arXiv:2303.05335v1 [math.FA] 9 Mar 2023

关于 S-谱与右谱之间的关系

LUÍS CARVALHO、CRISTINA DIOGO、SÉRGIO MENDES 和 HELENA SOARES

摘要。我们利用 $\mathbb{R}$-线性定义 $\sigma(T)$，即右四元数希尔伯特空间中右 $\mathbb{H}$-线性算子 T 的右谱。我们证明，$\sigma(T)$ 与 S-谱 $\sigma_S(T)$一致。

1. 引言

在复希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 中，有界算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$的谱是众所周知的集合

$$\sigma_{\mathbb{C}}(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : I\lambda - T \text{ is non invertible in } \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})\big\}.$$

当 $\mathcal{H}$ 是一个（右）四元数希尔伯特空间时，由于标量乘法不满足交换律，谱的定义较为棘手。尽管如此，四元数希尔伯特空间中仍使用点谱的概念，即特征值。然而，显然当 $\mathcal{H}$ 是无限维时，这一概念并不妥当，因此需要进行一些谨慎的调整。

众所周知，如果复希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 是有限维的，那么谱的概念就是特征值的集合。但当 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 是无限维时，算子 T 的谱就不只是特征值。更准确地说，根据算子 $T_\lambda := I\lambda - T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ 可逆性失效的性质，谱是三个互不相交集合的并：点谱 $\sigma_{\mathbb{C},\ p}(T)$，即算子 T_λ 不单射的复数 λ 的集合；剩余谱 $\sigma_{\mathbb{C},\ r}(T)$，即 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathbb{C},\ p}(T)$ 中 T_λ 的值域在 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 中不稠密的元素，其中 $\mathrm{Ran}(T_\lambda) \neq \mathcal{H}$；以及

日期：2023年3月10日。2010 数学学科分类号。47A10，47S05。第一和第二作者的部分研究经费由 FCT 通过 CAMGSD 项目 UID/MAT/04459/2019 提供。第三作者的部分研究经费由 FCT 通过 CMA-UBI 项目 UIDB/00212/2020 提供。第四作者的部分研究经费由 FCT 通过 CIMA 项目 UIDB/04674/2020 提供。

连续谱 $\sigma_{\mathbb{C},\ c}(T)$，即 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\mathbb{C},\ p}(T) \cup \sigma_{\mathbb{C},\ r}(T))$ 中 T_λ 没有下界的元素。

要定义四元数右线性算子 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$的谱，我们不能简单地仿照复数情形中的做法。事实上，由四元数 $I\lambda$ 右乘的算子 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ，定义为 $I\lambda(x) := x\lambda$，并非右 $\mathbb{H}$-线性。因此， T_λ 也并非右 $\mathbb{H}$-线性，即 T_λ 不属于 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$；相反，四元数的右乘法显然是 $\mathbb{R}$-线性的，因而 T_λ也是如此。因此，自然的做法是基于 T_λ这一 $\mathbb{R}$-线性算子的可逆性来定义谱的概念。换言之，我们考虑 $\mathcal{H}$上有界 $\mathbb{R}$-线性算子所构成的更大空间，记作 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$。据此，我们将修正右谱定义为 $\mathbb{H}$的子集

$$\sigma(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{H} : I\lambda - T \text{ is non invertible in } \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\big\}, \tag{1}$$

这与复数域情形中的通常谱概念相似。如此定义的谱可以分解为通常的一族互不相交的集合，

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T) \cup \sigma_c(T),$$

其中， $\sigma_p(T)$、 $\sigma_r(T)$ 和 $\sigma_c(T)$ 分别是点谱、剩余谱和连续谱，其定义如下：

$$\begin{aligned}
\sigma_p(T) =& \{\lambda \in \mathbb{H} : T_\lambda(x) = 0, \text{ for some } x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}\},\\
\sigma_r(T) =& \{\lambda \in \mathbb{H} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Ran}(T_\lambda)} \neq \mathcal{H}\},\\
\sigma_c(T) =& \{\lambda \in \mathbb{H} \setminus \big(\sigma_c(T) \cup \sigma_p(T)\big) : T_\lambda \text{ is not bounded below}\}.
\end{aligned}$$

另一方面，四元数函数演算近年来取得了重大突破，而这一飞跃的关键基石，是引入算子 $\Delta_\lambda(T) = T^2 - 2Re(\lambda)T + |\lambda|^2 I$ in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$，其中 $\lambda \in \mathbb{H}$ 为任意值。对于给定的 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$， $\Delta_\lambda(T)$ 的不可逆性定义了一种新的谱概念，即 S-谱，

$$\sigma_S(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{H} : \Delta_\lambda(T) \text{ is non invertible in } \mathcal{B}(\mathcal{H})\big\}.$$

S谱还可以分为三个互不相交的集合：点 S谱$\sigma_{S,\ p}(T)$、剩余 S谱 $\sigma_{S,\ r}(T)$，以及连续 S谱 $\sigma_{S,\ c}(T)$（参见[CGK] 及其中的参考文献）。

这种相似关系引出了一个问题：这些集合是否等于右谱（1）中定义的那些集合。本文旨在对这个问题作出肯定回答。我们证明，右谱与 S谱的概念是一致的。实际上，我们证明，谱的划分中的每个分量都与 S谱划分中的对应分量一致，即

$$\sigma_p(T) = \sigma_{S,p}(T), \quad \sigma_c(T) = \sigma_{S,c}(T), \quad \sigma_r(T) = \sigma_{S,r}(T).$$

在深入探讨细节之前，有两点值得一提。首先，我们的结果提供了一种便捷的谱计算方法，但引入算子 Δ_λ 对于进一步发展四元数算子理论至关重要。事实上，若没有 S-谱的发现，许多成果都不可想象。举例来说，将全纯函数的 Riesz-Dunford 函数演算推广到四元数线性算子 [CSS], 、四元数希尔伯特空间上正规算子的连续函数演算 [GMP] ，以及关于酉算子的谱定理 [ACKS] 和关于无界正规四元数线性算子的谱定理 [ACK],等。第二点是，本文中这两种谱概念相等是自然的，而且在某种意义上很容易证明；但据我们所知，文献中一直未曾注意到这一点，有限维情形下右谱与 S-谱相等这一结论除外。另有一篇文章提到了无限维情形下右谱与 S-谱相等，但同样只证明了有限维情形，确立了右谱与点 S-谱相等（见 [CS，定理 2.5]）。

为方便读者，我们回顾一些基本定义和结果。实四元数的除环 $\mathbb{H}$ 是一个以 $\mathbb{R}$ 为基域、以 $\{1, i, j, k\}$ 为基且乘法由 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$给出的代数。纯四元数记作$\mathbb{P} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{i, j, k\}$。四元数 $q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{H}$ 的实部和虚部分别记作 $Re(q) = a_0$ 和 $Im(q) = a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbb{P}$。 q 的共轭为 $q^* = Re(q) - Im(q)$，其范数为 $|q| = \sqrt{qq^*}$。若两个四元数 $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ 相似，我们记作 $q_1 \sim q_2$；这意味着存在 $s \in \mathbb{H}$，使得 $|s| = 1$ ，且 $s^* q_2 s = q_1$。相似关系是一种等价关系，q 的等价类记作 $[q]$。 q_1 和q_2 相似的充要条件是 $Re(q_1) = Re(q_2)$ 且 $|Im(q_1)| = |Im(q_2)|$。

若右 $\mathbb{H}$-模 $\mathcal{H}$ 配备内积 $\langle .,. \rangle$，且关于范数 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, x \in \mathcal{H}$完备，则称其为右四元数希尔伯特空间。

我们可以将 $\mathcal{H}$ 视为 $\mathbb{H}$ 或 $\mathbb{R}$上的向量空间。这样便可以引入定义在这两个域上的两种线性算子。右 $\mathbb{H}$-线性算子是一个映射$T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，满足

$$T(u\alpha + v\beta) = T(u)\alpha + T(v)\beta, \text{ for any } u, v \in \mathcal{H} \text{ and } \alpha, \beta \in \mathbb{H}.$$

类似地，如果上述等式对任意 α、$\beta \in \mathbb{R}$都成立，我们就称 T 为一个 $\mathbb{R}$-线性算子。此外，回忆一下，若存在 $K \geq 0$ 使得 $\|Tx\| \leq K\|x\|, x \in \mathcal{H}$，则算子 $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ 是有界的；而 T 的范数定义为$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$。

因此，我们用 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上所有有界右 $\mathbb{H}$-线性算子的集合，用 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$上所有有界 $\mathbb{R}$-线性算子的集合。由于 $\mathbb{H}$-线性映射也是 $\mathbb{R}$-线性映射，因此有 $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$。

给定 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 和 $\lambda \in \mathbb{H}$，定义算子 $\Delta_\lambda(T): \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$，使得 $\Delta_\lambda(T) = T^2 - 2Re(\lambda)T + |\lambda|^2 I$。显然， $\Delta_\lambda(T)$ 是一个有界右 $\mathbb{H}$-线性算子。 T 的 S-谱，$\sigma_S(T)$，定义为

$$\sigma_S(T) \;=\; \big\{\lambda \in \mathbb{H} : \Delta_\lambda(T) \text{ is not invertible in } \mathcal{B}(\mathcal{H})\big\}.$$

S-谱 $\sigma_S(T)$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个紧致非空子集，并且总包含于以原点 $B(0, \|T\|)$ 为中心、半径为 $\|T\|$ 的闭球内。可以证明， $\lambda \in \sigma_S(T)$ 等价于 $[\lambda] \subseteq \sigma_S(T)$（[CGK，定理 9.2.2，定理 9.2.3]）。

现在回顾一下：有界线性算子 T 在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中可逆，当且仅当 T 的值域稠密且它有下界；后者意味着存在 $k > 0$，使得对于每个 $x \in \mathcal{H}$，都有 $\|Tx\| \geq k\|x\|$（见 [CGK，第 196] 页）。根据 $\Delta_\lambda(T)$ 不可逆的失效性质，将谱划分为三个互不相交部分的经典划分如下：

$$\sigma_S(T) = \sigma_{S,p}(T) \cup \sigma_{S,c}(T) \cup \sigma_{S,r}(T),$$

其中

$$\begin{aligned}\sigma_{S,p}(T) =&\{\lambda \in \mathbb{H} : \Delta_\lambda(T)(x) = 0, \text{ for some } x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}\},\\ \sigma_{S,r}(T) =&\{\lambda \in \mathbb{H} \setminus \sigma_{S,p}(T) : \overline{\mathrm{Ran}(\Delta_\lambda(T)} \neq \mathcal{H}\},\\ \sigma_{S,c}(T) =&\{\lambda \in \mathbb{H} \setminus \big(\sigma_{S,p}(T) \cup \sigma_{S,r}(T)\big) : \Delta_\lambda(T) \text{ is not bounded below}\}.\end{aligned}$$

考虑算子 $T_\lambda := I\lambda - T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$，如前所定义，为 $T_\lambda(x) = x\lambda - Tx$。尽管 T_λ 不是右 $\mathbb{H}$-线性的，但它是 $\mathbb{R}$-线性算子。因此，讨论 T_λ 在 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$中的可逆性是有意义的，自然也可以如下定义$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$的谱。

定义 1. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。则 T 的右谱为集合

$$\sigma(T) = \big\{\lambda \in \mathbb{H} : T_\lambda \textit{ is not invertible in } \mathcal{B}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})\big\}.$$

类似地， $\sigma(T)$可分解为三个互不相交的部分

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T),$$

其中， T 的点谱、连续谱和剩余谱分别为

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) =&\{\lambda \in \mathbb{H} : T_\lambda(x) = 0, \text{ for some } x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}\},\\ \sigma_r(T) =&\{\lambda \in \mathbb{H} \setminus \sigma_p(T) : \overline{\mathrm{Ran}(T_\lambda)} \neq \mathcal{H}\},\\ \sigma_c(T) =&\{\lambda \in \mathbb{H} \setminus \big(\sigma_r(T) \cup \sigma_p(T)\big) : T_\lambda \text{ is not bounded below}\}.\end{aligned}$$

回顾一下，如果集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{H}$满足 $\lambda \in \mathcal{A}$，则 $[\lambda] \subset \mathcal{A}$，那么它称为圆形集合。众所周知， $\sigma_S(T)$是圆形的，$\sigma_{S,\,p}$、 $\sigma_{S,\,r}$、 $\sigma_{S,\,c}$也都是如此（见 [GMP，第 33]页）。如下一个引理所示， $\sigma(T)$、$\sigma_p(T)$、 $\sigma_r(T)$和 $\sigma_c(T)$也同样如此。首先注意，当 $\lambda = q\mu q^*$时，对某个单位四元数 q，有 $\big(T_\lambda x\big)q = T_\mu(xq)$。事实上，

$$\begin{aligned}T_\lambda x =&x\lambda - Tx = x(q\mu q^*) - T\big(x(qq^*)\big)\\ =&(xq\mu)q^* - T(xq)q^* = \Big((xq)\mu - T(xq)\Big)q^*\\ =&\Big(T_\mu(xq)\Big)q^*. \qquad (2)\end{aligned}$$

注意，我们无法再进一步，因为 T_μ 并非右 $\mathbb{H}$–线性，只有 T 才是。

引理 2. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。集合 $\sigma_p(T)$、 $\sigma_r(T)$ 和 $\sigma_c(T)$ 都是圆形的。特别是， $\sigma(T)$ 是圆形的。

证明。 我们将通过证明以下结论来证明这一结果：当 $\lambda \in \mathcal{A}$ 时，任何形如 $\mu = q\lambda q^*$ 且具有酉 $q \in \mathbb{H}$ 的元素也属于 $\mathcal{A}$，因此 $[\lambda] \subseteq \mathcal{A}$，其中 $\mathcal{A}$ 是上述谱之一。

设 $\lambda \in \sigma_p(T)$。若 $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$ 满足 $T_\lambda(x) = 0$，取 $y = xq$ 并利用 (2)，可得 $T_\mu(y) = 0$。于是 $\mu \in \sigma_p(T)$，因此 $\sigma_p(T)$ 是圆形的。

现在证明 $\sigma_r(T)$ 是圆形的。设 $\lambda \in \sigma_r(T)$。注意到 $\lambda \notin \sigma_p(T)$、 $\mu = q\lambda q^*$，且 $\sigma_p(T)$ 是圆形的，因此 $\mu \notin \sigma_p(T)$。由于 $\mathbb{H}q^* = \mathbb{H}$，利用 (2) 并取 $y = xq$，我们得到

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Ran}(T_\mu)} =& \overline{\{T_\mu(y) : y \in \mathcal{H}\}} = \overline{\{T_\mu(xq) : xq \in \mathcal{H}\}} \\
=& \overline{\{T_\lambda(x)q : xq \in \mathcal{H}\}} = \overline{\{T_\lambda(x)q : x \in \mathcal{H}q^*\}} \\
=& \overline{\{T_\lambda(x)q : x \in \mathcal{H}\}} = \overline{\{T_\lambda(x) : x \in \mathcal{H}\}q} \\
=& \overline{\mathrm{Ran}(T_\lambda)}q
\end{aligned}$$

因此 ， $\overline{\mathrm{Ran}(T_\lambda)} \neq \mathcal{H}$ 蕴含 $\mathrm{Ran}(T_\lambda)q = \overline{\mathrm{Ran}(T_\mu)} \neq \mathcal{H}$。因此 $\sigma_r(T)$ 是圆形的。

尚需证明 $\sigma_c(T)$ 是圆形的。设 $\lambda \in \sigma_c(T)$。则 $\lambda \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$， $\mu = q\lambda q^*$ 且 $\sigma_p(T)$ 和 $\sigma_r(T)$ 都是圆形的，因此 $\mu \notin \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$。由于 T_λ 没有下界，故存在一个序列 $x_n \in \mathcal{H}$ 使得 $\|T_\lambda x_n\| \to 0$。取$y_n = x_n q$，其中 $q \in \mathbb{H}$ 是一个单位四元数，使得 $\lambda = q\mu q^*$，那么再次由 (2) 可得 $\|T_\mu(y_n)\| = \|\big(T_\lambda(x_n)\big)q\| \to 0$。于是 T_μ 没有下界，因此 $\sigma_c(T)$ 是圆形的。

□

在证明主定理之前，我们注意到算子 $\Delta_\lambda(T)$ 和 T_λ 通过复合 $\Delta_\lambda(T) = T_\lambda \cdot T_{\lambda^*}$ 相关。事实上，对于所有 $x \in \mathcal{H}$，我们有

$$\begin{aligned}
T_\lambda \cdot T_{\lambda^*}(x) =& (I\lambda - T)\cdot(I\lambda^* - T)(x) = (I\lambda - T)(x\lambda^* - Tx) \\
=& (x\lambda^* - Tx)\lambda - T(x\lambda^* - Tx) = x|\lambda|^2 - (Tx)\lambda - (Tx)\lambda^* + T^2(x) \\
=& T^2(x) - (Tx)(\lambda + \lambda^*) + |\lambda|^2 x = \big(T^2 - 2Re(\lambda)T + |\lambda|^2 I\big)x \\
=& \Delta_\lambda(T)(x).
\end{aligned}$$

同样，我们可以证明 $T_{\lambda^*} \cdot T_\lambda = \Delta_\lambda(T)$。综上所述，我们得到：

命题 3。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。那么

$$\Delta_\lambda(T) = T_\lambda \cdot T_{\lambda^*} = T_{\lambda^*} \cdot T_\lambda.$$

由此结果容易看出，当 T_λ 在 $\mathcal{B}_\mathbb{R}(\mathcal{H})$ 中不可逆时， $\Delta_\lambda(T)$ 在 $\mathcal{B}_\mathbb{R}(\mathcal{H})$ 中不可逆，因此在 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中也不可逆，这意味着 $\sigma(T) \subset \sigma_S(T)$。我们将证明反过来也成立。这需要一些额外工作，因为命题 3 只能推出稍弱的结果：若 T_λ 在 $\mathcal{B}_\mathbb{R}(\mathcal{H})$ 中可逆，则 $\Delta_\lambda(T)$ 在 $\mathcal{B}_\mathbb{R}(\mathcal{H})$ 中可逆。我们不仅可以得到 $\sigma_S(T) = \sigma(T)$，而且还能得到更强的结论： T 的点谱是 T 的点 S-谱，连续谱是连续 S-谱；剩余谱则是剩余S-谱。

定理 4. 设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$。有以下等式

$$\sigma_p(T) = \sigma_{S,p}(T), \quad \sigma_r(T) = \sigma_{S,r}(T) \quad and \quad \sigma_c(T) = \sigma_{S,c}(T).$$

证明。若 $\lambda \in \sigma_{S,p}(T)$，则对某个 $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$，有 $\Delta_\lambda(T)x = 0$。取 $y = T_{\lambda^*}(x)$ 并应用命题 3，得到 $T_\lambda y = 0$。或者 $\lambda \in \sigma_p(T)$，此时结论成立；或者$T_{\lambda^*}(x) = y = 0$，在这种情况下 $\lambda^* \in \sigma_p(T)$。由于 $\sigma_p(T)$ 是圆形的， $\lambda \in \sigma_p(T)$。因此我们得到 $\sigma_{S,p}(T) \subseteq \sigma_p(T)$。对于反向包含，若对某个$x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$，有 $T_\lambda(x) = 0$ ，应用命题 3 可得，对某个 $x \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$，有 $\Delta_\lambda(T)x = 0$ ，也就是说，$\lambda \in \sigma_{S,p}(T)$。

现在证明 $\sigma_r(T) = \sigma_{S,r}(T)$。由于 $\mathrm{Ran}(T_\lambda \cdot T_{\lambda^*}) \subseteq \overline{\mathrm{Ran}(T_\lambda)} \neq \mathcal{H}$，我们有 $\sigma_r(T) \subseteq \sigma_{S,r}(T)$。为证明反向包含关系，我们将使用逆否命题：$\mathrm{Ran}(T_\lambda) = \mathcal{H}$ 意味着 $\overline{\mathrm{Ran}(\Delta_\lambda(T))} = \mathcal{H}$。由 (2) 可得 $T_\lambda(x)q = T_{\lambda^*}(xq)$，其中$\lambda^* = q^*\lambda q$，且 q为酉。由于 $T_{\lambda^*}(\cdot\, q) \in \mathcal{B}_\mathbb{R}(\mathcal{H})$，且 $x \mapsto T_{\lambda^*}(xq)$，我们有

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}q = \overline{\mathrm{Ran}(T_\lambda)}\, q = \overline{\mathrm{Ran}(T_\lambda)\, q} = \overline{\mathrm{Ran}\big(T_{\lambda^*}\big(\cdot\ q\big)\big)} = \overline{\mathrm{Ran}(T_{\lambda^*})}.$$

由此可得，值域$(T_\lambda) = \mathcal{H}$ 蕴含值域$(T_{\lambda^*}) = \mathcal{H}$（反之亦然）。因此，设值域$(T_\lambda)$ =值域$(T_{\lambda^*}) = \mathcal{H}$。为了证明值域$(\Delta_\lambda(T)) = \mathcal{H}$，我们将证明：对任意$x \in \mathcal{H}$，存在一个序列 $x_n \in \mathcal{H}$，使得 $\Delta_\lambda(T)(x_n) = T_{\lambda^*} \cdot T_\lambda(x_n) \xrightarrow{n} x$。由于 T_{λ^*} 的值域稠密，存在一个序列 $y_n \in \mathcal{H}$，使得 $T_{\lambda^*}(y_n) \xrightarrow{n} x$；又由于值域$(T_\lambda)$也稠密，对每个 n，存在一个序列$y_{n,\,k}$，使得 $T_\lambda(y_{n,\,k}) \xrightarrow{k} y_n$。对任意 $\epsilon > 0$，令 $N \in \mathbb{N}$满足 $\|T_{\lambda^*}(y_n) - x\| < \epsilon$，其中 $n \geq N$。对于任意

这些 n，取满足 $\|T_\lambda(y_{n,\ k(n)}) - y_n\| < \epsilon$的 $k(n) \in \mathbb{N}$。然后，

$$\begin{aligned}\|T_{\lambda^*} \cdot T_\lambda(y_{n,k(n)}) - x\| &\leq \|T_{\lambda^*} \cdot T_\lambda(y_{n,k(n)}) - T_{\lambda^*}(y_n)\| + \|T_{\lambda^*}(y_n) - x\| \\ &\leq \|T_{\lambda^*}\|\|T_\lambda(y_{n,k(n)}) - y_n\| + \|T_{\lambda^*}(y_n) - x\| \\ &\leq (\|T_{\lambda^*}\| + 1)\epsilon.\end{aligned}$$

因此，我们有一个序列 $x_n = y_{n,\ k(n)}$ 使得 $\Delta_\lambda(T)(x_n) \xrightarrow{n} x$，从而 $x \in$值域($\overline{\Delta_\lambda(T)}$)。

最后，我们将证明 $\sigma_c(T) = \sigma_{S,c}(T)$。假设 $\lambda \in \sigma_c(T)$，则 T_λ 没有下界，并且存在一个由酉向量组成的序列 $x_n \in \mathcal{H}$，使得 $T_\lambda(x_n) \to 0$。由 T_{λ^*}的连续性可知，$\Delta_\lambda(T)(x_n) = T_{\lambda^*} \cdot T_\lambda(x_n) \to 0$，即$\lambda \in \sigma_{S,c}(T)$。另一方面，如果$\lambda \in \sigma_{S,c}(T)$，则存在一个由酉向量组成的序列 x_n，使得$\Delta_\lambda(T)(x_n) = T_\lambda \cdot T_{\lambda^*}(x_n) \to 0$。于是，要么 $\liminf \|T_{\lambda^*}(x_n)\| \to 0$，此时引理 2 意味着 $\lambda \in \sigma_c(T)$；要么 $\ell := \liminf \|T_{\lambda^*}(x_n)\| > 0$。我们可以从 x_n 中取一个子序列 x_{n_k}，使得 $\|T_{\lambda^*}(x_{n_k})\| \geq \ell$。为简便起见，我们将这样的子序列记作 x_n。令 $y_n = T_{\lambda^*}(x_n)/\|T_{\lambda^*}(x_n)\|$。显然，

$$\|T_\lambda y_n\| = \frac{\|T_\lambda \cdot T_{\lambda^*}(x_n)\|}{\|T_{\lambda^*}(x_n)\|} = \frac{\|\Delta_\lambda(T)(x_n)\|}{\|T_{\lambda^*}(x_n)\|} \leq \frac{\|\Delta_\lambda(T)(x_n)\|}{\ell} \to 0,$$

因此 $\lambda \in \sigma_c(T)$。

□

本文的主要结果现在可直接由定理 4 得出。

定理 5。设 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$，则 $\sigma(T) = \sigma_S(T)$。

参考文献

[ACK] D. Alpay, F. Colombo, D. P.Kimsey, 基于 *S*-谱的四元数无界正规算子的谱定理. 《数学物理杂志》**57** (2016), 023503.[ACKS] D. Alpay, F. Colombo, D. P. Kimsey, I. Sabadini,基于 *S*-谱的酉算子谱定理. 《米兰数学杂志》(2016), 41–61.[CSS] F. Colombo, I. Sabadini, and D. C. Struppa, 非交换函数演算：切片超全纯函数的理论与应用. 数学进展, 第 289 卷, Birkhauser/Springer Basel AG, 巴塞尔, 2011.[CS] F. Colombo, I. Sabadini,关于四元数算子及 $n-$算子组的若干谱概念. 《法国科学院科学报告》系列 I, **350** (2012) 399–402.

[CGK] F. Colombo, J. Gantner, D. Kimsey,四元数算子的谱理论与 *S*-谱. Birkhauser/SpringerBasel AG, 巴塞尔, 2018年.[GMP] R. Ghiloni, V. Moretti, A. Perotti, 四元数希尔伯特空间中的连续切片函数演算. 《数学物理评论》, **25**(**4**) (2013年), 1350006.

Luís Carvalho，里斯本大学学院 (ISCTE-IUL)，商业研究部 (BRU-IUL)，里斯本，葡萄牙武装部队大道，1649-026；以及数学分析、几何与动力系统中心，数学系，高等技术学院，里斯本大学，里斯本 Rovisco Pais 大道 1049-001，葡萄牙

电子邮箱：luis.carvalho@iscte-iul.pt

Cristina Diogo，里斯本大学学院 (ISCTE-IUL)，里斯本，葡萄牙武装部队大道，1649-026；以及数学分析、几何与动力系统中心，数学系，高等技术学院，里斯本大学，里斯本 Rovisco Pais 大道 1049-001，葡萄牙

电子邮箱：cristina.diogo@iscte-iul.pt

Sérgio Mendes，里斯本大学学院（ISCTE-IUL），武装部队大道，1649-026，里斯本，葡萄牙，以及数学与应用中心，贝拉因特里奥尔大学，Marquês d'Ávila e Bolama 街，6201-001，科维良

电子邮箱：sergio.mendes@iscte-iul.pt

Helena Soares，里斯本大学学院（ISCTE-IUL），商业研究部（BRU-IUL），武装部队大道，1649-026，里斯本，葡萄牙，以及数学与应用研究中心，埃武拉大学，路易斯·安东尼奥·韦尔内学院，Romão Ramalho 街，59，7000-671 埃武拉，葡萄牙

电子邮箱：helena.soares@iscte-iul.pt