arXiv:2303.05292v1 [math.CV] 9 Mar 2023

某些微分多项式的值分布及其导出的若干正规性判据

Kuldeep SinghCharak[1] 和 Nikhil Bharti[1*1]查谟大学数学系，印度查谟和克什米尔查谟，180006。

*通讯作者。电子邮件：nikhilbharti94@gmail.com ORCID：0000-0003-2501-6247；贡献作者：kuldeepcharak65@gmail.com ORCID：0000-0003-0151-3249；

摘要

本文证明了若干关于亚纯函数族之间正规性传递的正规性判据，这些判据改进并推广了一些近期结果。我们还证明了某些微分多项式的若干值分布结果，并由此得出了一些涉及全纯函数与某些微分多项式共享值的正规性判据。作为推论，我们还给出了一个反例，否定了布洛赫原理的逆命题。

关键词：亚纯函数。正规族。值分布理论。微分多项式。共享函数。

MSC 分类：主要分类 30D35。30D45。30M04；次要分类 30D30。

1 引言与结果陈述

为方便起见，我们用 $\mathcal{H}(D)$ 表示域 D 在 $\mathbb{C}$ 中的全体全纯函数，用 $\mathcal{M}(D)$ 表示域 D. $\mathbb{D}$ 上的全体亚纯函数，并分别用 $D(a,r)$ 表示开单位圆盘，以及 $\mathbb{C}$ 中以 a 为中心、半径为 r 的开圆盘。我们假设

2 某些微分多项式的值分布.....

读者熟悉亚纯函数值分布理论中的标准记号，例如 $m(r,\ f)$ $N(r,\ f)$ $T(r,\ f)$（参见[15, 19]）。

若函数族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ 在 D 中是正规族，则该族中任意函数序列都存在一个子序列，使其在 D 中关于球面度量局部一致收敛。极限函数要么在 D 中是亚纯函数，要么恒等于 ∞. 。如果 $\mathcal{F}$ 恰好是一个全纯函数族，那么可以用欧几里得度量代替球面度量；此时，极限函数要么在 D 中是全纯函数，要么恒等于 ∞ （见 [22, 25, 26]）。

设 k 是一个正整数， n_0、 n_1、.....、 n_k 是非负整数，且不全为零。设 $f \in \mathcal{M}(D)$。则形如

$$M[f] := a \cdot \prod_{j=0}^{k} \left(f^{(j)}\right)^{n_j}$$

的表达式称为 f 的微分单项式，其中 $a\ (\not\equiv 0, \infty) \in \mathcal{M}(D)$。若 $a \equiv 1$，则称 $M[f]$ 为 f. 的规范化微分单项式。量

$$\gamma_M := \sum_{j=0}^{k} n_j \text{ and } \Gamma_M := \sum_{j=0}^{k} (j+1)n_j$$

分别称为单项式 $M[f]$ 的次数和权。

对于 $1 \le i \le m$，设 $M_i[f] = \prod_{j=0}^{k} \left(f^{(j)}\right)^{n_{ji}}$ 为 f. 的 m 个微分单项式。那么，和式 $P[f] := \sum a_i M_i[f]$ 称为 f 和 $i=1$ 的微分多项式，量 $\gamma_P := \max\{\gamma_{M_i} :\ 1 \le i \le m\}$, $\nu_P := \min\{\gamma_{M_i} :\ 1 \le i \le m\}$ 和 $\Gamma_P := \max\{\Gamma_{M_i} :\ 1 \le i \le m\}$ 分别是微分多项式 $P[f]$ 的次数、低次数和权。数值 k 是微分多项式 $P[f]$ 中出现的最高阶导数，称为 $P[f]$. 的微分阶。此外，我们用 Θ_P 表示微分多项式的权与其低次数之比。也就是说，

$$\Theta_P = \frac{\Gamma_P}{\nu_P} = \max\left\{\frac{\Gamma_{M_i}}{\gamma_{M_i}} : 1 \le i \le m\right\}.$$

在本文中，除非另有说明，我们考虑如下形式的微分多项式

$$P[f] = \sum_{i=1}^{m} a_i\ M_i[f], \tag{1}$$

其中

$$M_i[f] = \prod_{j=0}^{k} \left(f^{(j)}\right)^{n_{ji}},\ 1 \le i \le m$$

是满足条件的规范化微分单项式

$$\frac{\Gamma_{M_t}}{\gamma_{M_t}} < \frac{\Gamma_{M_1}}{\gamma_{M_1}} = \Theta_P \quad \text{for} \quad 2 \le t \le m, \tag{2}$$

以及系数 $a_i \in \mathcal{H}(D)$（其中 $a_1(z) \neq 0$.）

定义1 设 $f\ g \in \mathcal{M}(D)$。若 f 和 g 在 D中分担函数 h，即 $Z(h,f) = Z(h,g)$，其中 $Z(h,\psi) := \{\zeta \in D\colon \psi(\zeta) - h(\zeta) = 0\}$ 是 $\psi - h$ 在 D 中的零点集合，忽略其重数；若按相应的重数计数这些零点，则称 f和 g按重数计分担 h，记作 f和 g重数计数分担 h。若 $Z(h,f) \subseteq Z(h,g)$，则称 f和 g在 D.中部分分担 h

2013年，Liu等人[18] 在适当条件下，开始研究从一个亚纯函数族到另一个亚纯函数族的正规性的传递性，并得到了以下结果:

定理 **1** *Let $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}(D)$ and $a_i (i = 1,2,3,4)$ be four distinct complex numbers. Assume that $\mathcal{G}$ is normal in D. If for every $f \in \mathcal{F}$, there exists $g \in \mathcal{G}$, such that f and g share $a_i (i = 1,2,3,4)$ in D, then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

定理 **2** *Let $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}(D)$ be two families, all of whose zeros have multiplicitiesat least $k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Let a be a non-zero complex number. Assume that the family $\mathcal{G}$ is normal in D such that no subsequence of $\mathcal{G}$ converges spherically locally uniformly to ∞ or to a function g satisfying $g^{(k)} \equiv a$. If for every $f \in \mathcal{F}$, there exists $g \in \mathcal{G}$ such that f and g share 0 and ∞ and $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ share a CM then $\mathcal{F}$ is normal in D.* , ,

定理1已得到改进：将四个互不相同的共享值替换为四个互不相同的共享全纯函数（见 [10, 定理 1]），也可替换为四个均匀分离且可能依赖于每个 $f \in \mathcal{F}$ 的近似值（见 [13, 定理 7]）。另一方面，Chang 通过对复动力系统的巧妙应用，[5, 定理1.4] 证明了，对于 $k = 1$，定理 2 中的条件“$f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 以重数计数的方式共享 a ”可以替换为条件“$f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 共享 a”。沿着 Chang [5], Chen 和 Xu [10, 定理 2] 改进了定理 2，如下:

定理 **3** *Let $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}(D)$ be two families, all of whose zeros have multiplicities at least $k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Let a be anon-zero complex number. Assume that the family $\mathcal{G}$ is normal in D such that no subsequence of $\mathcal{G}$ converges spherically locally uniformly to ∞ or to a function g satisfying $g^{(k)} \equiv a$ and poles of $f \in \mathcal{F}$ have multiplicities ,*

4 某些微分多项式的值分布.....

at least k. If for every $f \in \mathcal{F}$, there exists $g \in \mathcal{G}$ such that f and g partially share 0, f and g share ∞ , and $f^{(k)}$ and $g^{(k)}$ partially share a, then $\mathcal{F}$ is normal in D.

最近，Ahamed 和 Mandal [1, 定理 2。2]研究了全纯函数族，并将定理 2 推广到了如下微分单项式:

定理 **4** *Let $\mathcal{F}$ $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ D be two families all of whose zeros have multiplicities*，0，，*at least $k+1$ $k \in \mathbb{N}$. Let a be a non-zero complex number. Assume that the family $\mathcal{G}$，，is normal in D such that for any subsequence g_n of $\mathcal{G}$ $g_n \to g$ $g \not\equiv \infty$ and $M[g] \not\equiv a$. If for every $f \in \mathcal{F}$ there exists $g \in \mathcal{G}$ such that f and g share 0 and $M[f]$ and $M[g]$，，，share a then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

关于定理 4，自然会提出以下问题:

Question 1 如果将共享非零复数 a 的微分单项式 $M[f]$ 和 $M[g]$替换为在 D中部分共享 a的某些微分多项式，那么 $\mathcal{F}$ 在 D 中是否正规?

我们对问题 1 作如下回答:

定理 **5** *Let $\mathcal{F}$ $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$ D be two families all of whose zeros have multiplicities, at least $k+1$ $k \in \mathbb{N}$. Let $P[f]$ be a differential polynomial defined in 1 and satisfying* ()，，() (2 *. Let a be a non-zero complex number. Assume that the family $\mathcal{G}$ is normal in D*)，，*such that for any subsequence $\{g_n\} \subset \mathcal{G}$ $g_n \to g$ $g \not\equiv \infty$ and $P[g] \not\equiv a$. If for every $f \in \mathcal{F}$ there exists $g \in \mathcal{G}$ such that f and g partially share 0 and $P[f]$ and $P[g]$，，，，partially share a in D then $\mathcal{F}$ is normal in D.*

以下示例表明，定理假设中的各种条件5 都是必不可少的。

Example 1 设 k 为正整数，且 $a = 1$. 设

$$\mathcal{F} = \left\{ f_n : f_n(z) = \frac{nz^{k+1}}{(k+1)!},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

and

$$\mathcal{G} = \left\{ g_n : g_n(z) = \frac{z^{k+1}}{2n(k+1)!},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

是在 $\mathbb{D}$. 中的两个全纯函数族。那么对于每个 n， f_n 和 g_n 的零点重数分别至少为 $k+1$ 和 $g_n \to g \equiv 0$.。显然，函数族 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$. 中是正规的。令 $P[f] := (k+1)!\ ff^{(k)}$.。那么

$$P[f_n](z) = (k+1)! f_n f_n^{(k)}(z) = n^2 z^{k+2} \text{ and } P[g_n](z) = (k+1)! g_n g_n^{(k)}(z) = \frac{z^{k+2}}{4n^2}.$$

容易看出， $f_n(z) = 0 \Rightarrow g_n(z) = 0$ ，且 $P[f_n](z) = 1 \nRightarrow P[g_n](z) = 1.$ 。然而，函数族 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}.$ 中不正规。

这个例子表明，定理 $P[f]$ 和 $P[g]$ 部分分担 a 中的 D"这一条件5是必要的。

Example 2 设 k 为正整数， $a = 1.$ 设

$$\mathcal{F} = \left\{ f_n : f_n(z) = nz^{k+1},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}$$

and

$$\mathcal{G} = \left\{ g_n : g_n(z) = \left[z + 1 - \left(\frac{1}{n^2} \right)^{1/(k+2)} \right]^{k+1},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \right\}$$

为 $\mathbb{D}.$ 中的两个全纯函数族。则每个 f_n 和 g_n 的零点重数至少为 $k+1$ 和 $g_n \to g = (z+1)^{k+1} \not\equiv \infty.$ 显然， $f_n(z) = 0 \nRightarrow g_n(z) = 0.$ 设 $P[f] := \frac{1}{(k+1)!} f f^{(k)}.$ 那么

$$P[f_n](z) = n^2 z^{k+2} = 1 \Rightarrow z = \left(\frac{1}{n^2} \right)^{1/(k+2)}$$

and

$$P[g_n](z) = \left[z + 1 - \left(\frac{1}{n^2} \right)^{1/(k+2)} \right]^{k+2} = 1 \text{ whenever } z = \left(\frac{1}{n^2} \right)^{1/(k+2)}.$$

因此 $P[f_n](z) = 1 \Rightarrow P[g_n](z) = 1.$ 注意，族 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$ 中是正规的；然而，族 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}.$ 中不正规

因此，"f 和 g 在 D中部分分担 0"这一条件不能省略。

Example 3 设 k 为正整数， a 为任意非零复数。设$\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{G} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是$\mathbb{D}$中的两个全纯函数族，其中

$$f_n(z) = \frac{e^{nz}}{n^k} \text{ and } g_n(z) = \frac{e^{nz}}{n^k} + e^{2kn}.$$

于是，每个 f_n和 g_n在 $\mathbb{D}$中都零点缺失，因此 f_n和 g_n在 $\mathbb{D}.$中部分分担 0。此外，$g_n \to g \equiv \infty$，故函数族 $\mathcal{G}$在 $\mathbb{D}.$中正规。设 $P[f] := f' + f'' + \cdots + f^{(k)}.$。显然， $P[f_n](z) = P[g_n](z)$，因此 $P[f_n]$和 $P[g_n]$在 $\mathbb{D}.$中部分分担 a。然而，函数族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}.$中不正规。

这表明条件"$g \not\equiv \infty$"不能省略。

Example 4 设 k 为正整数， a 为非零复数。设 $\mathcal{F} = \left\{ f_n : f_n(z) = e^{nz}/n^k,\ n \in \mathbb{N} \right\}$ 和 $\mathcal{G} = \{g_n : g_n(z) = e^z,\ n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{D}.$中的两个全纯函数族。于是 f_n和 g_n都零点缺失。显然，函数族 $\mathcal{G}$在 $\mathbb{D}$中正规，且 $g_n \to g \equiv e^z \not\equiv \infty.$。设 $P[f] := ae^{-z} f^{(k)}.$。于是 $P[g] \equiv a.$。此外， $P[f_n](z) = ae^{-z} f_n^{(k)}(z) = ae^{z(n-1)}$，且 $P[g_n](z) = ae^{-z} g_n^{(k)}(z) = a.$。由此可得， $f_n(z) = 0 \Rightarrow g_n(z) = 0$，且 $P[f_n](z) = a \Rightarrow P[g_n](z) = a.$。然而，函数族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}.$中不正规。

这表明条件"$P[g] \not\equiv a$"不能去掉。

6 某些微分多项式的值分布.....

Example 5 设 m、 k 为两个正整数，满足 $k \geq 2$，并设 a 为一个非零复数。设 $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{G} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 $\mathbb{D}$ 中的两个全纯函数族，其中

$$f_n(z) = \frac{z^{k+1}}{n(k+1)} + nz \text{ and } g_n(z) = \frac{z^{k+1}}{n(k+1)}.$$

那么， f_n 只有单零点，而 g_n 有重数为 $k+1$. 的零点。此外， f_n 和 g_n 在 $\mathbb{D}$ 和 $g_n \to g \equiv 0$ 中部分分担 0，因此函数族 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$.中正规。设 $P[f] := \left(f^{(k)}\right)^m$.。显然， $P[f_n](z) = P[g_n](z)$，因此 $P[f_n]$和 $P[g_n]$在 $\mathbb{D}$.中部分分担 a。然而，函数族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}$.中不正规。

因此，“每个 $f \in \mathcal{F}$的所有零点的重数至少为 $k+1$”这一条件不能放宽。

Example 6 设 $k \geq 2$ 为正整数， a 为非零复数。设 $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$ 和 $\mathcal{G} = \{g_n : n \in \mathbb{N},\ n \geq 2\}$ 是 $\mathbb{D}$ 中的两个全纯函数族，定义如下:

$$f_n(z) = \frac{nz^{k+1}}{(k+1)!} \text{ and } g_n(z) = \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{az^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

于是，对每个 n， f_n 都有重数为 $k+1$ 的零点，而 g_n 都有重数为 k. 的零点。此外， f_n 和 g_n 在 $\mathbb{D}$ 中部分分担 0，且 $g_n \to g \equiv z^{k+1}/(k+1)! + az^k/k!$，因此函数族 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$. 中正规。令 $P[f] := f^{(k)}$.。则 $P[g](z) = z + a \neq a$.。现在， $P[f_n](z) = nz = a \Rightarrow z = a/n$，且 $P[g_n](z) = z + a(1 - 1/n) = a$，只要 $z = a/n$.。因此， $P[f_n](z)$ 和 $P[g_n](z)$在 $\mathbb{D}$. 中部分分担 a。然而，函数族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}$. 中不正规。这表明，“每个 $g \in \mathcal{G}$ 的所有零点的重数至少为 $k+1$”这一条件不可省略。

Example 7 令 a 为任意非零复数。考虑 $\mathbb{D}$. 中的全纯函数族 $\mathcal{F} = \{f_n : f_n(z) = e^{-nz},\ n \in \mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{G} = \{g_n : g_n(z) = e^z,\ n \in \mathbb{N}\}$。于是，对每个 n， f_n和 g_n 在 $\mathbb{D}$. 中零点缺失。此外， $g_n \to g \equiv e^z \neq \infty$，因此函数族 $\mathcal{G}$在 $\mathbb{D}$. 中正规。令 $P[f] := M_1[f] + M_2[f]$，其中 $M_1[f] := -f'f^{(4)}$且 $M_2[f] := f''f^{(3)}$，使得 $\Gamma_{M_1}/\gamma_{M_1} = 7/2 = \Gamma_{M_2}/\gamma_{M_2}$.。则 $P[g] \equiv 0 \neq a$ 和

$$P[f_n](z) = \frac{n}{e^{nz}} \cdot \frac{n^4}{e^{nz}} + \frac{n^2}{e^{nz}} \cdot \frac{-n^3}{e^{nz}} = 0.$$

显然可知， f_n和 g_n在 $\mathbb{D}$和 $P[f_n]$中 $P[g_n]$部分分担 a； $\mathbb{D}$.然而，族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}$.上并不正规。这表明，条件“$P[f]$满足（2）”不可删去。

定理5 的亚纯函数类比可表述如下:

定理 **6** *Let* $\mathcal{F}$ $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$ D *be two families all of whose zeros have multiplicities* , () , , () (2) *at least* $k+1$ $k \in \mathbb{N}$. *Let* $P[f]$ *be a differential polynomial defined in* 1 *and satisfying such that* $\Theta_P > 1$. *Let* a *be a non-zero complex number. Assume that the family*

$\mathcal{G}$ *is normal in* D *such that for any subsequence* $\{g_n\} \subset \mathcal{G}$ $g_n \to g$ $g \not\equiv \infty$ *and*, , , $P[g] \not\equiv a$. *If for every* $f \in \mathcal{F}$ *there exists* $g \in \mathcal{G}$ *such that* f *and* g *partially share* 0 *and* ∞ *then* $\mathcal{F}$ *is normal in* D. ,

and $P[f]$ *and* $P[g]$ *parially share* a *in* D,

例子1-7 以及以下示例表明，定理6 中的所有条件都是必要的:

Example 8 设 k 为一个正整数，且 $a=1$. 设 $\mathcal{F}=\{f_n:\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\}$ 和$\mathcal{G}=\{g_n:\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2\}$ 是 $\mathbb{D}$中的两个亚纯函数族，其中

$$f_n(z)=\frac{1}{(-1)^k k!\ nz}\ \text{and}\ g_n(z)=\frac{1}{(k+1)!}\left[z+1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/(k+1)}\right]^{k+1}.$$

那么对于每个 n, $f_n(z)\neq 0$且 g_n的零点重数为 $k+1$. 显然， f_n和g_n在 $\mathbb{D}$. 中部分分担 0。此外， $g_n\to g=1/(k+1)!(z+1)^{k+1}\not\equiv\infty$因此函数族$\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{D}$. 中正规。设 $P[f]:=f^{(k)}$. 那么 $P[g]=z+1\not\equiv 1$. 此外，

$$P[f_n](z)=\frac{1}{nz^{k+1}}=1\Rightarrow z=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/(k+1)}$$

and

$$P[g_n](z)=z+1-\left(\frac{1}{n}\right)^{1/(k+1)}=1\ \text{whenever}\ z=\left(\frac{1}{n}\right)^{1/(k+1)}.$$

因此 $P[f_n]$ 和 $P[g_n]$ 在 $\mathbb{D}$. 中部分分担 1。然而，函数族 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$.中不正规

这个例子表明，条件“f 和 g 在 D中部分分担 ∞ ”不能省略。

Example 9 考虑函数族

$$\mathcal{F}=\left\{f_n:f_n(z)=\frac{1}{e^{nz}+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

and

$$\mathcal{G}=\left\{g_n:g_n(z)=\frac{1}{e^n\left(e^{nz}+1\right)},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

在 $\mathbb{D}$中的亚纯函数。于是， f_n和 g_n均零点缺失。显然，. f_n和 g_n在 $\mathbb{D}$. 中部分分担 ∞。此外， $g_n\to g\equiv 0\not\equiv\infty$，因此函数族 $\mathcal{G}$在 $\mathbb{D}$. 中正规。令 $P[f]:=f.$。则 $\Theta_P=1.$。由于 f_n不取 0 和 1，因此显然， f_n和 g_n在 $\mathbb{D}$中部分分担 0，且 $P[f_n]$ 和 $P[g_n]$在 $\mathbb{D}$. 中部分分担 1。然而，函数族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}$.中不正规。
这表明条件“$\Theta_P>1$”不能去掉。

Remark 1 定理 $P[f]$ 中所考虑的微分多项式的系数5 和定理 6 为全纯这一假设至关重要。以下例子可以说明这一点:

考虑函数族 $\mathcal{F}=\{f_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ 和 $\mathcal{G}=\{g_n:\ n\in\mathbb{N}\}$，其中

$$f_n(z)=\frac{nz^{k+1}}{(k+1)!}\ \text{and}\ g_n(z)=\frac{z^{k+1}}{(k+1)!},\ z\in\mathbb{D}.$$

那么， $\mathcal{F}$、 $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}(\mathbb{D})$、 f_n和 g_n的零点重数为 $k+1.$。显然，函数族 $\mathcal{G}$在 $\mathbb{D}$和 $g_n\to g\equiv z^{k+1}/(k+1)$中是正规的！ $\not\equiv\infty$. 设 $P[f]:=(1/z)f^{(k)}.$。那么 $P[f_n](z)=n$且 $P[g_n](z)=1.$。由此可知， f_n和 g_n在 $\mathbb{D}$中部分分担0和∞；对于任意 $a\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{N}$， $P[f_n]$和 $P[g_n]$在 $\mathbb{D}$. 中部分分担 a。然而，函数族 $\mathcal{F}$在 $\mathbb{D}$.中不正规。

8 某些微分多项式的值分布.....

此外，对微分多项式 $P[f]$ 的系数所作的假设，即“$a_1(z) \neq 0$”，是必不可少的。例如，考虑函数族 $\mathcal{F} = \{f_n : \ n \in \mathbb{N}\}$和 $\mathcal{G} = \{g_n : \ n \in \mathbb{N}\}$，其中

$$f_n(z) = \frac{1}{nz} \text{ and } g_n(z) = \frac{1}{z}, \ z \in \mathbb{D}.$$

那么 $\mathcal{F}$、 $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}(\mathbb{D})$ 和 f_n 以及 g_n 零点缺失。显然，族 $\mathcal{G}$ 在$\mathbb{D}$中正规，并且 $g_n \to g \equiv 1/z \neq \infty$. 设 $P[f] := z^{k+1}(\sout{(-1)^k k! f}^{(k)}$. 那么

$$P[f_n](z) = \frac{z^{k+1}}{(-1)^k k!} \cdot \frac{(-1)^k k!}{nz^{k+1}} = \frac{1}{n} \text{ and } P[g_n](z) = 1.$$

由此可知, f_n g_n 0 ∞ $\mathbb{D}$ $a \in \mathbb{C} \setminus$与 $\{1/n \ \ n \in \mathbb{N}\}$ $P[f_n]$ $P[g_n]$ a $\mathbb{D}$. $\mathcal{F}$ .....部分分担.....，并且对于任意.....：.....，.....与.....部分分担于.....。然而，该族在 $\mathbb{D}$. 中不正规

在 [23, 定理1。7], Singh 和第一作者证明了以下定理:

定理 **7** *Let* n_0 n_1 n_k *be non-negative integers such that* $n_0 \geq 2$ $n_k \geq 1$, ,... ., , ( ) *and* $k \in \mathbb{N}$. *Let* $h \not\equiv 0$ *be a holomorphic function in* D *with zeros of multiplicity* $m \geq 1$. *Let* $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ D ( ) ( ) *be such that each* $f \in \mathcal{F}$ *has zeros of multiplicity at least* $k + m + 1$ *and poles of multiplicity at least* $m + 1$. *If for every* $f \ \ g \in \mathcal{F}$, , $M[f]$ *and* $M[g]$ *share* h *in* D *then* $\mathcal{F}$ *is normal in* D. ,

我们去掉 $f \in \mathcal{F}$极点重数的条件，并改进定理7 如下:

定理 **8** *Let* n_0 n_1 n_k *be non-negative integers with* $n_0 \geq 2$ $n_k \geq 1$ *and*, , .. ., , ( ) $k \in \mathbb{N}$. *Let* $h \not\equiv 0$ *be a holomorphic function in* D *having zeros of multiplicity at most* $m \geq 1$. *Let* $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ D ( ) ( ) *be such that zeros of each* $f \in \mathcal{F}$ *have multiplicities at least* $k + m + 1$. *If for every* $f \ \ g \in \mathcal{F}$ $M[f]$ *and* $M[g]$ *share* h *in* D , , , *then* $\mathcal{F}$ *is normal in* D.

定理8 中的条件“$h \not\equiv 0$”不可或缺，这可由以下例子看出:

Example 10 考虑由 $f_n(z) = e^{nz}$. 给出的定义在 $\mathbb{D}$ 上的亚纯函数族 $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 。那么对于每个 n, f_n 都不取值 0。令 $M[f] := f^2 f'$. , 则 $M[f_n](z) = f_n^2 f_n' = ne^{3nz}$. 。显然，对于互不相同的 m、 n、 $M[f_m]$, $M[f_n]$ 在 $\mathbb{D}$. 中共享 $h \equiv 0$ 。然而，族 $\mathcal{F}$ 在 $\mathbb{D}$. 中不是正规族。

下面的例子说明，定理 $f \in \mathcal{F}$中“每个 $k + m + 1$的零点重数至少为 $k + m + 1$”这一条件8 不可省略:

Example 11 设 $k \geq 2$ 为自然数，并考虑由 $f_n(z) = nz^k$. 给出的、定义在 $\mathbb{D}$ 上的亚纯函数族 $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$。那么，对每个 $f \in \mathcal{F}$，其零点的重数为 k.。令 $M[f] := f^2 f'$.。则 $M[f_n](z) = f_n^2 f_n' = kn^3 z^{3k-1}$.。取 $h(z) = z^{3k-1}$.。则 $M[f_n](z) - h(z) = z^{3k-1}(kn^3 - 1)$。显然，对于互不相同的 m、n、$M[f_m]$ $M[f_n]$ h $\mathcal{F}$，它们在 $\mathbb{D}$. 中共享。然而，该族在 $\mathbb{D}$.中并不正规。

作为定理 8的直接推论，我们有

推论1 设 n_0、n_1、.....、n_k 为非负整数，其中 $n_0 \geq 2$、$n_k \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$.。设 h 为 D. 中的无零点全纯函数。设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ 满足：对每个 $f \in \mathcal{F}$，$M[f] - h$ 在 D. 中没有零点。那么 $\mathcal{F}$ 在 D. 中正规。

值得一提的是，推论1 构成了布洛赫原理逆命题的一个反例（见 [3, 6–8, 16, 17]），该逆命题指出：若族 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D$ 在 $\mathcal{P}$ 中 D 满足某个性质且是正规的，那么每个$f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 在 $\mathcal{P}$ 中 $\mathbb{C}$ 满足性质 $\mathcal{P}$ 的函数 $\mathbb{C}$ 都必为常数。

Counterexample 1 设 D 是 $\mathbb{C}$ 中任意一个域，并设 $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ 是 D 上由 $f_n(z) = e^z$. 给定的亚纯函数族。令 $\mathcal{P}$ 表示如下性质：对于每个 $f \in \mathcal{F}$，$M[f] - h$ 在 D 中没有零点，其中 h 是 D. 上的无零点全纯函数。根据推论1，族 $\mathcal{F}$ 在 D. 中是正规的$_{\mathcal{Z}}$ 现在，令 $f(e^z$ $M[f] = f^2 f'$ h z $= -e^{3z}$. $f \in \mathcal{H}$ $\mathbb{C}$ $h \in \mathcal{H}$ $\mathbb{C}$ h z $\neq 0$.)，且 ( )。于是 ( ) ( ) 且 ( )。显然，$M[f](z) - h(z) = 2e^{3z} \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}$.。于是 f 在 $\mathbb{C}$. 中满足性质 $\mathcal{P}$。然而，f 不是常数。这与布洛赫原理逆命题的陈述相矛盾。

2 一些值分布结果和预备引理

本节陈述并证明一些对证明本文主要结果至关重要的结论。我们的第一个预备结果是 Chen 和 Gu 提出的著名 Zalcman-Pang 引理的推广 [9]（另见 [26, 第 216],页，参见 [21, 引理 2]）。

引理 1（Zalcman-Pang 引理）设 $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}(D)$ 的所有零点的重数至少为 m，且所有极点的重数至少为 p.。设 $-p < \alpha < m$.。若 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$ 处不正规，则存在序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$、$\{z_n\} \subset D$，满足 $z_n \to z_0$，以及正数 ρ_n，使得 $\rho_n \to 0$，从而序列 $\{g_n\}$ 定义为 y

$$g_n(\zeta) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n \zeta) \to g(\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 中关于球面度量局部一致收敛，其中 g 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的非常数亚纯函数，且对每个 $\zeta \in \mathbb{C}$，$g^{\#}(\zeta) \leq g^{\#}(0) = 1$.

以下引理归功于 Hayman（参见[14, 定理 3], 参见 [15,定理 3.5]），通常称为“Hayman 的替代定理”：

10 某些微分多项式的值分布.....

引理2 设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 为非常数函数，且 k 为正整数。那么对于任意 $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，$f$ 或 $f^{(k)} - a$ 在 $\mathbb{C}$. 中至少有一个零点。此外，如果 f 是超越函数，那么 f 或 $f^{(k)} - a$ 在 $\mathbb{C}$. 中有无穷多个零点。

引理3 ([24, 引理 6], 参见 [2, 定理 3]) 设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 是一个有限阶超越函数，其零点重数至少为 $k+1$，其中 $k \in \mathbb{N}$. 那么对于 $j = 1, \ldots, k$, $f^{(j)}$ 假设每个非零复数都取无穷多次。

引理 4 [19, 引理 1.2] 设 f_j $(j = 1, 2)$ 是 $\mathbb{C}$. 中的两个非常数亚纯函数，则

$$N(r, f_1 f_2) - N\left(r, \frac{1}{f_1 f_2}\right) = N(r, f_1) + N(r, f_2) - N\left(r, \frac{1}{f_1}\right) - N\left(r, \frac{1}{f_2}\right).$$

引理 5 [23, 引理 2.1] 设 $n_0, n_1, \ldots, n_k, m$ 为非负整数，满足 $n_0 \geq 2$, $\sum_{j=1}^{k} n_j \geq 1$ 且 $k \in \mathbb{N}$. 。设 p $(\not\equiv 0)$ 是一个次数为 m 的多项式，f 是一个非常数有理函数，其零点重数至少为 $k+m$，极点重数至少为 $m+1$. 。设 $M[f] = \prod_{j=0}^{k} \left(f^{(j)}\right)^{n_j}$ 是一个关于 f. 的微分单项式。那么 $M[f] - p$ 在 $\mathbb{C}$. 中至少有两个不同零点。

引理 6 设 f 是 $\mathbb{C}$ 上非常数且无零点的有理函数，p $(\not\equiv 0)$ 是多项式。设 $M[f] = \prod_{j=0}^{k} \left(f^{(j)}\right)^{n_j}$ 是 f 的一个微分单项式，其中 $k \in \mathbb{N}$ 和 n_j 的各项（$j = 0, 1, \ldots, k$）均为非负整数，且 $\sum_{j=0}^{k} n_j \geq 1$. 。则 $M[f] - p$ 在 $\mathbb{C}$. 中至少有 Γ_M 个不同零点。

Proof 证明基于 Chang [4] 的方法（另见 [11]），并作了重大修改。由于证明中涉及的计算较为繁杂，我们将详细叙述证明过程。

由于 f 无零点，f 不可能是多项式，因此 f 至少有一个极点。于是我们可以写成

$$f(z) = \frac{A}{\prod_{i=1}^{t}(z + z_i)^{t_i}} \tag{3}$$

and

$$p(z) = B \prod_{i=1}^{d}(z + v_i)^{d_i}, \tag{4}$$

其中 A、B 是非零常数，d、t、t_i 是正整数，d_i 是非负整数。此外，v_i（当 $1 \leq i \leq d$ 时）是相异复数，而 z_i（当 $1 \leq i \leq t$ 时）也是相异复数。

由（3），可推得

$$M[f](z) = \frac{g(z)}{\prod_{i=1}^{t}(z + z_i)^{(t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M}}, \tag{5}$$

其中 g 是次数为 $(t-1)(\Gamma_M-\gamma_M)$ 的多项式。

此外，由假设可轻易推出， $M[f]-p$ 在 $\mathbb{C}$.中至少有一个零点。因此，我们可以设

$$M[f](z)=p(z)+\frac{C\prod_{i=1}^{s}(z+w_i)^{l_i}}{\prod_{i=1}^{t}(z+z_i)^{(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M}}, \tag{6}$$

其中 $C(\neq 0)\in\mathbb{C}$， l_i 为正整数，且 w_i $(1\leq i\leq s)$为相异复数。

令 $D=\sum_{i=1}^{d}d_i$ 且 $T=\sum_{i=1}^{t}t_i$. 那么由（4）、（5）和（6），可得

$$B\prod_{i=1}^{d}(z+v_i)^{d_i}\prod_{i=1}^{t}(z+z_i)^{(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M}+C\prod_{i=1}^{s}(z+w_i)^{l_i}=g(z) \tag{7}$$

通过简单计算，很容易看出

$$\sum_{i=1}^{s}l_i=\sum_{i=1}^{t}[(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M]+\sum_{i=1}^{d}d_i=(T-t)\gamma_M+t\Gamma_M+D$$

以及 $C=-B$

此外，由（7），我们得到

$$\prod_{i=1}^{d}(1+v_ir)^{d_i}\prod_{i=1}^{t}(1+z_ir)^{(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M}-\prod_{i=1}^{s}(1+w_ir)^{l_i}=r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D}h(r),$$

其中 $h\ r\qquad g\ 1/r\ /B\qquad t-():$

$=r^{(t-1)(\Gamma_M-\gamma_M)}()$ 是一个次数小于 $()(\Gamma_M-\gamma_M)$ 的多项式。此外，由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\prod_{i=1}^{d}(1+v_ir)^{d_i}\prod_{i=1}^{t}(1+z_ir)^{(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M}}{\prod_{i=1}^{s}(1+w_ir)^{l_i}}&=1+\frac{r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D}h(r)}{\prod_{i=1}^{s}(1+w_ir)^{l_i}}\\&=1+O\left(r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

由于 $r\to 0$. 对（8）两边取对数导数，我们得到

$$\sum_{i=1}^{d}\frac{d_iv_i}{1+v_ir}+\sum_{i=1}^{t}\frac{[(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M]z_i}{1+z_ir}-\sum_{i=1}^{s}\frac{l_iw_i}{1+w_ir}=O\left(r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1}\right) \tag{9}$$

由于 $r\to 0$.

令 $S_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_d\}\cap\{z_1,z_2,\ldots,z_t\}$ $S_2=\{v_1,v_2,\ldots,v_d\}\cap$，则出现以下四种情况：$\{w_1,w_2,\ldots,w_s\}$.

情形 1： $S_1=S_2=\phi$。设 $z_{t+i}=v_i$ 当 $1\leq i\leq d$ 且

$$T_i=\begin{cases}(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M & \text{if } 1\leq i\leq t,\\ d_{i-t} & \text{if } t+1\leq i\leq t+d.\end{cases}$$

那么（9）可写为

$$\sum_{i=1}^{t+d}\frac{T_iz_i}{1+z_ir}-\sum_{i=1}^{s}\frac{l_iw_i}{1+w_ir}=O\left(r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1}\right)\ \text{as } r\to 0. \tag{10}$$

12 某些微分多项式的值分布.....

比较（ r^j， $j=0$、1，.....， Γ_M+ （ $T-1$ ） γ_M+D-2 中的系数10），可得

$$\sum_{i=1}^{t+d} T_i z^j - \sum_{i=1}^{s} l_i w^j = 0, \text{ for each } j=1,2,\ldots,\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1. \quad (11)$$

令 $z_{t+d+i}=w_i$， $1\le i\le s$. 则由（11），我们推出线性方程组

$$\sum_{i=1}^{t+d+s} z_i^j x_i = 0,\ j=0,1,\ldots,\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1, \quad (12)$$

有一个非零解

$$(x_1,\ldots,x_{t+d},x_{t+d+1},\ldots,x_{t+d+s}) = (T_1,\ldots,T_{t+d},-l_1,\ldots,-l_s).$$

若 $\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D\ge t+d+s$，则由克拉默法则（见 [20, 第 134] 页），对于 $0\le j\le \Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1$，方程组（12）的系数行列式 $\det(z_i^j)_{(t+d+s)\times(t+d+s)}$ 等于零。然而，由于 z_i、 $1\le i\le t+d+s$ 互不相同，且 $\det(z_i^j)_{(t+d+s)\times(t+d+s)}$ 是范德蒙德行列式（见 [20, 第 17] 页），因此它不可能等于零，矛盾。故 $\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D<t+d+s$. 由于 $T=\sum_{i=1}^{t} t_i\ge t$ 且 $D=\sum_{i=1}^{d} d_i\ge d$，可得 $s\ge\Gamma_M$.

情形 2： $S_1\neq\phi$ 和 $S_2=\phi$. 不失一般性，可假设 $S_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_{m_1}\}$. 于是，对于 $1\le i\le m_1$.，有 $v_i=z_i$。取 $m_3=d-m_1$.

子情形 2.1： $m_3\ge 1$. 令 $z_{t+i}=v_{m_1+i}$，其中 $1\le i\le m_3$，且若 $m_1<t$，则设 t

$$T_i=\begin{cases}(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M+d_i & \text{if } 1\le i\le m_1,\\ (t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M & \text{if } m_1+1\le i\le t,\\ d_{m_1-t+i} & \text{if } t+1\le i\le t+m_3.\end{cases}$$

若 $m_1=t$，则设

$$T_i=\begin{cases}(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M+d_i & \text{if } 1\le i\le m_1=t,\\ d_{m_1-t+i} & \text{if } t+1\le i\le t+m_3.\end{cases}$$

子情形 2.2： $m_3=0$. 若 $m_1<t$，则设

$$T_i=\begin{cases}(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M+d_i & \text{if } 1\le i\le m_1,\\ (t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M & \text{if } m_1+1\le i\le t\end{cases}$$

且若 $m_1=t$，则设 $T_i=(t_i-1)\gamma_M+\Gamma_M+d_i$，其中 $1\le i\le m_1=t$.

因此（9）可写为:

$$\sum_{i=1}^{t+m_3}\frac{T_i z_i}{1+z_i r}-\sum_{i=1}^{s}\frac{l_i w_i}{1+w_i r}=O\left(r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1}\right)\ \text{as } r\to 0,$$

其中 $0\le m_3\le d-1$. 按照与情形 1 类似的方式进行推导，我们得到 $s\ge\Gamma_M$.

情况3： $S_1=\phi$ 且 $S_2\neq\phi$. 不妨设 $S_2=\{v_1,v_2,\ldots,v_{m_2}\}$. 那么，对于 $1\le i\le m_2$.，有 $v_i=w_i$。取 $m_4=d-m_2$.

子情况3.1： $m_4 \geq 1$. 设 $w_{s+i} = v_{m_2+i}$，其中 $1 \leq i \leq m_4$；若 $m_2 < s$，则 se t

$$L_i = \begin{cases} l_i - d_i & \text{if } 1 \leq i \leq m_2, \\ l_i & \text{if } m_2 + 1 \leq i \leq s, \\ -d_{m_2-s+i} & \text{if } s+1 \leq i \leq s+m_4. \end{cases}$$

若 $m_2 = s$，则令

$$L_i = \begin{cases} l_i - d_i & \text{if } 1 \leq i \leq m_2 = s, \\ -d_{m_2-s+i} & \text{if } s+1 \leq i \leq s+m_4. \end{cases}$$

子情形 3.2： $m_4 = 0$. 若 $m_2 < s$，则令

$$L_i = \begin{cases} l_i - d_i & \text{if } 1 \leq i \leq m_2, \\ l_i & \text{if } m_2 + 1 \leq i \leq s \end{cases}$$

并且若 $m_2 = s$，则令 $L_i = l_i - d_i$，其中 $1 \leq i \leq m_2 = s$.

因此（9）可写为:

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{[(t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M] z_i}{1 + z_i r} - \sum_{i=1}^{s+m_4} \frac{L_i w_i}{1 + w_i r} = O\left(r^{\Gamma_M + (T-1)\gamma_M + D - 1}\right) \text{ as } r \to 0,$$

其中 $0 \leq m_4 \leq d - 1$. 仿照情形 1 的方法继续推导，可得 $s \geq \Gamma_M$.

情形 4。 $S_1 \neq \phi$ 和 $S_2 \neq \phi$. 不失一般性，假设 $S_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m_1}\}$，$S_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m_2}\}$. 那么

$v_i = z_i \quad 1 \leq i \leq m_1$ 对于 取 $w_i = v_{m_1+i} \quad 1 \leq i \leq m_2. \quad m_5 = d - m_2 - m_1.$

子情形 4.1： $m_5 \geq 1$. 令 $z_{t+i} = v_{m_1+m_2+i}$ 对于 $1 \leq i \leq m_5$，且若 $m_1 < t$，则令

$$T_i = \begin{cases} (t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M + d_i & \text{if } 1 \leq i \leq m_1, \\ (t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M & \text{if } m_1 + 1 \leq i \leq t, \\ d_{m_1+m_2-t+i} & \text{if } t+1 \leq i \leq t+m_5. \end{cases}$$

若 $m_1 = t$，则令

$$T_i = \begin{cases} (t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M + d_i & \text{if } 1 \leq i \leq m_1 = t, \\ d_{m_1+m_2-t+i} & \text{if } t+1 \leq i \leq t+m_5. \end{cases}$$

若 $m_2 < s$，则令

$$L_i = \begin{cases} l_i - d_{m_1+i} & \text{if } 1 \leq i \leq m_2, \\ l_i & \text{if } m_2 + 1 \leq i \leq s \end{cases}$$

且若 $m_2 = s$，则令 $L_i = l_i - d_{m_1+i}$，对于 $1 \leq i \leq m_2 = s$.

子情形 4.2： $m_5 = 0$. 若 $m_1 < t$，则令

$$T_i = \begin{cases} (t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M + d_i & \text{if } 1 \leq i \leq m_1, \\ (t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M & \text{if } m_1 + 1 \leq i \leq t. \end{cases}$$

若 $m_1 = t$，则对 $1 \leq i \leq m_1 = t.$，令 $T_i = (t_i - 1)\gamma_M + \Gamma_M + d_i$

此外，若 $m_2 < s$，则令

$$L_i = \begin{cases} l_i - d_{m_1+i} & \text{if } 1 \leq i \leq m_2, \\ l_i & \text{if } m_2 + 1 \leq i \leq s \end{cases}$$

且若 $m_2 = s$，则对 $1 \leq i \leq m_2 = s.$，设 $L_i = l_i - d_{m_1+i}$

那么，在这两种子情形下，式（9）可写为

$$\sum_{i=1}^{t+m_5}\frac{T_i z_i}{1+z_i r}-\sum_{i=1}^{s}\frac{L_i w_i}{1+w_i r}=O\left(r^{\Gamma_M+(T-1)\gamma_M+D-1}\right)\ \text{as}\ r\to 0,$$

其中 $0\le m_5\le d-2$. 按照情形 1 类似的方式继续推导，我们得到 $s\ge\Gamma_M$. 证明至此完成。□

下面的引理将 Deng 等人 [12, 引理5] 中的结果推广到更一般的微分单项式:

引理 7 设 k为正整数， n_0、 n_1、.....、 n_k为满足 $n_0\ge 2$、 $n_k\ge 1$. 的非负整数。设 f为 $\mathbb{C}$中的非恒定亚纯函数， p为次数为 $m\ge 1$. 的多项式， $M[f]=\prod_{j=0}^{k}\left(f^{(j)}\right)^{n_j}$ 为 f. 的微分单项式。若 f有重数至少为 $k+m$的零点，则 $M[f]-p$ 在 $\mathbb{C}$.中至少有两个不同零点。

Proof 由于 $f\not\equiv 0$，我们可以写成

$$\frac{1}{f^{\gamma_M}}=\frac{M[f]}{pf^{\gamma_M}}-\frac{pM[f]'-p'M[f]}{p\ f^{\gamma_M}}\cdot\frac{M[f]-p}{pM[f]'-p'M[f]},$$

其中 $\gamma_M=n_0+n_1+\ \cdots+n_k$.

Then

$$\begin{aligned}\gamma_M\ m\left(r,\frac{1}{f}\right)\le\ & m\left(r,\frac{M[f]}{pf^{\gamma_M}}\right)+m\left(r,\frac{p\ M[f]'-p'M[f]}{pf^{\gamma_M}}\right)\\ &+m\left(r,\frac{M[f]-p}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right)+O(1).\end{aligned}$$

由 Nevanlinna 对数导数定理可得 $m\left(r,\frac{M[f]}{f^{\gamma_M}}\right)=S(r,\ f)$。此外，利用 $m(r,\ p)=m$对数 $r+O(1)$ $m\left(r,\frac{1}{p}\right)=O(1)$ 和引理 4，可得

$$\begin{aligned}\gamma_M\ m\left(r,\frac{1}{f}\right)&\le m\left(r,\frac{M[f]-p}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right)+S(r,f)\\ &=m\left(r,\frac{p\ M[f]'-p'M[f]}{M[f]-p}\right)+N\left(r,\frac{p\ M[f]'-p'M[f]}{M[f]-p}\right)\\ &\quad-\ N\left(r,\frac{M[f]-p}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right)+S(r,f)\\ &=m\left(r,\frac{p\left[\frac{M[f]}{p}-1\right]'}{\left[\frac{M[f]}{p}-1\right]}\right)+N\left(r,p\ M[f]'-p'M[f]\right)+N\left(r.\frac{1}{M[f]-p}\right)\\ &\quad-\ N\left(r,\frac{1}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right)-N\left(r,M[f]-p\right)+S(r,f)\\ &\le\overline{N}(r,f)+N\left(r,\frac{1}{M[f]-p}\right)-N\left(r,\frac{1}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right)\\ &\quad+m\log r+S(r,f).\end{aligned}$$

由此可得

$$\gamma_M\ T(r,f) \le \overline{N}(r,f) + \gamma_M\ N\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{M[f]-p}\right) - N\left(r,\frac{1}{pM[f]'-p'M[f]}\right) + m\log r + S(r,f). \tag{13}$$

注意，若 z_0 是 f 的一个重数为 l $(\ge k+m)$ 的零点，则 z_0 是 $pM[f]'-p'M[f]$ $\gamma_M l-\ \Gamma_M-\gamma_M\ -1$ $\Gamma_M-\gamma_M=$ 的一个零点，其重数至少为 $($ $)$，其 $n_1+2n_2+\cdots+kn_k$.
中 因此,

$$N\left(r,\frac{1}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right) \ge [\gamma_M l-(\Gamma_M-\gamma_M)-1]\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

此外，由于 $pM[f]'-p'M[f]=p(M[f]-p)'-p'(M[f]-p)$，我们有

$$N\left(r,\frac{1}{p\ M[f]'-p'M[f]}\right) \ge N\left(r,\frac{1}{M[f]-p}\right) - \overline{N}\left(r,\frac{1}{M[f]-p}\right).$$

因此，由（13），我们得到

$$\begin{aligned}\gamma_M\ T(r,f) &\le \overline{N}(r,f) + (\Gamma_M-\gamma_M+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{M[f]-p]}\right)\\ &\quad +\ m\log r + S(r,f)\\ &\le \overline{N}(r,f) + (\Gamma_M-\gamma_M+1)\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{M[f]-p]}\right)\\ &\quad + m\log r + S(r,f)\\ &\le \overline{N}(r,f) + \frac{\Gamma_M-\gamma_M+1}{k+m}\ N\left(r,\frac{1}{f}\right) + \overline{N}\left(r,\frac{1}{M[f]-p]}\right)\\ &\quad + m\log r + S(r,f).\end{aligned} \tag{14}$$

Thus

$$\left[(\gamma_M-1)-\frac{\Gamma_M-\gamma_M+1}{k+m}\right] T(r,f) \le \overline{N}\left(r,\frac{1}{M[f]-p]}\right) + m\log r + S(r,f).$$

也就是说,

$$C\ T(r,f) \le \overline{N}\left(r,\frac{1}{M[f]-p]}\right) + m\log r + S(r,f), \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned}C &:= (\gamma_M-1)-\frac{\Gamma_M-\gamma_M+1}{k+m}\\ &= (n_0+n_1+n_2+\cdots+n_k-1)-\frac{(n_1+2n_2+\cdots+kn_k)+1}{k+m}\\ &= n_0-1+\frac{(k+m-1)n_1+(k+m-2)n_2+\cdots+(m+1)n_{k-1}+mn_k-1}{k+m}\\ &= n_0-1+\frac{\alpha+mn_k-1}{k+m},\end{aligned}$$

其中 $\alpha := (k+m-1)n_1+(k+m-2)n_2+\cdots+(m+1)n_{k-1} \ge 0.$

现在假设 $M[f]-p$ 至多有一个不同的零点。接下来考虑以下几种情况:

情形 1: $\alpha \ne 0$. 那么

$$C \ge 1+\frac{\alpha}{k+m}$$

因此，由（15），我们得到

$$T(r,f) < C\ T(r,f) \leq (m+1)\log r + S(r,f).$$

这意味着 f 是一个次数至多为 m. 然而， f 的零点重数至少为 $k+m \geq m+1$. 因此 f 必不为零，由引理 6， $M[f]-p$ 至少有 $n_0+2n_1+\cdots+$ （$k+1$） $n_k \geq 4$ 个不同零点，这就产生了矛盾。

情形 2： $\alpha = 0$. 那么

$$C = n_0 - 1 + \frac{mn_k - 1}{k+m}.$$

如果 $n_k \geq 2$ 或 $m \geq 2$，那么

$$C \geq 1 + \frac{1}{k+m}$$

因此，按照情形 1 中的相同论证，我们得到矛盾。所以我们只需考虑 $n_k = 1$ 且 $m = 1$. 因此，令 $n_k = m = 1$. 那么由（15），我们得到

$$(n_0-1)T(r,f) \leq \overline{N}\left(r, \frac{1}{M[f]-p]}\right) + \log r + S(r,f).$$

如果 $M[f](z) - p(z) \neq 0$，那么

$$T(r,f) \leq (n_0-1)T(r,f) \leq \log r + S(r,f),$$

这表明 f 是次数至多为一的有理函数。由于 f 的零点重数至少为 $k+1 \geq 2$，因此 f 必定处处非零，故由引理6， $M[f]-p$ 至少有 $n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k \geq 4$ 个不同零点，矛盾。因此，根据假设， $M[f]-p$ 恰有一个零点。于是由（14），可得

$$n_0 T(r,f) \leq \overline{N}(r,f) + 2\log r + S(r,f). \tag{16}$$

子情形 2.1： $n_0 \geq 3$. 于是由（16），可得

$$T(r,f) \leq \log r + S(r,f),$$

这表明 f 是次数至多为一的有理函数。同样，由于 f的零点重数至少为 $k+1 \geq 2$， f必定处处非零，故由引理6， $M[f]-p$ $k+1$ $n_k \geq 5$ 至少有 $n_0+2n_1+\cdots+$ ( ) 个不同零点，矛盾。

子情形 2.2： $n_0 = 2$. 由（16）可得

$$T(r,f) \leq 2\log r + S(r,f).$$

这意味着 f 是次数至多为 2 的有理函数。若 $k \geq 2$，则 f具有重数至少为 $k+1 \geq 3$ 的零点这一事实意味着 f处处不为零，因此根据引理 6， $M[f]-p$至少有 $n_0+2n_1+\cdots+$ （$k+1$） $n_k \geq 5$ 个不同零点，矛盾。因此 $k = 1$.

现在，由于 f是次数至多为 2 的有理函数，因此 f要么无零点，要么 f只有一个重数为 2 的不同零点。 如果 $f(z) \neq 0$，那么由引理 6， $M[f]-p$ 至少有 $n_0+2n_1+\cdots+(k+1)n_k \geq 4$ 个不同零点，矛盾。因此 f具有以下形式：

$$A_1 : f(z) = a(z-z_0)^2, \quad A_2 : f(z) = \frac{a(z-z_0)^2}{z-z_1};$$

$$A_3 : f(z) = \frac{a(z-z_0)^2}{(z-z_1)^2}, \quad A_4 : f(z) = \frac{a(z-z_0)^2}{(z-z_1)(z-z_2)},$$

其中 $a(\neq 0) \in \mathbb{C}$. 显然, $T(r,f) = 2\log r + O(1)$。

如果 f具有 A_1, 那么$\overline{N}(r,f) = 0$且 $N\left(r,\frac{1}{f}\right) \leq 1/2\ T(r,f)+O(1)$。此外, 由式（14）可得

$$3\ T(r,f) \leq \overline{N}(r,f) + 2\ \overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2\log r + S(r,f).$$

这就意味着 $T(r,f) \leq \log\ r + S(r,f)$, 这与假设矛盾。类似地, 若 f具有 A_2或 A_3 的形式, 则可得 $T(r,f) \leq 4/3\log\ r + S(r,f)$, 这同样导致矛盾。

因此

$$f(z) = \frac{a(z-z_0)^2}{(z-z_1)(z-z_2)}.$$

Then

$$M[f](z) = f^2(z)f'(z) = \frac{a^3(z-z_0)^5[(2z_0-z_1-z_2)z+2z_1z_2-z_0(z_1+z_2)]}{(z-z_1)^4(z-z_2)^4} \quad (17)$$

由于 p是一个次数为 $m=1$的多项式, 令 $p(z) = b(z-z_3)$, 其中 $b(\neq 0)$ $z_3 \in \mathbb{C}$.此外, 由于 $M[f]-p$ 恰有一个零点, 我们可以写成

$$M[f](z) = b(z-z_3) + \frac{d(z-z_4)^r}{(z-z_1)^4(z-z_2)^4} \quad (18)$$

通过简单计算, 很容易得到 $d=-b$, $r=9$ 以及 $z_4 \neq z_0$. 于是由（17）, 可得

$$M[f]''(z) = \frac{(z-z_0)^3 g_1(z)}{(z-z_1)^6(z-z_2)^6}, \quad (19)$$

其中, g_1 是次数至多为 5 的多项式。

此外, 由（18）, 可得

$$M[f]''(z) = \frac{(z-z_4)^7 g_2(z)}{(z-z_1)^6(z-z_2)^6}, \quad (20)$$

其中, g_2 是次数至多为 4 的多项式。

比较（19）和（20）, 并利用 $z_4 \neq z_0$, 可知 g_1 是一个次数至少为 7 的多项式, 矛盾。证明完毕。□

下面的引理是 Hayman 替代定理和引理3 关于微分多项式的推广:

引理 8 设 $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 是一个超越函数, $\psi(\neq 0,\infty)$ 是 f 的小函数（即, 当 $r\to\infty$ 时, $T(r,\psi) = S(r,f)$）。设 $P[f]$ 是 f 的微分多项式, 其微分阶为 k, 且其亚纯系数 b_j 是 $f.$ 的小函数。假设 $P[f]$ 非常数。则有以下结论:

(i) 若 $\nu_P > 1$, 则 f 或 $P[f]-\psi$ 至少有一个在 $\mathbb{C}$. 中有无穷多个零点。此外, 若 f 是整函数, 则可取 $\nu_P \geq 1$.。(ii) 若 f 的零点重数至少为 $k+1$, 且 $(k+2)\nu_P > \Gamma_P + 2$, 则 $P[f]-\psi$ 在 $\mathbb{C}$. 中有无穷多个零点。若 f 是整函数, 则条件 $(k+2)\nu_P > \Gamma_P+2$ 可替换为条件 $(k+2)\nu_P > \Gamma_P+1$.

18 某些微分多项式的值分布.....

条件 $\nu_p > 1$（i）和（$k+2$）$\nu_P > \Gamma_P + 2$（ii）至关重要。例如，令 f（z）$= e^z/$（$1+e^z$）。那么 f（z）$\neq 0$，1。令 $P[f]$：$= 2f - f^2$使得$\nu_p = 1$且（$k+2$）$\nu_P < \Gamma_P + 2$.然而， $P[f]$（z）$=$（$2e^z + e^{2z}$）/（$1+e^z$）$^2 \neq 1$.

引理的证明 8 将 $P[f]$ 写成如下形式

$$P[f] = H_{\nu_P}[f] + H_{\nu_P+1}[f] + \cdots + H_{\gamma_P}[f],$$

其中 $H_j[f]$是关于 f 的齐次微分多项式，次数为 j.。由于 $f \not\equiv 0$，我们有

$$m\left(r, \frac{P[f]}{f^{\gamma_P}}\right) = m\left(r, \frac{H_{\nu_P}[f] + H_{\nu_P+1}[f] + \cdots + H_{\gamma_P}[f]}{f^{\gamma_P}}\right).$$

由 Nevanlinna 对数导数定理可得

$$m\left(r, \frac{H_j[f]}{f^j}\right) = S(r,f) \ \forall\ j.$$

Then

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{P[f]}{f^{\gamma_P}}\right) &\leq m\left(r, \frac{H_{\nu_P}[f] + H_{\nu_P+1}[f] + \cdots + H_{\gamma_P-1}[f]}{f^{\gamma_P-1}}\right) + m\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f) \\ &\leq 2\ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{H_{\nu_P}[f] + H_{\nu_P+1}[f] + \cdots + H_{\gamma_P-2}[f]}{f^{\gamma_P-2}}\right) + S(r,f) \\ &\vdots \\ &\leq (\gamma_P - \nu_P) m\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f). \end{aligned} \tag{21}$$

现在，根据奈望林纳第一基本定理和（21），我们有

$$\begin{aligned} \gamma_P\ T(r,f) &= \gamma_P\ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + \gamma_P\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + O(1) \\ &\leq m\left(r, \frac{P[f]}{f^{\gamma_P}}\right) + m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + \gamma_P\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \log 2 + O(1) \\ &\leq (\gamma_P - \nu_P)\ m\left(r, \frac{1}{f}\right) + m\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + \gamma_P\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f) \\ &= (\gamma_P - \nu_P)\ T(r,f) - (\gamma_P - \nu_P)\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, P[f]) \\ &\quad - N\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + \gamma_P\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + S(r,f). \end{aligned}$$

也就是说,

$$\nu_P\ T(r,f) \leq \nu_P\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) + T(r, P[f]) - N\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + S(r,f).$$

将小函数的奈望林纳第二基本定理应用于$T(r, P[f])$，可得

$$\begin{aligned} \nu_P\ T(r,f) \leq \nu_P\ N\left(r, \frac{1}{f}\right) &+ \overline{N}\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + \overline{N}(r, P[f]) \\ &+ \overline{N}\left(r, \frac{1}{P[f]-\psi}\right) - N\left(r, \frac{1}{P[f]}\right) + S(r,f) \end{aligned}$$

$$\leq \nu_P\ N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)$$
$$+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)-N\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)+S(r,f). \tag{22}$$

现在证明 (i)。

首先注意，若 z_0 是 f 的重数为 m （≥ 1）的零点，则 $P[f]$ 在 z_0 处有一个重数至少为 $(m+1)\nu_P-\Gamma_P$ 的零点，因此

$$N\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)\geq[(m+1)\nu_P-\Gamma_P-1]\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

由此，根据（22），我们得到

$$\nu_P\ T(r,f)\leq \nu_P\ N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+[1+\Gamma_P-(m+1)\nu_P]\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)$$
$$+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f).$$
$$=\overline{N}(r,f)+(1+\Gamma_P-\nu_P)\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f).$$

Thus

$$(\nu_P-1)T(r,f)\leq(1+\Gamma_P-\nu_P)\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f).$$

这证明了（i）。

为证明（ii），假设 f $k+1$ $k+2$ $\nu_P>$ 有重数至少为 且（ ）的零点。那么很容易看出 $\Gamma_P+2.$

$$N\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)-\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]}\right)\geq[(k+2)\nu_P-\Gamma_P-1]\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right).$$

再次，由（22），我们得到

$$\nu_P\ T(r,f)\leq \nu_P\ N\left(r,\frac{1}{f}\right)+\overline{N}(r,f)+[1+\Gamma_P-(k+2)\nu_P]\,\overline{N}\left(r,\frac{1}{f}\right)$$
$$+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f).$$
$$\leq \nu_p\ T(r,f)+T(r,f)+[1+\Gamma_P-(k+2)\nu_P]\,T(r,f)$$
$$+\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f).$$

这意味着

$$[(k+2)\nu_P-\Gamma_P-2]\ T(r,f)\leq\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f)$$

因此

$$T(r,f)\leq\frac{1}{(k+2)\nu_P-\Gamma_P-2}\overline{N}\left(r,\frac{1}{P[f]-\psi}\right)+S(r,f).$$

□

20 某些微分多项式的值分布.....

3 定理的证明

定理的证明 **5** 假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$. 处不正规。根据引理1，存在一个序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$，一个点序列 $\{z_n\} \subset D$ 满足 $z_n \to z_0$以及一个满足条件的正实数序列 $\rho_n \to 0$，使得序列

$$\phi_n(\zeta) := \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n^{\alpha}} \to \phi(\zeta),\ \alpha := \Theta_P - 1,$$

在复平面中局部一致收敛，其中 ϕ 是一个非恒定的有限阶整函数，其零点的重数至少为 $k+1$.。此外，相应的序列 $\{g_n\} \subset \mathcal{G}$ 在 D 中局部一致收敛于 g，其中 $g\ (\not\equiv \infty)$ 的零点重数至少为 $k+1$.

注意到

$$\begin{aligned}\tilde{P}[\phi_n](\zeta) &:= P[f_n](z_n + \rho_n\zeta)\\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i(z_n + \rho_n\zeta)\ \rho_n^{\left[(1+\alpha)\gamma_{M_i} - \Gamma_{M_i}\right]}\ M_i[\phi_n](\zeta).\end{aligned}$$

由于

$$\alpha = \Theta_P - 1 = \frac{\Gamma_{M_1}}{\gamma_{M_1}} - 1 \quad \text{and} \quad \frac{\Gamma_{M_1}}{\gamma_{M_1}} > \frac{\Gamma_{M_t}}{\gamma_{M_t}} \quad \text{for} \quad 2 \le t \le m,$$

我们有

$$\begin{aligned}\tilde{P}[\phi_n](\zeta) &= P[f_n](z_n + \rho_n\zeta)\\ &= a_1(z_n + \rho_n\zeta)M_1[\phi_n](\zeta) + \sum_{i=2}^{m} a_i(z_n + \rho_n\zeta)\ \rho_n^{\left[(1+\alpha)\gamma_{M_i} - \Gamma_{M_i}\right]}\ M_i[\phi_n](\zeta).\end{aligned}$$

再者，由于所有的 $a_i\ (1 \le i \le m)$ 都是 D 中的全纯函数，因此可得

$$\sum_{i=2}^{m} a_i(z_n + \rho_n\zeta)\ \rho_n^{\left[(1+\alpha)\gamma_{M_i} - \Gamma_{M_i}\right]}\ M_i[\phi_n](\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$ 中局部一致收敛于 0，因此

$$\tilde{P}[\phi_n](\zeta) = P[f_n](z_n + \rho_n\zeta) \to a_1(z_0)M_1[\phi](\zeta)$$

在 $\mathbb{C}$. 中局部一致。由于 $a_1(z_0) \neq 0$，我们不妨假设 $a_1(z_0) = 1$.。此外，由于 $g_n \to g$ 意味着 $P[g_n] \to P[g]$ 在 $\mathbb{C}$. 中局部一致。由于 ϕ 是一个整函数，且其零点的重数至少为 $k+1$，因此 $M_1[\phi]$ 在 $\mathbb{C}$. 中取遍每一个非零值。特别地，$M_1[\phi]$ 取到非零值 a，设为如此。令 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ 满足 $M_1[\phi](\zeta_0) = a$.。由于 $M_1[\phi] \not\equiv a$，根据 Hurwitz定理，存在一个序列 $\zeta_n \to \zeta_0$，使得当 n 充分大时，

$$P[f_n](z_n + \rho_n\zeta_n) = a$$

因此，根据假设，我们有

$$P[g_n](z_n + \rho_n\zeta_n) = a.$$

取 $n \to \infty$，得到 $P[g](\zeta_0) = a \neq 0$.

接下来，我们断言 ϕ 不取值 0。事实上，设 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ 满足 $\phi(\zeta_0) = 0$. 由于 $\phi \not\equiv 0$，根据Hurwitz定理，存在 $\zeta_n \to \zeta_0$，使得当 n充分大时，$\phi_n(\tilde{\zeta_n}) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n\tilde{\zeta_n}) = 0$. 这意味着 $f_n(z_n + \rho_n\tilde{\zeta_n}) = 0$，因此根据假设，$g_n(z_n + \rho_n\tilde{\zeta_n}) = 0$. 取 $n \to \infty$，得到 $g(\zeta_0) = 0$. 由于 g的零点重数至少为 $k+1$，故 $P[g](z_0) = 0$，矛盾。由此得证。

由于 $\phi(\zeta) \neq 0$, ϕ是超越函数，因此由引理 8 (i)可知，$M_1[\phi]$无穷多次取值 a。若 $M_1[\phi](\zeta_0) = a$，则如前所述，我们会得到 $P[g](\zeta_0) = a$.设 $l(\geq 1)$为 $P[g] - a$在 ζ_0. 处的零点重数。由于 $P[g] \neq a$，根据Hurwitz定理，当 n充分大时， $P[g_n] - a$在 ζ_0.的邻域 $U(\zeta_0)$内恰有 l个零点。由于 $M_1[\phi]$无穷多次取值 a，我们设 $\zeta_1, \ldots, \zeta_{l+1}$为 $M_1[\phi] - a$.的不同零点。同样，根据Hurwitz定理，当 n充分大时，存在$\zeta_{j,n} \to \zeta_j$，使得对于 $j = 1, \ldots, l+1$., $P[\phi_n](\zeta_{j,n}) = a$。因此， $P[\phi_n] - a$在 $U(\zeta_0)$中有 $l+1$个不同零点，从而 $P[g_n] - a$在 $U(\zeta_0)$中有 $l+1$个不同零点，矛盾。□

定理的证明 **6** 假设 $\mathcal{F}$在 $z_0 \in D$. 处不正规。由引理 1，存在一个序列 $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$，一个点序列 $\{z_n\} \subset D$ 满足 $z_n \to z_0$ 以及一个正实数序列，满足 $\rho_n \to 0$ 使得序列

$$\phi_n(\zeta) := \frac{f_n(z_n + \rho_n\zeta)}{\rho_n^{\alpha}} \to \phi(\zeta),\ \alpha := \Theta_P - 1,$$

在 $\mathbb{C}$中局部一致，其中 ϕ是一个非恒定的有限阶亚纯函数，其零点的重数至少为 $k+1$. 此外，相应的序列 $\{g_n\} \subset \mathcal{G}$ 局部一致收敛到 g 在 D中，其中 $g\ (\not\equiv \infty)$ 的零点重数至少为 $k+1$. 用与定理 5证明中类似的方法，我们可得，在 $\mathbb{C}$中任一不含 ϕ极点的紧子集上，

$$\tilde{P}[\phi_n](\zeta) := P[f_n](z_n + \rho_n\zeta) \to a_1(z_0)M_1[\phi](\zeta) \text{ as } n \to \infty.$$

此外，对于每个 $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \left\{g^{-1}(\infty)\right\}$，我们有 $P[g_n](\zeta) \to P[g](\zeta)$ 当 $n \to \infty$ 时局部一致。由于 $M_1[\phi] = \prod_{j=0}^{k} \left(\phi^{(j)}\right)^{n_{j1}}$，为方便起见，我们将 $M_1[\phi]$ 记作 $M[\phi]$，并将幂 n_{j1} 记作 n_j，其中 $j = 1$, ..., k.。此外，我们可以假设 $a_1(z_0) = 1$.。现在，我们考虑以下几种情形：

情形 1： $n_0 = n_1 = \cdots = n_{k-1} = 0$. 在这种情况下，我们有 $M[\phi] = \left(\phi^{(k)}\right)^{n_k}$，其中 $n_k \geq 1$.

Claim 1: $\phi(\zeta) \neq 0$.

对于，设 $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ 满足 $\phi(\zeta_0) = 0$. 由于 $\phi \not\equiv 0$，根据Hurwitz定理，存在 $\zeta_n \to \zeta_0$，使得当 n充分大时， $\phi_n(\zeta_n) = \rho_n^{-\alpha} f_n(z_n + \rho_n\zeta_n) = 0$. 这意味着 $f_n(z_n + \rho_n\zeta_n) = 0$，因此根据假设， $g_n(z_n + \rho_n\zeta_n) = 0$. 取 $n \to \infty$，得到 $g(z_0) = 0$. 由于 g 的零点重数至少为 $k+1$, 因此 $P[g](z_0) = 0$. 如果 ϕ是超越函数，那么根据引理3， $M[\phi]$ 取值为非零复数 a. 设 $\zeta' \in \mathbb{C}$ 满足 $M[\phi](\zeta') = a$. 由于 $M[\phi] \not\equiv a$，根据Hurwitz定理，存在序列 $\zeta_n' \to \zeta'$，使得当 n 充分大时， $P[f_n](z_n + \rho_n\zeta_n')$，因此根据假设，我们得到 $P[g_n](z_n + \rho_n\zeta_n')$ 取，得到 $P[g](z_0) = a \neq 0$, 矛盾。因此 ϕ必为有理函数。此外，利用前面的论证，容易看出 ϕ不是多项式，因此存在 $\zeta^* \in \mathbb{C}$ 使得 $\phi(\zeta^*) = \infty$. 再次，根据Hurwitz定理，存在序列 $\zeta_n^* \to \zeta^*$，使得当 n充分大时，我们有 $f_n(z_n + \rho_n\zeta_n^*) = \infty$ 因此 $g_n(z_n + \rho_n\zeta_n^*) = \infty$. 取 $n \to \infty$，得到 $g\ z_0 = \infty$ $\phi\ \zeta \neq 0$. ( )，这再次导致矛盾。因此 ( )

Claim 2: ϕ 没有极点。

假设存在某个 $\zeta_1 \in \mathbb{C}$ 使得 $\phi(\zeta_1) = \infty$. 那么，如前所述，我们得到 $g(z_0) = \infty$. 由于 $\phi(\zeta) \neq 0$，根据引理2，存在某个 $\zeta_2 \in \mathbb{C}$ 使得

22 某些微分多项式的值分布.....

$M[\phi](\zeta_2) = a$. 再次，由Hurwitz定理，存在一个序列 $\zeta_{n,\ 2} \to \zeta_2$ 使得当 n 充分大时，有 $P[f_n](z_n + \rho_n\zeta_{n,\ 2}) = a$. 这意味着$P[g_n](z_n + \rho_n\zeta_{n,\ 2}) = a$ 因此 $P[g](z_0) = a$ 这不可能，因为 $P[g] \not\equiv a$ 且 $g(z_0) = \infty$. 由此得证断言2。

现在，断言1和断言2共同推出 ϕ 是一个不取零值的超越整函数，因此根据引理 2，可知 $M[\phi]$ 取值 a 无穷多次。现在，仿照定理 5的证明进行推导，便得到矛盾。

情形 2： $n_0 \geq 1$, $n_k \geq 1$. 于是 $\gamma_M \geq 2$ ，简单计算可得 $(k+2)\gamma_M - \Gamma_M - 2 = (k+2)(n_0 + n_1 + \cdots + n_k) - [n_0 + 2n_1 + \cdots + (k+1)n_k] - 2 = (k+2-1)n_0 + (k+2-2)n_1 + \cdots + [k+2-(k+1)]n_k - 2 \geq kn_0 + (k+2-2)n_1 + \cdots + [(k+2) - (k-1)]n_{k-1} \geq 1$.

现在，运用与情形 1 和引理 8 (ii) 相同的论证，可得 $\phi(\zeta) \neq 0$ ，因此 ϕ 不是多项式。若 ϕ 是超越函数或有理函数，则运用引理 8 (i) 以及断言2中的论证，可得 ϕ 是一个不取零值的超越整函数。因此，由引理 8 (i) 可知 $M[\phi]$ 无穷多次取到 a 。同定理 5的证明类似，可得矛盾。因此， $\mathcal{F}$ 在 D. □ 正规

定理 8 的证明。假设 $\mathcal{F}$ 在 $z_0 \in D$. 处不正规。于是考虑以下两种情形：

情形 1： $h(z_0) \neq 0$. 由引理 1，存在一个序列 $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$、一个点序列 $\{z_j\} \subset D$ 满足 $z_j \to z_0$ ，以及一个正实数序列，满足$\rho_j \to 0$ ，使得该序列

$$g_j(\xi) := \frac{f_j(z_j + \rho_j\xi)}{\rho_j^{\alpha}} \to g(\xi),\ \alpha := \frac{\Gamma_M}{\gamma_M} - 1,$$

关于球面度量在 $\mathbb{C}$ 中局部一致，其中 $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 是一个级不超过 2 的非常数函数。由于每个 f_j 的零点重数至少为 $k+m+1$，根据辐角原理可知， g 的零点重数至少为 $k+m+1$. 。此外，简单计算可得

$$\begin{aligned} M[g_j](\xi) &= \prod_{i=0}^{k}\left(\left(\frac{f_j(z_j+\rho_j\xi}{\rho_j^{\alpha}}\right)^{(i)}\right)^{n_i} \\ &= \frac{\rho_j^{n_1+2n_2+\cdots+kn_k}}{\rho_j^{\alpha(n_0+n_1+\cdots+n_k)}}\prod_{i=0}^{k}\left(\left(f_j(z_j+\rho_j\xi)\right)^{(i)}\right)^{n_i} \\ &= \frac{\rho_j^{\Gamma_M-\gamma_M}}{\rho_j^{\alpha\gamma_M}}M[f_j](z_j+\rho_j\xi) \\ &= M[f_j](z_j+\rho_j\xi). \end{aligned}$$

因此，在不包含 g的极点的 $\mathbb{C}$ 的每个紧子集上，我们有

$$M[g_j](\xi) = M[f_j](z_j+\rho_j\xi) \to M[g](\xi).$$

显然， $M[g](\xi) \neq h(z_0)$。此外，容易验证$(k+2)\gamma_M - \Gamma_M - 2 > 0$.因此，由引理 5和引理 8 (ii)， $M[g](\xi) - h(z_0)$至少有两个不同零点，记为 ξ_1和 ξ_2.。取 $\delta > 0$ 充分小，使得 $D(\xi_1, \delta) \cap D(\xi_2, \delta) = \phi$，并且对于任意 $\xi \neq \xi_1$, ξ_2，在 $D(\xi_1, \delta) \cup D(\xi_2, \delta)$ $M[g](\xi) - h(z_0) \neq 0$.。由Hurwitz定理，存在序列$\xi_{j,1} \to \xi_1$ 和$\xi_{j,2} \to \xi_2$，使得当 j充分大时，

$$M[f_j](z_j + \rho_j\xi_{j,l}) - h(z_j + \rho_j\xi_l) = 0,\ l = 1,\ 2.$$

根据假设可知，对于任意固定整数 p，以及所有 j,

$$M[f_p](z_j + \rho_j\xi_{j,l}) - h(z_j + \rho_j\xi_l) = 0,\ l = 1,\ 2.$$

取 $j \to \infty$，得到

$$M[f_p](z_0) - h(z_0) = 0.$$

由于 $M[f_p] - h(z_0)$ 的零点没有聚点，因此当 j 充分大时，我们得到 $z_j + \rho_j\xi_{j,1} = 0 = z_j + \rho_j\xi_{j,2}$。这意味着 $\xi_{j,1} = -z_j/\rho_j = \xi_{j,2}$，表明 $D(\xi_1, \delta) \cap D(\xi_2, \delta) \neq \phi$，矛盾。

情形 2： $h(z_0) = 0$. 于是 $h(z) = z^t h_1(z)$，其中 h_1 在 D 上全纯，使得 $h_1(z_0) \neq 0$ 且 $1 \leq t \leq m$.。我们可以假设 $h_1(z_0) = 1$.。再次根据引理 1，存在一个序列 $\{f_j\} \subset \mathcal{F}$、一个点序列 $\{z_j\} \subset D$ （满足 $z_j \to z_0$）以及一个正实数序列，满足 $\rho_j \to 0$，使得该序列

$$g_j(\xi) := \frac{f_j(z_j + \rho_j\xi)}{\rho_j^{\beta}} \to g(\xi),\ \beta := \frac{\Gamma_M + t}{\gamma_M} - 1,$$

关于球面度量， $\mathbb{C}$ 中局部一致，其中 $g \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ 非常数。我们考虑以下子情形:

子情形 2.1: 假设 z_j/ρ_j 存在一个子序列（为方便起见，仍记为 z_j/ρ_j），使得当 $j \to \infty$. 时， $z_j/\rho_j \to \infty$

考虑族

$$V_j(\xi) := \frac{f_j(z_j + z_j\xi)}{z_j^{\beta}}.$$

通过简单计算可知， $M[f_j](z_j + z_j\xi) = z_j^t M[V_j](\xi)$。根据假设，对任意不同的整数 r、 s, 有:

$$M[f_r](z) - h(z) = 0 \Leftrightarrow M[f_s](z) - h(z) = 0.$$

取 ξ，设为 ξ_i，使得对某个 j，设为 j_i， $z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i$ 是 $M[f_r](z) - h(z)$ 的零点，因而也是 $M[f_s](z) - h(z)$ 的零点。于是

$$M[f_r](z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i) = h(z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i) \Leftrightarrow M[f_s](z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i) = h(z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i)$$

$$\Rightarrow M[V_r](\xi_i) = (1 + \xi_i)^t h_1(z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i) \Leftrightarrow M[V_s](\xi_i) = (1 + \xi_i)^t h_1(z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i).$$

由于在原点的一个足够小邻域 N_0 内，$(1 + \xi_i)^t h_1(z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i) \to (1 + \xi_i)^t \neq 0$，因此 $(1 + \xi_i)^t h_1(z_{j_i} + z_{j_i}\xi_i) \neq 0$ 在 N_0. 中成立。因此，根据情形 1，

$\{V_j\}$ N_0 $\{V_j\}$ 在 中是正规的，所以 (中) 存在一个子序列（仍记为 $\{V_j\}$），使得 V_j 在 N_0 中球面局部一致地收敛到亚纯函数 V.

子情形 2.1.1: $V(0) \neq 0$. 那么对于任意 $\xi \in \mathbb{C}$,

$$g_j(\xi) = \rho_j^{-\beta} f_j(z_j + \rho_j\xi) = \left(\frac{z_j}{\rho_j}\right)^{\beta} V_j\left(\frac{\rho_j}{z_j}\xi\right)$$

con球面局部一致收敛到 ∞，这表明 $g \equiv \infty$，矛盾 .

子情形 2.1.2： $V(0) = 0$. 于是 $V'(0) \neq \infty$，因此

$$g_j'(\xi) = \rho_j^{-\beta+1} f_j'(z_j + \rho_j \xi) = \left(\frac{\rho_j}{z_j}\right)^{-\beta+1} V_j'\left(\frac{\rho_j}{z_j}\xi\right)$$

在 $\mathbb{C}$ 中球面局部一致收敛到 0。这表明 $g' \equiv 0$，这与 g 非常数这一事实矛盾。

子情形 2.2：假设 z_j/ρ_j 存在一个子序列（为方便起见，仍记为 z_j/ρ_j），使得当 $j \to \infty$ 时， $z_j/\rho_j \to \zeta$，其中 $\zeta \in \mathbb{C}$.

考虑族 $W_j(\xi) := \rho_j^{-\beta} f_j(\rho_j \xi)$。于是

$$W_j(\xi) = g_j\left(\xi - \frac{z_j}{\rho_j}\right) \to g(\xi - \zeta) := W(\xi).$$

容易得出，在 $\mathbb{C}$ 的任意一个不含 W 极点的紧子集上，

$$M[W_j](\xi) - \xi^t \to M[W](\xi) - \xi^t.$$

显然， $M[W](\xi) \neq \xi^t$. 因此，根据引理 7， $M[W](\xi) - \xi^t$ 至少有两个不同零点。按照情形 1 中的类似方法继续推导，我们得到矛盾。因此， $\mathcal{F}$ 在 D. □ 中正规

4 声明

资助：作者声明，在撰写本稿件期间未获得任何资金、资助或其他支持。

竞争性利益：作者声明，他们不存在利益冲突。作者没有需要披露的相关财务或非财务利益。

数据可用性：由于本研究期间未生成或分析任何数据集，因此本文不适用数据共享。

参考文献

[1] Ahamed, M.B., Mandal, S.：正规亚纯函数与正规调和映射的某些性质。MonatshMath (2022)。https://doi.org/10.1007/s00605-022-01774-2

[2] Bergweiler, W., Eremenko, A.：有限阶亚纯函数的反函数的奇点。Rev. Mat. Iberoam. 11(2),355-373 (1995)。https://doi.org/10.4171/RMI/176

[3] Bergweiler, W.：布洛赫原理。Comput. Methods Funct. Theory 6, 77-108(2006)。https://doi.org/10.1007/BF03321119

[4] Chang, J.M.：无零点亚纯函数的正规性与拟正规性，Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 28(4)，707-716（2012）。https://doi.org/10.1007/s10114-011-0297-z

[5] Chang, J.M.：关于两个函数族之间共享值的正规性。Comput. Methods Funct. Theory 21, 465-472（2021）。https://doi.org/10.1007/s40315-021-00376-7[6] Charak, K.S., Rieppo, J.：两个正规性判据及布洛赫原理的逆命题。数学分析及其应用杂志 353(1), 43-48（2009）。https:// doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.11.066[7] Charak, K.S., Singh, V.：两个正规性判据及布洛赫原理逆命题的反例。Kodai数学杂志 38(3), 672-686（2015）。https://doi.org/10.2996/kmj/1446210601[8] Charak, K.S., Sharma, S.：一些正规性判据及一个布洛赫原理逆命题的反例。澳大利亚数学会通报 95, 238-249（2017）。https://doi.org/10.1017/S0004972716001015[9] Chen, H.H., Gu, Y.X.：对马蒂判据的改进及其应用。中国科学A辑 36(6), 674-681（1993）。[10] Chen, S., Xu, Y.：关于共享值的两个函数族之间的正规性关系。Monatsh Math 196, 1-13（2021）。https://doi.org/10. 1007/s00605-021-01559-z [11] Deng, B.M., Fang, M.L., Liu, D.：无零点亚纯函数的正规族。澳大利亚数学会杂志 91, 313-322（2011）。https://doi.org/10.1017/S1446788711001571[12] Deng, B.M., Lei, C.L., Fang, M.L.：关于海曼问题的正规族与共享函数。马来西亚数学科学学会通报 42, 847-857（2019）。https://doi.org/10.1007/s40840-017-0515-7[13] Kumar, R., Bharti, N.：关于部分分担值和近似值的正规族。S˜ao Paulo J. Math. Sci.（2022）。https://doi.org/10. 1007/s40863-022-00341-9[14] Hayman, W.K.：亚纯函数及其导数的皮卡值。数学年刊。70(1), 9-42（1959）。https://doi.org/10. 2307/1969890[15]Hayman, W.K.：《亚纯函数》。克拉伦登出版社，牛津（1964）。[16] Lahiri, I.：一个简单的正规性判据，导出了布洛赫原理逆命题的一个反例。新西兰数学杂志 34, 61-65（2005）。

26 某些微分多项式的值分布.....[17] Li, B.Q.：关于布洛赫启发式原理、正规性与完全分歧值。《数学文献》87，417-426（2006）。https://doi.org/10.1007/s00013- 006-1788-5[18] Liu, X.J., Li, S.H., Pang, X.C.：关于涉及共享值的两个亚纯函数族的正规性判据。《Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)》29(1)，151-158（2013年）。https://doi.org/10.1007/s10114-012-0600-7[19] Lo, Y.：《值分布理论》。施普林格出版社，柏林，1993。[20] Mirsky, L.：《线性代数导论》。多佛出版社，纽约，2003。[21]Pang, X.C., Zalcman, L.：正规族与共享值。《伦敦数学会会报》32(3)，325-331（2000）。https://doi.org/10.1112/S002460939900644X[22] Schiff, J.L.：《正规族》。施普林格，柏林，1993。[23] Singh, V., Charak, K.S.：涉及微分多项式的正规性判据。《墨西哥数学会通报》26，425-441（2020）。https://doi.org/10.1007/s40590-019-00242-6[24] Wang, Y., Fang, M.L.：具有重零点的亚纯函数的皮卡值与正规族。《数学学报（新辑）》14(1)，17-26（1998）。https://doi.org/10.1007/bf02563879[25]Zalcman, L.：复变函数论中的启发式原理。《美国数学月刊》82(8)，813-817（1975）。https://doi.org/10.1080/ 00029890.1975.11993942[26]Zalcman, L.：正规族：新视角。《美国数学会通报（新辑）》35，215-230（1998）。https://doi.org/10.1090/S0273-0979-98- 00755-1