流体动力学相互作用改变剪切流中平行柔性薄片的屈曲阈值

Hugo Perrin、Heng Li 和 Lorenzo Botto*Process & Energy Department, Faculty of Mechanical, Maritime and Materials Engineering, Delft Univ. of Technology, Delft, The Netherlands*(日期：2023年3月10日)

黏性流动诱发的屈曲会改变悬浮在液体中的片状纳米材料颗粒的形状。这种颗粒尺度的不稳定性会影响悬浮液流动的集体行为，并具有诸多技术和生物学意义。在此，我们研究了黏性流体动力学相互作用对柔性薄片形态的影响。通过分析在剪切池中悬浮薄片的模型实验，我们发现，一对薄片在比单片屈曲阈值低十倍的剪切速率下即可发生弯曲。这种效应是由相邻薄片诱发的扰动流场所产生的横向流体动力造成的。横向流体动力消除了屈曲不稳定性，却大幅增强了弯曲变形。当薄片间距较小时，润滑力占主导并阻止变形。这两种相互对抗的效应导致弯曲所需剪切速率与薄片间距之间呈非单调关系。我们的研究表明，悬浮液中片状颗粒的形态并非纯粹由材料性质决定，也取决于颗粒浓度和微观结构。

arXiv:2303.05282v1 [physics.flu-dyn] 9 Mar 2023

I. 引言

柔软的生物或合成物体，例如细胞、脂质双层、大分子和纳米颗粒，在足够强的剪切流或拉伸流中悬浮时会发生变形 [1–4]。预测流动诱导的形态变化对于许多领域都至关重要，从生物物理学（微生物的游动依赖于流固相互作用 [5], ）到软物质物理学（颗粒悬浮液的流变响应受瞬时颗粒形状影响 [6]）皆是如此。对典型流动的模型研究提供了普遍适用的深刻物理见解。例如，聚合物在简单剪切流中的线团-拉伸转变的理论预测[7, 8] ，对稀聚合物溶液流变模型的发展起到了关键作用 [9]。

近期，开发液相方法以处理二维纳米材料的需求 [10–12] ，引发了人们对流动如何影响片状材料形态的新兴趣 [3, 10, 11, 13–17]。二维材料的弯曲模量较低，因此在流动中可能发生瞬态或永久屈曲 [3]。近期的数值研究 [3, 18] 表明，基于流体动力压缩力与弹性弯曲力之间竞争的纯力学模型，能够捕捉悬浮于简单剪切流中的孤立石墨烯薄片和二维聚合物的形态变化。这一吻合表明，对于给定的流体剪切速率和黏度，单片的形态由屈曲不稳定性决定，其临界阈值仅取决于薄片的弯曲模量和长度。然而，将这一结果推广至多颗粒悬浮液仍是一个悬而未决的问题。由于接触面积相对较大，片状颗粒在颗粒间距较小时容易发生堆叠 [11, 19]。因此，近乎平行的薄片之间的流体动力学相互作用预计会改变单片屈曲动力学的预测结果。

本研究考察剪切流中平行排列的柔性片对，其间距各不相同，并研究屈曲失稳阈值如何受流体动力学相互作用的影响。通过开展模型实验，并结合边界积分模拟和理论建模解读结果，我们证明，流体动力学相互作用能够在远低于单片屈曲阈值的剪切速率下引发弯曲。因此，在预测柔性片在流动中的形态时，不能将流体动力学相互作用视为次要效应。具体而言，我们的模拟和理论建模表明，每片所诱导的偶极扰动流场会产生横向流体动力。当片对取向于剪切流的压缩象限时，片对会受到轴向压缩流体动力，而横向力会改变片对对此压缩力的力学响应。另一方面，当间距较小时，润滑力会压过偶极贡献，从而阻止弯曲。这两种相互竞争的效应使粒子间距与屈曲临界剪切速率之间呈非单调关系。更一般地说，我们的结果表明，悬浮液中近距离片的变形不仅取决于每片的力学和几何性质，也会受到粒子对间距的显著影响，因而取决于浓度。

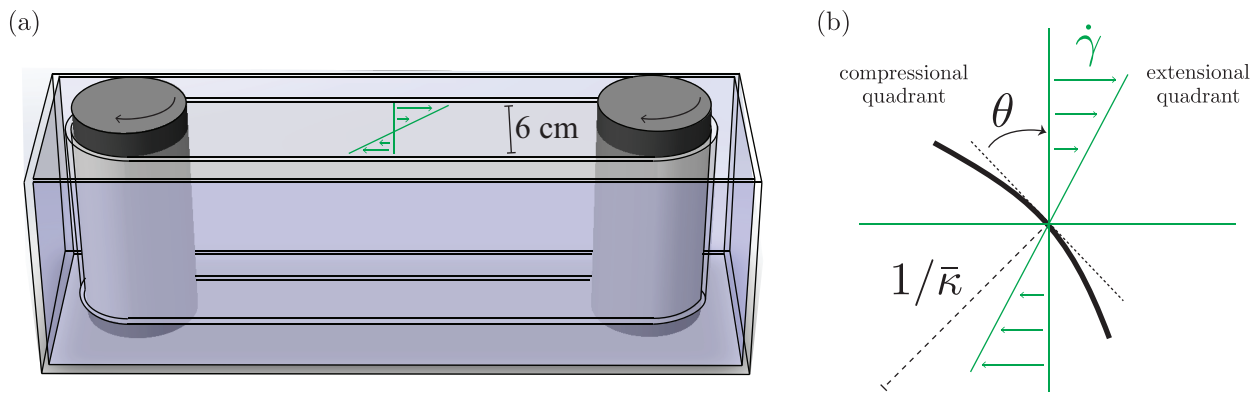


图 1：（a）剪切池示意图。（b）沿剪切流涡量方向观察到的屈曲薄片示意图，以及中点取向角 θ 和中点曲率 $\bar{\kappa}$的定义。图中标出了压缩象限和伸展象限。在此示意图中，薄片位于压缩象限内（$-\pi/2 < \theta < 0$）。

II. 实验

实验使用了不同厚度（$h = 23$、50 和 125 μm）、宽度为 $w = 1$ cm、长度为 L（范围为 1 至 4 cm）的麦拉薄片（杨氏模量为 $E \simeq 4$ GPa）。相应的薄片弯曲模量为 $B \simeq 5.0 \times 10^{-6}$、 5.0×10^{-5}、和 8.1×10^{-4} J（$B = Eh^3/12(1-\nu^2)$，其中 $\nu \simeq 0.5$ 为泊松比）。剪切池由一条传送带和两个直径为 6 cm 的同向旋转圆柱组成，见图 1(a)。连接其中一个圆柱的电机可在 $\dot{\gamma} = 0.4 - 10\,\mathrm{s}^{-1}$ 范围内施加受控剪切速率。我们研究了单片以及间距为 d、变化范围为 $d/L = 0.03 - 1$ 的平行片对。薄片置于甘油中（黏度为 $\eta \simeq 1$ Pa.s，密度为 $\rho \simeq 1.2 \times 10^3$ kg.m^{-3}）。最大剪切速率下的最大雷诺数 $Re = \rho\dot{\gamma}L^2/\eta$ 约为 1。使用镊子将薄片放置好，使其法向量位于流动-梯度平面内。放置好薄片后，启动圆柱。在运动过程中，法向量始终位于流动-梯度平面内，因此运动是二维的。我们从顶部沿未受扰剪切流的涡量方向，用相机进行光学测量。通过对每片薄片的轮廓拟合直线，从图像中提取中点取向角 $\theta(t)$，见图 1(b)。通过对每片薄片的轮廓拟合抛物线，得到中点曲率 $\bar{\kappa}(t)$。测量的时间分辨率为 0.1 s，空间分辨率为 25 μm/pixel。尽管最大 Re 约为 1，在分析结果时我们仍采用低雷诺数近似（斯托克斯流）。正如后文所示，这一近似能够使模拟结果与实验数据较好地吻合。

III. 模拟方法

我们采用正则化斯托克斯let方法 [17, 20–22]，模拟斯托克斯流中薄片的流固耦合。正则化斯托克斯let方法已用于研究低雷诺数下的各种流固耦合问题，包括纤毛驱动输运 [20]，、鞭毛同步 [21]，以及双螺旋周围的流动[22]。与实验中一样，流动和薄片动力学均为二维，因此我们通过采用二维描述简化了模拟。对于二维细长体，该方法沿物体的中心线布置正则化力奇点。每个离散线段上的正则化力密度积分，表示该细长体线段施加于流体的力。由于斯托克斯方程具有线性，位置 $\mathbf{x}$、时间 t 处的速度场 $\mathbf{u}(\mathbf{x}\ t)$ 满足以下边界积分方程 [23]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}^{\infty}(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi\eta}\int_C \mathbf{G}_{\epsilon}(\mathbf{x},\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t)\mathrm{d}l, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{u}^{\infty}$ 为未扰动背景流，η为动力黏度，作用于薄片微元 $\mathrm{d}l$ 并以$\mathbf{x}_0$ 为中心的流体上的力密度为$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t)$，而$\mathbf{G}_{\epsilon}$ 为无界流 [24]中的二维正则化斯托克斯let。由于对薄片采用了不可伸长近似 [17, 22]，此处忽略了双层势。由于薄片无惯性，流体动力（$-\mathbf{f}$）与局部内部弹性力相平衡。数值计算中，我们按照 [17, 21, 25]中的方法，通过对弯曲能求导来计算弹性力。每个薄片的运动学

由薄片表面的无滑移边界条件控制。在细长体近似下，该条件近似为薄片中心线处的无滑移条件：

$$\frac{\partial \mathbf{X}(s,t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(s,t)), \tag{2}$$

其中，$\mathbf{X}(s,\ t)$ 表示薄片中心线上曲线坐标 s 处、时间 t时的位置矢量。在这种数值方法中，薄片厚度为零，因此若要观察翻滚和弯曲，薄片的初始取向角必须不同于 $\pm\pi/2$ ，且初始形状应设置为相对于直线的扰动 [26]。根据我们先前的工作 [17] ，我们将初始取向设为 $\theta_0 = -\pi/2 + \pi/10$ ，并将第一屈曲模态 $\kappa(s) = \kappa_0 \sin(s\pi/L)$ 作为初始形状扰动，其振幅较小，为 $\kappa_0 = 8 \times 10^{-3}/L$；其中，$\kappa(s)$ 表示 s处的局部曲率。每个时间步中，首先通过式（1）计算速度场，然后采用一阶显式欧拉格式推进式（2），以获得薄片在新时间步的构型。在数值模拟中，每片薄片离散为 51 个节点，时间步长为 $10^{-5}\dot{\gamma}^{-1}$。关于两个已知渐近解情形的代码验证，可参见我们先前的文章 [17]。这两种情形分别是静止流中初始变形薄片的弛豫，以及剪切流中单片的翻滚动力学。模拟过程中，每个时间步都通过对薄片中心进行抛物线拟合，计算其中点曲率 $\bar{\kappa}(t) = \kappa(s = L/2,\ t)$。

IV. 单个薄片的动力学

对于长度为 L、宽度为 w 且弯曲模量为 B的不可伸长柔性薄片，其轴向压缩的欧拉屈曲力与 wB/L^2 [27, 28]成正比。在斯托克斯极限下，剪切流中的黏性压缩力按 $\eta\dot{\gamma}Lw$缩放。它对取向角的依赖为 $-2\sin\theta\cos\ \theta$ [3, 29]，当薄片沿剪切流的压缩轴 $\theta = -\pi/4$ 取向时，该力达到最大值（见图1(b)）。因此，单个柔性薄片的屈曲动力学取决于弹黏数 [3]

$$E_v = \frac{\eta\dot{\gamma}L^3}{B}. \tag{3}$$

这个无量纲数也可以解释为两个时间尺度之比：$1/\dot{\gamma}$，剪切流的特征时间尺度；以及 $\eta L^3/B$，静止黏性液体中曲率弛豫的特征时间尺度。

我们通过实验测量不同弹黏数下薄片的曲率 $\bar{\kappa}$，确定单片的屈曲阈值；实验中剪切池内仅放置一片薄片。弹黏数较小时，薄片随流体翻滚并保持笔直。弹黏数相对较大时，例如 $E_v \simeq 21$（图 2(a)），薄片会在翻滚过程中发生变形。图 2(a) 中角度 $\theta(t)$ 随时间的变化与刚性扁椭球的 Jeffery 解 [3, 30, 31] 吻合良好。这种吻合验证了我们在模拟中采用的斯托克斯流假设，也表明当曲率小于 $1/L$ 时，薄片变形不会显著影响翻滚动力学。可以看到，当薄片处于压缩象限（$-\pi/2 < \theta < 0$）时，曲率随时间增大，这是屈曲不稳定性的标志。随后，当 $\theta(t)$ 扫过伸展象限（$0 < \theta < \pi/2$）时，曲率会在时间尺度 $1/\dot{\gamma}$ 内衰减至零，见图 2(a)。为确定单片的屈曲阈值，我们测量了不同弹黏数下翻滚周期内达到的最大曲率 $\bar{\kappa}_{max}$ （见图 2(b)）。结果明显分为两个区域，两者由临界弹黏数 $E_v^c \simeq 11$ 清晰分隔：超过该值时，薄片发生变形，曲率大于实验分辨率；低于该值时，薄片曲率可忽略。为验证这一观察结果，我们对不同弹黏数下的单片进行了数值模拟，见图 2(c)。弹黏数大于 $E_v = 8$ 时，曲率随时间增大，这是屈曲不稳定性增长的标志；弹黏数小于 $E_v = 8$ 时，曲率则衰减。考虑到有限的实验分辨率会使屈曲阈值难以精确确定 [29]，数值预测值（$\simeq 8$）与实验值（$\simeq 11$）吻合尚可。文献中，有数学模型将刚性扁椭球的 Jeffery 解用于计算柔性圆盘所受的流体动力应力，据此预测的阈值为 $\simeq 10^2$ [32]。近期对六边形柔性薄片的模拟将其建模为一组通过长程流体动力相互作用而相互作用的珠子——相互作用以 Rotne-Prager-Yamakawa 级别表示——并得出临界屈曲阈值约为 50 [3]。由于流体动力压缩力取决于形状，矩形薄片的屈曲阈值预计不同于椭球和六边形薄片的屈曲阈值，因此与已发表研究的结果存在差异是意料之中的。通过实验确定单个矩形薄片的屈曲阈值，并以数值模拟加以验证，是一项重要进展，为研究平行片对提供了一个基准情形。

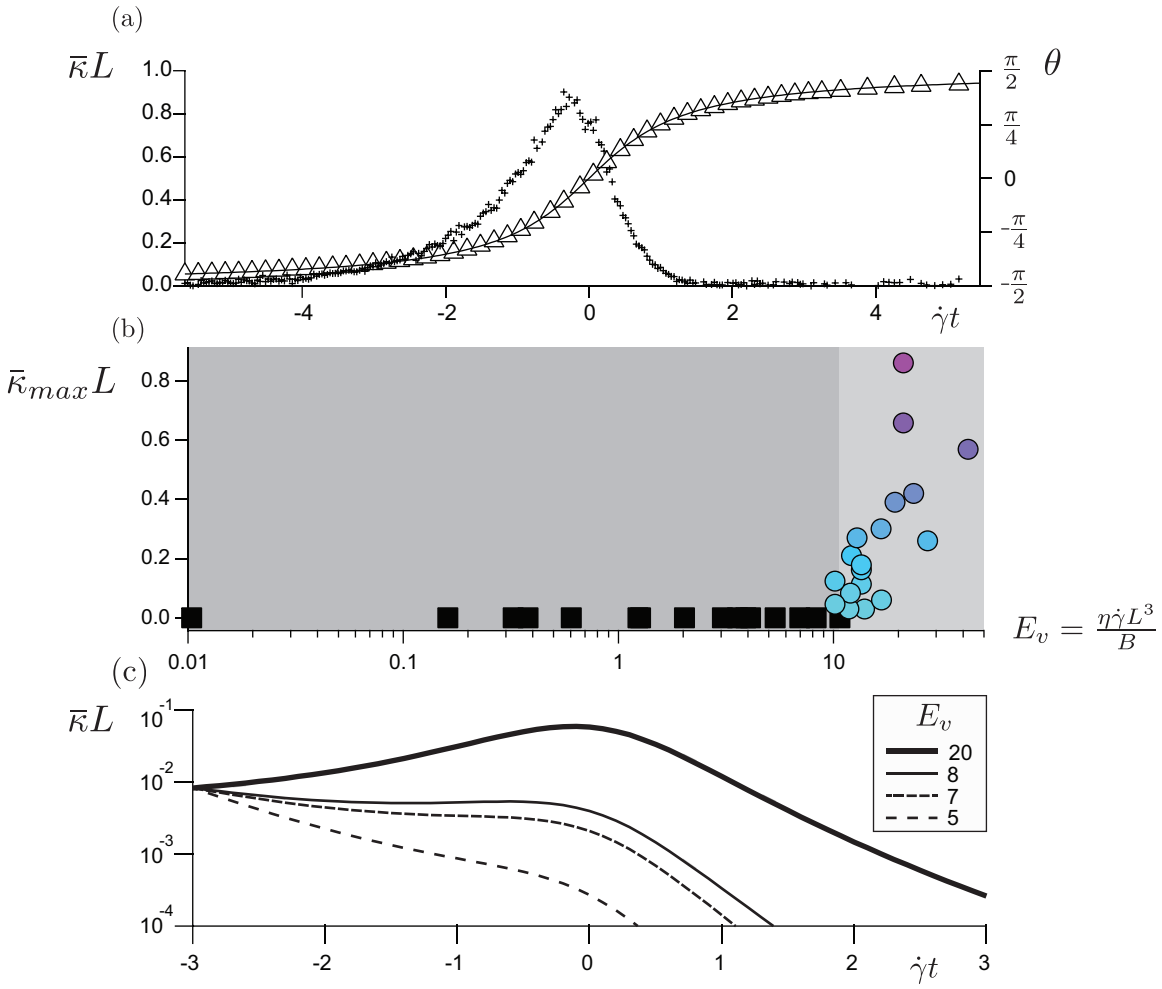


图 2：(a) 归一化中点曲率 $\bar{\kappa}L$ （叉号）和中点取向角 θ （三角形标记）随重标度时间 $\dot{\gamma}t$ 的变化，适用于 $E_v \simeq 21$。对时间进行了平移，使 $\dot{\gamma}t = 0$ 对应于取向 $\theta = 0$。黑线表示 Jeffery 预测 $\theta(t) = \arctan(\dot{\gamma}t)$ [30]。(b) 单片的最大归一化曲率随弹黏数的变化。深灰色和浅灰色区域分别界定刚性极限和屈曲区域。从该图测得的临界弹黏数为 $E_v^c \simeq 11$。(c) 不同弹黏数下，单片动力学模拟所得的归一化曲率随归一化时间的变化。

V. 一对平行薄片的动力学

由两片薄片通过黏附或摩擦结合而成的物体，其弯曲刚度大于单片 [28, 33, 34]。因此，直觉上可能会认为，两片由一层黏性液体隔开的薄片，其屈曲阈值高于单片。与此相反，我们发现，平行片对在低于单片屈曲阈值的 E_v 下也会发生变形。例如，在 $E_v \simeq 3.6$ 时，单片的曲率可忽略（见图 2(b) 和图 3(a)）；但在相同参数下，两片由 $d/L \simeq 0.2$ 隔开的薄片却呈现出有限曲率。两片薄片的曲率随时间增大，随后减小、变号，最终在翻滚运动结束时衰减至零（见图 3(a)）。对于单片，当 $E_v > E_v^c$ 时，薄片处于伸展象限期间曲率会松弛（见图 2(a)）。相反，平行片对在处于伸展象限时仍会发生变形（图 3(b) 右图）。这两种平行片对特有的行为变化——低于屈曲阈值时仍发生弯曲，以及在伸展象限内发生弯曲——都是片间流体动力学相互作用所致，正如下文将要证明的那样。

为解释实验观察，我们模拟了两片平行柔性薄片的动力学。对于 $E_v = 7$,

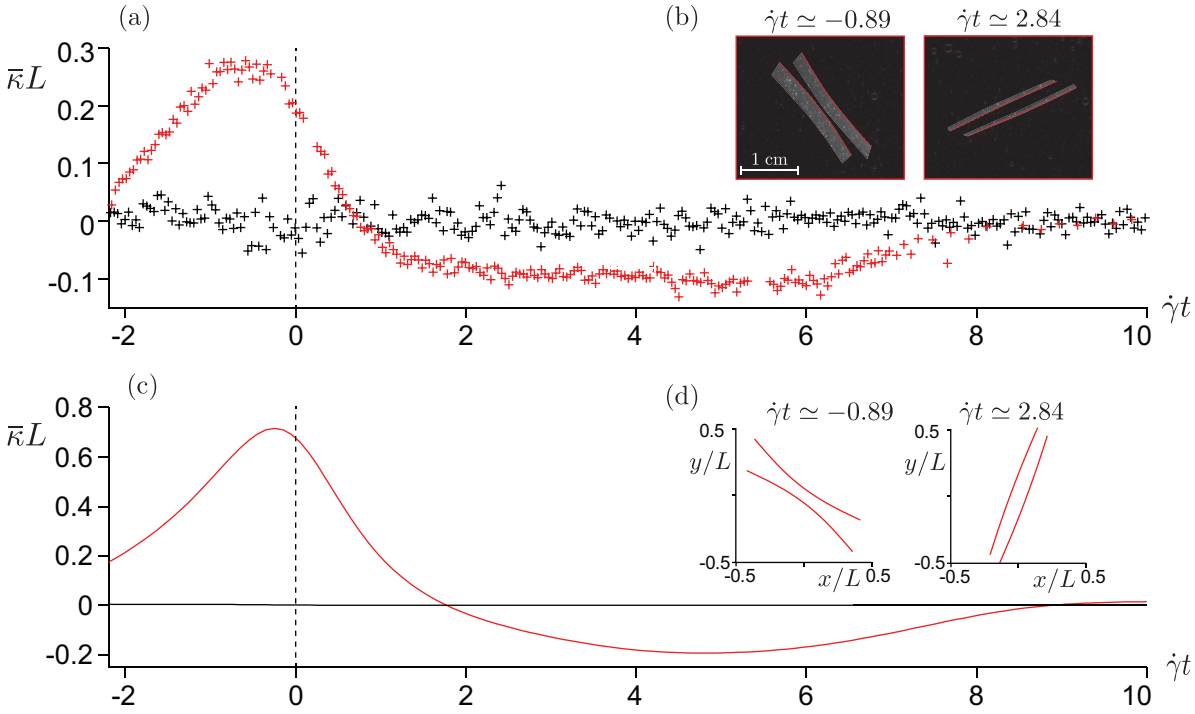


图 3：单片动力学与低于单片屈曲阈值时平行片对动力学的比较。(a) 单片（黑色）和间距为 $d/L \simeq 0.2$ 的片对（红色）的实验归一化曲率 $\bar{\kappa}L$ 随归一化时间 $\dot{\gamma}t$ 的变化，$E_v \simeq 3.6$。(b) 平行片对在两个选定时刻的图像。(c) 单片（黑色）和间距为 $d/L = 0.1$ 的片对（红色）的模拟归一化曲率 $\bar{\kappa}L$ 随归一化时间 $\dot{\gamma}t$ 的变化，$E_v = 7$。(d) 与图 3(b) 中两个选定时刻对应的平行片对模拟形状。

模拟结果表明，单片动力学是稳定的：微小的初始曲率会随时间减小——见图 3(c) 中的黑线。对于间距为 $d = 0.1L$ 且取相同数值 $E_v = 7$ 的平行片对，计算得到的曲率在定性上与实验动力学一致，见图 3(c) 中的红线：片对中的每片都会变形，在压缩象限呈现凹形（图 3(d) 左图），随后曲率改变符号，薄片在伸展象限呈现凸形（图 3(d) 右图），最终变形逐渐弛豫至零。由于模拟中仅考虑了流体动力学相互作用，模拟结果支持上述结合实验讨论的两种行为变化源于流体动力学。

根据两片薄片的数值模拟结果，我们计算了其中一片薄片在压缩象限取向、间距为 d/L 时所受的横向力，见图 4(a)。横向力沿薄片分布不均，在薄片中心达到最大值，在两端达到最小值。力分布可用抛物线作一阶近似。由图 4(b) 可见，随着 d/L 增大，抛物线分布的振幅减小，并遵循指数接近 -1 的幂律。为解释并建模这一横向力，我们量化了由薄片产生的扰动流场。由于薄片无惯性且流动为二维，远场中的扰动流场呈二维力偶极子形式，其振幅随 $1/r$ [35] 减小，其中 r 是到薄片几何中心的距离。对于沿剪切流压缩轴或伸展轴取向的物体，其引起的流动扰动可近似为：将一个细长粒子置于二维纯应变流 [36]，中，并使粒子的长轴沿伸展方向。我们对这一简化流动构型进行了模拟。图 4(c) 中计算得到的矢量图展示了流动的偶极子特征；可以看到，流动的空间变化与横向力的抛物线分布相对应。对于小至 $0.5L$ 的 r，扰动流场的振幅也能较好地用 $1/r$ 依赖关系描述（见图 4(d)）。背景应变流的符号决定了偶极子的符号：按我们的约定，压缩背景流对应正号，伸展背景流对应负号。因此，模拟表明，一片薄片的存在会在另一片薄片上产生抛物线状的横向力；这一横向力源于扰动偶极子流场，其振幅按 L/d 缩放，符号则由背景流场决定：薄片处于压缩象限时为正，处于伸展象限时为负。

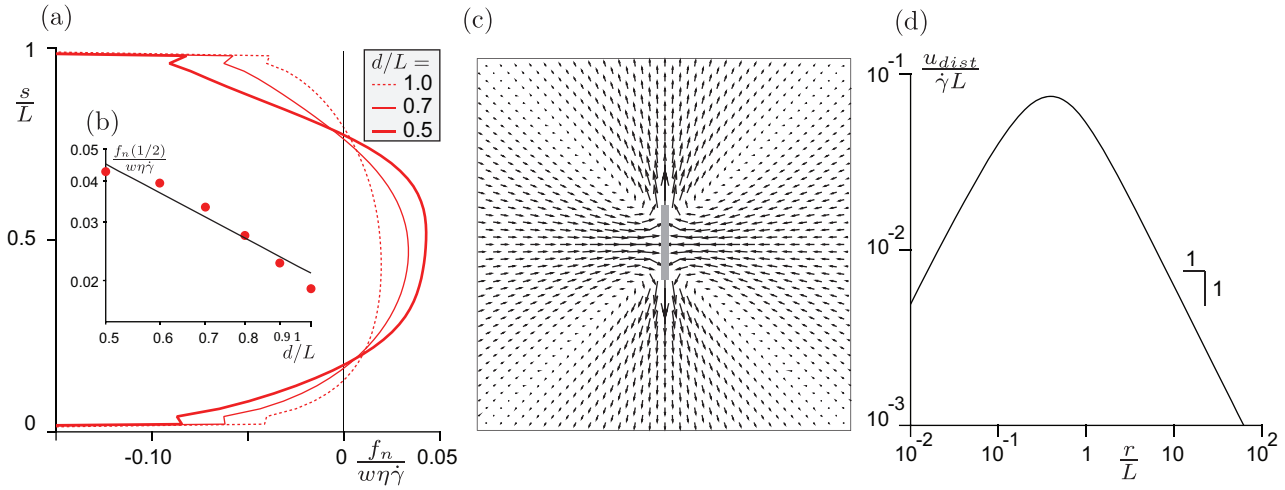


图 4：模拟得到的流体动力学相互作用。(a) 在剪切流中，两个平行片位于压缩象限（角度为 $\theta_0 = -\pi/2 + \pi/10$）时，第一片对第二片产生的横向力；参数为 $d/L = 1, 0.7$ 和 0.5。(b) 平行片位于压缩象限（角度为 $\theta_0 = -\pi/2 + \pi/10$）时，薄片中心处的横向力大小随间距的变化。曲线为最佳拟合 $y = Ax^\alpha$ with $A \simeq 0.02$ and $\alpha \simeq -1.1$。(c) 二维扰动流的矢量图。矩形表示薄片。(d) 薄片在二维压缩流中诱导的扰动流速度大小 u_{dist}，随垂直于薄片测得的距离 r 的变化。

上述信息使我们能够构建一个极简模型，用于描述流动诱导的形状变化，并考虑薄片间距的影响。根据不可伸长薄片上的力与力矩平衡，在这个线性近似下，曲率 κ 满足欧拉–伯努利方程

$$Bw\frac{d^2\kappa}{ds^2} - T_t(s)\kappa(s) - f_n(s) = 0, \tag{4}$$

其中， s 为曲线坐标， f_n 为单位长度上的横向流体动力， T_t 为轴向张力[28, 37]。轴向张力满足

$$\frac{dT_t}{ds} + f_t(s) = 0, \tag{5}$$

其中， f_t 为单位长度上的轴向流体动力 [28, 37]。为模拟 f_n 和 f_t ，我们采用了准静态近似，其中包含两个主要假设。首先，我们忽略了曲率时间变化引起的横向流体动力阻力的影响。其次，我们假设曲率仅通过 f_t的振幅与取向 θ耦合，并假设该振幅为 $-2\sin\theta\cos\theta$。考虑两种极端情况$\theta = -\pi/4$ （最大压缩时的取向）和 $\theta = \pi/4$ （最大伸展时的取向），并将单位长度上的轴向力建模为由施加剪切速率的拉伸分量产生的边缘力，我们得到$T_t = -\eta\dot{\gamma}Lw$（当 $\theta = -\pi/4$时）和 $T_t = \eta\dot{\gamma}Lw$ （当 $\theta = \pi/4$时）。根据数值模拟结果进行拟合后，我们将偶极流场产生的单位长度上的横向力建模为

$$f_n(s) = \pm w\frac{L}{d}\eta\dot{\gamma}\,Kg(s) \tag{6}$$

其中，符号取决于薄片是沿压缩轴还是伸展轴取向。函数$g(s) = \frac{1}{12} - \left(\frac{s}{L} - \frac{1}{2}\right)^2$是均值为零的对称抛物线，能够再现图4(a)中所见的横向力空间变化； K 是数值前因子。我们根据取向为 θ_0时计算得到的力的幅值估算了 $K \simeq 0.4$ ，见图4(b)（根据定义， $K = A\ g(1/2)/2\sin\theta_0\cos\theta_0$，其中 A是拟合参数）。因此，力矩平衡可写为

$$\frac{d^2\tilde{\kappa}}{d\tilde{s}^2} \pm E_v\left(\tilde{\kappa}(\tilde{s}) - \frac{K}{\tilde{d}}g(\tilde{s})\right) = 0, \tag{7}$$

˜其中 $\tilde{\kappa} = \kappa L$、 $\tilde{s} = s/L$ 和 $\tilde{d} = d/L$。“+”号对应最大压缩（$\theta = -\pi/4$）。“–”号对应最大伸展（$\theta = +\pi/4$）。在最大压缩时，对于单片的情形

（$1/\tilde{d} \to 0$），该微分方程简化为边缘轴向载荷下的经典欧拉屈曲方程。若 $E_v = \pi^2$，欧拉屈曲方程有两个满足自由端边界条件 $\tilde{\kappa}(0) = \tilde{\kappa}(1) = 0$ 的解。一个解是平凡解 $\tilde{\kappa}(\tilde{s}) = 0$，另一个解是纯轴向载荷下的第一屈曲模态 $\tilde{\kappa}(\tilde{s}) = \tilde{\kappa}_0 \sin(\pi\tilde{s})$。屈曲阈值的值（此处为 π^2）对应均匀轴向张力。然而，可以证明，对于更符合实际的轴向流体动力模型 $f_t(s)$，即沿薄片呈线性变化的模型 [29], ，轴向张力呈抛物线分布，且与 π^2 相比，阈值仅降低 15%。因此，均匀轴向张力模型抓住了屈曲的本质特征。我们在实验中测得的值 $E_v^c \simeq 11$ 与这一最简模型的预测值 π^2 相当。另一方面，在最大压缩时，对于 ˜ 有限的情况，eq.(7) 对任意给定的 E_v 仅有一个满足边界条件的解：

$$\tilde{\kappa}(\tilde{s}) = \frac{K}{6\tilde{d}E_v}\left([E_v(-6(\tilde{s}-1)\tilde{s}-1)+12] + (E_v-12)\cos\left(\sqrt{E_v}\tilde{s}\right) + (E_v-12)\tan(\sqrt{E_v}/2)\sin\left(\sqrt{E_v}\tilde{s}\right)\right). \tag{8}$$

存在唯一的非零解，意味着严格来说不存在屈曲不稳定性。流体动力学相互作用消除了屈曲不稳定性，因此对于E_v的所有取值，曲率都具有有限的弯曲振幅。总之，纯压缩条件下的单片会发生屈曲不稳定性，而对于一对片，虽然不会发生屈曲不稳定性，但确实会产生弯曲变形。取 $E_v \to 0$ 和 $E_v - E_v^c \to 0$ 的极限，并令$E_v < E_v^c$，可由式（8）推导出薄片中点处（在 $\theta = -\pi/4$时）最大曲率的以下近似表达式：

$$\bar{\kappa} \sim +K\frac{L}{d}\frac{E_v}{E_v^c - E_v}. \tag{9}$$

这里我们明确标出了横向力的符号，其中“ +”号对应压缩象限。在伸展象限中，通过求解式（7）可以证明，曲率按 $\bar{\kappa} \sim -KE_v\, L/d$标度变化。如图5左图的示意图所示，薄片翻转时偶极力的符号改变，可以解释图3(b)中观察到的形态从凹形转变为凸形。式（7）是线性的，因此偶极振幅关于 L/d 的标度关系决定了弯曲曲率对 d的依赖关系。

为评估上述模型捕捉实验数据关键特征的能力，我们针对参数（E_v，d/L）的每个取值，测量了翻滚过程中的最大重标度曲率 $\bar{\kappa}_{max}L$ 。对于片对，结果表明存在两种行为区域（见图 5 右图）。第一个区域中，每片薄片的曲率都低于实验分辨率。图中的“直”标签表示这一区域。第二个区域中，薄片发生显著变形（图中以“弯曲”标签标示）。当 E_v 低至 $0.8-1$ 时，也能观察到显著变形，即比单片情况小约十倍。因此，薄片彼此靠近会显著影响其形态。我们的简单模型给出了曲率大于实验分辨率 $\kappa_r = 0.01/L$的判据。该判据将形态图划分为两个区域，其边界由图 5 中方程 $d/L = KE_v/(\kappa_r L(E_v^c - E_v))$ 的虚线表示。模型预测的变形幅度远大于实验观测值，但随 E_v变化的趋势相似。事实上，图 5 中使用的 K 值 $K = 0.01$小于通过拟合图 4(b) 的横向力分布得到的值 $K \simeq 0.4$。模型高估变形幅度，可能源于我们采用的准静态近似的两个方面：首先，我们忽略了薄片法向上的流体动力阻力，而该阻力会延缓曲率响应时间；其次，我们假设压缩力 f_t 恒定，而实验中的薄片会翻滚，因此并非始终承受恒定的力。不过，考虑到 K 取值的差异可以看出，对于 $d/L \gtrsim 0.05$，模型与实验数据相当吻合：在这一范围内，虚线以正确的标度律 L/d将圆形符号与方形符号区分开来。对于 $d/L \lesssim 0.05$，在所有测试的 E_v 下，薄片在翻滚运动过程中均保持笔直，而 L/d 预测则不成立。因此，图 5 的实验数据表明，观察到显著弯曲所需的间距与临界弹黏数之间的关系是非单调的。间距为 d 的两块平板之间的润滑力，对于法向位移 [38] ，按 $1/d^3$ 标度，因此在小间距下占主导地位，超过偶极力。在恒定压缩力作用下，润滑力导致变形增长的时间尺度为 $(L/d)^3\tau$ [38] ，其中 $\tau = \eta L^3/B$ 为弹黏时间尺度。对于中等 $E_v = \dot{\gamma}\tau$ 和较小 d/L，该时间尺度远长于翻滚时间尺度 $1/\dot{\gamma}$ 。因此，对于极小间距和中等 E_v，润滑力会在动力学上限制变形。

VI. 结论

在本研究中，我们首次测量了悬浮于黏性简单剪切流中的一对柔性片的有效屈曲阈值，并将其定义为能够观察到显著弯曲时的阈值，该阈值是

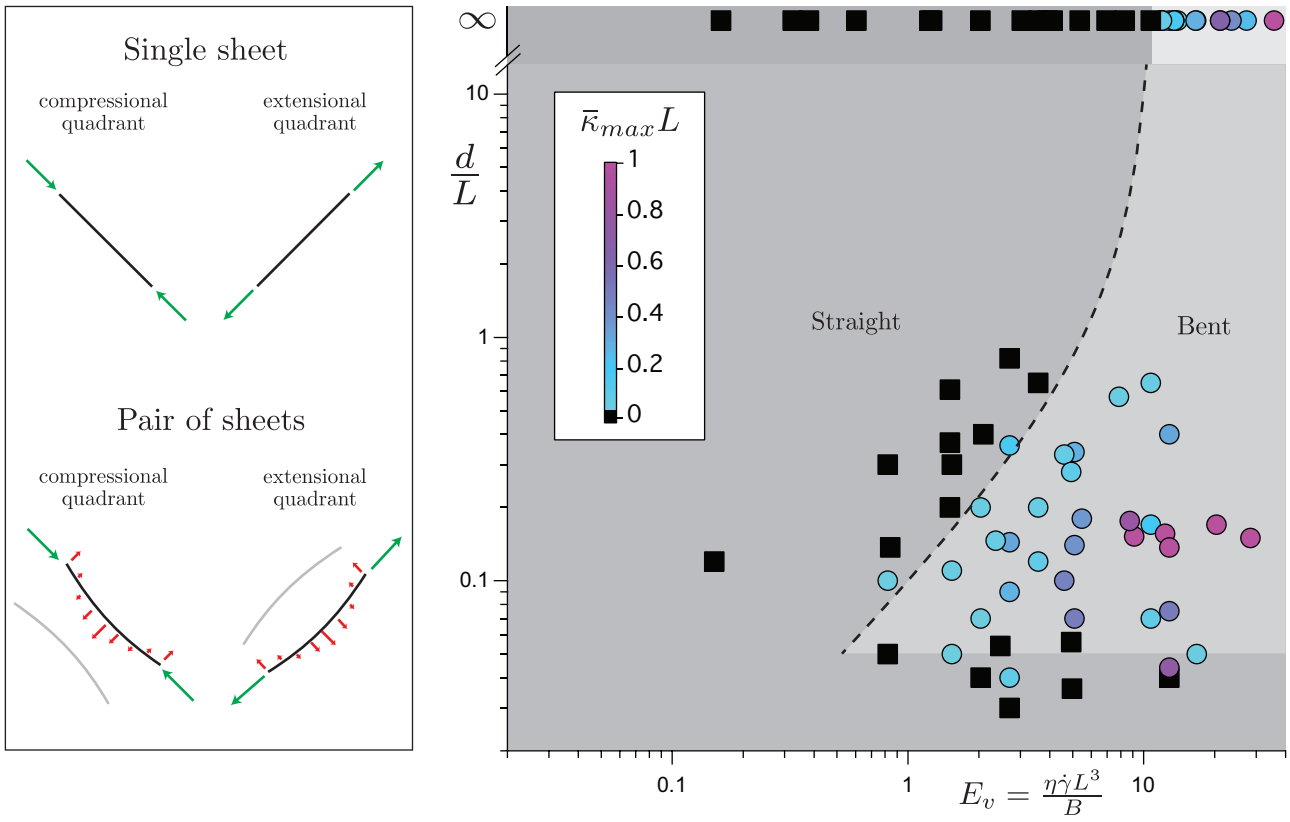


图 5：左图：单片和双片情形下流体动力学力分布示意图。黑色线段表示薄片。绿色箭头表示压缩或拉伸切向力。红色箭头表示偶极横向力。对于 $E_v < E_v^c$，单片保持笔直，而片对则呈现凹形和凸形。右图：形态图。不同归一化间距 d/L 和弹黏数 $E_v = \eta\dot{\gamma}L^3/B$ 下的最大归一化曲率。黑色方块表示形变低于实验分辨率 $\kappa_r = 0.01/L$，彩色圆点表示存在有限曲率。阴影区域仅供视觉参考。图 2(b) 中单片的实验数据对应于 $d/L = \infty$。虚线方程为 $d/L = KE_v/(\kappa_r L(E_v^c - E_v))$，其中 $E_v^c = 11$、$\kappa_r L = 0.01$ 和 $K = 0.01$。虚线绘制于 $d/L > 0.05$

片间距的函数。实验中，我们测得单个矩形片发生屈曲时的临界弹黏数为 $E_v^c \simeq 11$。这一数值与二维模拟所得的 $E_v^c \simeq 8$ 相当接近。我们的主要发现是，一对距离较近的平行片发生显著弯曲时所需的弹黏数会大幅降低，约为原来的十分之一。这种降低是由一片薄片引起的偶极流动扰动造成的。该扰动会在第二片上产生横向力。通过最简模型，我们证明，这一横向力会增强平行片对沿剪切流压缩轴取向时所受压缩力的作用。此外，我们还证明，即使平行片对朝向伸展象限，偶极流动扰动也会引发弯曲。实验和数值模拟表明，弯曲幅度与片间距成反比。间距较小时，润滑力占主导，并限制薄片的动态变形。偶极增强效应与润滑效应之间的竞争，使片间距与有效屈曲阈值之间呈现非单调关系。

在利用液相方法（如喷墨印刷、涂层、聚合物纳米复合材料加工和液相剥离[10, 11]）以片状纳米颗粒制备宏观材料（例如纳米复合材料）的应用背景下，我们的结果表明，在有限体积分数下，流体动力学相互作用可能会放大剪切流引起的变形。这种效应可能改变取决于纳米颗粒形状的热学、光学或电学性质。在流变学研究方面，通过聚焦于流体动力学双体相互作用，我们的结果为理解悬浮液中柔性片的动力学迈出了第一步。特别是，已有证据表明，纤维悬浮液中的屈曲会产生法向应力差 [26]。因此，我们的结果表明，片状颗粒悬浮液的微观结构（包括颗粒对取向和粒间距的统计特征）可能通过影响瞬时颗粒形状，对流变学产生重大影响。因此，悬浮液的微观结构

片状颗粒悬浮液的微观结构应在未来的流变学研究中得到充分表征。

致谢 感谢 D. Tam 和 B. Metzger 与我们进行了讨论。本项目获得了欧洲研究委员会（ERC）通过欧盟地平线2020研究与创新计划（资助协议编号715475）提供的资助。

---

[1] Beatrice W. Soh、Alexander R. Klotz、Rae M. Robertson-Anderson 和 Patrick S. Doyle。环状聚合物中长寿命的自缠结。*Phys. Rev. Lett.*，123:048002，2019年7月。[2] Manouk Abkarian、Magalie Faivre 和 Annie Viallat。红细胞在剪切流中的摆动。*Phys. Rev. Lett.*，98 188302，2007年4月。[3] Kevin S. Silmore、Michael S. Strano 和 James W. Swan。半柔性薄片在简单剪切流中的屈曲、皱缩与翻滚。 *Soft Matter*，17:4707–4718，2021年。[4] S W Marlow 和 P D Olmsted。剪切流对溶致层状体系中Helfrich相互作用的影响。 *Eur Phys J E Soft Matter* 8 5 485 497, 2002 , ( ): –

Aug .[5] Eric Lauga。细菌流体动力学。 *Annual Review of Fluid Mechanics*，48(1):105–130，2016年。[6] J. G. Oldroyd 和 Alan Herries Wilson。乳液和悬浮液的弹性与黏性性质。 *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 218 1132 122 132, 1953 , ( ): – 。

[7] P. G. De Gennes。超高速度梯度下稀溶液柔性聚合物的线团-拉伸转变。 *The Journal of Chemical Physics* 60 12 5030 5042, 1974 , ( ): – 。

[8] Vasily Kantsler 和 Raymond E. Goldstein。拉伸流中单根肌动蛋白丝的涨落、动力学与拉伸-线团转变。 *Phys. Rev. Lett.*，108:038103，2012年1月。[9] RG Larson。柔性聚合物稀溶液的流变学：进展与问题。 *Journal of Rheology*，49(1):1–70，2005年1月至2月。[10] Valeria Nicolosi、Manish Chhowalla、Mercouri G. Kanatzidis、Michael S. Strano 和 Jonathan N. Coleman。层状材料的液相剥离。 *Science*，340(6139)，2013年。[11] Sina Naficy、Rouhollah Jalili、Seyed Hamed Aboutalebi、Robert A. Gorkin III、Konstantin Konstantinov、Peter C. Innis、Geoffrey M. Spinks、Philippe Poulin 和 Gordon G. Wallace。氧化石墨烯分散液：通过调控流变学实现制造。 *Mater. Horiz.*，1:326–331，2014年。[12] Keith R Paton、Eswaraiah Varrla、Claudia Backes、Ronan J Smith、Umar Khan、Arlene O'Neill、Conor Boland、Mustafa Lotya、Oana M Istrate、Paul King、Tom Higgins、Sebastian Barwich、Peter May、Pawel Puczkarski、Iftikhar Ahmed、Matthias Moebius、Henrik Pettersson、Edmund Long、Jo˜ao Coelho、Sean E O'Brien、Eva K McGuire、Beatriz Mendoza Sanchez、Georg S Duesberg、Niall McEvoy、Timothy J Pennycook、Clive Downing、Alison Crossley、Valeria Nicolosi 和 Jonathan N Coleman。通过液体中的剪切剥离，可规模化生产大量无缺陷少层石墨烯。 *Nat Mater*，13(6):624–630，2014年6月。[13] Yijiang Yu 和 Michael D. Graham。拉伸流中弹性薄片的类线团-拉伸转变。 *Soft Matter*，17:543– 553，2021年。[14] Vincent Labalette、Alexis Praga、Florent Girard、Martine Meireles、Yannick Hallez 和 Jeffrey F. Morris。各向异性黏土状悬浮液中剪切诱导的玻璃态到晶态转变。 *Soft Matter*，17:3174–3190，2021年。[15] Yueyi Xu 和 Micah J. Green。剪切下纳米片溶液的布朗动力学模拟。 *The Journal of Chemical Physics* 141 2 024905, 2014 , ( ): 。

[16] Yijiang Yu 和 Michael D. Graham。单轴拉伸流中可变形薄片动力学的起皱与多重性。 *Phys. Rev. Fluids*，7:023601，2022年2月。[17] G. Salussolia、C. Kamal、J. Stafford、N. Pugno 和 L. Botto。剪切流中相互作用弹性薄片的模拟：揭示剪切液体中石墨烯纳米片的屈曲、滑移与重新组装。 *Physics of Fluids*，34(5):053311，2022年。[18] Kevin S. Silmore、Michael S. Strano 和 James W. Swan。简单剪切流中热涨落的半柔性薄片。*Soft Matter*，18:768–782，2022年。[19] Ya Wang、Shijun Wang、Peng Li、Sangeetha Rajendran、Zhen Xu、Senping Liu、Fan Guo、Yinghui He、Zeshen Li、Zhiping Xu 和 Chao Gao。溶液中二维大分子氧化石墨烯的构象相图。 *Matter*，3 1 230( ): –245，2020年。[20] David J Smith。将边界元正则化斯托克斯let方法应用于纤毛和鞭毛驱动的流动。 *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical Physical and Engineering Sciences* 465 2112 3605 3626, 2009 , , ( ): – 。

[21] Sarah D Olson 和 Lisa J Fauci。薄片与丝状体的流体动力学相互作用：同步、吸引与排列。 *Physics of Fluids*，27(12):121901，2015年。[22] Thomas D Montenegro-Johnson、Lyndon Koens 和 Eric Lauga。带状体和薄片的微尺度流动动力学。 *Soft matter* 13 3 546 553, 2017 , ( ): – 。

[23] Constantine Pozrikidis 等。 *Boundary integral and singularity methods for linearized viscous flow*。剑桥大学出版社，1992年。[24] Ricardo Cortez。正则化斯托克斯let方法。 *SIAM Journal on Scientific Computing*，23(4):1204–1225，2001年。[25] Lisa J Fauci 和 Charles S Peskin。水生动物运动的计算模型。 *Journal of Computational Physics* 77 1 85 108, 1988 , ( ): – 。

[26] Leif E. Becker 和 Michael J. Shelley。剪切流中弹性丝的不稳定性导致第一法向应力差。

Phys. Rev. Lett.，87:198301，2001年10月。[27] Jos
´ *Annual* e Bico、´
Review of Fluid Mechanics 50 1 629 659, 2018
Etienne Reyssat 和 Benoˆıt Roman。弹毛细现象：表面张力何时会使弹性固体变形。，( ): – 。[28] Basile Audoly 和 Yves Pomeau。
Elasticity and Geometry。牛津大学出版社，2000年。[29] Olivia du Roure、Anke Lindner、Ehssan N. Nazockdast 和 Michael J. Shelley。黏性流动和流体中柔性纤维的动力学。 *Annual Review of Fluid Mechanics*，51(1):539–572，2019年。[30] George Barker Jeffery 和 Louis Napoleon George Filon。浸没在黏性流体中的椭球粒子的运动。*Proceedings of the Royal Society of London. Series A,*
Containing Papers of a Mathematical and Physical Character，102 715 161 179，1922 ( ): – 。[31] Catherine Kamal、Simon Gravelle 和 Lorenzo Botto。流体动力滑移对剪切流中薄布朗片状粒子转动动力学的影响。 *Journal of Fluid Mechanics*，919:A1，2021年。[32] P.S Lingard 和 R.L Whitmore。剪切流体对圆盘状粒子的变形及其在红细胞研究中的应用。 *Journal of Colloid and Interface Science*，49(1):119–127，1974年。[33] Samuel Poincloux、Tian Chen、Basile Audoly 和 Pedro M. Reis。具有内部摩擦的书本的弯曲响应。
Phys. ，：May 。[34]
Rev. Lett. 126 218004, 2021
Guorui Wang、Zhaohe Dai、Junkai Xiao、ShiZhe Feng、Chuanxin Weng、Luqi Liu、Zhiping Xu、Rui Huang 和 Zhong Zhang。多层范德华材料的弯曲。 *Phys. Rev. Lett.*，123:116101，2019年9月。[35] ´Elisabeth Guazzelli 和 Jeff Morris。
A Physical Introduction to Suspension Dynamics。剑桥大学出版社，2012年。[36] G K Batchelor。纯拉伸运动下细长粒子在非稀悬浮液中产生的应力。*of Fluid Mechanics* 46 4 813 829, 1971 *Journal* ，( ): – 。

[37] Jason S. Wexler、Philippe H. Trinh、Helene Berthet、Nawal Quennouz、Olivia du Roure、Herbert E. Huppert、Anke Lindner 和 Howard A. Stone。黏性流动中弹性纤维的弯曲：限域的影响。 *Journal of Fluid Mechanics*，720 517 544，2013年：– 。[38] N. Sridhar、D.J. Srolovitz 和 B.N. Cox。黏性基底上受压薄膜的屈曲与屈曲后动力学。*Acta Materialia*，50(10):2547–2557，2002年。