arXiv:2303.05317v2 [cond-mat.stat-mech] 1 Jul 2024

Clifford 电路中的吸收态相变

Nastasia Makki,* Nicolai Lang, and Hans Peter B¨uchler
Institute for Theoretical Physics III and Center for Integrated Quantum Science and Technology, University of Stuttgart, 70550 Stuttgart, Germany(日期：2024年7月2日)

量子涨落在改变非平衡相变临界行为中的作用，是一个基础但尚未解决的问题。在本研究中，我们考察了经历接触过程的一维量子比特链的吸收态相变，该过程同时包含相干动力学和经典动力学。我们采用一种离散时间量子模型，其状态可用稳定子形式描述，因此能够高效模拟较大的系统尺寸。提取出的临界指数表明，这种 Clifford 电路模型的吸收态相变属于定向渗流普适类。这说明，加入量子涨落未必会改变纯经典系统非平衡相变的临界行为。最后，我们将分析扩展到非 Clifford 电路模型；对小系统进行的初步标度分析显示，其临界指数也与定向渗流普适类相符。

I. 引言

非平衡量子相变之所以引人关注，是因为它们可能呈现出有别于经典系统的普适行为 [38, 39], ，但通常也难以研究。近期，有研究提出量子接触模型可作为探索这一可能性的有前景系统 [40]。经典接触模型是研究非平衡相变时概念上最简单的模型之一。其特征是扩散机制与概率衰减之间的竞争，并广泛用于描述疾病传播、森林火灾和细菌菌落等现象 [41–45]。当扩散率较低时，系统会达到一种不含感染单元的状态，并停留在这一吸收态中。然而，随着扩散率增至超过某个临界值，系统便会进入活跃态，此时感染单元的密度会围绕某个固定的非零值波动。经典接触过程中的相变已得到充分理解：它属于定向渗流（DP）普适类，且所有临界指数都已被高精度确定 [46]。另一方面，接触过程的量子类似物仍未得到充分理解。由于经典计算机的计算能力限制了对一般多体量子系统进行精确模拟的规模，许多有关其量子临界行为的问题仍未得到解答。在此，我们研究一种基于 Clifford 操作、可通过数值方法高效研究的随机量子电路模型中的吸收态相变的临界性质。

对量子接触过程的研究，源于利用里德堡原子实现其实验方案的潜力 [47]。这类中性原子被激发至里德堡态，并通过光镊进行单独囚禁，或处于冻结区间；它们已成为用于平衡态量子模拟的极具前景的平台以及非平衡量子多体系统 [48–57]。相干驱动、里德堡态之间的强相互作用以及自发衰变相互交织，也使得探索与量子接触过程密切相关的模型成为可能 [58]。布居损失和激发密度等便于测量的观测量会随驱动强度呈现幂律标度，而推断出的指数则有助于深入了解此类系统的临界行为 [59]。采用平均场方法开展的早期理论研究表明，纯量子接触模型存在一级相变；加入经典贡献后，则会出现一个双临界点，其普适行为偏离经典的连续定向渗流（DP）相变 [40, 47]。重整化群分析得出结论：活跃相中的强时空涨落会使平均场近似所预测的一级相变变得平滑 [60]。采用张量网络（iTEBD）算法对一条含 50 个格点的链进行数值模拟，发现了连续的吸收态相变，并给出了一个新的量子接触普适类的临界指数初步估计 [61–63]。一种用于确定临界区域的机器学习方法，结合张量网络和量子跳跃蒙特卡罗分析，也给出了临界指数的估计 [64]；研究发现，只有一个（衰变）指数不同于 DP 值，而且这种差异仅出现在系统初始状态为均匀、全活跃态的情况下。一般而言，数值方法受到其所能模拟的系统规模的严重限制 [65]。张量网络的有限键维数使该方法仅适用于纠缠较低的系统，这也成为准确研究量子临界行为的另一项障碍。然而，基于稳定子态的其他数值方法能够探索具有广延纠缠的量子系统。这类 Clifford 量子电路既能模拟幺正操作，也能模拟耗散操作，并且可以在经典计算机上高效实现 [66]。这一方法近期已成功用于研究纠缠相变 [67–70]，，尤其是对于也会发生吸收态相变的系统，

* nastasia.makki@itp3.uni-stuttgart.de

特别是，对于也会发生吸收态相变的系统， [71, 72]。

在本文中，我们研究了一种基于 Clifford 操作的接触过程量子电路版本。由于普适性质与微观实现方式无关，我们预计连续时间量子接触模型也能实现相同的临界行为。在每个离散时间步，我们以一定概率施加一组幺正门来表示相干时间演化，并施加一些投影测量来模拟耗散衰变。更重要的是，我们将门限制为幺正算符中的 Clifford 群成员，从而限制希尔伯特空间，进而能够在接近热力学极限的条件下高效模拟系统。我们的结果表明，利用 Clifford 电路模拟的接触过程相变属于定向渗流普适类。我们发现，在将希尔伯特空间限制为稳定子态的同时，保持吸收态在动力学上稳定，会使相变点及活跃相中的稳态纠缠受限。这种方法中纳入的量子效应不足以改变经典接触过程的普适类。为了检验取消 Clifford 限制是否会使动力学发生显著变化，我们引入了一种非 Clifford 量子接触过程，并研究了其在一个包含 20 个量子比特的小系统中的非平衡性质。数据表明，这种非 Clifford 量子接触模型在活跃相中呈现体积律纠缠标度。由于有限尺寸效应很强，我们无法从精确模拟数据中可靠地提取临界指数。不过，如果假设临界指数取定向渗流的数值，那么小系统的标度行为仍与这一假设相符。这些尚无定论的结果凸显了在新兴量子模拟平台上实现此类模型的重要性，因为在那里可以分析更大的系统。

II. 模型

我们研究长度为 L 、具有周期边界条件的一维晶格。每个格点都是一个由量子比特态表示的二能级量子系统。基态标记为$|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ ，在接触过程的术语中，我们分别将其称为 $|$活跃$\rangle$ 态和 $|$非活跃$\rangle$ 态。在每个时间步，系统都会遵循一组动力学规则，规定激活如何在系统中传播和凝聚。最简单的经典接触过程需要两条动力学规则。首先，当且仅当某个格点的最近邻中已有一个处于活跃态时，该格点才会变为活跃态，也就是说，激活通过接触发生。其次，活跃位点可以自发衰变并变为非活跃态。自发激活应当不可能发生，这使得所有格点均为非活跃态的状态在动力学规则下保持不变。因此，一旦系统进入完全非活跃态，就会被困在该状态中，故称其为吸收态。该系统的另一种动力学稳定态是传播过程与衰变过程彼此平衡的状态

此时，活性位点密度会围绕一个有限的固定值波动。此时称系统处于活跃相。传播概率与衰变概率的相对强弱决定了稳态，改变这种相对强弱会驱动相变。吸收态的存在违反了细致平衡，使得这一相变成为非平衡相变。在经典系统中，格点只能处于两种基态之一，即活跃态或非活跃态。经典相变已得到深入研究，并被归类为定向渗流（DP）普适类；关于经典接触过程的详细综述，请参阅 [46]。

为研究这一相变的量子类似物，我们将问题映射为一个离散时间量子线路，其中的幺正门和测量经过选择，以重现接触过程的动力学规则；此处的接触过程作用于一条量子比特链。本文研究两种在量子系统中实现接触过程思想的模型。第一种是 Clifford 模型，其中我们将门限制为 Clifford 酉变换集合：Hadamard（H）、受控非门（CNOT）和相位（P）门。还包括可用 Clifford 集合表示的操作，例如 Pauli 矩阵：X、Y 和 Z。在第二种模型中，我们放宽了这一限制。图 1展示了两种模型中不同激活扩散操作所采用的动力学规则。两种模型的衰减操作相同；具体而言，先对单点进行 Z 基上的投影测量，再根据测量结果，若该点为激活态，则使用 X 门将其翻转。此操作以固定概率作用于每个点 γ。

在 Clifford 模型中，激活通过多层 CNOT 门传播，每个门以概率 ω施加；也通过多层条件$\sqrt{X}$ 操作传播，每个操作以概率 κ施加。条件$\sqrt{X}$ 操作的定义是：先测量控制量子比特，只有当测量结果表明控制量子比特处于活跃态时，才在目标量子比特上施加一个 $\sqrt{X}$门。我们从最简单的 Clifford 接触模型开始，其中 $\kappa = 0$。该模型称为 CNOT 模型。在衰减率 $\gamma = 0.1$固定时，改变扩散耦合 ω 会驱动系统经历吸收态相变。临界点分析见图 8 （附录A），其标度行为被发现属于定向渗流（DP）普适类。若考虑将系统初始化为 Z 基上各格点的乘积态，即经典态，就很容易看出 CNOT 模型与经典接触模型等价。动力学规则规定系统始终保持这种经典态，因为只有当所施加 CNOT 门的控制位点处于基态的叠加态时，才会产生纠缠态。因此，若要观察所选子系统与其余部分之间的有限纠缠熵，模拟时应从某些格点不处于 Z 基的状态开始。然而，衰减操作会持续消除纠缠；我们发现，对于任何有限的 γ，系统最终都会收敛到一个经典乘积态，其中各格点处于活跃态或

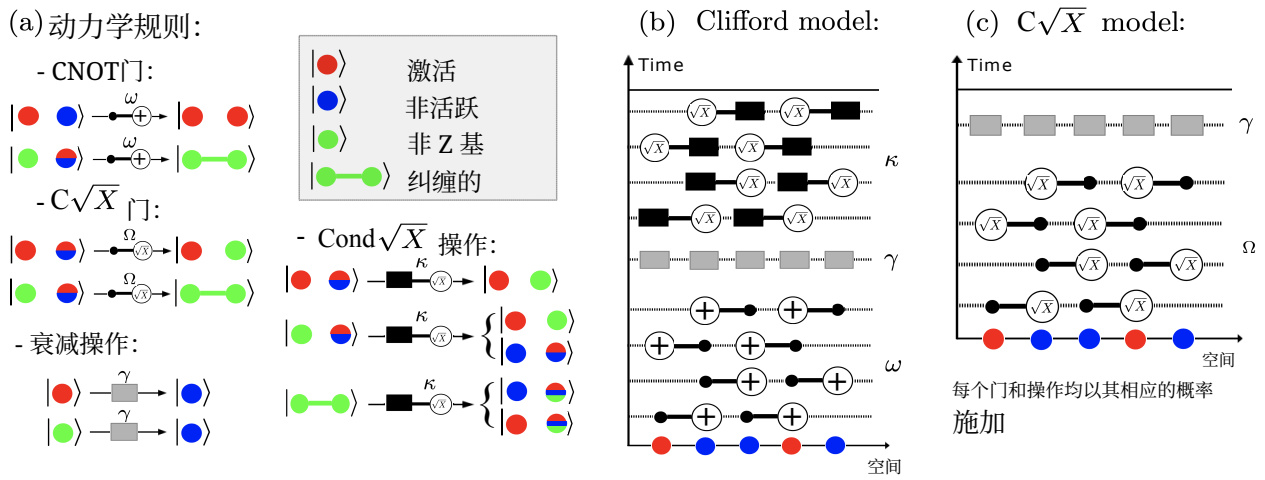


图 1。**量子接触模型**。基态 $|\bullet\rangle = |$活跃$\rangle$ 和 $|\bullet\rangle = |$非活跃$\rangle$ 是泡利算符 Z的本征态。 $|\bullet\rangle$ 表示不处于 Z本征态的格点，$|\bullet\ \bullet\rangle$ 则表示一般的纠缠态。(a) 动力学规则：首先，以概率 γ执行衰减操作。这是一个单点过程：对量子比特进行投影式 Z 测量，若测量结果为 |活跃⟩，则随后施加 X 门翻转其状态。以概率 ω施加 CNOT 门。如果控制位点处于活跃态，该门可以激活非活跃位点。如果控制位点处于叠加态，则会产生纠缠态。以概率 Ω 施加受控-$\sqrt{X}$ (C$\sqrt{X}$) 门 $\sqrt{x}$ 。当控制位点处于活跃态时，乘积态会使目标位点产生局部叠加态。再施加一次该门，则会激活初始为非活跃的目标位点。如果控制位点处于叠加态，也可以产生纠缠对态。最后，我们定义一种双量子比特操作：以概率 κ施加受控条件-$\sqrt{X}$ (Cond$\sqrt{X}$) 门 $\sqrt{x}$ 。该操作的条件取决于控制位点的测量结果；如果结果为活跃态，则对目标位点施加一个 $\sqrt{X}$ 门。该过程会使纠缠态退相干，但施加于 Z基底中的乘积态后，会产生局部叠加态。(b) Clifford 模型定义为一种量子电路，它结合了 CNOT 门层和 Cond$\sqrt{X}$ 操作层，并以棋盘式排列对称地施加这些操作，另加一层单点衰减操作。上图示意一个时间步，其中每种操作均以给定概率施加。对于固定的有限衰变概率 γ，存在一个临界值 ω；当 κ 低于该临界值时，系统会演化至动力学稳定的吸收相，即所有格点均处于非活跃态。(c) C$\sqrt{X}$ 模型定义为由 C$\sqrt{X}$ 门层和衰减操作构成的量子电路。我们预计，在衰减 γ 保持不变时，随着概率 Ω 增大，将观察到吸收态相变，此时动力学由量子效应主导。然而，这是一个非克利福德电路，只能对小系统尺寸进行数值模拟。

非活跃态。如果考虑满足 $\omega = 0$ 且 $\kappa > 0$ 的 Clifford 模型，也会得到类似结果，我们将其称为条件$\sqrt{X}$ 模型。在衰减率固定时增大 κ，也会驱动系统经历属于定向渗流普适类的吸收态相变，如附录9 图A所示。其临界点出现在 CNOT 模型临界值的两倍处，这是因为对于经典态，两个条件$\sqrt{X}$ 操作等价于一个 CNOT 门。我们预期，在能够动态产生纠缠熵的量子电路中，如果采用旋转局部态而非仅翻转局部态的门来传播激活，相变的性质可能发生变化。然而，如果用受控哈达玛门（CH）或受控 $\sqrt{X}$ （C$\sqrt{X}$）替换 CNOT，所得接触模型便是非 Clifford 模型，因此无法在经典计算机上高效模拟。第IV节中，我们分析了 C$\sqrt{X}$ 模型中发生的吸收态相变，如图1c 所示；系统为包含 20 个量子比特的小链。下文将重点讨论图1b 所示的 Clifford 模型。当两个概率 κ 和 ω 均非零时，可以动态产生纠缠态，但.....

需要两个步骤。首先，需要执行Cond$\sqrt{X}$ 操作以创建局部叠加态，然后后续的 CNOT 门便可扩散纠缠。

III. 结果

这里我们给出 Clifford 模型模拟的结果。对于每次实现，我们随机选择一半格点并将其激活，以此初始化系统。随后，通过应用量子电路演化初态t_s 个时间步；这一过程重复 10^3 次实现。主要观测量是活跃位点的平均密度 $n(t)$ 随时间 t 的变化；这一量在短时间尺度上取决于初态，但之后会呈现出与初始条件无关的行为。每次模拟所应用的时间步数 t_s 应足够多，以使系统达到稳态区域。稳态下活跃位点的密度 n 是吸收态相变的序参量。它在吸收相中为零，在活跃相中则为有限值。需要注意的是

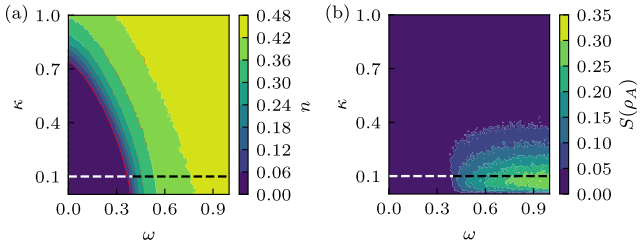


图 2. **Clifford 模型的相图**。(a) 对于固定的衰减常数 ($\gamma = 0.1$)，我们在扩散参数 $\omega \lesssim 0.41$ 和 $\kappa \lesssim 0.79$较小的区域观察到吸收相，其稳态密度为零。(b) 展示了相应的稳态半系统纠缠熵。在吸收相以及沿着 $\omega = 0$ 和 $\kappa = 0$轴的区域，稳态为乘积态，因此 $S(\rho_A) = 0$。随着投影测量速率 κ增加，熵会降低。我们关注 κ 较小但有限时的密度转变，此时我们观察到活跃相中存在有限纠缠。

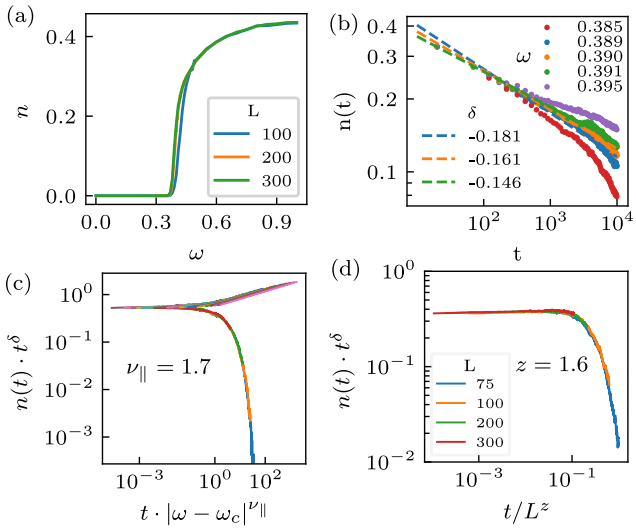


图 3。**Clifford 模型的标度分析**。(a) 在固定 $\gamma = \kappa = 0.1$时，序参量 $n(t_s$（活跃位点的稳态密度）随 ω连续增加，并从零开始。(b) 该二级相变的临界点估计约为 $\omega_c = 0.390$，此时 $n(t)$ 随模拟时间呈幂律衰减。随后，我们根据双对数尺度下拟合直线的斜率推导出衰减指数 $\delta = 0.161(9)$。(c) 当时间关联指数为 $\nu_\parallel = 1.70(3)$ 时，得到最佳数据塌缩，从而 $\beta = \delta \cdot \nu_\parallel = 0.27(2)$。(d) 此外，在临界点附近，不同尺寸的数据塌缩为关于 $z = 1.60(3) = \nu_\parallel/\nu_\perp$的普适标度函数，因此空间关联指数为 $\nu_\perp = 1.06(4)$。所有推导出的指数均与定向渗流普适类（表I）高度吻合。

在有限尺寸模拟中，活跃相的稳态仅为准稳态；演化至准稳态的初态会在其中停留相对较长时间（相较于平衡化所需的时间），最终才衰减至吸收态。准稳态的寿命随所考虑系统的尺寸呈指数增长。在我们的模拟中，考虑了最大为 $L = 400$ 个格点、$t_s = 10^4$ 个时间步的系统。图 2a 展示了 Clifford 模型在衰减率 $\gamma = 0.1$ 固定、系统尺寸为 $L = 200$、稳态演化时间为 $t_s = 10^2$ 步时得到的相图。吸收相存在于两个扩散耦合 ω 和 κ取值较小的区域，它们分别代表相干动力学和非相干动力学。相应的稳态纠缠熵 $S(\rho_A)$（其中 ρ_A表示尺寸为 $L_A = L/2$ 的子系统）绘于图 2b。在吸收相中，所有格点均不活跃，纠缠熵为零；在动力学最终进入乘积态的区域，纠缠熵也为零，例如模型构造使得状态本质上为经典态的 $\kappa = 0$ 和 $\omega = 0$ 轴上。随着 κ增加，$S(\rho_A)$持续减小，因为每个 Cond$\sqrt{X}$ 操作都包含一次投影测量。因此，适合研究相变的有趣区域是 κ 较小、且活跃相中的 $S(\rho_A)$为有限值的区域。我们考察沿着标示线 $\kappa = \gamma = 0.1$ 发生的吸收态相变。图 3a 展示了序参量 n 随 CNOT 速率 ω的变化。该相变显然是连续的。用于估算临界指数的标度分析表明，所有数值都与经典接触过程中已知的定向渗流指数一致，见图 3b–d；标度分析的详情见附录 A。

这一结果表明，在具有动态生成纠缠的量子模型中，经典普适类仍然可以存在。然而，在我们的 Clifford 模型中，活跃相中的纠缠熵较小，并保持在面积律标度区间。

通过提高产生局部叠加态（相对于投影测量）的作用，并在每次测量中施加多个$\sqrt{X}$ 门，可以尝试产生更多纠缠。我们将这些多量子比特操作称为 Cond$\sqrt{XX}$ 和 Cond$\sqrt{XXX}$。在接触过程的背景下，这类操作可解释为相互作用范围的增加。图 4 比较了这些模型中得到的吸收态相变。我们发现，尽管半系统纠缠熵达到显著更高的值，相变的性质仍明确属于定向渗流普适类。临界点出现在较低的耦合ω_c值处，这符合预期。标度分析见附录11 中的图B。

我们注意到，在所有这些情况下，跨越相变进入活跃相时，纠缠熵会从零连续增长；而在临界点，它似乎仍然低到不足以影响普适行为。

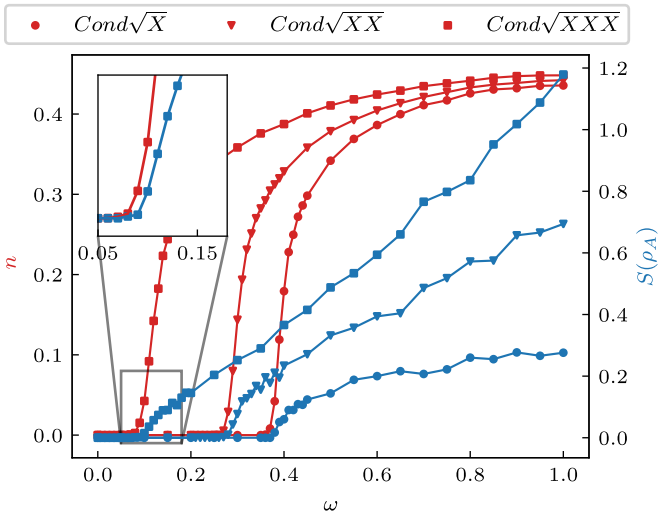


图4。**接触范围增大**。我们在 Clifford 模型中先用 Cond$\sqrt{XX}$、再用 Cond$\sqrt{XXX}$ 替换 Cond$\sqrt{X}$ 操作。在概率 $\gamma = \kappa = 0.1$ 取相同固定值时模拟动力学，我们观察到活跃相中达到的纠缠熵值有所增加。向吸收相的转变仍然是连续的，并属于定向渗流普适类。注意，纠缠也从零开始连续增长，并且在转变点仍然很小。

	DP	CNOT	Clifford	Cond$\sqrt{XXX}$
δ	0.1595	0.161(6)	0.161(9)	0.154(6)
β	0.2765	0.27(2)	0.27(2)	0.26(2)
$\nu_\parallel$	1.7338	1.70(3)	1.70(3)	1.70(3)
$\nu_\perp$	1.0969	1.06(4)	1.06(4)	1.06(4)

表 I. **临界指数**。 Clifford 形式体系中的所有接触过程均呈现出与定向渗流一致的临界行为。

IV. 非Clifford模型

现在我们聚焦于非 Clifford C$\sqrt{X}$ 模型。C$\sqrt{X}$ 门是幺正的，会产生相干扩展动力学，并动态生成纠缠态。以相对较低的速率 Ω 应用 C$\sqrt{X}$ 门时，有限的衰减率会使系统进入经典吸收相；正方晶格上的各向异性键渗流存在有限阈值，保证了该吸收相的存在 [73] （此处为图 1c 中的时空晶格）。随着 Ω 增大，预计系统会从吸收相转变为活跃相。图5a 展示了活跃位点归一化密度 n 随 Ω 的变化，其中 $\gamma = 0.1$ 保持恒定；同时还展示了相应的纠缠熵 $S(\rho_A)$，这些数据是在一个由 20 个量子比特组成的小系统上经过 $t = 100$ 步后得到的。若模拟更长时间，有限尺寸效应会导致 n 衰减，因此在如此小的系统尺寸下难以观测到稳态区域。尽管如此，我们仍观察到它与 Clifford 模型的一个关键区别：活跃相中的纠缠熵 $S(\rho_A)$ 会达到高得多的水平

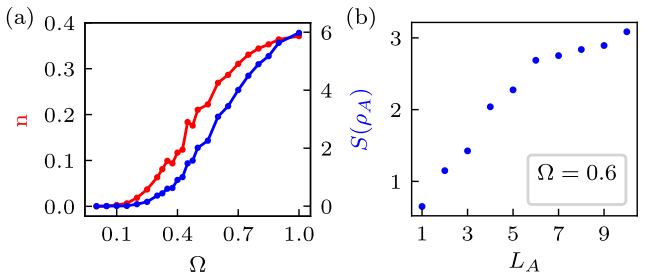


图 5. **该 C$\sqrt{X}$ 模型**。(a) 对于一个由 $L = 20$ 个量子比特组成的小型系统，精确模拟表明，吸收态相变是连续的；在衰减率 $\gamma = 0.1$ 固定时，稳态密度和纠缠熵均以速率 Ω 从零连续增长。(b) 当 Ω $= 0.6$ 时，系统似乎处于活跃相，纠缠熵随子系统体积缩放：绘制$S(\rho_A)$ 随子系统 A 的尺寸 L_A 变化的关系，可见当 L_A 远小于整个系统尺寸时，呈线性增长。随后，由于尺寸有限，增长趋于饱和。

数值。其似乎遵循体积律标度，这可由 $S(\rho_A)$ 随子系统尺寸 L_A 的线性增长看出，尤其当 L_A 相对于 L 较小时，如图 5b 所示。另一方面，与 Clifford 模型相变中观察到的行为类似，我们发现，随着 Ω 增大， n 和 $S(\rho_A)$ 均从零连续增至有限值，这与二级相变相符。

为考察该相变中的有限尺寸效应，我们将其标度行为与相同尺寸 $L = 20$ 下的 CNOT 模型进行比较；该模型的普适指数均已为人所知，见图 6。有限尺寸限制了可用于标度分析的数据时间范围。无法从这些数据中提取临界指数，我们只能检验其是否与已知的 DP 指数相符。

对于 CNOT 模型，预期的临界点 ω_c 和衰减指数 δ 均落在图 $L = 20$ 6d 模拟数据所显示的可能临界范围内。图 12 (附录 C) 展示了采用不同拟合指数以及 DP 指数理论值时的数据塌缩图，同时在该范围内改变临界点。对于更接近模拟更长链所得预期结果的参数，数据塌缩到普适标度函数的效果始终更好。因此我们可以得出结论：对于 CNOT 模型， $L = 20$ 数据拟合良好地符合预期的经典 DP 临界行为，直至模拟时间约为 $t = 100$；此后有限尺寸效应开始占主导。

对 C$\sqrt{X}$ 模型进行类似的 $t < 10$分析后，发现了几处值得注意的差异：首先，在短时间 n 内，活性位点密度会发生波动，这种现象主要出现在 Ω 相对较大的模拟中，此时系统预期最终会进入活跃相。此外，有限尺寸效应似乎更强；如图 n 6c 所示，总体衰减在更早的模拟时间

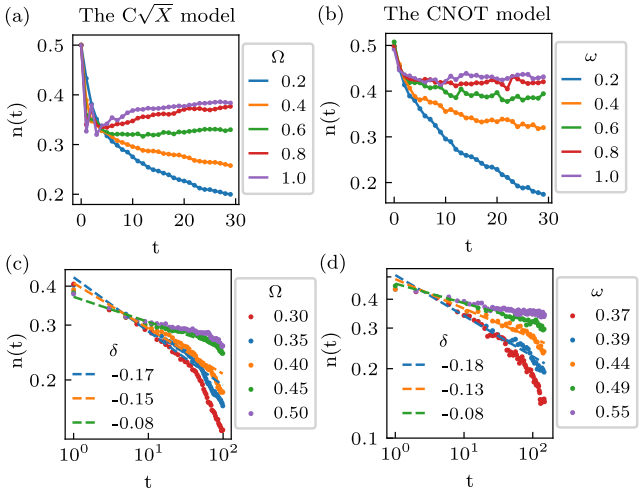


图6. **C模型与CNOT 模型的比较**。(a,b)分别展示 C$\sqrt{X}$ 模型和 CNOT 模型中序参量 n 的早期时间演化。(c,d) 展示 n 在较晚时间的演化。根据更大尺寸的系统，我们已知 CNOT 模型的临界点 $\omega_c = 0.39$ ；该点处拟合的幂律与预期的定向渗流值相比有 10% 的误差。我们可以确定 ω_c 的一个范围，在此范围内，n 的衰减在对数尺度上呈线性，直至 $t = 100$；之后有限尺寸效应开始主导动力学。在 C$\sqrt{X}$ 模型中，短时间内我们观察到较大 Ω 下 n 的波动。C$\sqrt{X}$ 模型的另一个显著特征是，与耦合强度相近时的 CNOT 转变相比， $n(t)$ 趋于平滑，且平均值更低。此外，有限尺寸效应（表现为 n 的整体衰减）在 $t = 100$ 步之前就已出现。尽管存在明显差异，我们仍无法排除衰减指数 δ 取定向渗流值的可能性。

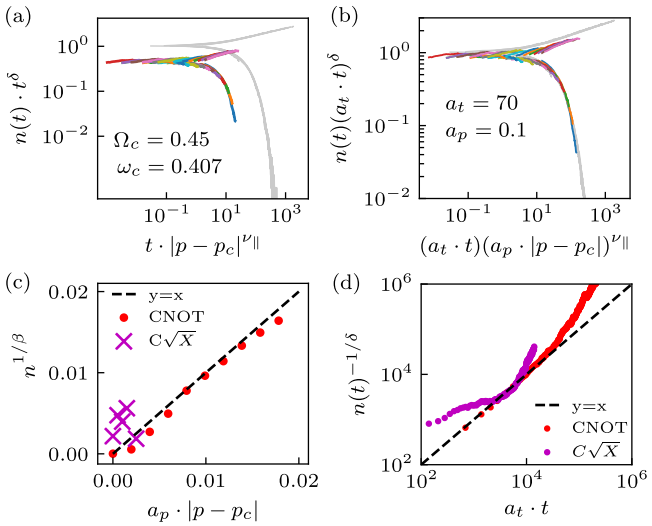


图 7. **与定向渗流相变的一致性**。(a) 在 $\Omega_c = 0.45$ 处，使用已知的定向渗流临界指数，我们在 C$\sqrt{X}$ 模型中观察到最佳数据塌缩。图中以灰色绘出普适定向渗流标度函数，作为参考。(b) 我们使用非普适因子 a_t 和 a_p 对数据进行标度，使标度函数相互重合。在 (c) 和 (d) 中，我们检验在所选临界点处，数据是否按照预期并借助估算得到的非普适因子呈现标度。作为参考，我们绘出了使用从热力学 $L = 20$ 系统推导出的非普适因子进行标度后的 CNOT 模型数据，如图 $L = 400$ 10 (附录A) 所示。对于 $L = 20$ 系统，CNOT 模型的数据在有限尺寸效应开始占主导之前、直至较大的 t 范围内都与预期吻合。然而，C$\sqrt{X}$—模型的数据并不符合预期的标度行为。

在可能包含临界值的 Ω 范围内对数据进行分析，结果如图13 （附录C）所示。与相同尺寸下使用 CNOT 模型得到的图相比，数据塌缩的质量较差。若假设指数 β 和$\nu_\parallel$ 取文献中的定向渗流值，我们发现 $\Omega_c \approx 0.45$处的数据塌缩效果最佳。图7a 展示了 C$\sqrt{X}$ 模型的数据塌缩结果，并以灰色绘出普适塌缩函数作为参照。图7b 表明，存在一组非普适因子 a_p 和 a_t ，可使数据落在普适定向渗流标度函数上。非普适因子是从临界点处的标度数据中提取的（见附录A中的图10），而对于 C$\sqrt{X}$ 模型，我们无法做到这一点。图7c 和图7d 表明，尽管较大时间下存在明显的有限尺寸效应，CNOT 模型的数据仍符合临界点处的预期标度；而 C$\sqrt{X}$ 模型的数据标度则显示出不一致性。因此，我们得出结论：C$\sqrt{X}$模型中的吸收态相变性质仍无法定论。

V. 总结与展望

我们提出了两种随机量子线路模型，它们由幺正纠缠门和投影测量组成，用于研究存在纠缠时经典接触模型的吸收态相变会如何演变。这两种模型的共同特征是：存在一个在时间演化下保持不变的吸收态，以及一种能够使激发在系统中增殖的传播机制——二者都是发生吸收态相变的必要条件。最重要的是，这两种模型都具有动态生成纠缠的机制，这使它们有别于经典接触过程。

第一个模型——*Clifford* 模型 ——只使用 Clifford 门，因此可以在稳定子形式下进行高效的数值模拟。通过大量模拟，我们发现了吸收相与活跃相之间的非平衡相变。在某些参数范围内，后者的纠缠水平虽低但有限，这使我们的模型成为经典接触过程的量子 版本。标度分析揭示了临界指数

这些临界指数与定向渗流普适类完全吻合。由于后者也描述经典 接触过程的临界行为，我们可以得出结论：这种普适类能够抵御某些类型的量子涨落。

由于 Clifford 酉变换只能探索整个多体希尔伯特空间中测度为零的子集，其动力学可能过于受限，无法改变这一普适类。我们的第二个模型——C$\sqrt{X}$模型——采用受控-$\sqrt{X}$ 门来实现传播机制并生成动力学纠缠。这种门不 属于 Clifford 群，因此我们不得不对小系统尺寸下的时间演化进行精确计算。模拟显示了吸收态相变的迹象，且活跃相中的纠缠显著更强。初步标度分析得出的临界指数与定向渗流普适类相符。然而，由于系统尺寸较小且存在显著的有限尺寸效应，我们的结果无法对这一过程的临界行为作出确切表征。

对这类非-Clifford 模型进行大规模量子模拟，或许是近程量子计算平台的一项有趣应用。研究普适特征很有前景，因为这些特征预计独立于微观细节，因此或许能够容忍 NISQ 设备的某些类型的噪声和门保真度损失。在理论方面，一个有趣的问题是：一般而言，Clifford 电路是否过于受限，无法描述非经典临界行为；以及对非平衡情境下量子临界性的数值研究是否本质上是一个困难问题。

致谢

本项目获得了德国联邦教育与研究部（BMBF）通过 QRydDemo 和 MUNIQC-Atoms 项目提供的资助，并获得了欧盟“地平线欧洲”计划 HORIZON-CL4-2021-DIGITAL-EMERGING-01-30 通过项目 101070144（EuRyQa）提供的资助。

[1]L. M. Sieberer、M. Buchhold 和 S. Diehl, *Keldysh field theory for driven open quantum systems*, 《物理学进展报告》79(9), 096001（2016）, doi:10.1088/0034-4885/79/9/096001。[2] L. M. Sieberer、S. D. Huber、E. Altman 和 S. Diehl, *Dynamical critical phenomena in driven-dissipative systems* **110**, 195301 2013 , 《物理评论快报》（）, doi:10.1103/PhysRevLett.110.195301。[3] M. Marcuzzi、M. Buchhold、S. Diehl 和 I. Lesanovsky, *Absorbing state phase transition with competing quantum and classical fluctuations*, 《物理评论快报》116(24), 245701（2016）, doi:10.1103/PhysRevLett.116.245701。[4] D. Mollison, *Spatial contact models for ecological andepidemic spread*, 《英国皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》39(3), 283（1977）, doi:10.1111/j.2517-6161.1977.tb01627.x。[5] P. Grassberger, *On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation*, 《数学生物科学》63(2), 157（1983）, doi:10.1016/0025-5564(82)90036-0。[6] O. Diek mann 和 J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building analysis and interpretation* 5, 2000 , 约翰·威立父子出版公司, 第{v}卷（）。[7] A. L. Sullivan, *Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: Simulation and mathematical analogue models*, 《国际野外火灾杂志》18(4), 387（2009）, doi:10.1071/WF06144。[8] J. A. Bonachela、C. D. Nadell、J. B. Xavier 和 S. A. Levin, *Universality in bacterial colonies*, 《统计物理学杂志》144, 303（2011）, doi:/10.1007/s10955-011-0179-x。[9]H. Hinrichsen, *Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states*, 《物理学进展》49(7), 815 (2000), doi:10.1080/00018730050198152。[10] M. Buchhold、B. Everest、M. Marcuzzi、I. Lesanovsky 和 S. Diehl, *Nonequilibrium effective field theory for absorbing state phase transitions in driven open quantum spin systems* **95**, 014308 2017 , 《物理评论B》（）, doi:10.1103/PhysRevB.95.014308。[11] H. Weimer、M. M¨uller、I. Lesanovsky、P. Zoller 和 H. P. B¨uchler, *A rydberg quantum simulator*, 《自然·物理》6(5), 382 (2010), doi:10.1038/nphys1614。[12] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer, *Quantum information with rydberg atoms* , 《现代物理评论》82, 2313 2010 10 1103 82 2313 ( ), doi: . / RevModPhys. . .[13] J. Zeiher、R. Van Bijnen、P. Schauß、S. Hild、J.-y. Choi、T. Pohl、I. Bloch 和 C. Gross, *Many-body interferometry of a rydberg-dressed spin lattice*, 《自然·物理》12(12), 1095 (2016), doi:10.1038/nphys3835。[14] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Om- ran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner *et al.*, *Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator*, 《自然》551(7682), 579 (2017), doi:10.1038/nature24622。[15] N. ˇSibali´c 和 C. S. Adams, *Rydberg physics*, IOP 出版社, doi:10.1088/978-0-7503-1635-4 (2018). [16] H. Kim、Y. Park、K. Kim、H.-S. Sim 和 J. Ahn, *Detailed balance of thermalization dynamics in rydberg-atom quantum simulators* **120**, 180502 2018 , 《物理评论快报》（）, doi:10.1103/PhysRevLett.120.180502。[17] S. De L´es´eleuc、V. Lienhard、P. Scholl、D. Barredo、S. We- ber、N. Lang、H. P. B¨uchler、T. Lahaye 和 A. Browaeys, *Observation of a symmetry-protected topological phase of interacting bosons with rydberg atoms*, 《科学》365(6455), 775 (2019), doi:10.1126/science.aav9105。

[18]A. Browaeys 和 T. Lahaye, *Many-body physics with individually controlled rydberg atoms*, 《自然·物理》16(2), 132 (2020), doi:10.1038/s41567-019-0733-z。[19] R. Verresen、M. D. Lukin 和 A. Vishwanath, *Prediction of toric code topological order from rydberg blockade* **11**, 031005 2021 , 物理评论 X （）, doi:10.1103/PhysRevX.11.031005。[20] G. Semeghini、H. Levine、A. Keesling、S. Ebadi、T. T. Wang、D. Bluvstein、R. Verresen、H. Pichler、M. Kali- nowski、R. Samajdar *et al.*, *Probing topological spin liquids on a programmable quantum simulator*, 《科学》374(6572), 1242 (2021), doi:10.1126/science.abi8794。[21] T. Wintermantel、M. Buchhold、S. Shevate、M. Morgado、Y. Wang、G. Lochead、S. Diehl 和 S. Whitlock, *Epidemic growth and griffiths effects on an emergent network of excited atoms*, 《自然·通讯》12(1), 1 (2021), doi:10.1038/s41467-020-20333-7。[22] S. Helmrich、A. Arias 和 S. Whitlock, *Uncovering the nonequilibrium phase structure of an open quantum spin system*, 《物理评论A》98(2), 022109 (2018), doi:10.1103/PhysRevA.98.022109。[23] D. Roscher、S. Diehl 和 M. Buchhold, *Phenomenology of first-order dark-state phase transitions*, 《物理评论A》98(6), 062117 (2018), doi:10.1103/PhysRevA.98.062117。[24] E. Gillman、F. Carollo 和 I. Lesanovsky, *Numerical simulation of critical dissipative non-equilibrium quantum systems with an absorbing state*, 《新物理学杂志》21(9), 093064 (2019), doi:10.1088/1367-2630/ab43b0。[25] F. Carollo、E. Gillman、H. Weimer 和 I. Lesanovsky, *Critical behavior of the quantum contact process in one dimension*, 《物理评论快报》123(10), 100604 (2019), doi:10.1103/PhysRevLett.123.100604。[26] F. Carollo 和 I. Lesanovsky, *Nonequilibrium dark spacephase transition*, 《物理评论快报》128(4), 040603 (2022), doi:10.1103/PhysRevLett.128.040603。[27] M. Jo、J. Lee、K. Choi 和 B. Kahng, *Absorbing phase transition with a continuously varying exponent in a quantum contact process: A neutral network approach* **3**, 013238 2021 , 《物理评论研究》（）, doi:10.1103/PhysRevResearch.3.013238。[28]H. Weimer、A. Kshetrimayum 和 R. Or´us, *Simulation methods for open quantum many-body systems* **93**, 015008 2021 , 《现代物理评论》（）, doi:10.1103/RevModPhys.93.015008。[29] S. Aaronson 和 D. Gottesman, *Improved simulation of stabilizer circuits* **70**, 052328 2004 , 《物理评论A》（）, doi:10.1103/PhysRevA.70.052328。[30] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher, *Quantum zeno effect and the many-body entanglement transition* , 《物理评论B》98, 205136 (2018), doi:10.1103/PhysRevB.98.205136。[31] B. Skinner、J. Ruhman 和 A. Nahum, *Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement* **9**, 031009 2019 , 物理评论 X （）, doi:10.1103/PhysRevX.9.031009。[32] A. Chan、R. M. Nandkishore、M. Pretko 和 G. Smith, *Unitary-projective entanglement dynamics*, 《物理评论B》99, 224307 (2019), doi:10.1103/PhysRevB.99.224307。[33] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher, *Measurement-driven entanglement transition in hybrid quantum circuits* **100**, 134306 2019 , 《物理评论B》（）, doi:10.1103/PhysRevB.100.134306。[34]P. Sierant 和 X. Turkeshi, *Controlling entanglement at absorbing state phase transitions in random circuits*, 《物理评论快报》130, 120402（2023）, doi:10.1103/PhysRevLett.130.120402。[35]L. Piroli、Y. Li、R. Vasseur 和 A. Nahum, *Trivial dynamics of quantum trajectories close to a directed percolation transition* **107**, 224303 2023 , 《物理评论B》（）, doi:10.1103/PhysRevB.107.224303。[36] S. Redner 和 H. E. Stanley, *Anisotropic bond percolation*, 《物理学杂志 A：数学与通论》12(8), 1267（1979）, doi:10.1088/0305-4470/12/8/021。[37] J.-P. Bouchaud 和 A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications*, 《物理学报告》195(4-5), 127（1990）, doi:10.1016/0370-1573(90)90099-N。[38]L. M. Sieberer、M. Buchhold 和 S. Diehl, *Keldyshfield theory for driven open quantum systems*, 《物理学进展报告》79(9), 096001（2016）, doi:10.1088/0034-4885/79/9/096001。[39] L. M. Sieberer、S. D. Huber、E. Altman 和 S. Diehl, *Dynamical critical phenomena in driven-dissipative systems* **110**, 195301 2013 , 《物理评论快报》（）, doi:10.1103/PhysRevLett.110.195301。[40] M. Marcuzzi、M. Buchhold、S. Diehl 和 I. Lesanovsky, *Absorbing state phase transition with competing quantum and classical fluctuations*, 《物理评论快报》116(24), 245701（2016）, doi:10.1103/PhysRevLett.116.245701。[41] D. Mollison, *Spatial contact models for ecological andepidemic spread*, 《英国皇家统计学会杂志：B辑（方法论）》39(3), 283（1977）, doi:10.1111/j.2517-6161.1977.tb01627.x。[42] P. Grassberger, *On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation*, 《数学生物科学》63(2), 157（1983）, doi:10.1016/0025-5564(82)90036-0。[43] O. Diekmann 和 J. A. P. Heesterbeek, *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building analysis and interpretation* 5, 2000 , , 第, 约翰·威立父子出版公司（）。[44] A. L. Sullivan, *Wildland surface fire spread modelling, 1990–2007. 3: Simulation and mathematical analogue models*, 《国际野外火灾杂志》18(4), 387（2009）, doi:10.1071/WF06144。[45] J. A. Bonachela、C. D. Nadell、J. B. Xavier 和 S. A. Levin, *Universality in bacterial colonies*, 《统计物理学杂志》144, 303（2011）, doi:/10.1007/s10955-011-0179-x。[46]H. Hinrichsen, *Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states*, 《物理学进展》49(7), 815（2000）, doi:10.1080/00018730050198152。[47] M. Buchhold、B. Everest、M. Marcuzzi、I. Lesanovsky 和 S. Diehl, *Nonequilibrium effective field theory for absorbing state phase transitions in driven open quantum spin systems* **95**, 014308 2017 , 《物理评论B》（）, doi:10.1103/PhysRevB.95.014308。[48] H. Weimer、M. M¨uller、I. Lesanovsky、P. Zoller 和 H. P. B¨uchler, *A rydberg quantum simulator*, 《自然·物理》6(5), 382（2010）, doi:10.1038/nphys1614。[49] M. Saffman、T. G. Walker 和 K. Mølmer, *Quantum information with rydberg atoms* , 《现代物理评论》82, 2313 2010 10 1103 82 2313（）, doi: . / RevModPhys. . .[50] J. Zeiher、R. Van Bijnen、P. Schauß、S. Hild、J.-y. Choi、T. Pohl、I. Bloch 和 C. Gross, *Many-body interferometry of a rydberg-dressed spin lattice*, 《自然·物理》12(12), 1095（2016）, doi:10.1038/nphys3835。

[51] H. Bernien、S. Schwartz、A. Keesling、H. Levine、A. Om- ran、H. Pichler、S. Choi、A. S. Zibrov、M. Endres、M. Greiner *et al.*, *Probing many-body dynamics on a 51-atom quantum simulator*, 《自然》551(7682), 579（2017）, doi:10.1038/nature24622。[52] N. ˇSibali´c 和 C. S. Adams, *Rydberg physics*, IOP 出版社, doi:10.1088/978-0-7503-1635-4（2018）。[53] H. Kim、Y. Park、K. Kim、H.-S. Sim 和 J. Ahn, *Detailed balance of thermalization dynamics in rydberg-atom quantum simulators* **120**, 180502 2018 , 《物理评论快报》（）, doi:10.1103/PhysRevLett.120.180502。[54] S. De L´es´ eleuc、V. Lienhard、P. Scholl、D. Barredo、S. We- ber、N. Lang、H. P. B¨uchler、T. Lahaye 和 A. Browaeys, *Observation of a symmetry-protected topological phase of interacting bosons with rydberg atoms*, 《科学》365(6455), 775（2019）, doi:10.1126/science.aav9105。[55] A. Browaeys 和 T. Lahaye, *Many-body physics withindividually controlled rydberg atoms*, 《自然·物理》16(2), 132（2020）, doi:10.1038/s41567-019-0733-z。[56] R. Verresen、M. D. Lukin 和 A. Vishwanath, *Prediction of toric code topological order from rydberg blockade* **11**, 031005 2021 , 物理评论 X（）, doi:10.1103/PhysRevX.11.031005。[57] G. Semeghini、H. Levine、A. Keesling、S. Ebadi、T. T. Wang、D. Bluvstein、R. Verresen、H. Pichler、M. Kali- nowski、R. Samajdar *et al.*, *Probing topological spin liquids on a programmable quantum simulator*, 《科学》374(6572), 1242（2021）, doi:10.1126/science.abi8794。[58] T. Wintermantel、M. Buchhold、S. Shevate、M. Morgado、Y. Wang、G. Lochead、S. Diehl 和 S. Whitlock, *Epidemic growth and griffiths effects on an emergent network of excited atoms*, 《自然·通讯》12(1), 1（2021）, doi:10.1038/s41467-020-20333-7。[59] S. Helmrich、A. Arias 和 S. Whitlock, *Uncovering the nonequilibrium phase structure of an open quantum spin system*, 《物理评论A》98(2), 022109（2018）, doi:10.1103/PhysRevA.98.022109。[60] D. Roscher、S. Diehl 和 M. Buchhold, *Phenomenology of first-order dark-state phase transitions*, 《物理评论A》98(6), 062117（2018）, doi:10.1103/PhysRevA.98.062117。[61] E. Gillman、F. Carollo 和 I. Lesanovsky, *Numerical simulation of critical dissipative non-equilibrium quantum systems with an absorbing state*, 《新物理学杂志》21(9), 093064（2019）, doi:10.1088/1367-2630/ab43b0。[62] F. Carollo、E. Gillman、H. Weimer 和 I. Lesanovsky, *Critical behavior of the quantum contact process in one dimension*, 《物理评论快报》123(10), 100604（2019）, doi:10.1103/PhysRevLett.123.100604。[63] F. Carollo 和 I. Lesanovsky, *Nonequilibrium dark spacephase transition*, 《物理评论快报》128(4), 040603（2022）, doi:10.1103/PhysRevLett.128.040603。[64] M. Jo、J. Lee、K. Choi 和 B. Kahng, *Absorbing phase transition with a continuously varying exponent in a quantum contact process: A neural network approach* **3**, 013238 2021 , 《物理评论研究》（）, doi:10.1103/PhysRevResearch.3.013238。[65] H. Weimer、A. Kshetrimayum 和 R. Or´us, *Simulation methods for open quantum many-body systems* **93**, 015008 2021 , 《现代物理评论》（）, doi:10.1103/RevModPhys.93.015008。[66] S. Aaronson 和 D. Gottesman, *Improved simulation of stabilizer circuits* **70**, 052328 2004 , 《物理评论A》（）, doi:10.1103/PhysRevA.70.052328。[67] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher, *Quantum zeno effect and the many-body entanglement transition* , 《物理评论B》98, 205136（2018）, doi:10.1103/PhysRevB.98.205136。[68] B. Skinner、J. Ruhman 和 A. Nahum, *Measurement-induced phase transitions in the dynamics of entanglement* **9**, 031009 2019 , 物理评论 X（）, doi:10.1103/PhysRevX.9.031009。[69] A. Chan、R. M. Nandkishore、M. Pretko 和 G. Smith, *Unitary-projective entanglement dynamics*, 《物理评论B》99, 224307（2019）, doi:10.1103/PhysRevB.99.224307。[70] Y. Li、X. Chen 和 M. P. A. Fisher, *Measurement-driven entanglement transition in hybrid quantum circuits* **100**, 134306 2019 , 《物理评论B》（）, doi:10.1103/PhysRevB.100.134306。[71] P. Sierant 和 X. Turkeshi, *Controlling entanglement at absorbing state phase transitions in random circuits* **130**, 120402 2023 , 《物理评论快报》（）, doi:10.1103/PhysRevLett.130.120402。[72] L. Piroli、Y. Li、R. Vasseur 和 A. Nahum, *Triviality of quantum trajectories close to a directed percolation transition* **107**, 224303 2023 , 《物理评论B》（）, doi:10.1103/PhysRevB.107.224303。[73] S. Redner 和 H. E. Stanley, *Anisotropic bond percolation*, 《物理学杂志 A：数学与通论》12(8), 1267（1979）, doi:10.1088/0305-4470/12/8/021。[74] J.-P. Bouchaud 和 A. Georges, *Anomalous diffusion in disordered media: statistical mechanisms, models and physical applications*, 《物理学报告》195(4-5), 127（1990）, doi:10.1016/0370-1573(90)90099-N。

附录 A：标度理论

这里我们讨论基于参考文献 [46],的标度分析，该文献介绍了我们如何估算临界指数。本文研究的吸收态相变均为连续的二阶相变，通常以普适标度律为特征。具有相同临界指数集合且标度函数一致的不同物理系统属于同一个普适类。普适类不受其系统微观细节的影响，通常只取决于维数、相互作用范围和对称性等性质。非平衡过程中也存在同样的图景。最值得注意的是，定向渗流（DP）普适类由临界指数三元组（β，$\nu_\parallel$，$\nu_\perp$）标记；所有其他指数均可利用标度关系从这组指数推导得出。值得注意的是，与平衡临界现象不同，“时间”的维数具有不同于“空间”维数的性质，因此我们用指标 $\parallel$ 表示时间，用 $\perp$表示空间。接触过程会产生属于定向渗流普适类的吸收态相变。序参量 $n(t_s)$是活跃位点稳态密度的归一化值

$$n(t_s) = \left\langle \frac{1}{L} \sum_i n_i(t_s) \right\rangle ,$$

其中，$\langle ... \rangle$ 是对许多次实现取系综平均，L 是系统中的格点总数，而 $n_i(t)$是时间 t时格点 i 处的局域占据。在热力学极限下且接近相变时，稳态密度遵循如下标度关系

$$n(t_s) \sim |p - p_c|^\beta ,$$

其中，p 是相变的驱动参数，p_c 是其临界值。指数 β 通常与序参量的标度相关联；在接触过程相变中，序参量即为活性位点密度。空间关联长度 $\xi_\perp$ 和时间关联长度 $\xi_\parallel$ 也会在临界性附近发散，并遵循以下标度律

$$\xi_\perp \sim |p - p_c|^{-\nu_\perp} \quad \text{and} \quad \xi_\parallel \sim |p - p_c|^{-\nu_\parallel},$$

其中，长度尺度之间通过动力学临界指数 $z = \nu_\parallel/\nu_\perp$ 联系起来，其定义为 $\xi_\parallel \sim \xi_\perp^z$。这些长度尺度可以根据其直观的物理解释来确定。例如，$\xi_\parallel$ 表示吸收相中由初始种子扩散形成的簇的平均衰减时间，而 $\xi_\perp$ 表示此类簇的平均空间宽度。尽管可以通过上述关系，绘制相关量（$n(t_s)$,$\xi_\perp$, $\xi_\parallel$）随 $\Delta = |p - p_c|$ 变化的双对数图，并提取所得直线的斜率，从而估算出（β, $\nu_\parallel$,$\nu_\perp$），但这种估算已知相当不准确，因为达到稳态所需的平衡时间会迅速增长

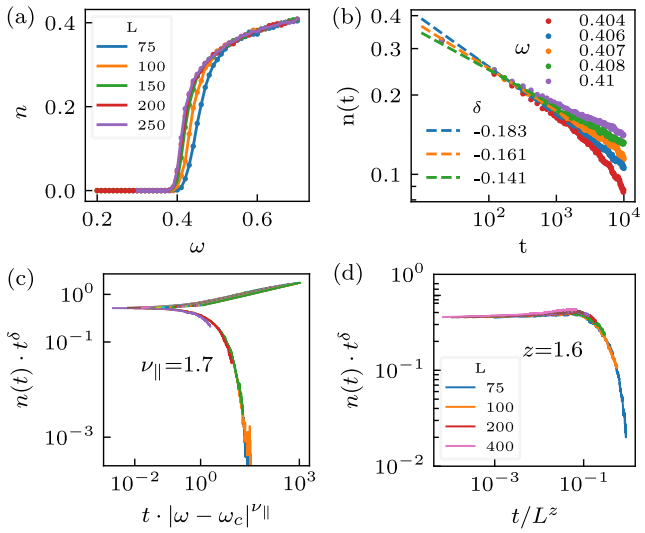


图 8。 CNOT**模型**。 (a) 不同系统尺寸下，稳态密度 n 随 ω 连续变化，衰减率$\gamma = 0.1$ 固定。(b) 序参量 n 随模拟时间变化呈幂律衰减。估计临界点为 $\omega_c = 0.4070(5)$，拟合直线的斜率为 0.16087，由此得到临界指数 $\delta = 0.161(6)$的估计值（与目前已知的最佳估计值 $\delta_{\rm DP} = 0.159$ [46]一致）。其他临界指数由塌缩图 (c) 和 (d) 推得。所有数值均与 DP 相变的文献值相符。

随着系统接近临界点，这种现象称为临界减速。提取临界指数的一种更准确方法是绘制普适标度函数。

考虑一个具有 $N = L^d$ 个格点、其中 d 为空间维数的有限尺寸系统的密度标度关系：

$$n(t) \sim t^{-\delta} f(\Delta \cdot t^{1/\nu_\parallel}, t^{d/z}/N) .$$

f 对于定向渗流普适类中的所有相变都具有相同的函数形式，且只依赖于尺度不变比。注意，长度 x 经历标度变换 $x \to \Lambda x$ 时，$t \to \Lambda^z t$、 $\Delta \to \Lambda^{-1/\nu_\perp}\Delta$ 和 $n \to \Lambda^{-\beta/\nu_\perp} n$ 也会随之重新标度。在热力学极限 $N \to \infty$ 下，普适函数 f 趋于常数。因此，指数 δ 描述了临界性 $\Delta \to 0$ 附近序参量的幂律衰减。当自变量较大时 ζ， f（ζ） $\to \zeta^{\delta\cdot\nu_\parallel}$。因此，在稳态下，当 $t \to \infty$ 时，我们得到标度关系

$$\beta = \delta \cdot \nu_\parallel .$$

现在，我们将这一分析应用于从 CNOT 模型模拟中获得的数据。首先，我们绘制序参量 $n(t_s)$ 随速率 ω 的变化曲线，并逐步增大系统尺寸，以展示图8a 中相变的连续性。然后，我们利用序参量 $n(t) \sim t^{-\delta}$ 在足够大的

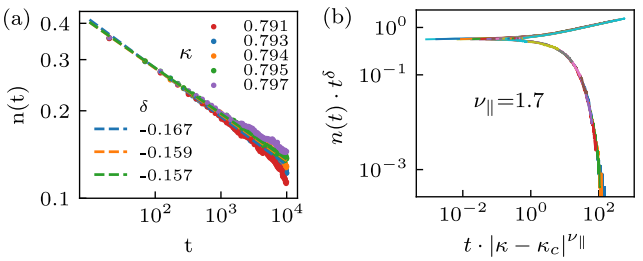


图 9. Cond$\sqrt{X}$ **模型**。我们观察到，标度行为与预期的经典定向渗流普适类一致。所示数据对应的系统尺寸为 $L = 400$，$\kappa_c = 0.7940$ (5) 是估计得到的临界点。因此，临界指数为 $\delta = 0.159$ (3)、$\nu_\parallel = 1.70$ (3) 和 $\beta = 0.27$ (1)（参见表 I）。

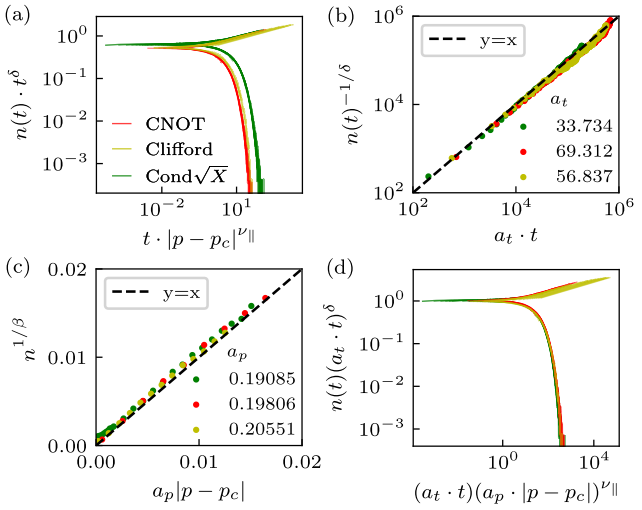


图 10。**非普适标度因子**。(a) 采用不同扩散门的模型的数据塌缩图，其中 $p \in \{\omega, \kappa\}$ 是相变的驱动参数。(b、c) 不同模型的模拟数据的标度，使用适当的因子 a_p 和 a_t，它们编码了各模型特有的非普适微观差异。(d) 经过标度的数据塌缩图，此时所有数据都落在定向渗流类的普适标度函数上。

格点系统和较长模拟时间下 $L = 400$ 进行分析$t_s = 10^4$。如图8b 所示，在双对数尺度上绘制数据后，对于耦合 ω，大 t 处会呈现正（负）曲率，分别对应活跃相（吸收相）。临界指数 δ 即为对数据进行最佳直线拟合所得的斜率。我们估计临界点为 $\omega = 0.407$，此时拟合数据所得直线最直，斜率为 0。161。取区间 $\omega \in [0.4065, 0.4075]$，数据拟合所得斜率分别为 0。1724 和 0。1601，由此得到的误差估计为 $\delta = 0.161(6)$。对于 ω_c，若取范围 $\pm 10^{-3}$，则对指数误差的估计偏高，得到 $\omega \in [0.406, 0.4078]$，结果为 $\delta = 0.161 \pm 0.01$。以下所有临界指数估计中，我们均报告驱动参数范围 $\pm 10^{-3}$ 内数据所给出的偏高误差估计。

接下来，我们绘制不同 ω 值下的 $n(t) \cdot t^\delta$，并将其表示为 $t\Delta^{\nu_\parallel}$ 的函数，同时改变 $\nu_\parallel$，以获得数据塌缩到同一普适标度函数时的最佳效果。$\nu_\parallel = 1.7$ 是使图 8c 所示数据塌缩图效果最佳的取值；而将 $\nu_\parallel$ 增减 0.05 会得到明显更差的塌缩图，因此估计 ν 和 z 的误差为 0.03。利用 $\nu_\parallel = 1.70(3)$ 和 $\delta = 0.161(6)$，我们估计临界指数 $\beta = \delta \cdot \nu_\parallel = 0.27(2)$。最后，我们绘制不同系统尺寸 L 和 $\omega = \omega_c$ 下的 $n(t) \cdot t^\delta$，并将其表示为 t/L^z 的函数（此处 $d = 1$ 和 $N = L$）。通过改变指数 z 来优化数据塌缩。我们得到 $z = 1.6(3)$，并由此推得三元组中的最后一个指数 $\nu_\perp = \nu_\parallel/z = 1.06(4)$。所有临界指数均与已知的定向渗流 DP 值一致，见表 I。

图 9 展示了对非相干 Cond$\sqrt{X}$ 模型的类似分析。该模型同样属于 DP 普适类；正文中讨论的 Clifford 模型（图 3）也在其中。我们得出结论：尽管这些接触模型所定义的激活扩散过程各不相同（其动力学规则如图 1所示），但它们具有相同的临界指数。为了证明它们确实属于同一普适类，我们还应证明这些标度函数 f 彼此重合。将 $n(t)t^\delta$ 作为 $t\Delta^{\nu_\parallel}$ 的函数绘制出来，对比三个模型在相同衰减率 γ 和系统尺寸 L 下的结果，并不能展示这一结果（图10a）。然而，使用适当的非普适因子对模拟数据进行标度处理后，这些因子编码了各模型特有的微观性质，不同模型的标度函数确实塌缩为同一个普适函数，如图 10d 所示。图 10b 和图10c 分别给出了非普适因子 a_p 和 a_t 的结果。我们可以通过在双对数尺度上绘制标度关系$n(t_s) = |a_p(p - p_c)|^\beta$ 和 $n(t) = a_t\, t^{-\delta}$（这些关系在临界点附近成立），并提取不同模型数据对应的不同斜率，来估算这些因子。

附录 B：更长的相互作用范围

在这里，我们讨论将 Clifford 模型中的双量子比特 Cond$\sqrt{X}$ 操作替换为三量子比特 Cond$\sqrt{XX}$ 操作或四量子比特 Cond$\sqrt{XXX}$操作后，对所观察到的吸收态相变性质的影响。普适类可能取决于相互作用范围。人们已经研究了激活在更长距离上传播的模型，例如具有 L´évy 飞行分布的模型 [74]。已知此类过程的普适性质会随着控制参数 σ（该参数决定概率分布的形状）$P(r) \sim 1/r^{d+\sigma}$ 连续偏离定向渗流 r，其中 $\sigma = \infty$ 表示随机相互作用可能发生的距离；当 $\sigma = \infty$ 时，则恢复定向渗流情形。具有短程相互作用的接触过程属于定向渗流普适类。在 Clifford 模型中

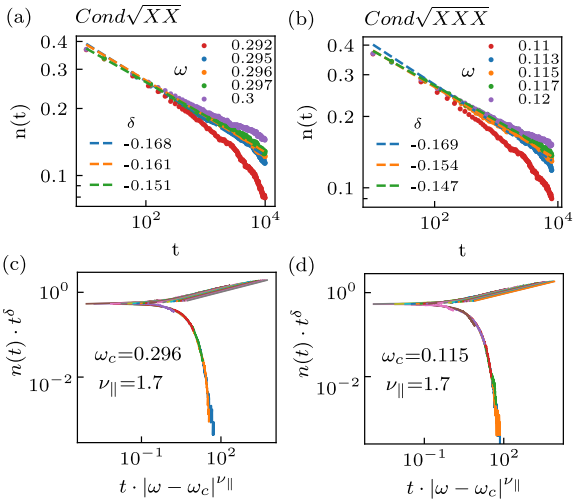


图11。**Cond和 Cond模型的临界指数**。(a) 对于 $\overline{\text{Cond}}\sqrt{XX}$ 模型，我们在临界点 $\omega_c = 0.2960$ 处得到指数 $\delta = 0.161(4)$。(c) 根据数据塌缩，我们估计出 $\beta = 0.27(1)$。(b,d) 对 Cond $\sqrt{XXX}$ 模型进行类似分析后，在 $\omega_c = 0.1150(5)$ 处得到临界指数 $\delta = 0.154(6)$，并得到 $\beta = 0.26(2)$。在这两个模型中，相变显然仍属于定向渗流普适类，只是相变点向较低的扩散率移动；这是预期之中的，因为这些三量子比特和四量子比特操作能够激活更多格点。

我们定义的相互作用范围相对于系统尺寸仍然较短，尤其是有界的。因此，相变的性质保持不变。这一点在图 11 中有所讨论，其中得到的临界指数仍与定向渗流足够接近。

附录 C：小系统尺寸

在本节中，我们考察小系统尺寸下，数据塌缩对临界指数变化的敏感程度。我们先从 CNOT 模型的结果入手；通过较大系统模拟，已知该模型的临界行为。对于较小的系统尺寸，转变点很难确定（图 6）。有限尺寸效应主导长时间区间，使得我们最终得到一系列扩散率，以及对数尺度上相应的斜率；在该尺度下，衰减看起来呈线性。在 $L = 20$ CNOT 模型中，如图 6所示，这一范围大致为$0.4 < \omega_c < 0.5$ 和 $0.08 < \delta < 0.17$。图 12a 展示了采用该范围内参数进行数据塌缩的结果。误差与指数同量级；对于如此小的系统尺寸，这是意料之中的，因为不可能从数据中提取指数。然而，我们注意到，当指数接近预期的 DP 值时，$L = 20$数据能够很好地塌缩到 $L = 300$ 数据（以灰色绘出）之上。因此我们得出结论：对于 CNOT 模型，可以利用已知的文献中的 DP 指数值。通过改变扩散耦合 ω，我们发现一个 $\omega_c = 0.42$，其中数据呈现出良好的塌缩，如图 12b 所示。值得注意的是，一系列数值 $\omega \in [0.39, 0.45]$ 都能得到相对良好的塌缩图；预期的 $\omega_c = 0.407$位于该区间内。

对 C模型也进行了类似分析。对于该模型，临界行为尚不明确。图13展示了塌缩图，其效果明显不如 CNOT 模型的结果。不过，考虑到尺寸限制，我们无法排除在 $0.4 < \Omega_c < 0.45$ 范围内存在定向渗流相变的可能性，因为左上方最靠边的图和中下方的图具有相对不错的数据塌缩效果。

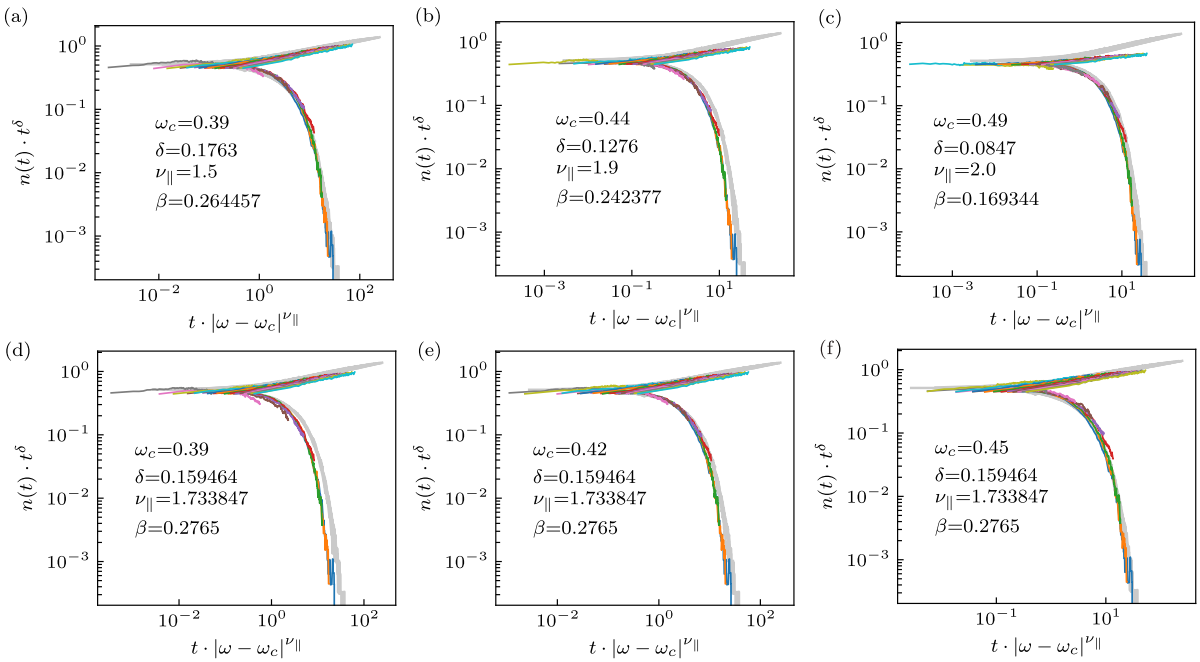


图12。 CNOT **模型在** $L=20$。 大系统数据以灰色绘出，作为背景参考。**(a-c)** 在上方的图中， ω_c 在图中所示的范围内变化。图 6 中展示了该范围， δ 是拟合得到的指数。我们观察到，L=20 模拟的数据与热力学结果一致，但其临界值较低， $\omega_c\approx 0.39$ 小于$\omega_c=0.407$ 在 $L=400$下得到的值。**(d-f)** 对于下方的塌缩图，我们固定 DP 指数的文献值， $\delta=0.159$ 和 $\nu_\parallel=1.73$，并改变临界点 ω_c。 我们观察到，在参数范围 $0.39<\omega_c<0.45$内，数据塌缩效果良好。最佳拟合出现在 $\omega_c=0.42$ 附近，略高于热力学值 $\omega_c=0.407$。

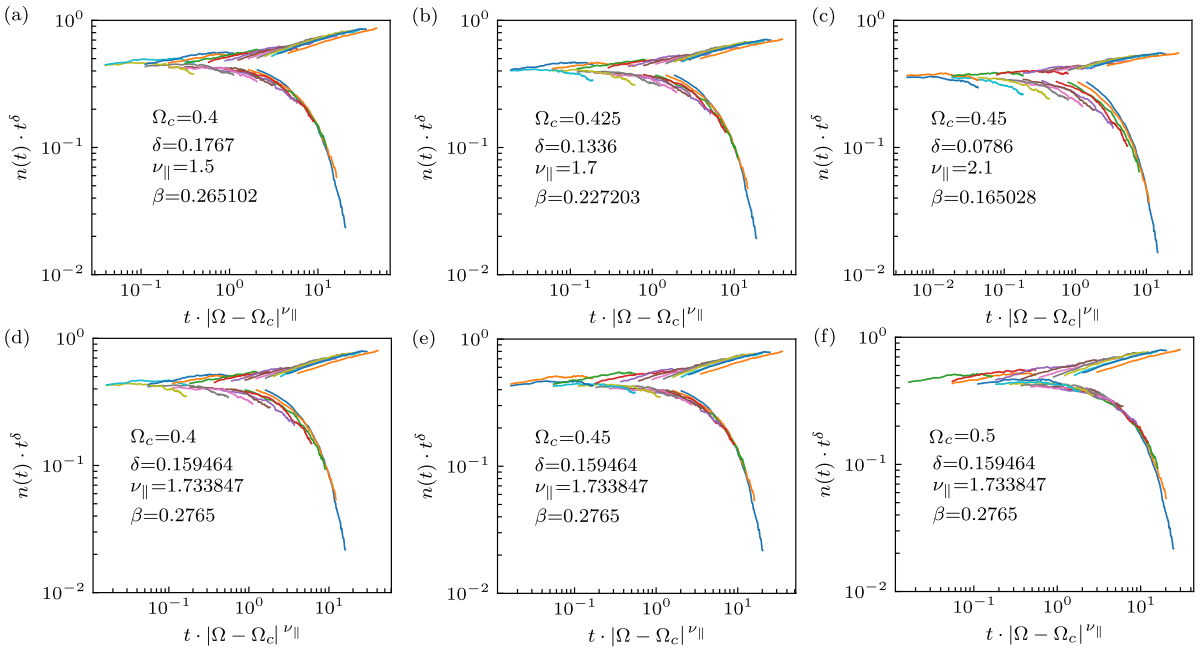


图13。**C 模型在 L=20 下的**塌缩图。我们使用 $10<t<100$ 个时间步之间的数据。**(a-c)** 中的图使用拟合得到的 δ 指数，而 **(d-f)** 中的塌缩图使用 DP 指数。根据这些数据，我们无法排除 C$\sqrt{X}$ 模型中存在属于定向渗流普适类的接触过程相变，其临界点对应的耦合为 $0.4<\Omega_c<0.45$。