Garside 幂的绝对值。当然，$\sigma_{i_1} g_1 \sigma_{i_1}^{-1} = g_1$。因此，复杂度 $c\left(\sigma_{i_1} \mathcal{F} \sigma_{i_1}^{-1}\right) < c(\mathcal{F})$。由此，命题得证。

□

我们陈述引理 4.53 的等价几何表述。

定理 4.54. 三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 至少有三个 A_n-奇点。

证明. 三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的辫单值分解 $\mathcal{F}$ 是将 Δ^2 分解为 k 个正半扭转的幂的乘积，其中 k 是 C中的 A_n-奇点数。引理 4.53 蕴含 $k \geq 3$。因此，结论得证。

□

现在我们对 Δ^2 分解为三个正半扭转的幂的分解施加限制。

引理 4.55. Δ^2 的正半扭转的幂分解不可能恰好有三个因子，其中一个因子是正半扭转的立方。

证明. 为了导出矛盾，假设Δ^2 存在一个由三个正半扭转的幂组成的分解，其中一个因子是正半扭转的立方。设 $\mathcal{F} = (g_1, g_2, g_3)$ 是 Δ^2 的一个具有最小复杂度的此类分解。由命题 4.3 可知， $\mathcal{F}$ 是 Δ^2的一个分解，包含一个正半扭转的立方、一个正半扭的平方和一个正半扭转。我们将证明，不存在这样的 Δ^2正半扭转的幂分解。由引理 4.48 可知，经过可能的替换——将 $\mathcal{F}$ 替换为一个 Hurwitz 等价的最小复杂度分解——我们可以假设 $\xi_1\xi_2$ 或 $\xi_2\xi_3$ 不能被 Δ整除。不失一般性，我们假设 $\xi_1\xi_2$ 不能被 Δ整除。

我们采用引理 4.48 中的记号。引理 4.48 中的公式表明， $\mathcal{F}$ 中恰有两个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 0$；或者 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 1$。

首先，若 $\mathcal{F}$ 中有两个因子是非标准正半扭转的幂，那么它们不能是 g_1 和 g_2。事实上，否则引理 4.48 表明 $e_3 = 2 + \omega(\rho_1) + \omega(\rho_2) \geq 4$，这就导致矛盾。由引理 4.49 可知， $\mathcal{F}$ 中不可能恰有两个因子是非标准正半扭转的幂。

其次，我们假设 $\mathcal{F}$ 中恰有一个因子是非标准正半扭转的幂，且 $\epsilon = 1$。若 g_j 对应的因子是 $j \in \{1, 2\}$ 的非标准正半扭转的幂，则引理 4.48 表明 $0 < \omega(\rho_j) = e_3 - 2$。特别地， $e_3 = 3$。然而，根据引理 3.10 和命题 3.26，在这种情况下，$\xi_1\xi_2$ 不可能与 ξ_3 对偶。若 g_3 是非标准正半扭转的幂，则引理 4.48 表明$0 < \omega(\rho_3) = 3 - e_3$，这就导致矛盾。

因此，命题得证。 □

我们陈述引理 4.55 的等价几何表述。

定理 4.56. 三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 不会恰有三个 A_n-奇点，除非三个 A_n-奇点全都是 A_2-奇点（节点奇点），或者一个 A_n-奇点是 A_4-奇点，而另外两个 A_n-奇点是 A_1-奇点。

证明. 如果三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 恰有三个A_n-奇点，那么 C 的辫单值分解是将 Δ^2 分解为三个正半扭转的幂之乘积的一个分解 $\mathcal{F}$。如果结论不成立，那么 $\mathcal{F}$ 就是将 Δ^2 分解为三个正半扭转的幂的一个分解，其中一个因子是正半扭转的立方。引理 4.55 指出，不存在这样的 Δ^2 分解。因此，命题得证。

□

我们可以将定理 4.54 和定理 4.56 的结合解读为对三次曲线可能出现的奇点的一组完整约束

简单赫尔维茨曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$。以下陈述与奇点公式（引理 4.4）合起来，等价于引言中的定理 1.2。

定理4.57. 三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 的奇点满足以下约束：

(i) C 至多有一个 A_3 奇点（尖点奇点）。(ii) C 不会同时具有一个 A_2 奇点（节点奇点）和一个 A_3 奇点（尖点奇点）。(iii) C 不会同时具有一个 A_2 奇点（节点奇点）和一个 A_4 奇点（二重点奇点）。(iv) 对于 $n \geq 5$, C 不具有 A_n 奇点。

证明。这些结论是定理 4.54、定理 4.56 和奇点公式（引理 4.4）的推论。 □

如果三次简单 Hurwitz 曲线 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 有三个 A_2 奇点（节点奇点）、一个 A_4 奇点（二重点奇点）和两个 A_1 奇点，或有四个及以上 A_n 奇点，那么我们已经证明，对于每个正整数 $n \geq 1$, C 中 A_n 奇点的数量唯一确定了 C 的同痕类（第 4.2 小节中的定理 4.25 和第 4.3 小节中的定理 4.52）。以下陈述总结了本文的主要结果。

定理 4.58. 设 $C \subseteq \mathbb{CP}^2$ 是一条三次简单 Hurwitz 曲线。若对每个正整数 $n \geq 1$, C 中的 A_n 奇点数为 ν_n，则元组 $(\nu_n)_{n=1}^6$ 是标准元组（定义 4.5）。反之，若 $(\nu_n)_{n=1}^6$ 是标准元组，则存在唯一一条三次简单 Hurwitz 曲线$C \subseteq \mathbb{CP}^2$ ，在同痕意义下满足：对每个正整数 $n \geq 1$, C 中的 A_n 奇点数等于 ν_n。

证明. 第一个陈述等价于定理 1.2。第二个陈述等价于定理 4.25 和定理 4.52 的组合。 □

我们指出，定理 4.58 等价于引言中的定理 1.1 和定理 1.2 的组合。

5 $\mathbb{S}^2$ 上亏格一 Lefschetz 纤维化的分类

在本节中，我们对 $\mathbb{S}^2$ 上的亏格一 Lefschetz 纤维化给出完整分类。具体而言，我们证明奇异纤维的数量

是 $\mathbb{S}^2$ 上亏格一 Lefschetz 纤维化同构类的完全不变量，且该数量是 12 的倍数。我们指出，这一点 Moishezon-Livne [13]，已经确立，但我们基于本文的结果给出一个简短且独立的分类证明。

事实上，我们回顾一下，在 $\mathbb{S}^2$ 上的亏格一 Lefschetz 纤维化的分类，等价于将单位元分解为模群 $\mathrm{Mod}(\mathbb{T}^2) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中正 Dehn 扭转的分解分类，其中 $\mathbb{T}^2$ 是一条亏格一复曲线。主要观察是，辫群 B_3 与模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 之间存在密切联系；我们将利用这一联系以及本文中的结果，对 $\mathbb{S}^2$ 上的亏格一 Lefschetz 纤维化进行分类。

首先，我们回顾

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ and } ad - bc = 1 \right\}$$

是由行列式为 $+1$ 的 2×2 整数矩阵构成的群。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的中心是由 $-I$ 生成的阶为 2 的循环群 $\langle -I \rangle$，其中 I 表示 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的 2×2 单位矩阵。我们还回顾

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \langle -I \rangle .$$

Let

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据上下文，我们将 S 和 T 视为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 或 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 的元素。在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中，正 Dehn 扭转是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 S（或 T）所属共轭类中的一个元素。

我们回顾以下经典结果。

命题 5.1. 我们有一个群同构

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\langle S, T : STS = TST, \; (ST)^6 = I \right\rangle .$$

注意，命题 5.1 蕴含 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 存在有限表示

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) = \left\langle S, T : STS = TST, \; (ST)^3 = I \right\rangle .$$

命题 5.1 还表明，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 同构于自由积$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$。事实上， STS 在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 中生成一个 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 的副本，而 ST在 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 中生成一个 $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 的副本。此外，$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ 由 STS 和 ST 生成，并满足这些关系。证明这些有限表示的传统方法基于乒乓引理，该引理根据群及其子群在一个集合上的作用，给出了判定一个群是否为若干子群的自由积的准则

（参见 [5] 的 II.B）。我们指出，在 [13] 中对底空间为 $\mathbb{S}^2$ 的亏格一 Lefschetz 纤维化进行分类的方法，基于 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 这一同构以及短正合列

$$1 \to \langle \pm I \rangle \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \to 1.$$

然而，在本文中，我们将运用关于辫群 B_3 的结果来分类 $\mathbb{S}^2$ 上的亏格一 Lefschetz 纤维化。事实上，按照以下规则，我们用 $B_3 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 来定义 ϕ：将 B_3 的 Artin 表示中的生成元映射为 $\phi(\sigma_1) = S$ 和 $\phi(\sigma_2) = T$。命题 5.1 表明，ϕ 是一个定义良好的满同态。

命题 5.2。映射序列

$$1 \to \left\langle \Delta^4 \right\rangle \to B_3 \to SL_2(\mathbb{Z}) \to 1$$

是一个短正合列。此外，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的每个正 Dehn 扭转都是 B_3 中某个正半扭转的像。

证明。第一个结论由命题 5.1 得出，因为 $\phi(\Delta) = STS$。事实上，Δ^4 在 B_3 中是中心的，因此由 Δ^4 正规生成的 B_3 的子群等于由 Δ^4 生成的 B_3 的子群。第二个结论由 ϕ 的满射性得出：$B_3 \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，这意味着 B_3 中 σ_1 的共轭类的像等于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中 $\phi(\sigma_1) = S$ 的共轭类。

□

最后，我们回顾一下：若 $k \geq 0$ 是一个非负整数，则在辫群 B_3 中，将 Δ^k 分解为正半扭的分解存在唯一的 Hurwitz 等价类（定理 4.23）。以下结论是定理 4.23、命题 5.2 以及 Hurwitz 等价的函子性（命题 2.14）的一个应用。

定理 5.3。奇异纤维的数量是 $\mathbb{S}^2$ 上亏格一勒夫谢茨纤维化同构类的完全不变量。此外，$\mathbb{S}^2$ 上亏格一勒夫谢茨纤维化的奇异纤维数量可被 12 整除。

证明。$\mathbb{S}^2$ 上的亏格一勒夫谢茨纤维化的辫单值分解，是群 $\mathrm{Mod}\left(\mathbb{T}^2\right) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中由正 Dehn 扭转构成的单位元分解，其中因子数量等于该勒夫谢茨纤维化的奇异纤维数量。此外，$\mathbb{S}^2$ 上的亏格一勒夫谢茨纤维化的同构类，完全由其辫单值分解的 Hurwitz 等价类确定。设 $\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中由正 Dehn 扭转构成的单位元分解。我们将证明，$\mathcal{F}$ 与标准分解 Hurwitz 等价

$I \equiv (S,T,S,\ldots,S,T,S)$，它是 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的单位元 $I \in$，含有 $3k$ 个因子，其中k是一个可被 4 整除的正整数。

事实上，命题 5.2 蕴含 $\mathcal{F}$ 可提升为 $\mathcal{F}'$，即在辫群 B_3中将 Δ^k分解为正半扭转，其中某个正整数 k 可被 4 整除。然而，定理 4.23 和引理 4.10 蕴含 $\mathcal{F}'$ 与标准分解 $\Delta^k \equiv (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1,\ldots,\sigma_1,\sigma_2,\sigma_1)$ Hurwitz 等价，该分解由 B_3中的 $3k$ 个标准正半扭转构成。 Δ^k的标准分解在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 中的像是分解 $I \equiv (S,T,S,\ldots,S,T,S)$，其中有 $3k$ 个因子。Hurwitz 等价的函子性（命题 2.14）现在蕴含 $\mathcal{F}$ 与标准分解$I \equiv (S,T,S,\ldots,S,T,S)$ Hurwitz 等价。因此，该陈述得证。

□

参考文献

[1] Denis Auroux. 辛四维流形作为 $\mathbb{CP}^2$的分歧覆盖。《数学发明》，139(3):551–602，2000。[2] Denis Auroux. 关于辛四维流形、奇异平面曲线和辫群分解的一些未决问题。载于《欧洲数学大会》，第23–40页。欧洲数学会，苏黎世，2005。[3] Denis Auroux 和 Ludmil Katzarkov. $\mathbb{CP}^2$ 的分歧覆盖与辛四维流形的不变量。《数学发明》，142(3):631–673，2000。[4] Amitesh Datta. $\mathbb{CP}^2$中的辛同痕猜想。准备中。[5] Pierre de la Harpe. 几何群论专题。芝加哥数学讲座丛书。芝加哥大学出版社，美国伊利诺伊州芝加哥，2000。[6] Benson Farb 和 Dan Margalit. 映射类群入门，普林斯顿数学丛书第49卷。普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，2012。[7] F. A. Garside. 辫群及其他群。《牛津数学季刊》(2)，20:235–254，1969。[8] Marco Golla 和 Laura Starkston. 有理尖点曲线的辛同痕问题。《组合数学》，158(7):1595–1682，2022。[9] Vik. S. Kulikov 和 V. M. Kharlamov. 关于辫单值分解。《俄罗斯科学院数学辑报》，67(3):79–118，2003。[10] Vik. S. Kulikov 和 M. Taˇıkher. 辫单值分解与微分同胚类型。《俄罗斯科学院数学辑报》，64(2):89–120，2000。[11] E Liberman 和 M Teicher. 赫尔维茨等价问题不可判定。arXiv 预印本 math/0511153，2005。

[12] B. Moishezon. 辫子的算术与 Chisini 命题。载于《几何拓扑》（海法，1992），当代数学第164卷，第151–175页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1994。[13] Boris Moishezon. 复曲面与复射影平面的连通和。数学讲义，第603卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1977。附录由 R. Livne 撰写。[14] Hiroshi Ohta 和 Kaoru Ono. 简单奇点与辛填充。微分几何杂志，69(1):1–42，2005。[15] Vsevolod V. Shevchishin. 关于局部塞韦里问题。国际数学研究通报，(5):211–237，2004。[16] J ean-Claude Sikorav. 正常泛型*J*-全纯曲线的粘合构造。载于《辛与接触拓扑：相互作用与展望》（多伦多，ON/蒙特利尔，QC，2001），菲尔兹研究所通讯第35卷，第175–199页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003。