半空间中涉及 Hardy 算子的 Sobolev 范数

Rupert L. Frank 和 Konstantin Merz

Abstract. 我们研究半空间上的 Hardy 算子，即势由到边界距离的适当幂次给出的普通和分数阶薛定谔算子。我们证明，当耦合常数在定量意义下不太大时，由 Hardy 算子和分数阶拉普拉斯算子生成的齐次 Sobolev 空间尺度彼此可比。我们的结果推广了欧几里得全空间中的相关结果，并以近期的热核界为基础。

arXiv:2303.05348v1 [math.AP] 9 Mar 2023

Contents

1. 引言与主要结果 1 1.1. 问题设定 1 1.2. 主要结果 2 1.3. 背景与动机 5 1.4. 证明方法与论文结构 7 2. Hardy 算子的热核界 9 3. Riesz 核估计 9 4. 广义 Hardy 不等式的证明（定理 3）12 5. 热核之差 17 6. 反向 Hardy 不等式的证明（定理 5）21 7. 交换子估计 25 7.1. 径向截断 25 7.2. 边界截断 29 7.3. 组合截断 32 8. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 的稠密性 32 9. 主要结果的证明 35 附录 A. 指数 p 的定义附录 36 B. 定理 10 的证明 37 参考文献 39

1. Introduction and main result

1.1. 问题的设定。本文考虑半空间中的 Hardy 算子，其非正式定义如下：

$$L_\lambda^{(\alpha)} = (-\Delta)^{\alpha/2}_{\mathbb{R}^d_+} + \lambda x_d^{-\alpha} \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^d_+)\,. \tag{1}$$

日期：2023年3月9日。© 2023 作者所有。本文可为非商业目的全文转载。作者感谢美国国家科学基金会 DMS-1954995 项目、德国研究联合会通过德国卓越战略提供的 EXC-2111-390814868 项目（R.L.F.），以及德国学术交流中心（DAAD）通过 PRIME 计划、利用德国联邦教育与研究部（BMBF）的经费提供的支持（K.M.）。

这里及下文中，$\mathbb{R}^d_+ = \mathbb{R}^{d-1} \times (0,\infty)$，且我们记 $x = (x', x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0,\infty)$。

我们主要关注分数阶情形 $\alpha \in (0,2)$，但我们的结果在局部情形 $\alpha = 2$下也是新的。算子 $L^{(\alpha)}_\lambda$ 考虑满足狄利克雷边界条件的情形$\alpha = 2$，以及满足某种类似条件的情形 $\alpha < 2$。$(-\Delta)^{\alpha/2}_{\mathbb{R}^d_+}$ 的确切含义将在下一小节中解释；它有时称为区域分数阶拉普拉斯算子；例如参见 [BBC03] 和 [Kwa19，第 8 节。4]。

假设常数 λ满足

$$\lambda \geq \lambda_*$$

其中

$$\lambda_* := -\frac{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\pi}\left(\Gamma(\tfrac{1+\alpha}{2}) - \frac{2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

注意，λ_* 依赖于 α，但不依赖于 d，并且当 $\alpha = 2$时，$\lambda_* = -\frac{1}{4}$。此外，当$\alpha \in (0,1)$ 时，$\lambda_* < 0 \cup (1,2]$，并且当 $\alpha = 1$时，$\lambda_* = 0$。

常数 λ_* 起着临界耦合常数的作用。众所周知，对于 $\alpha = 2$，Bogdan 和 Dyda [BD11] 证明了对于 $\alpha < 2$，常数 λ_* 是 Hardy 不等式中的最优常数，该不等式指出：

$$L^{(\alpha)}_{\lambda_*} \geq 0\,.$$

本文旨在研究幂

$$\left(L^{(\alpha)}_\lambda\right)^{s/2} \qquad \text{with } s \in (0,2]\,.$$

更具体地说，我们关注这些算子的定义域（它们是包含 $L^{(\alpha)}_\lambda$ 的算子定义域的子空间），尤其关心一般 $\lambda \geq \lambda_*$ 下这些定义域与 $\lambda = 0$情形下该算子的定义域之间的关系。当 $\lambda > \lambda_* \neq 0$ 且 $s \leq 1$时，很容易看出，$(L^{(\alpha)}_\lambda)^{s/2}$ 与$(L^{(\alpha)}_0)^{s/2}$ 的定义域相同；类似论证见例如 [FMS21，注 1.2]。因此，我们主要关注$s > 1$的情形，它对应于型定义域与算子定义域之间的子空间。在主要结果（下文的定理 1）中，我们将证明，对于一个取决于 λ的明确范围内的 s，$(L^{(\alpha)}_\lambda)^{s/2}$ 与$(L^{(\alpha)}_0)^{s/2}$ 的定义域相同。

研究这一问题有多方面的动机，既来自纯数学，也来自非线性色散方程和数学物理中的应用；我们将在下文第 1.3 小节讨论其中一些动机。此外，我们还将介绍其他背景下类似问题不断增长的文献，并给出相关参考文献。Killip、Visan 和 Zhang 的开创性论文 [KVZ16] 以及 Killip、Miao、Visan、Zhang 和 Zheng 的论文[KMV+18]是这一主题的先驱性工作。

1.2. 主要结果。在介绍我们的结果之前，我们将先讨论算子 (1) 的定义，然后引入耦合常数 λ 的一种参数化方式，这对下文至关重要。

算子的定义。下面给出 $L^{(\alpha)}_\lambda$ 作为希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 中自伴非负算子的精确定义。本文中，除非另有明确说明，我们始终假设 $d \geq 1, \alpha \in (0,2]$和 $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$。

对于 $\alpha \in (0,2)$，我们考虑二次型

$$\tfrac{1}{2}\,\mathcal{A}(d,-\alpha)\iint_{\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}^d_+}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+\alpha}}\,dx\,dy + \lambda\int_{\mathbb{R}^d_+}\frac{|u(x)|^2}{x_d^\alpha}\,dx$$

with

$$\mathcal{A}(d,-\alpha) := \frac{\alpha}{2^{1-\alpha}\pi^{d/2}} \, \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}\,, \tag{2}$$

对于 $\alpha = 2$，我们考虑二次型

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla u(x)|^2 \, dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^d_+} x_d^{-2} |u(x)|^2 \, dx\,.$$

这些二次型定义在函数 $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d_+)$ 上，即定义在支集是开集 $\mathbb{R}^d_+$ 的紧子集的连续可微函数上。根据 $\alpha = 2$ 的经典 Hardy 不等式及 Bogdan 和 Dyda[BD11], 对 $\alpha < 2$ 的尖锐推广，当且仅当 $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$ 时，这些二次型非负。由 Friedrichs 定理，这些型因而导出自伴非负算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$，其定义在 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 上，且 $C_c^1(\mathbb{R}^d_+)$ 是型核。

下文出现的算子 $(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2}$ 由谱定理定义。我们将用到这样一个事实：对于任意 $s \in [0,2]$ 和任意$\alpha \in$， $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 都属于这些算子的定义域$(0,2]$；见引理 15。

指数 p 的定义。对于给定的 $\alpha \in$ $(0,2]$（记号中未体现），我们定义 $M := \alpha$，若 $\alpha < 2$，以及 $M := \infty$，若 $\alpha = 2$，并引入函数

$$(-1, M) \ni p \mapsto C(p) := \frac{1}{\pi} \left(\Gamma(\alpha) \, \sin \frac{\pi\alpha}{2} + \Gamma(1+p)\,\Gamma(\alpha - p) \, \sin \frac{\pi(2p-\alpha)}{2} \right). \tag{3}$$

当 $\alpha = 2$ 时，可以看出，$\Gamma(\alpha - p)$ 的极点与 $\sin \frac{\pi}{2}(2p-\alpha)$ 的零点相消；事实上，对所有 $p > -1$，都有 $C(p) = p(p-1)$。类似地，对于 $\alpha = 1$，可得 $C(p) = \frac{1}{\pi}(1 - \pi p \cot \pi p)$。

关于 C 的以下性质已为人所知，详细内容和参考文献见附录 A。函数 $p \mapsto C(p)$ 连续，且关于 $p = \frac{\alpha-1}{2}$ 对称，在 $[\frac{\alpha-1}{2}, M)$ 上严格递增，并且在 $p = \frac{\alpha-1}{2}$ 处的取值为 λ_*。此外，$\lim_{p\to M} C(p) = +\infty$。因此，对于任意 $\lambda \in [\lambda_*, \infty)$，存在唯一的

$$p \in [\tfrac{\alpha-1}{2}, M) \quad \text{with} \quad C(p) = \lambda\,. \tag{4}$$

我们强调，除了 λ 之外，p 还取决于 α。

可以证明，$C(\alpha - 1) = C(0) = 0$。因此，$\lambda = 0$ 的情形对应于 $p = (\alpha-1)_+ := \max\{\alpha - 1, 0\}$，而 $\lambda > 0$ 的情形对应于 $p > (\alpha-1)_+$。

利用 $C(p)$ 在 $\alpha = 2$ 时的显式表达式，我们得到

$$p = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4\lambda}\right) \qquad \text{if } \alpha = 2\,. \tag{5}$$

记号。我们记

$$A \wedge B := \min\{A, B\}\,, \qquad A \vee B := \max\{A, B\}\,.$$

此外，为了简化某些表述，我们省略常数，并在存在常数 $c > 0$ 使得 $A \le cB$ 时写作 $A \lesssim B$ for$A, B \in \mathbb{R}_+$。记号 $A \sim B$ 表示 $A \lesssim B \lesssim A$，在这种情况下，我们称 A 和 B 可比。如果要强调常数 c 可能依赖于某个参数（例如 τ），则写作 $A \lesssim_\tau B$。

主要结果——Sobolev 范数等价性。我们的主要结果包含在以下定理中。该定理指出，由 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 的某些幂生成的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-范数与由 $L_0^{(\alpha)}$ 的相应幂生成的范数可比。

定理 1. 设 $\alpha \in (0,2]$，且当 $\alpha < 2$ 时 $\lambda \geq 0$，当 $\alpha = 2$ 时 $\lambda \geq -1/4$。设 p 由 (4) 定义，并令 $s \in (0,2]$。

(1) 若 $s < (1+2p)/\alpha$，则 $\mathrm{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} \subset \mathrm{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2}$，且

$$\|(L_0^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim_{d,\alpha,\lambda,s} \|(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \quad \text{for all } u \in \mathrm{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2}. \tag{6}$$

此外，$C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 是 $(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2}$ 的算子核。

(2) 若 $s < (1+2(\alpha-1)_+)/\alpha$，则 $\mathrm{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2} \subset \mathrm{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2}$，且

$$\|(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim_{d,\alpha,\lambda,s} \|(L_0^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \quad \text{for all } u \in \mathrm{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2}. \tag{7}$$

此外，$C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 是 $(L_0^{(\alpha)})^{s/2}$ 的算子核。

特别地，对于 $s \in (0,2]$ 满足 $s < \frac{1+2}{(p\wedge(\alpha-1)_+)\ \alpha}$ 时，我们有 $\mathrm{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} = \mathrm{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2}$，并且有如下等价关系

$$\|(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \sim_{d,\alpha,\lambda,s} \|(L_0^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \quad \text{for all } u \in \mathrm{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2}.$$

还需注意，

$$p \wedge (\alpha-1)_+ = \begin{cases} (\alpha-1)_+ & \text{if } \lambda \geq 0, \\ p & \text{if } \lambda \leq 0. \end{cases}$$

在第 9 节中我们将看到，假设 $s < \frac{1+2}{(p\wedge(\alpha-1)_+)\ \alpha}$ 对于等式 $\mathrm{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} = \mathrm{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2}$ 是必要的（在附加假设 $\alpha < 3/2$ if $d = 1$下）。

对于 $\alpha = 1$，我们有 $\lambda_* = 0$，且定理 1 中的假设 $\lambda \geq 0$ 是最优的；对于 $\alpha = 2$，假设 $\lambda \geq -1/4$ 也是如此。对于 $\alpha \in (0,2) \setminus \{1\}$，限制为 $\lambda \geq 0$ 可能只是技术性的。这一限制源于对 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 的热核的估计，而这些估计是我们证明中的一个要素；目前已知的结果仅适用于 $\lambda \geq 0$ 当 $\alpha < 2$时。由于我们预计这些估计对 $\lambda \in [\lambda_*, 0)$也成立，因此我们将在每个主要结果后附上一条说明，指出可能的推广。

注 2. 令 $\alpha \in (0,2)$，$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda^{(\alpha)}}(x,y)$ 满足下文 (9) 中的上界，其中 p由 (4) 定义。则定理 1 对这个 λ值仍然成立。这可通过与下文证明相同的论证得出，同时考虑注 4、6 和 25。

接下来，我们给出定理 1 证明中的两个重要要素，它们本身也具有独立的研究价值。这些要素涉及 Hardy 不等式的变体。

定理 3（广义 Hardy 不等式）。令 $\alpha \in (0,2]$，并令 $\lambda \geq 0$ 在 $\alpha \in (0,2)$ 时取值，且 $\lambda \geq -1/4$ 在 $\alpha = 2$时取值。令 p 由 (4) 定义。则若 $s \in (0, \frac{1+2p}{\alpha} \wedge \frac{2d}{\alpha})$，有

$$\|x_d^{-\alpha s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim_{d,\alpha,\lambda,s} \|(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \qquad \text{for all } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+). \tag{8}$$

注 4. 设 $\alpha \in (0,2)$、$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)$ 满足下文（9）中的上界，其中 p由（4）定义。则对于此 λ 的取值，定理 3 仍然成立。这可由下文证明中的相同论证得出，同时考虑注 14。

值得将定理 3 中的假设 $s \in (0, \frac{1+2p}{\alpha} \wedge \frac{2d}{\alpha})$ 与带有点奇异性的权 $|x|^{-\alpha s/2}$ 的 Hardy 不等式中相应的假设 $s \in (0, \frac{d+2p}{\alpha} \wedge \frac{2d}{\alpha})$ 进行比较；参见 [FMS21，命题 1.4] 或 [KMV+18，命题 3.2]。

该假设中 d 与 1 的差异，反映了 Hardy 权具有奇异性的集合在维数上的不同。

定理 5（反向 Hardy 不等式）。设 $\alpha \in (0,2]$，且当 $\alpha < 2$ 时 $\lambda \geq 0$，当 $\alpha = 2$ 时 $\lambda \geq -1/4$。设 p 由 (4) 定义，且 $s \in (0,2]$。则

$$\left\| \left((L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} - (L_0^{(\alpha)})^{s/2} \right) u \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim_{d,\alpha,\lambda,s} \|x_d^{-\alpha s/2} u\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \quad \text{for all } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+) .$$

注 6。设 $\alpha \in (0,2)$，$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda^{(\alpha)}}(x,y)$ 满足下文 (9) 中的上界，其中 p 由 (4) 定义。则定理 5 对此 λ 仍然成立。这可由下文证明中的相同论证得到，同时考虑注 18。

注 7。我们选择将一般 $\lambda \geq \lambda_*$ 情形下的算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 与 $\lambda = 0$ 情形下的算子 $L_0^{(\alpha)}$ 进行比较。鉴于算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 的二次型定义，这种选择很自然。对于 $\alpha < 2$，比较算子还有另一种自然选择，即 $L_{\lambda_0}^{(\alpha)}$，其中 $\lambda_0 \in (0,\infty)$ 定义为

$$\mathcal{A}(d,-\alpha) \int_{\mathbb{R}^d_-} \frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha}} = \frac{\lambda_0}{x_d^\alpha} .$$

（左侧是 $x_d^{-\alpha}$ 的常数倍这一事实，可由简单的平移和伸缩考量得出。）按照对 λ_0 的这一界定，对于 $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d_+)$（将其视为延拓到 $\mathbb{R}^d$ 后在外部取零），我们有，

$$\begin{aligned} \|(-\Delta)^{\alpha/4} u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \tfrac{1}{2}\, \mathcal{A}(d,-\alpha) \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+\alpha}}\, dx\, dy \\ &= \tfrac{1}{2}\, \mathcal{A}(d,-\alpha) \iint_{\mathbb{R}^d_+ \times \mathbb{R}^d_+} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+\alpha}}\, dx\, dy + \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{|u(x)|^2}{x_d^\alpha}\, dx . \end{aligned}$$

从这个意义上说，算子 $L_{\lambda_0}^{(\alpha)}$ 与 $L_0^{(\alpha)}$ 同样自然。本文的论证稍作调整即可适用于与 $L_{\lambda_0}^{(\alpha)}$ 比较的情形。不过，为了使论述具体且简洁，我们决定只展示与算子 $L_0^{(\alpha)}$ 比较时的论证。

注 8. 我们考虑势恰为 $\lambda x_d^{-\alpha}$ 的 Schr¨odinger 算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$。在某些应用中，有必要允许更一般的势 V，满足 $\lambda |x|^{-\alpha} \leq V(x) \leq \tilde{\lambda} x_d^{-\alpha}$，对所有 $x \in \mathbb{R}^d_+$ 均成立，其中某个 $\lambda_* \leq \lambda \leq \tilde{\lambda} < \infty$。在这种情况下，定理 1 的类似结论仍然成立˜，其中 p 按照给定的 λ 由（4）定义；特别地，它与 λ 无关。这可通过对我们的证明作简单修改得到。我们已在 [FMS21 第 4] 节中，针对具有点奇异性的 Hardy 权，详细完成了这些论证；此处省略相应细节。

1.3. 背景与动机。介绍了我们的主要结果之后，我们希望将其置于相关背景中，并讨论一些先前的相关结果。

齐次算子常在应用中作为模型算子出现，或作为更复杂算子的缩放极限出现。人们希望尽可能详尽地分析它们，从而对应用中出现的扰动版本得出结论。从纯数学和调和分析的角度来看，齐次算子是很有意义的研究对象，可用于检验在不具备平移不变性的情况下，欧几里得傅里叶分析中有多少内容仍然成立。

齐次算子的典型特征是会出现临界耦合常数。这些常数通常与 Hardy 型不等式中的最佳常数有关。例如，Hardy 的

原始不等式 [Har19, Har20, OK90, KMP06] 是该不等式的情形 $d = 1$

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} |\nabla u|^2 \, dx \geq \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^d_+} \frac{|u|^2}{x_d^2} \, dx \qquad \text{for all } u \in C^1_c(\mathbb{R}^d_+) \,.$$

正是这个不等式保证算子 $L^{(2)}_\lambda$ with $\lambda \geq -\frac{1}{4}$ 在 $C^1_c(\mathbb{R}^d_+)$ 上下半有界，因此可在 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 中实现为自伴算子。Hardy 不等式中常数 $1\ 4$ 的锐性意味着，算子 $L^{(2)}_\lambda$ with$\lambda < -\frac{1}{4}$在 $C^1_c($ $\mathbb{R}^d_+)$ 上不下半有界，因此不可能存在下有界的自伴扩张。在应用中，算子 $L^{(2)}_\lambda$几乎总是与 $\lambda \geq -\frac{1}{4}$一起出现。

将 Hardy 不等式推广到高维情形的另一种自然方式是

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 \, dx \geq \frac{(d-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|u|^2}{|x|^2} \, dx \qquad \text{for all } u \in C^1_c(\mathbb{R}^d) \text{ if } d \geq 3 \,.$$

Killip、Miao、Visan、Zhang 和 Zheng 在其颇具影响力的论文 [KMV+18] 中研究了相应的算子 $-\Delta + \lambda|x|^{-2}$ （其中 $\lambda \geq -\frac{(d-2)^2}{4}$）。这些作者的研究动机来自非线性色散偏微分方程的分析，更确切地说，是研究带有反平方势的非线性薛定谔方程的整体适定性与散射 [KMV+17、KMVZ17]。在 [KMV+18] 中，他们比较了算子 $(-\Delta + \lambda|x|^{-2})^{s/2}$ 的定义域与齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$，并首次在此背景下发现了幂 s 与耦合常数 λ 之间的关系。此前，Killip、Visan 和 Zhang [KVZ16] 曾受非线性薛定谔方程相关问题的启发，研究了一个类似问题：在紧凸集的补集上考察狄利克雷拉普拉斯算子。我们分析中发挥重要作用的，是 [KVZ16、KMV+18] 中发展出的技术。

Hardy 不等式已推广到拉普拉斯算子的幂。Herbst [Her77]的一项结果的一个特例是

$$\left\| (-\Delta)^{\alpha/4} u \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{4})^2}{\Gamma(\frac{d-\alpha}{4})^2} \left\| |x|^{-\alpha/2} u \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{for all } u \in \dot{H}^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d) \text{ if } d > \alpha \,.$$

关于 Herbst不等式的其他证明，参见 [KPS81, Yaf99, FLS08, FS08]。 $\alpha = 1$ 和 $d = 3$的情形尤为重要，因为算子 $\sqrt{-\Delta + m^2} - m^2 + \lambda|x|^{-1}$ in$L^2(\mathbb{R}^3)$为描述点原子核库仑场中的电子提供了一个相对论模型。该算子的尺度不变模型问题是齐次算子 $\sqrt{-\Delta} + \lambda|x|^{-1}$，关于后者的许多结果都对具有相对论效应的量子力学有所启示。例如，针对后者的 Lieb–Thirring不等式被用于解决存在磁场时的物质稳定性问题 [FLS08, FLS07]。

最近，我们与 Heinz Siedentop 和 Barry Simon 合作，讨论了相对论电子的强斯科特猜想的类似问题 [FMSS20]。这是一个量子多体问题，其基础单体算子仍为 $\sqrt{-\Delta + m^2} - m^2 + \lambda|x|^{-1}$ in$L^2(\mathbb{R}^3)$。在这项研究中，我们需要了解算子 $(\sqrt{-\Delta} + \lambda|x|^{-1})^{s/2}$ 的定义域。更具体地说，在我们的方法中，需要知道对于任意 $\lambda > \lambda_*$，都存在一个 $s > 1$，使得由 $(\sqrt{-\Delta} + \lambda|x|^{-1})^{s/2}$ 生成的 $L^2(\mathbb{R}^d)$-范数与由 $(-\Delta)^{s/2}$ 生成的范数等价。 [FMS21], 证明了确实如此，从而在相对论情形下证明了强斯科特猜想。另一种证明见 [FMS23a] ； 关于斯科特猜想的综述见 [FMS23b]。

顺便提一下，论文 [KVZ16, KMV+18] 也讨论了基础范数为 $L^p(\mathbb{R}^d)$ 中的范数且满足 $p \neq 2$ 的情形。类似地， [FMS21], 中关于 L^2-范数的结果已推广到具有一般 $1 < p < \infty$ 的 L^p-范数；关于 $\lambda > 0$ ，参见 [Mer21]；关于所有 $\lambda \geq \lambda_*$，参见 [BD23, BN22] 。 $p \neq 2$ 的证明通常依赖于 Mikhlin–H¨ormander 定理所体现的乘子定理。（注意，当 $p = 2$ 时，这类乘子定理可由谱定理直接推出。）在局部情形 $\alpha = 2$ ，乘子定理的证明可以基于具有高斯型非对角衰减的热核界。若缺少这类界， $\alpha < 2$ 情形就会复杂得多；另见 [Mer22]。

本文讨论半空间上分数阶算子的 L^2 情形中的类似问题。这种情形下相应的最佳 Hardy 不等式由 Bogdan 和 Dyda [BD11] 给出，内容如下：

$$\tfrac{1}{2}\,\mathcal{A}(d,-\alpha)\iint_{\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}^d_+}\frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+\alpha}}\,dx\,dy \geq -\lambda_*\int_{\mathbb{R}^d_+}\frac{|u(x)|^2}{x_d^\alpha}\,dx \text{ for all } u\in C_c^1(\mathbb{R}^d_+)\,.$$

另一种证明见 [FS10]。

与先前研究相比，主要的新难点在于分数阶情形下边界的存在。注意，算子的阶数 α 与边界的影响之间存在相互作用。对于 $\alpha < 1$ ，我们预计边界的影响可以忽略不计，而 $\alpha = 1$ 是一个微妙的临界情形。这一预期体现为，例如，定理 1 第 (2) 部分中正部 $(\alpha - 1)_+$ 的出现。与此相关的是，当 α 较小且 λ 较大时，若两点到边界的距离远小于它们之间的距离，Riesz 核估计（下文定理 11）中会出现一个很大的额外因子。这是以往对类似问题的研究中未曾遇到的现象。

我们预计，在半空间上齐次算子的模型情形下得到的结果，可应用并推广至更一般算子和更一般定义域的研究。

1.4. 证明方法与论文结构。定理 1 的证明分为两部分。第一部分证明函数属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 时相应的不等式成立；第二部分则证明后一个集合是一个算子核，从而将这些不等式推广到相关算子定义域中的所有函数。

定理 1 证明的第一部分可由定理 3 和定理 5 直接推出。这两个定理证明的主要依据是算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 的热核逐点界；这些界最近由 Cho、Kim、Song 和 Vondraˇcek [CKSV20]以及 Song、Wu 和 Wu [SWW22] 针对 $\alpha < 2$证明。此类界的结构是：与全空间热核相比，多出两个因子，它们取决于 x （分别为 y）到边界的距离相对于 $t^{1/\alpha}$的比值。第 2 节对此作了总结，部分技术细节则放在附录 B 中。

在定理 3 的证明中，我们利用这些热核界推出 Riesz 核估计，也就是算子 $(L_\lambda^{(\alpha)})^{-s/2}$ with $s < \frac{2d}{\alpha}$ 的核的估计；见定理 11。对于$\alpha = 2$ 和所有 λ，或对于 $\alpha < 2$ 和所有不太大的 λ （取决于 α 和 s），这些 Riesz 核估计继承了热核界的结构，即全空间核乘以两个额外因子。然而，当 $\alpha < 2$ 和 λ 较大时，Riesz 核估计的这种乘积结构不再成立，需要用一项来取代；相对于乘积结构而言，当 x 和 y 都接近边界时，该项会变得无界

（与 $|x-y|$ 相比）。相关问题的先前研究中并未出现这种现象，例如 [KVZ16、KMV+18、FMS21]。

建立 Riesz 核估计后，定理 3 中的广义 Hardy 不等式可通过 Schur 判别法推出；见第 4 节。概念上，这与 [KVZ16、KMV+18、FMS21], 类似，但某些 λ 对乘积结构的破坏需要我们付出一些额外努力。至此，定理 3 的证明便告完成。

转而证明定理 5，我们需要估计$L_\lambda^{(\alpha)}$ 与 $L_0^{(\alpha)}$ 的热核之差。这些估计将在第 5 节中推导。此处的难点在于空间的某个区域：当 x和 y 都远离边界（相对于 $t^{1/\alpha}$而言），但彼此距离很近（相对于它们到边界的距离而言）时，需要量化热核作差所产生的抵消效应。类似的论证此前也出现过，但我们认为，此处的处理比[FMS21] 更为高效，而且我们提出的新论证也能简化 [FMS21]中的证明。

一旦建立了热核之差的界，定理 5 中的反向 Hardy 不等式便可由 Schur 判别法推出；见第 6 节。这些 Schur 判别法在概念上与先前的论证相似，但需要进行更多的技术性工作。

或许值得指出的是，第 4、5、6 节技术性工作的一个简单指导思路，即利用算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 在平行于边界的平移下保持不变这一性质。这意味着，上文讨论的各种算子的核仅通过变量 x' 与 y' 之差 $x'-y'$ （事实上，仅通过 $|x'-y'|$）依赖于这些变量，因此我们的目标是对这些变量积分消去。这样，我们试图将问题有效地约化为一维算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 的问题。一旦降至一维，各个区域（由尺度 x_d、y_d、$|x-y|$ 和 $t^{1/\alpha}$定义）的区分就会大大简化，从而得以完成证明。

我们还注意到，一开始就可以利用沿边界平行方向的平移不变性，并将 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 写成某些算子$L_\lambda^{(\alpha)}$ (ξ') 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上的直接积分，其中这些算子依赖于参数 $\xi'\in\mathbb{R}^{d-1}$；该参数是与空间变量 x' 对应的傅里叶变量。这样，我们就可以将定理 1、3 和 5 中的所有不等式改写为关于算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ (ξ') 的不等式，并且常数对 ξ' 一致。虽然这会立即将问题化归为一维情形，但仍需处理参数 ξ' 上的一致性。此外，据我们所知，文献中尚无关于算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ (ξ') 的精确热核界。（关于这一点，我们提及近期关于 $(-\Delta+1)^{\alpha/2}+V_\lambda^{(\alpha)}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中满足 $V_\lambda^{(\alpha)}\sim\lambda|x|^{-\alpha}$ as $x\to 0$ 的某些临界势V(α) λ 的热核界；见 [JKS22a, JKS22b]。）我们还注意到，关于 $(-\frac{d^2}{dx^2}+|\xi'|^2)^{\alpha/2}$ 在 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 上的算子（通过先将其零延拓至 $\mathbb{R}$、再作用于 $\mathbb{R}$，最后限制回 $\mathbb{R}_+$，定义在 $C_c^1(\mathbb{R}_+)$ 上）， [Kwa11] 已获得精确信息。这些信息在 [FG16] 中发挥了重要作用。这些算子与算子 $L_\lambda^{(\alpha)}$ (ξ') 类似，但通常并不相同。

至此，我们结束了对定理 1 证明第一部分的讨论。第二部分，即算子核性质的证明，见第7节和第8节。这里的主要结果是第8节中的定理 24。其证明再次依赖第2节中的热核界。这里的新要点是将这些界与拉普拉斯算子及其分数阶类比的 Schauder理论结合起来。通过在适当选取的尺度上应用 Schauder 估计，我们得到局部 H¨older 范数界。这些界使我们能够控制 $(-\Delta)^{\alpha/2}$ 与截断函数的交换子的作用。这些界是第7节讨论的主题。

我们以指出本文仅讨论底层范数为 L^2-范数的情形来结束本引言。这是最常见于

上述数学物理应用中的情形之一。此外，还有其他应用，例如与非线性 Schr¨odinger 方程有关的应用；在这些应用中，需要一般 $1 < p < \infty$ 的 L^p-范数。从调和分析的角度来看，证明这类界也是一个极具挑战的问题，与谱乘子定理有关；关于点奇异性的情形，请参见上述参考文献。对于当前沿超平面分布奇异性的情形，证明相应的类比结果仍是一个开放问题。

2. Heat kernel bounds for Hardy operators

记号。下文中，在表示 $L_\lambda^{(\alpha)}$ 时，我们省略上标 (α)；在不致混淆时，简写为 $L_\lambda \equiv L_\lambda^{(\alpha)}$。

L_λ的热核的逐点界对我们至关重要。我们先讨论 $\alpha < 2$的情形。

定理 9。设 $\alpha \in (0, 2)$，且 $\lambda \geq 0$。令 p 由 (4) 定义。那么，对所有x、$y \in \mathbb{R}^d_+$ 和 $t > 0$，均有：

$$e^{-tL_\lambda}(x, y) \sim \left(1 \wedge \frac{x_d}{t^{1/\alpha}}\right)^p \left(1 \wedge \frac{y_d}{t^{1/\alpha}}\right)^p t^{-\frac{d}{\alpha}} \left(1 \wedge \frac{t^{1/\alpha}}{|x-y|}\right)^{d+\alpha}. \tag{9}$$

我们来说明该定理的证明出处。对于 $\lambda = 0$ 和 $\alpha \leq 1$，该界见于 [CK03]。（更确切地说，[CK03] 讨论的是反射过程，但对于 $\alpha \leq 1$，这与我们感兴趣的删失过程一致。）对于 $\lambda = 0$ 和 $1 < \alpha < 2$，该界见于 [CKS10]。（更确切地说，[CKS10] 只证明了该界在某个任意但固定的时间范围内成立。不过，借助尺度不变性，只要证明该界对任意给定时间成立，就能推出它对所有时间都成立。）$\lambda \geq 0$ 的情形是较近期研究的对象，其界见于 [CKSV20]；另见 [SWW22]。

我们对函数 $p \mapsto C(p)$ 的定义与耦合常数 λ 相关联，而 p；这一定义表面上不同于 [CKSV20] 中采用的定义。我们在附录 A 中说明，它并非如此。

正如我们在引言中已经说过的，主要结果中的限制 $\lambda \geq 0$ 是定理 9 中这一限制的结果。我们预计，后一个定理以及我们的主要结果都可以推广到完整范围 $\lambda \geq \lambda_*$。

现在我们转而讨论情形 $\alpha = 2$。

定理 10. 设 $\alpha = 2$，并设 $\lambda \geq -\frac{1}{4}$。令 p 由式 (4) 给出，也就是说，由式 (5) 给出。那么，对所有 x、$y \in \mathbb{R}^d_+$ 和 $t > 0$，

$$\exp\left(-tL_\lambda\right)(x, y) \asymp \left(1 \wedge \frac{x_d}{\sqrt{t}}\right)^p \left(1 \wedge \frac{y_d}{\sqrt{t}}\right)^p t^{-d/2} \mathrm{e}^{-c|x-y|^2/t}, \tag{10}$$

这里，记号 $\asymp$ 与 $\sim$ 的含义相同，但指数函数中的常数 c 在上界和下界中可以不同。

虽然可以得到 L_λ 在 $\alpha = 2$ 时的热核的显式表达式，但它会导出一个略有不同的热核界。我们将在附录 B 中说明如何得到定理 10 中所述的界：为此可以牺牲指数中常数 c 的某些精度，但要坚持前因子的乘积结构。

3. Riesz kernel bounds

本节利用上一节的热核界，证明 Riesz 算子 $L_\lambda^{-s/2}$ 的核的双边界。这些结果对于证明广义 Hardy 不等式（定理 3）至关重要。

定理 11。设 $\alpha \in (0,2]$，且当 $\alpha \in$ 属于 (0, 2) 时 $\lambda \geq 0$，当 $\alpha = 2$ 时 $\lambda \geq -1/4$。令 p 由 (4) 定义，并令 $s \in$ 属于 $(0, \frac{2d}{\alpha} \wedge \frac{2}{(d+2p)\,\alpha})$。则下述结论成立。

(a) 对所有 x、$y \in \mathbb{R}^d_+$，且满足 $|x-y| \leq x_d \vee y_d$,

$$L_\lambda^{-s/2}(x,y) \sim_{d,\alpha,\lambda,s} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d} \left(1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|} \wedge \frac{y_d}{|x-y|}\right)^p . \tag{11}$$

(b) 对所有 x、$y \in \mathbb{R}^d_+$，且满足 $x_d \vee y_d \leq |x-y|$,

$$\begin{aligned} L_\lambda^{-s/2}(x,y) \sim_{d,\alpha,\lambda,s} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d} \left(\frac{x_d\, y_d}{|x-y|^2}\right)^p \cdot \Bigg[\mathbf{1}_{\alpha=2} \\ + \left(\mathbf{1}_{p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})} + \left(\ln\frac{|x-y|}{x_d \vee y_d}\right)\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})} + \left(\frac{|x-y|}{x_d \vee y_d}\right)^{2p-\alpha(1+\frac{s}{2})} \mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\Bigg]. \end{aligned} \tag{12}$$

注 12. 设 $\alpha \in (0,2)$、$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)$ 满足 (9) 中的界，其中 p 由 (4) 定义。则 (11) 和 (12) 仍然成立。同样，(9) 中的上界（分别为下界）蕴含 (11) 和 (12) 中的上界（分别为下界）。这可由下文证明中的相同论证得到。

注意，当 $\alpha = 2$ 或当 $\alpha < 2$ 和 $p < \frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$ 时，定理中的界可写为

$$L_\lambda^{-s/2}(x,y) \sim_{d,\alpha,\lambda,s} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d} \left(1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|}\right)^p \left(1 \wedge \frac{y_d}{|x-y|}\right)^p \tag{13}$$

对所有 x、$y \in \mathbb{R}^d_+$。这让人联想到 [KVZ16、FMS21] 中的 Riesz 核估计。值得注意的是，当 $\alpha < 2$ 且 $p \geq \frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$ 时，这种形式的界并非处处成立；在区域 $x_d \vee y_d \leq |x-y|$ 中，Riesz 核大于 (13) 右侧的表达式。这是 $\alpha < 2$ 情况下热核的非对角线缓慢衰减所致。我们将在接下来的章节中看到，这种更差的行为不会对广义 Hardy 不等式或反向 Hardy 不等式产生额外限制。

证明。根据谱定理，Riesz 核可表示为

$$L_\lambda^{-s/2}(x,y) = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)\, t^{s/2}\, \frac{dt}{t}\,.$$

将 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)$ 的双边界代入 (9) 和 (10)，并作变量替换，我们看到 (11) 的左侧与以下表达式可比

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{d}{\alpha}+\frac{s}{2}} \left(1 \wedge \frac{x_d}{t^{1/\alpha}}\right)^p \left(1 \wedge \frac{y_d}{t^{1/\alpha}}\right)^p \left[\left(1 \wedge \frac{t^{1+d/\alpha}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2} + \exp\left(-\frac{c|x-y|^2}{t}\right)\mathbf{1}_{\alpha=2}\right] \\ &\quad = |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\, \tau^{-1-\frac{s}{2}} \left[\left(1 \wedge \tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2} + \tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right] \\ &\qquad\qquad \times \left(1 \wedge \frac{x_d\,\tau^{1/\alpha}}{|x-y|}\right)^p \left(1 \wedge \frac{y_d\,\tau^{1/\alpha}}{|x-y|}\right)^p \end{aligned}$$

对于某些 $c > 0$，上界和下界可能不同。该积分与 [KVZ16，第 5.2] 引理中的积分类似（或与 [FMS21，（2.3）], 中的积分类似，但用 x_d 和 y_d 分别替代 $|x|$ 和 $|y|$，并用 p 替代 $-\delta$）。不过，两者仍有一些差异，尤其是在 $\alpha < 2$ 和 $p \geq \frac{\alpha}{2}$（$1+\frac{s}{2}$）的情况下，因此我们给出这些界的推导细节。

我们将证明，对于所有满足 $|T^{-\frac{1}{\alpha}}-S^{-\frac{1}{\alpha}}|\le 1$ 的 T、$S>0$，都有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge(\tau/S)^{1/\alpha}\right)^p\\&\sim\begin{cases}\left(1\wedge T^{-\frac{1}{\alpha}}\wedge S^{-\frac{1}{\alpha}}\right)^p & \text{if } T\wedge S\le 1,\\ (TS)^{-\frac{p}{\alpha}}\left[\mathbf{1}_{\alpha=2}\right.\\ \quad\left.+\left(\mathbf{1}_{p\le\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\ln(T\wedge S)\,\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+(T\wedge S)^{\frac{2p}{\alpha}-1-\frac{s}{2}}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\right] & \text{if } T\wedge S\ge 1.\end{cases}\end{aligned}$$

令 $T:=(|x-y|/x_d)^\alpha$, $S:=(|x-y|/y_d)^\alpha$，由此可轻易推出该断言。注意，上界 $|T^{-\frac{1}{\alpha}}-S^{-\frac{1}{\alpha}}|\le 1$ 来自 $|x_d-y_d|\le|x-y|$。

为证明上述断言，利用对称性，不妨假设 $S\le T$。

情形 $S\le T\le 1$。在此情形下，我们有 $S^{-\frac{1}{\alpha}}\le T^{-\frac{1}{\alpha}}+1\le 2T^{-\frac{1}{\alpha}}$，因此 $S\sim T$。于是，相关积分与下式可比：

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^{2p},$$

我们声称该式与 1 可比。事实上，

$$\begin{aligned}&\int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^{2p}\\&=\int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\sim 1,\end{aligned}$$

因为 $T\le 1$，且该积分在零点（根据假设 $\frac{s}{2}<\frac{d}{\alpha}$）和无穷远处均收敛。为得到下界，我们略去从 0 到 T 的积分；为得到上界，我们将其估计为

$$\begin{aligned}&\int_0^T \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^{2p}\\&\le\int_0^T \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}(\tau/T)^{\frac{2p}{\alpha}}\sim T^{-\frac{s}{2}+\frac{d}{\alpha}}\le 1,\end{aligned}$$

因为 $\frac{\alpha s}{2}<d\wedge(d+2p)$ 保证了积分收敛以及最后一个不等式成立。

情形 $S\le 1\le T$。在这种情况下，我们有 $S^{-\frac{1}{\alpha}}\le T^{-\frac{1}{\alpha}}+1\le 2$，因此 $S\sim 1$。于是，相关积分与.....可比

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge\tau^{1/\alpha}\right)^p,$$

并且我们断言，这与 $T^{-\frac{p}{\alpha}}$ 可比。事实上，利用 $\frac{s}{2}<\frac{d+2p}{\alpha}$，我们有 ,

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge\tau^{1/\alpha}\right)^p\\&\sim T^{-\frac{p}{\alpha}}\int_0^1 \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\tau^{\frac{2p}{\alpha}}\sim T^{-\frac{p}{\alpha}}.\end{aligned}$$

对于下界，我们舍去 1 和 ∞ 之间的积分；对于上界，我们利用 $s>0$ 和 $p<\alpha$ 的推论，在 $\alpha<2$ 时估计 $1+\frac{s}{2}-\frac{p}{\alpha}>0$，

$$\begin{aligned}&\int_1^T \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge\tau^{1/\alpha}\right)^p\\&\sim\int_1^T \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right](\tau/T)^{\frac{p}{\alpha}}\lesssim T^{-\frac{p}{\alpha}}\end{aligned}$$

并再次利用 $1+\frac{s}{2}-\frac{p}{\alpha}\geq 0$ 在 $\alpha<2$ 时，

$$\begin{aligned}&\int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge\tau^{1/\alpha}\right)^p\\&=\int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\sim T^{-1-\frac{s}{2}}\mathbf{1}_{\alpha<2}+T^{-1-\frac{s}{2}+\frac{d}{2}}e^{-cT}\mathbf{1}_{\alpha=2}\lesssim T^{-\frac{p}{\alpha}}\,.\end{aligned}$$

情形 $1\leq S\leq T$。我们在 S 和 T 处截断，将相关积分分成三部分。对于第一个积分，利用 $s<{}^{2}{}_{(d+2p)\ \alpha}$，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^S \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge(\tau/S)^{1/\alpha}\right)^p\\&=(ST)^{-\frac{p}{\alpha}}\int_0^S \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\tau^{\frac{2p}{\alpha}}\\&\sim(ST)^{-\frac{p}{\alpha}}\left(\left(\mathbf{1}_{p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+(\ln S)\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+S^{\frac{2p}{\alpha}-1-\frac{s}{2}}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\mathbf{1}_{\alpha=2}\right).\end{aligned}$$

这一项具有所声称的形式。因此，为了得到下界，我们可以去掉 S 与 ∞ 之间的积分。

我们对第二个积分取如下上界：

$$\begin{aligned}&\int_S^T \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge(\tau/S)^{1/\alpha}\right)^p\\&=T^{-\frac{p}{\alpha}}\int_S^T \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\tau^{\frac{p}{\alpha}}\\&\lesssim T^{-\frac{p}{\alpha}}\left(S^{-1-\frac{s}{2}+\frac{p}{\alpha}}\mathbf{1}_{\alpha<2}+S^{-1-\frac{s}{2}+\frac{p}{\alpha}+\frac{d}{2}}e^{-cS}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right).\end{aligned}$$

当 $\alpha<2$ 且 $p>\frac{\alpha}{2}\ (1+\frac{s}{2})$ 时，这个上界等于第一个积分的大小；而对于 $p\leq\frac{\alpha}{2}\ (1+\frac{s}{2})$，我们对 $T^{-\frac{p}{\alpha}}S^{-1-\frac{s}{2}+\frac{p}{\alpha}}\leq (TS)^{-\frac{p}{\alpha}}$ 取界。当 $\alpha=2$ 时，显然有 $T^{-\frac{p}{\alpha}}S^{-1-\frac{s}{2}+\frac{p}{\alpha}+\frac{d}{2}}e^{-cS}\lesssim (TS)^{-\frac{p}{\alpha}}$。

我们完全按照情形 $S\leq 1\leq T$ 中的方法对第三个积分取界，并得到

$$\begin{aligned}&\int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\left(1\wedge\tau^{\frac{d}{\alpha}+1}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\left(1\wedge(\tau/T)^{1/\alpha}\right)^p\left(1\wedge(\tau/S)^{1/\alpha}\right)^p\\&=\int_T^\infty \frac{d\tau}{\tau}\,\tau^{-1-\frac{s}{2}}\left[\mathbf{1}_{\alpha<2}+\tau^{\frac{d}{2}+1}\mathrm{e}^{-c\tau}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\sim T^{-1-\frac{s}{2}}\mathbf{1}_{\alpha<2}+T^{-1-\frac{s}{2}+\frac{d}{2}}e^{-cT}\mathbf{1}_{\alpha=2}\,.\end{aligned}$$

当 $\alpha<2$ 和 $p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$ 时，我们估计

$$T^{-1-\frac{s}{2}}\leq(ST)^{-\frac{1}{2}(1+\frac{s}{2})}\leq(ST)^{-\frac{p}{\alpha}}\left(\mathbf{1}_{p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+(\ln S)\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\right)$$

当 $\alpha<2$ 和 $p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$ 时，我们估计；回顾 $\frac{p}{\alpha}<1+\frac{s}{2}$，

$$T^{-1-\frac{s}{2}}\leq(ST)^{-\frac{p}{\alpha}}S^{\frac{2p}{\alpha}-1-\frac{s}{2}}\,.$$

当 $\alpha=2$ 时，我们有 $p\geq\frac{1}{2}>0$，因此 $T^{-1-\frac{s}{2}+\frac{d}{2}}e^{-cT}\lesssim(ST)^{-\frac{p}{\alpha}}$。证明至此完成。□

4. Proof of the generalized Hardy inequality (Theorem 3)

我们首先证明一个与定理 3 密切相关的定理。

定理 13. 设 $\alpha \in (0,2]$，并且当 $\alpha \in (0,2)$ 时 $\lambda \geq 0$，当 $\alpha = 2$ 时 $\lambda \geq -1/4$。设 p由式 (4) 定义。那么，若 $s \in (0, \frac{1+2p}{\alpha} \wedge \frac{2d}{\alpha})$，则有

$$\|x_d^{-\alpha s/2} L_\lambda^{-s/2} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim_{d,\alpha,\lambda,s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \qquad \text{for all } g \in L^2(\mathbb{R}^d_+)\,. \tag{14}$$

反之，若对于某个 $s \in (0, \frac{2d}{\alpha} \wedge {}^{2}\!/_{(d+2p)\,\alpha})$，(14) 成立，则 $s < \frac{1+2p}{\alpha}$。

注 14. 设 $\alpha \in (0,2)$，$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)$ 满足 (9) 中的界，其中 p 由 (4) 定义。则定理 13 的结论仍然成立。同样，(9) 中的上界（分别为下界）意味着假设 $s < \frac{1+2p}{\alpha}$ 对于 (14) 成立是充分（分别为必要）的。这可通过下文证明中的相同论证得出，同时考虑注 12。

证明的基本策略是利用定理 11，将算子 $L_\lambda^{-s/2}$ 替换为一个具有更显式核的算子。

证明。我们始终假设 α、λ 和 p 满足定理陈述中的条件，并且 $s \in (0, \frac{2d}{\alpha} \wedge {}^{2}\!/_{(d+2p)\,\alpha})$。

假设 $s < \frac{1+2p}{\alpha}$ 的必要性。我们考虑一个与 [KMV+18 第 1283] 页类似的例子。令 $w = (0,0,\ldots,2) \in \mathbb{R}^d_+$，并令 $0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，其中 $\varphi \geq 1$ 属于 $B_{1/2}(w)$。我们使用定理 11 的 (a) 部分。（更确切地说，我们还使用 (b) 部分，以说明 (a) 部分中的界对 $x_d \vee y_d < |x-y| \leq 2(x_d \vee y_d)$ 也成立。）这表明，对于满足 $|x| \leq 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^d_+$，有

$$\begin{aligned}
(L_\lambda^{-s/2}\varphi)(x) &\geq \int_{\mathbb{R}^d_+} dy\, \mathbf{1}_{|x-y|\leq 2y_d} L_\lambda^{-s/2}(x,y)\varphi(y) \\
&\gtrsim \int_{\mathbb{R}^d_+} dy\, \mathbf{1}_{|x-y|\leq 2y_d} \mathbf{1}_{|y-w|\leq \frac{1}{2}} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d} \left(1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|} \wedge \frac{y_d}{|x-y|}\right)^p \\
&\gtrsim x_d^p \int_{\mathbb{R}^d_+} dy\, \mathbf{1}_{|x-y|\leq 2y_d} \mathbf{1}_{|y-w|\leq \frac{1}{2}} \gtrsim x_d^p\,.
\end{aligned}$$

在第三个不等式中，我们用到了 $|x-y| \sim 1$ 和 $1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|} \wedge \frac{y_d}{|x-y|} \sim \frac{x_d}{|x-y|}$ 在积分域上的事实。（事实上，显然 $\frac{1}{2} \leq |x-y| \leq |x| + |y-w| + |w| \leq \frac{7}{2}$、$x_d \leq 1$ 和 $y_d \geq \frac{3}{2}$。）在第四个不等式中，我们用到了不等式 $|x-y| \leq 2y_d$ 对所有满足 $|y-w| \leq \frac{1}{2}$ 的 y 均成立这一事实。（事实上，$|x-y| \leq |x'-y'| + (y_d - x_d) \leq |x'| + |y'| + y_d$，其中 $|x'| \leq |x| \leq 1 \leq \frac{2}{3} y_d$ 和 $|y'| \leq |y-w| \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{3} y_d$。）

由此我们可以对其进行估计

$$\|x_d^{-\frac{\alpha s}{2}} L_\lambda^{-s/2}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \geq \|\mathbf{1}_{|x|\leq 1} x_d^{-\frac{\alpha s}{2}} L_\lambda^{-s/2}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \gtrsim \|\mathbf{1}_{|x|\leq 1} x_d^{p-\frac{\alpha s}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\,.$$

由于当 $s \geq \frac{1+2p}{\alpha}$ 时右侧为无穷大，因此我们看到，不等式 $s < \frac{1+2p}{\alpha}$ 是 (8) 成立的必要条件。

假设 $s < \frac{1+2p}{\alpha}$ 的充分性。我们将证明核为 $x_d^{-\overline{2}} L_\lambda^{-\overline{2}}(x,y)$ 的算子 ${}_{\alpha s}\quad {}_{s}$ 的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 有界性。根据定理 11 中的上界，只需证明核为 $K(x,y)$ 的算子的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 有界性，其中该核定义为定理 11 的界中所出现函数的 $x_d^{-}{}^{2}$ 倍。我们将其分成四个支集位于实质上互不相交集合上的部分，并证明由此得到的四个算子均有界。为此，我们按照 [KMV+18 命题 3 中的方法进行 Schur 检验。（用 s 替换 $\frac{\alpha s}{2}$，并用 σ 替换 $-p$。）这些 Schur 检验涉及权函数，而且四个不同部分所用的权函数各不相同 K。

这四个区域由 $|x-y| \le 4(x_d \wedge y_d)$、$4x_d \le |x-y| \le 4y_d$、$4y_d \le |x-y| \le 4x_d$ 和 $4(x_d \vee y_d) \le |x-y|$ 定义。在某些区域中，因子 4 会带来方便；我们注意到，按原文表述的定理 11 等价于定理 11 的一个变体，在该变体中，(a) 部分与 (b) 部分之间的区分也包含类似的因子 4。

情形 $|x-y| \le 4(x_d \wedge y_d)$。在此情形下，我们有 $1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|} \wedge \frac{y_d}{|x-y|} \sim 1$，因此核变为

$$K(x,y) \sim x_d^{-\alpha\frac{s}{2}} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d} .$$

对于 Schur 检验的前半部分，我们估计

$$\int\limits_{|x-y|\le 4(x_d\wedge y_d)} x_d^{-\alpha\frac{s}{2}} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d}\, dy \le \int\limits_{|x-y|\le 4x_d} x_d^{-\alpha\frac{s}{2}} |x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d}\, dy \lesssim 1 .$$

对于 Schur 检验的后半部分，我们注意到 $y_d \le x_d + |x-y| \le x_d + 4(x_d \wedge y_d) \le 5x_d$，因此核中的 $x_d^{-\alpha\frac{s}{2}}$ 可以替换为 $y_d^{-\alpha\frac{s}{2}}$。因此，Schur 检验的后半部分与前半部分类似，由此可推出该区域内 K 部分的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界性。

情形 $4x_d \le |x-y| \le 4y_d$。在此情形下，我们有 $1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|} \wedge \frac{y_d}{|x-y|} \sim \frac{x_d}{|x-y|}$，因此核变为

$$K(x,y) = x_d^{p-\frac{\alpha s}{2}} |x-y|^{\frac{\alpha s}{2}-d-p} .$$

我们使用权函数进行 Schur 检验

$$w(x,y) = \left(\frac{x_d}{|x-y|}\right)^{\beta} \quad \text{with } \frac{\alpha s}{2} - p < \beta < 1 + p - \frac{\alpha s}{2} .$$

假设 $s < \frac{1+2p}{\alpha}$ 保证了我们可以找到这样的 β。

对于 Schur 检验的前半部分，我们估计

$$\int\limits_{4x_d\le|x-y|\le 4y_d} w(x,y)\, K(x,y)\, dy \lesssim x_d^{-\frac{\alpha s}{2}+p+\beta} \int\limits_{|x-y|\ge x_d/4} |x-y|^{\frac{\alpha s}{2}-d-p-\beta}\, dy \lesssim 1 ,$$

其中积分的有限性源于对 β 的选取。对于 Schur 检验的后半部分，我们注意到在我们的区域内有 $|x-y| \ge y_d - x_d \ge y_d - |x-y|/4$，因此 $|x-y| \ge 4y_d/5$。我们估计

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{4x_d\le|x-y|\le 4y_d} w(x,y)^{-1}\, K(x,y)\, dx \\
&\lesssim \int\limits_{4y_d/5\le|x-y|\le 4y_d} x_d^{-\frac{\alpha s}{2}+p-\beta} |x-y|^{\frac{\alpha s}{2}-d-p+\beta}\, dx \\
&= \int\limits_{4/5\le|w|\le 4} (w_d+1)^{-\frac{\alpha s}{2}+p-\beta} |w|^{\frac{\alpha s}{2}-d-p+\beta} \mathbf{1}_{\{w_d>-1\}}\, dw < \infty ,
\end{aligned}$$

其中我们作了变量代换 $x - y = y_d w$，且积分的有限性源于对 β 的选取。由此可得该区域内 K 的部分是 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界的。

情形 $4y_d \le |x-y| \le 4x_d$。在此情形下，我们有 $1 \wedge \frac{x_d}{|x-y|} \wedge \frac{y_d}{|x-y|} \sim \frac{y_d}{|x-y|}$，因此核变为

$$K(x,y) = x_d^{-\frac{\alpha s}{2}} y_d^p |x-y|^{\frac{\alpha s}{2}-d-p} .$$

我们使用权重进行 Schur 检验

$$w(x,y)=\left(\frac{|x-y|}{y_d}\right)^{\gamma}\quad\text{with}\ -p<\gamma<1+p\,.$$

由于 $p\geq\frac{\alpha-1}{2}>-\frac{1}{2}$，可以找到这样的 γ。

与前一种情形类似（但将 x 和 y 互换），我们有 $|x-y|\geq 4x_d/5$，特别是 $y_d\leq x_d\sim|x-y|$。因此，对于 Schur 检验的前半部分，我们估计

$$\begin{aligned}\int\limits_{4y_d\leq|x-y|\leq 4x_d} w(x,y)\,K(x,y)\,dy &\lesssim x_d^{-d-p+\gamma}\int\limits_{4y_d\leq|x-y|\leq 4x_d} y_d^{p-\gamma}\,dy\\ &\leq x_d^{-d-p+\gamma}\int\limits_{|x'-y'|\leq 4x_d\,,\ y_d\leq x_d} y_d^{p-\gamma}\,dy\\ &=\int\limits_{|w'|\leq 4\,,w_d\leq 1} w_d^{p-\gamma}\,dw<\infty\,,\end{aligned}$$

其中积分有限是因为选择了 γ。对于 Schur 检验的后半部分，我们再次利用 $x_d\sim|x-y|$，得到估计：

$$\begin{aligned}\int\limits_{4y_d\leq|x-y|\leq 4x_d} w(x,y)^{-1}\,K(x,y)\,dx &\lesssim y_d^{p+\gamma}\int\limits_{|x-y|\geq 4y_d}|x-y|^{-d-p-\gamma}\,dx\\ &=\int\limits_{|w|\geq 4}|w|^{-d-p-\gamma}\,dw<\infty\,,\end{aligned}$$

其中积分有限是因为选择了 γ。由此可得，该区域内 K 的部分具有 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界性。

情形 $4(x_d\vee y_d)\leq|x-y|$。在该区域内，核为

$$\begin{aligned}K(x,y)=x_d^{-\alpha\frac{s}{2}}|x-y|^{\alpha\frac{s}{2}-d}\left(\frac{x_d\,y_d}{|x-y|^2}\right)^{p}\cdot\Bigg[&\mathbf{1}_{\alpha=2}\\ &+\left(\mathbf{1}_{p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\left(\ln\frac{|x-y|}{x_d\vee y_d}\right)\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\left(\frac{|x-y|}{x_d\vee y_d}\right)^{2p-\alpha(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\Bigg].\end{aligned}$$

我们使用权函数进行 Schur 检验

$$w(x,y)=\left(\frac{x_d}{|x-y|}\right)^{\beta}\left(\frac{|x-y|}{y_d}\right)^{\gamma}\ \text{with}\ \tfrac{\alpha s}{2}-p<\beta<1+p-\tfrac{\alpha s}{2}\,,\ -p<\gamma<1+p\,.$$

当 $\alpha<2$ 和 $p>\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{s}{2}\right)$ 时，我们还假设

$$-1-\alpha<\beta-\gamma<1+\alpha\,.$$

满足所有约束的一种可能参数取值是 $\beta=\gamma=\frac{1}{2}$。对于第一个 Schur 检验，我们估计

$$\begin{aligned}\int_{4(x_d\vee y_d)\leq|x-y|} w(x,y)K(x,y)\,dy&=\sum_{R\in 2^{\mathbb{Z}}}\int_{4(x_d\vee y_d)\leq|x-y|}\mathbf{1}_{R\leq|x-y|<2R}w(x,y)K(x,y)\,dy\\ \lesssim\sum_{2x_d<R\in 2^{\mathbb{Z}}}&\int_{\mathbb{R}^d_+}\mathbf{1}_{|x'-y'|<2R}\mathbf{1}_{2y_d<R}w_R(x,y)K_R(x,y)\,dy\,,\end{aligned}$$

其中，w_R和 K_R的定义分别为 w和 K，但每次出现的 $|x-y|$均替换为 R。对于满足 $R>2x_d$的固定 $R\in 2^{\mathbb{Z}}$，我们对 y'积分；若 $\alpha<2$和 $p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$，则估计 $x_d\vee y_d\geq y_d$。由此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d_+}\mathbf{1}_{|x'-y'|<2R}\mathbf{1}_{2y_d<R}w_R(x,y)K_R(x,y)\,dy\lesssim x_d^{-\frac{\alpha s}{2}+p+\beta}R^{\frac{\alpha s}{2}-2p-\beta+\gamma-1}\\
&\times\int_0^{R/2}dy_d\,y_d^{p-\gamma}\cdot\Bigg[\mathbf{1}_{\alpha=2}\\
&\qquad+\left(\mathbf{1}_{p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\left(\ln\frac{R}{y_d}\right)\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\left(\frac{R}{x_d\vee y_d}\right)^{2p-\alpha(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\Bigg]\\
&\lesssim x_d^{-\frac{\alpha s}{2}+p+\beta}R^{\frac{\alpha s}{2}-p-\beta}+x_d^{\alpha+\beta-\gamma+1}R^{-\alpha-\beta+\gamma-1}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{\alpha<2}\,.
\end{aligned}$$

这里，假设 $p-\gamma>-1$保证了 y_d-积分在零附近收敛。当 $\alpha<2$且 $p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$时，额外项来自 0 到 x_d之间的积分。对 R 求和后，我们得到

$$\sum_{2x_d<R\in 2^{\mathbb{Z}}}\left(x_d^{-\frac{\alpha s}{2}+p+\beta}R^{\frac{\alpha s}{2}-p-\beta}+x_d^{\alpha+\beta-\gamma+1}R^{-\alpha-\beta+\gamma-1}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{\alpha<2}\right)\sim 1\,.$$

这里，假设 $\beta>\frac{\alpha s}{2}-p$和 $\beta-\gamma>-1-\alpha$保证了 R-求和收敛。对于第二个 Schur 检验，我们类似地估计

$$\begin{aligned}
&\int_{4(x_d\vee y_d)\leq|x-y|}w(x,y)^{-1}K(x,y)\,dx\\
&\quad=\sum_{R\in 2^{\mathbb{Z}}}\int_{4(x_d\vee y_d)\leq|x-y|}\mathbf{1}_{R\leq|x-y|<2R}w(x,y)^{-1}K(x,y)\,dx\\
&\quad\lesssim\sum_{2y_d<R\in 2^{\mathbb{Z}}}\int_{\mathbb{R}^d_+}\mathbf{1}_{|x'-y'|<2R}\mathbf{1}_{2x_d<R}w_R(x,y)^{-1}K_R(x,y)\,dx\,.
\end{aligned}$$

固定 $R\in 2^{\mathbb{Z}}$ 且满足 $R>2y_d$，我们进行 x'-积分；若 $p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$，则估计 $x_d\vee y_d\geq x_d$。这样，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d_+}\mathbf{1}_{|x'-y'|<2R}\mathbf{1}_{2x_d<R}w_R(x,y)^{-1}K_R(x,y)\,dx\lesssim y_d^{p+\gamma}R^{\frac{\alpha s}{2}-2p+\beta-\gamma-1}\\
&\times\int_0^{R/2}dx_d\,x_d^{-\frac{\alpha s}{2}+p-\beta}\cdot\Bigg[\mathbf{1}_{\alpha=2}\\
&\qquad+\left(\mathbf{1}_{p\leq\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\left(\ln\frac{R}{x_d}\right)\mathbf{1}_{p=\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}+\left(\frac{R}{x_d\vee y_d}\right)^{2p-\alpha(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\Bigg]\\
&\lesssim y_d^{p+\gamma}R^{-p-\gamma}+y_d^{\alpha-\beta+\gamma+1}R^{-\alpha+\beta-\gamma-1}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{\alpha<2}\,.
\end{aligned}$$

这里，假设 $\beta<1+p-\frac{\alpha s}{2}$保证了 x_d-积分在零附近收敛。当 $\alpha<2$且 $p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})$时，额外项来自 0 到 y_d之间的积分。

对 R 求和，得到

$$\sum_{2y_d<R\in 2^{\mathbb{Z}}}\left(y_d^{p+\gamma}R^{-p-\gamma}+y_d^{\alpha-\beta+\gamma+1}R^{-\alpha+\beta-\gamma-1}\mathbf{1}_{p>\frac{\alpha}{2}(1+\frac{s}{2})}\mathbf{1}_{\alpha<2}\right)\sim 1\,.$$

这里，假设 $\gamma > -p$ 和 $\beta - \gamma < 1 + \alpha$ 保证了 R级数的收敛性。至此，Schur 检验完成，我们推出 K 在最后这个区域内的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$有界性。□

要由定理 13 推出定理 3，我们需要以下引理。

引理 15. 设 $\alpha, s \in (0,2]$ and $\lambda \geq \lambda_*$. 则 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ ⊂属于定义域 $L_\lambda^{s/2}$。

证明. 由于定义域随着 s 的减小而嵌套，只需考虑 $s = 2$ 的情形。 $\alpha = 2$ 的情形是经典结果，因此我们可以假设 $\alpha < 2$。令 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$。根据 Friedrichs 扩张的定义，我们需要找到一个 $g \in L^2(\mathbb{R}^d_+)$，使得

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\,\mathcal{A}(d,-\alpha)\iint_{\mathbb{R}^d_+\times\mathbb{R}^d_+}\frac{(\overline{u(x)}-\overline{u(y)})(f(x)-f(y))}{|x-y|^{d+\alpha}}\,dx\,dy+\lambda\int_{\mathbb{R}^d_+}\frac{\overline{u(x)}f(x)}{x_d^\alpha}\,dx\\&=\int_{\mathbb{R}^d_+}\overline{u(x)}g(x)\,dx\end{aligned}$$

对所有 $u \in C_c^1(\mathbb{R}^d_+)$ 均成立。通过将注 7 中的计算极化，并将 f 和 u 都视为以零延拓至 $\mathbb{R}^d$ 的函数，我们发现这等价于

$$\int_{\mathbb{R}^d}\overline{(-\Delta)^{\alpha/4}u(x)}(-\Delta)^{\alpha/4}f(x)\,dx+(\lambda-\lambda_0)\int_{\mathbb{R}^d_+}\frac{\overline{u(x)}f(x)}{x_d^\alpha}\,dx=\int_{\mathbb{R}^d_+}\overline{u(x)}g(x)\,dx\,.$$

取 $g := ((-\Delta)^{\alpha/2}f)|_{\mathbb{R}^d_+} + (\lambda-\lambda_0)x_d^{-\alpha}f$ 即可。事实上，第一项属于 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$，因为 $|\xi|^\alpha\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$；第二项也属于其中，因为 $x_d^{-\alpha}$ 在 f 的支集上有界。证明完毕。□

定理 3 的证明。由引理 15，对于给定的 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$， $g := L_\lambda^{s/2}f \in L^2(\mathbb{R}^d_+)$，因此定理 3 可由定理 13 得出。□

注 16。不调用引理 15，采用相同的证明即可得出，在定理 3 的假设下，广义 Hardy 不等式 (8) 对所有 $f \in \operatorname{dom} L_\lambda^{s/2}$ 均成立。

5. Difference of heat kernels

证明反向 Hardy 不等式（定理 5）的一个关键工具，是关于 L_0 和 L_λ 的热核之差的界，即，

$$K_t^\alpha(x,y) := \mathrm{e}^{-tL_0}(x,y) - \mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)\,.$$

给定 $\alpha \in (0,2]$ 和 $\lambda \geq \lambda_*$，令 p 由 (4) 定义，并设

$$q := \min\{p, (\alpha-1)_+\}\,.$$

我们用以下函数来表述这些界

$$\begin{aligned}J_t^\alpha(x,y) := \left(\mathbf{1}_{x_d\vee y_d\leq t^{1/\alpha}} + \mathbf{1}_{x_d\vee y_d\geq t^{1/\alpha}}\mathbf{1}_{|x-y|\geq(x_d\wedge y_d)/2}\right)\left(1\wedge\frac{x_d}{t^{1/\alpha}}\right)^q\left(1\wedge\frac{y_d}{t^{1/\alpha}}\right)^q\\\times\, t^{-\frac{d}{\alpha}}\left[\left(1\wedge\frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right)\mathbf{1}_{\alpha=2}\right]\end{aligned}$$

并且，对于某个适当的常数 $c > 0$,

$$\begin{aligned}M_t^\alpha(x,y) := \mathbf{1}_{x_d\vee y_d\geq t^{1/\alpha}}\mathbf{1}_{|x-y|\leq(x_d\wedge y_d)/2}\\\times\frac{t^{1-\frac{d}{\alpha}}}{(x_d\vee y_d)^\alpha}\left[\left(1\wedge\frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}+\exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right)\mathbf{1}_{\alpha=2}\right].\end{aligned}$$

定理 17. 设 $\alpha \in (0,2]$，且当 $\alpha \in (0,2)$ 时，$\lambda \geq 0$；当 $\alpha = 2$ 时，$\lambda \geq -1/4$。那么，对于所有 x、$y \in \mathbb{R}^d_+$ 和 $t > 0$，有

$$|K^\alpha_t(x,y)| \lesssim J^\alpha_t(x,y) + M^\alpha_t(x,y)\,. \tag{15}$$

注 18. 令 $\alpha \in (0,2)$，$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $\mathrm{e}^{-tL_\lambda}(x,y)$ 满足 (9) 中的上界，其中 p 由 (4) 定义。则 (15) 仍然成立。这可由下文证明中的相同论证得出。

证明. 不失一般性，假设 $\lambda \neq 0$，因为当 $\lambda = 0$时结论显然成立。通过缩放，只需考虑 $t = 1$；又由对称性，只需考虑 $x_d \leq y_d$。现在我们在 K^α_t、J^α_t 和 M^α_t 中省略下标 t。

由三角不等式以及界 (9) 和 (10)，我们得到

$$\begin{aligned}|K^\alpha(x,y)| \lesssim{}& \left[(1\wedge x_d)^p\,(1\wedge y_d)^p + (1\wedge x_d)^{(\alpha-1)_+}\,(1\wedge y_d)^{(\alpha-1)_+}\right]\\ &\times\left[\left(1\wedge|x-y|^{-d-\alpha}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2} + \mathrm{e}^{-c|x-y|^2}\mathbf{1}_{\alpha=2}\right].\end{aligned}$$

为了得到一个上界，我们可以将两个指数 p 和 $(\alpha-1)_+$ 都替换为 q，从而在 $y_d \leq 1$ 以及 $y_d \geq 1$ 和 $|x-y| \geq x_d/2$成立的区域内得到所声称的界。

下面我们重点考察 $y_d \geq 1$ 和 $|x-y| \leq x_d/2$ 成立的区域。注意，在该区域内，我们有 $y_d \leq x_d + |x-y| \leq (3/2)x_d$，因此 $x_d \sim y_d \geq 1$。

根据杜哈梅尔公式，即，

$$\mathrm{e}^{-L_0} - \mathrm{e}^{-L_\lambda} = \lambda\int_0^1 ds\,\mathrm{e}^{-(1-s)L_0}x_d^{-\alpha}\mathrm{e}^{-sL_\lambda}\,,$$

以及估计式 (9) 和 (10)，我们得出

$$\begin{aligned}|K^\alpha(x,y)| \lesssim{}& \int_0^1 ds\int_{\mathbb{R}^d_+}\frac{dz}{z_d^\alpha}s^{-\frac{d}{\alpha}}(1-s)^{-\frac{d}{\alpha}}\left(1\wedge\frac{z_d}{(1-s)^{1/\alpha}}\right)^{(\alpha-1)_+}\left(1\wedge\frac{z_d}{s^{1/\alpha}}\right)^p\\ &\times\left[\left(1\wedge\frac{(1-s)^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-z|^{d+\alpha}}\right)\left(1\wedge\frac{s^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|y-z|^{d+\alpha}}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\right.\\ &\left.+\exp\left(-c\left(\frac{|x-z|^2}{1-s}+\frac{|y-z|^2}{s}\right)\right)\mathbf{1}_{\alpha=2}\right].\end{aligned}$$

注意，这里我们省略了因子

$$\left(1\wedge\frac{x_d}{(1-s)^{1/\alpha}}\right)^{(\alpha-1)_+}\left(1\wedge\frac{y_d}{s^{1/\alpha}}\right)^p \sim 1\,, \tag{16}$$

因为 $x_d \sim y_d \geq 1$ 和 $s \in [0,1]$。

我们将 z 积分在 $z_d = x_d/2$ 处分开，从而得到如下界

$$|K^\alpha(x,y)| \lesssim k^\alpha_<(x,y) + k^\alpha_>(x,y)$$

with

$$\begin{aligned}k^\alpha_>(x,y) :={}& \int_0^1 ds\int_{z_d>x_d/2}\frac{dz}{z_d^\alpha}\,s^{-\frac{d}{\alpha}}(1-s)^{-\frac{d}{\alpha}}\left(1\wedge\frac{z_d}{(1-s)^{1/\alpha}}\right)^{(\alpha-1)_+}\left(1\wedge\frac{z_d}{s^{1/\alpha}}\right)^p\\ &\times\left[\left(1\wedge\frac{(1-s)^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-z|^{d+\alpha}}\right)\left(1\wedge\frac{s^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|y-z|^{d+\alpha}}\right)\mathbf{1}_{\alpha<2}\right.\\ &\left.+\exp\left(-c\left(\frac{|x-z|^2}{1-s}+\frac{|y-z|^2}{s}\right)\right)\mathbf{1}_{\alpha=2}\right].\end{aligned}$$

$k_<^\alpha$ 的情形也类似。

我们分别讨论 $k_<^\alpha$ 和 $k_>^\alpha$，并从后者开始。我们估计 $z_d^{-\alpha} \lesssim x_d^{-\alpha} \lesssim y_d^{-\alpha}$，并估计

$$\left(1 \wedge \frac{z_d}{(1-s)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{(\alpha-1)_+} \left(1 \wedge \frac{z_d}{s^{1/\alpha}}\right)^p \le \left(1 \wedge \frac{z_d}{(1-s)^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^q \left(1 \wedge \frac{z_d}{s^{1/\alpha}}\right)^q .$$

现在，我们将 z_d 积分的范围扩大到整个 $(0,\infty)$，并重新加入平凡因子 (16)，但将两个指数都替换为 q。注意到 q 是与算子 $L_{-\lambda_-}$ 对应的指数（其中 $\lambda_- = (-\lambda) \vee 0$），由此可得

$$\begin{aligned} k_>^\alpha(x,y) &\lesssim \frac{1}{y_d^\alpha} \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}^d_+} dz\, \mathrm{e}^{-(1-s)L_{-\lambda_-}}(x,z) \mathrm{e}^{-sL_{-\lambda_-}}(z,y) = \frac{1}{y_d^\alpha} \int_0^1 ds\, \mathrm{e}^{-L_{-\lambda_-}}(x,y) \\ &\sim M^\alpha(x,y)\,, \end{aligned}$$

这里我们利用了 $\exp(-sL_{-\lambda_-})$ 的半群性质和热核界，并再次省略了如 (16) 中的平凡因子（指数为 q）。

剩下需要处理 $k_<^\alpha$，这里我们对 $z_d < x_d/2$ 积分。我们先讨论 $\alpha < 2$ 的情形。首先进行 z' 积分。利用如下事实可以简化计算：根据积分中截断函数的选取，$|x_d - z_d| \sim x_d$；类似地，$|y_d - z_d| \sim y_d \sim x_d$（因为 $|z_d| \le x_d/2 \le y_d/2$）。因此，$|x-z| \sim |x'-z'| + x_d$ 且 $|y-z| \sim |y'-z'| + x_d$，待计算的积分可比于

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dz' \left(1 \wedge \frac{(1-s)^{1+\frac{d}{\alpha}}}{x_d^{d+\alpha} + |x'-z'|^{d+\alpha}}\right) \left(1 \wedge \frac{s^{1+\frac{d}{\alpha}}}{x_d^{d+\alpha} + |y'-z'|^{d+\alpha}}\right). \tag{17}$$

利用 $s \in [0,1]$ 和 $x_d \sim y_d \ge 1$，我们对被积函数进行化简，

$$1 \wedge \frac{(1-s)^{1+\frac{d}{\alpha}}}{x_d^{d+\alpha} + |x'-z'|^{d+\alpha}} \sim \frac{(1-s)^{1+\frac{d}{\alpha}}}{x_d^{d+\alpha} + |x'-z'|^{d+\alpha}}$$

and

$$1 \wedge \frac{s^{1+\frac{d}{\alpha}}}{x_d^{d+\alpha} + |y'-z'|^{d+\alpha}} \sim \frac{s^{1+\frac{d}{\alpha}}}{x_d^{d+\alpha} + |y'-z'|^{d+\alpha}}\,.$$

利用引理 22，我们看到积分 (17) 与下式可比

$$s^{1+\frac{d}{\alpha}}(1-s)^{1+\frac{d}{\alpha}} \frac{x_d^{-\alpha-1}}{x_d^{d+\alpha} + |x'-y'|^{d+\alpha}}\,.$$

为了得到上界，可以去掉分母中的项 $|x'-y'|$。因此，我们已经证明

$$k_<^\alpha(x,y) \lesssim x_d^{-d-2\alpha-1} \int_0^1 ds \int_0^{x_d/2} \frac{dz_d}{z_d^\alpha}\, s(1-s) \left(1 \wedge \frac{z_d}{(1-s)^{1/\alpha}}\right)^{(\alpha-1)_+} \left(1 \wedge \frac{z_d}{s^{1/\alpha}}\right)^p .$$

接下来，固定 $z_d \in [0, x_d/2]$，对 s 积分。由 $s \le 1/2$ 得到的积分为

$$\sim \int_0^{1/2} ds\, s\, (1 \wedge z_d)^{(\alpha-1)_+} \left(1 \wedge \frac{z_d}{s^{1/\alpha}}\right)^p \sim (1 \wedge z_d)^{(\alpha-1)_+ + p}\,.$$

这里我们使用了 $p < \alpha$。类似地，由 $s \ge 1/2$ 得到的积分为

$$\sim \int_{1/2}^1 ds\, (1-s) \left(1 \wedge \frac{z_d}{(1-s)^{1/\alpha}}\right)^{(\alpha-1)_+} (1 \wedge z_d)^p \sim (1 \wedge z_d)^{(\alpha-1)_+ + p}\,.$$

由此得到如下界

$$k^\alpha_<(x,y) \lesssim x_d^{-d-2\alpha-1} \int_0^{x_d/2} \frac{dz_d}{z_d^\alpha} \, (1\wedge z_d)^{(\alpha-1)_+ + p} \\ \sim x_d^{-d-2\alpha-1} \left(\mathbf{1}_{\alpha\geq 1} + (\ln(1+x_d))\mathbf{1}_{\alpha=1} + x_d^{1-\alpha}\mathbf{1}_{\alpha<1} \right).$$

在上一步计算中，我们用到了这样一个事实：若 $\alpha \geq 1$，则 $p>0$ （注意，对于 $\alpha=1$，由假设 $\lambda>\lambda_*=0$ 可保证该不等式成立）；若 $\alpha<1$，则 $p-\alpha \geq \frac{\alpha-1}{2} - \alpha > -1$。最后，我们注意到，由于 $x_d \gtrsim 1$,

$$x_d^{-d-2\alpha-1} \left(\mathbf{1}_{\alpha\leq 1} + (\ln(1+x_d))\mathbf{1}_{\alpha=1} + x_d^{1-\alpha}\mathbf{1}_{\alpha<1} \right) \lesssim x_d^{-\alpha} \left(1 \wedge x_d^{-d-\alpha} \right).$$

由于 $x_d \sim y_d$ 和 $x_d/2 \geq |x-y|$，我们推得，当 $\alpha<2$ 时， $k^\alpha_<(x,y) \lesssim M^\alpha(x,y)$.

剩下需要处理的是情形 $\alpha = 2$。论证类似，但稍简单一些。z'-积分可以显式计算，得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dz' \, \exp\left(-c \left(\frac{|x-z|^2}{1-s} + \frac{|y-z|^2}{s} \right) \right) \\ = \text{const} \; s^{\frac{d-1}{2}} (1-s)^{\frac{d-1}{2}} \exp\left(-c \left(|x'-y'|^2 + \frac{(x_d-z_d)^2}{1-s} + \frac{(y_d-z_d)^2}{s} \right) \right).$$

对于 $s\in[0,1]$ 以及所有 x_d、 y_d、 $z_d \geq 0$，我们有以下估计

$$\frac{(x_d-z_d)^2}{1-s} + \frac{(y_d-z_d)^2}{s} \geq (x_d-z_d)^2 + (y_d-z_d)^2 \geq \frac{1}{2}(x_d-y_d)^2 .$$

此外，与之前一样，利用限制条件 $z_d < x_d/2$ 和 $y_d \geq x_d$,

$$\frac{(x_d-z_d)^2}{1-s} + \frac{(y_d-z_d)^2}{s} \geq (x_d-z_d)^2 + (y_d-z_d)^2 \gtrsim x_d^2 .$$

结合这两个界可得

$$\exp\left(-c \left(|x'-y'|^2 + \frac{(x_d-z_d)^2}{1-s} + \frac{(y_d-z_d)^2}{s} \right) \right) \leq \exp(-\tilde{c} x_d^2) \exp\left(-\frac{c}{4}|x-y|^2 \right) \\ \lesssim x_d^{-2} \exp\left(-\frac{c}{4}|x-y|^2 \right) = M^2(x,y) ,$$

其中， $M^2(x,y)$现在定义为 c，其值为热核界中常数的四分之一。（显然，若减小 c，关于 $k^2_>$ 的界仍然成立。）

因此，要证明 $k^2_<(x,y) \lesssim M^2(x,y)$，只需证明

$$\int_0^1 ds \int_0^{x_d/2} \frac{dz_d}{z_d^2} \, s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} \left(1 \wedge \frac{z_d}{(1-s)^{1/2}} \right) \left(1 \wedge \frac{z_d}{s^{1/2}} \right)^p \lesssim 1 .$$

T为证明这一点，我们先在固定 $z_d \in [0, x_d/2]$ 的情况下对 s 作积分，得到

$$\int_0^1 ds \, s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} \left(1 \wedge \frac{z_d}{(1-s)^{1/2}} \right) \left(1 \wedge \frac{z_d}{s^{1/2}} \right)^p \\ \sim (1\wedge z_d)^{p+1} \left(1 + \ln(1+\tfrac{1}{z_d}) \right) \mathbf{1}_{p\leq 1} + (1\wedge z_d)^2 \mathbf{1}_{p>1} .$$

我们省略这一计算的细节。由于右侧乘以 z_d^{-2} 后在 $(0,\infty)$ 上可积（对于 $p\leq 1$，我们使用 $p>1/2>0$），因此得到所声称的界。□

6. Proof of the reversed Hardy inequality (Theorem 5)

定理 5 的证明。步骤 1。关于 $s=2$ 的断言由 $L_\lambda - L_0 = \lambda x_d^{-\alpha}$ 得出。下文中我们假设 $0<s<2$ 和 $\lambda \neq 0$。根据谱定理，对于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，我们有：

$$\begin{aligned}\left(L_\lambda^{s/2} - L_0^{s/2}\right) f &= -\frac{1}{\Gamma(-s/2)} \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-s/2} \left(e^{-tL_0} - e^{-tL_\lambda}\right) f \\ &= -\frac{1}{\Gamma(-s/2)} \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-s/2} \int_{\mathbb{R}^d_+} dy\, K_t^\alpha(\cdot, y) f(y)\,.\end{aligned}$$

（这里我们使用引理 15，它保证 $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+) \subset \operatorname{dom} L_\lambda^{s/2} \cap \operatorname{dom}\ L_0^{s/2}$。）记 $g(y) := y_d^{-\alpha s/2} |f(y)|$，只需证明右侧

$$\left\| \left(L_\lambda^{s/2} - L_0^{s/2}\right) f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim \left\| \int_{\mathbb{R}^d_+} dy \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{s}{2}} K_t^\alpha(\cdot, y) y_d^{\alpha\frac{s}{2}} g(y) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}$$

被 $\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}$ 的某个倍数所控制。根据定理 17 的逐点界，只需证明与核

$$\int_0^\infty dt\, t^{-1-s/2} \left(J_t^\alpha(x,y) + M_t^\alpha(x,y)\right) y_d^{\alpha s/2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^d_+, \tag{18}$$

相关的算子在 () 上有界，其中 M_t^α和 J_t^α在上一节中定义。下面分两步证明这一 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界性，从而完成定理 5 的证明。

步骤 2。我们先考虑来自 (18) 中 M_t^α-部分的核。如定理 17 的证明中所述，在 $M_t^\alpha(x, y)$ 的支集上有 $x_d \sim y_d$。因此，

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{s}{2}}\, M_t^\alpha(x,y) y_d^{\frac{\alpha s}{2}} \sim \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{s}{2}}\, M_t^\alpha(x,y) (x_d y_d)^{\frac{\alpha s}{4}}.$$

这样就将核替换为对称核，我们只需进行一次 Schur 检验，而不是两次。于是得到

$$\begin{aligned}&\sup_{x\in\mathbb{R}^d_+} \int_{\mathbb{R}^d_+} dy \int_0^\infty \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{s}{2}}\, M_t^\alpha(x,y) (x_d y_d)^{\frac{\alpha s}{4}} \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^d_+} \int_{y_d \sim x_d} dy \int_{t \le (x_d \vee y_d)^\alpha} \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{s}{2}} (x_d y_d)^{\frac{\alpha s}{4}} \\ &\qquad \times \frac{t^{1-\frac{d}{\alpha}}}{(x_d \vee y_d)^\alpha} \left[\left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \mathbf{1}_{\alpha<2} + \exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \mathbf{1}_{\alpha=2} \right] \\ &\lesssim \sup_{x\in\mathbb{R}^d_+} x_d^{\frac{\alpha s}{2}-\alpha} \int_{y_d \sim x_d} dy \int_{t \lesssim x_d^\alpha} \frac{dt}{t}\, t^{-\frac{s}{2}+1-\frac{d}{\alpha}} \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right).\end{aligned}$$

现在我们交换积分次序，先对 y 积分。我们估计

$$\int_{y_d \sim x_d} dy \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \le \int_{\mathbb{R}^d} dy \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \sim t^{\frac{d}{\alpha}}.$$

因此，上述关于 $x \in \mathbb{R}^d_+$ 的上确界为 . $\sup_{x\in\mathbb{R}^d_+} x_d^{\frac{\alpha s}{2}-\alpha} \int_0^{C x_d^\alpha} dt\, t^{-\frac{s}{2}} < \infty$。由此，Schur 检验推出相应算子的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界性。

步骤 3。现在我们研究来自 (18) 的 J_t^α 部分的核。两个预备步骤将简化我们的计算。首先，如果 $\alpha = 2$ 我们对 $\exp\left(-c\frac{|x-y|^2}{t}\right) \lesssim 1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}$ 进行界定。其次，我们将两个因子 $(1 \wedge \dots)^q$ 分别替换为 $(1 \wedge \dots)^{-r}$，其中

$$-r := q \wedge 0\,,$$

˜其中回顾一下 $q = \min\{p, (\alpha-1)_+\}$。因此，$J_t^\alpha \le J_t^\alpha$其中

$$\tilde{J}_t^\alpha(x,y) := \left(\mathbf{1}_{x_d \vee y_d \le t^{1/\alpha}} + \mathbf{1}_{x_d \vee y_d \ge t^{1/\alpha}} \mathbf{1}_{|x-y| \ge (x_d \wedge y_d)/2}\right) \left(1 \wedge \frac{x_d}{t^{1/\alpha}}\right)^{-r} \left(1 \wedge \frac{y_d}{t^{1/\alpha}}\right)^{-r} \times t^{-\frac{d}{\alpha}} \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right),$$

˜因此，只需证明用 J_t^α 替代 J_t^α 后的断言即可。
为此，我们引入截断函数 $\mathbf{1}_{x_d \vee y_d \le t^{1/\alpha}}$ 和 $\mathbf{1}_{x_d \vee y_d \ge t^{1/\alpha}}$，并分别估计这两项。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dt\, t^{-1-\frac{s}{2}} \tilde{J}_t^\alpha(x,y)\, \mathbf{1}_{x_d \vee y_d \le t^{1/\alpha}}\, y_d^{\frac{\alpha s}{2}} \\
&\sim y_d^{\frac{\alpha s}{2}} (x_d y_d)^{-r} \int_{(x_d \vee y_d)^\alpha}^\infty dt\, t^{-1-\frac{s}{2}+\frac{2r}{\alpha}-\frac{d}{\alpha}} \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \\
&\lesssim y_d^{\frac{\alpha s}{2}} (x_d y_d)^{-r} \left[(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^{-\frac{\alpha s}{2}+2r-d} + \mathbf{1}_{x_d \vee y_d \le |x-y|} |x-y|^{-d-\alpha} (x_d \vee y_d)^{2r+\alpha-\frac{\alpha s}{2}}\right].
\end{aligned}$$

这里的第一项来自从 $(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^\alpha$ 到 ∞的 t-积分。该积分收敛，因为 $-\frac{s}{2} + \frac{2r}{\alpha} - \frac{d}{\alpha} < 0$。（注意，$s > 0$ 和 $2r \le (1-\alpha)_+ < 1$。）第二项来自对 $(x_d \vee y_d)^\alpha$ 与 $|x-y|^\alpha$之间积分的一个上界；事实上，来自对 0 与 $|x-y|^\alpha$之间积分的一个上界。该积分收敛，因为$-\frac{s}{2} + \frac{2r}{\alpha} + 1 > 0$。

上述界可以简化，因为（利用 $r \ge 0$）

$$\mathbf{1}_{x_d \vee y_d \le |x-y|} |x-y|^{-d-\alpha} (x_d \vee y_d)^{2r+\alpha-\frac{\alpha s}{2}} \le (|x-y| \vee x_d \vee y_d)^{-\frac{\alpha s}{2}+2r-d}\,.$$

现在我们来讨论 $\{x_d \vee y_d \ge t^{1/\alpha}\}$ 对 $\tilde{J}_t^\alpha$ 的贡献。我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dt\, t^{-1-\frac{s}{2}} \tilde{J}_t^\alpha(x,y)\, \mathbf{1}_{x_d \vee y_d \ge t^{1/\alpha}}\, y_d^{\frac{\alpha s}{2}} \\
&\sim y_d^{\frac{\alpha s}{2}} \int_0^{(x_d \vee y_d)^\alpha} dt\, t^{-1-\frac{s}{2}-\frac{d}{\alpha}} \left(1 \wedge \frac{x_d \wedge y_d}{t^{1/\alpha}}\right)^{-r} \left(1 \wedge \frac{t^{1+\frac{d}{\alpha}}}{|x-y|^{d+\alpha}}\right) \mathbf{1}_{|x-y| \ge (x_d \wedge y_d)/2} \\
&\le y_d^{\frac{\alpha s}{2}} |x-y|^{-d-\alpha} \int_0^{(x_d \vee y_d)^\alpha} dt\, t^{-\frac{s}{2}} \left(1 \wedge \frac{x_d \wedge y_d}{t^{1/\alpha}}\right)^{-r} \mathbf{1}_{|x-y| \ge (x_d \wedge y_d)/2} \\
&\lesssim y_d^{\frac{\alpha s}{2}} |x-y|^{-d-\alpha} \left[(x_d \wedge y_d)^{\alpha-\frac{\alpha s}{2}} + (x_d \wedge y_d)^{-r} (x_d \vee y_d)^{r+\alpha-\frac{\alpha s}{2}}\right] \mathbf{1}_{|x-y| \ge (x_d \wedge y_d)/2}\,.
\end{aligned}$$

这里的第一项来自从 0 到 $(x_d \wedge y_d)^\alpha$ 的积分。由于 $s < 2$，该积分收敛。第二项来自对从 $(x_d \wedge y_d)^\alpha$ 到 $(x_d \vee y_d)^\alpha$ 的积分的一个上界；实际上，它来自对从 0 到 $(x_d \vee y_d)^\alpha$ 的积分的一个上界。由于 $-\frac{s}{2} + \frac{r}{\alpha} > -1$，该积分收敛。

利用 $r \ge 0$，上述界可以简化为

$$(x_d \wedge y_d)^{\alpha-\frac{\alpha s}{2}} \le (x_d \wedge y_d)^{-r} (x_d \vee y_d)^{r+\alpha-\frac{\alpha s}{2}}\,.$$

综上，我们已经证明

$$\int_0^\infty dt\, t^{-1-\frac{s}{2}} \tilde{J}_t^\alpha(x,y)\, y_d^{\frac{\alpha s}{2}} \lesssim y_d^{\frac{\alpha s}{2}} (x_d y_d)^{-r} (|x-y| \vee x_d \vee y_d)^{-\frac{\alpha s}{2}+2r-d} + y_d^{\frac{\alpha s}{2}} |x-y|^{-d-\alpha} (x_d \wedge y_d)^{-r} (x_d \vee y_d)^{r+\alpha-\frac{\alpha s}{2}} \mathbf{1}_{|x-y|\geq (x_d\wedge y_d)/2}.$$

我们断言这是

$$\lesssim \left(\frac{|x-y| \vee x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x-y| \vee (x_d \wedge y_d))^{d+\alpha}}\,. \tag{19}$$

事实上，对于涉及 s 的项，这可由 $y_d \leq x_d \vee y_d \leq |x-y| \vee x_d \vee y_d$ 得出；对于涉及 r 的项，则可由 $r \geq 0$ 得出，并且

$$\frac{|x-y| \vee x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}} \geq \frac{x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}} = \sqrt{\frac{x_d \vee y_d}{x_d \wedge y_d}}\,.$$

此外，

$$(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^{-d} \leq \frac{(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x-y| \vee (x_d \wedge y_d))^{d+\alpha}}\,,$$

and

$$|x-y|^{-d-\alpha} (x_d \vee y_d)^{\alpha-\frac{\alpha s}{2}} \mathbf{1}_{|x-y|\geq (x_d\wedge y_d)/2} \lesssim \frac{(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^{\alpha-\frac{\alpha s}{2}}}{(|x-y| \vee (x_d \wedge y_d))^{d+\alpha}}\,.$$

这证明 (19) 是所关注量的一个上界。现在，由下文的命题 19 可得所断言的 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界性，注意到 $r \leq (1-\alpha)_+/2 < 1/2$。□

命题 19. 设 $\alpha > 0$ 和 $0 \leq r < \frac{1}{2}$。则具有如下积分核的积分算子

$$\left(\frac{|x-y| \vee x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{(|x-y| \vee x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x-y| \vee (x_d \wedge y_d))^{d+\alpha}}$$

在 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 上有界。

证明。步骤 1。我们将命题中的核记为 $k(x,y)$。作为主要论证的预备步骤，我们先对 $\mathbb{R}^{d-1}$ 变量进行积分。我们断言

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dy'\, k(x,y) \lesssim \left(\frac{x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{(x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x_d - y_d| \vee (x_d \wedge y_d))^{1+\alpha}}\,. \tag{20}$$

注意，右侧的核是命题中 $d=1$ 情形对应的核。（事实上，有 $|x_d - y_d| \leq x_d \vee y_d$，因此 $x_d \vee y_d = |x_d - y_d| \vee x_d \vee y_d$。）

为证明 (20)，我们区分 $|x-y| \gtrless x_d \vee y_d$ 的区域。我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} dy'\, k(x,y) \lesssim \left(\frac{x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \int_{|x'-y'|<x_d\vee y_d} dy' \frac{(x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x'-y'| \vee |x_d - y_d| \vee (x_d \wedge y_d))^{d+\alpha}} + \int_{|x-y|>x_d\vee y_d} dy' \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{|x-y|^d}\,. \tag{21}$$

在第一个积分中，我们对 $y' = x' + (|x_d - y_d| \vee (x_d \wedge y_d))w$ 作缩放，得到

$$\left(\frac{x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \int_{|x'-y'|<x_d\vee y_d} dy' \frac{(x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x'-y'| \vee |x_d - y_d| \vee (x_d \wedge y_d))^{d+\alpha}} = \left(\frac{x_d \vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{(x_d \vee y_d)^\alpha}{(|x_d - y_d| \vee (x_d \wedge y_d))^{1+\alpha}} \int_{|w|<(x_d\vee y_d)/(|x_d-y_d|\vee(x_d\wedge y_d))} \frac{dw}{(|w| \vee 1)^{d+\alpha}}\,.$$

将后一个积分用一个常数界定，我们得到一个形如 (20) 的项。

现在转向 (21) 中的第二个积分，并断言

$$\int_{|x-y|>x_d\vee y_d} dy' \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{|x-y|^d} \lesssim \left(\frac{x_d\vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{x_d\vee y_d}\,. \tag{22}$$

由于 $|x_d-y_d|\vee(x_d\wedge y_d)\le x_d\vee y_d$，这就证明了 (20)。

为证明 (22)，我们首先将积分限制在 $|x'-y'|>(x_d\vee y_d)/2$，并通过变量代换 $y'=x'+|x_d-y_d|w$ 得到，

$$\begin{aligned}
&\int_{|x'-y'|>(x_d\vee y_d)/2} dy' \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{|x-y|^d} \\
&= \frac{|x_d-y_d|^{2r-1}}{(x_d y_d)^r} \int_{|w|>(x_d\vee y_d)/(2|x_d-y_d|)} \frac{dw}{(1+|w|^2)^{(d-2r)/2}} \\
&\sim \left(\frac{x_d\vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} (x_d\vee y_d)^{-1}\,.
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $r<\frac12$。这个界的形式与 (22) 相同。

剩下的工作是计算 (22) 中的积分，其中限制条件 $|x-y|>x_d\vee y_d$ 被替换为 $|x'-y'|\le(x_d\vee y_d)/2$。在后一范围内，我们有

$$\tfrac14(x_d\vee y_d)^2+|x_d-y_d|^2\ge|x-y|^2\ge(x_d\vee y_d)^2\,,$$

因此 $|x_d-y_d|\gtrsim x_d\vee y_d$。显然，$|x_d-y_d|\le x_d\vee y_d$，从而 $|x-y|\sim x_d\vee y_d$。于是，

$$\begin{aligned}
&\int_{2|x'-y'|\le x_d\vee y_d<|x-y|} dy' \left(\frac{|x-y|}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{|x-y|^d} \\
&\sim \left(\frac{x_d\vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{(x_d\vee y_d)^d} \int_{2|x'-y'|\le x_d\vee y_d<|x-y|} dy' \\
&\lesssim \left(\frac{x_d\vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{1}{x_d\vee y_d}\,,
\end{aligned}$$

这再次具有（22）的形式。至此，（20）的证明完成。

步骤 2。我们对核由（20）右侧给出的算子进行加权 Schur 检验。我们选择如下权函数

$$w(x,y)=\left(\frac{x_d}{y_d}\right)^{\beta} \qquad \text{with } r<\beta<1-r\,.$$

由于 $r<\frac12$，因此可以找到这样的 β。

对于 Schur 检验的第一部分，我们利用（20）来估计

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d_+} dy\, w(x,y)k(x,y) &\sim \int_0^\infty dy_d \left(\frac{x_d}{y_d}\right)^{\beta} \left(\frac{x_d\vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{(x_d\vee y_d)^\alpha}{(|x_d-y_d|\vee(x_d\wedge y_d))^{1+\alpha}} \\
&= \int_0^\infty dt\, t^{-\beta-r} \frac{(1\vee t)^{\alpha+2r}}{(|1-t|\vee(1\wedge t))^{1+\alpha}} \\
&\sim \int_0^\infty dt\, t^{-\beta-r}(1\wedge t^{-1+2r}) < \infty\,.
\end{aligned}$$

最后一个积分的有限性依赖于假设 $r<\beta<1-r$。

对于 Schur 检验的第二部分，我们注意到，根据对称性，将 dy' 替换为 dx' 后，(20) 仍然成立。因此，

$$\int_{\mathbb{R}^d_+} dx\, w(x,y)^{-1}k(x,y) \sim \int_0^\infty dx_d \left(\frac{y_d}{x_d}\right)^\beta \left(\frac{x_d\vee y_d}{\sqrt{x_d y_d}}\right)^{2r} \frac{(x_d\vee y_d)^\alpha}{(|x_d-y_d|\vee(x_d\wedge y_d))^{1+\alpha}}$$
$$= \int_0^\infty dt\, t^{-\beta-r}\frac{(1\vee t)^{\alpha+2r}}{(|1-t|\vee(1\wedge t))^{1+\alpha}} < \infty\,,$$

与前文相同。因此，由 Schur 检验可得 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$-有界性。 □

7. Commutator bounds

本节中，我们始终假设 $0<\alpha<2$。我们的目标是估计交换子

$$[(-\Delta)^{\alpha/2},\zeta]v(x) = \mathcal{A}(d,-\alpha)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}v(y)\,dy$$

对于支集包含于 $\overline{\mathbb{R}^d_+}$ 的函数 v。一般来说，右侧的积分并不绝对收敛，因此应将其理解为柯西主值积分（其收敛性将由我们的结果推出）。

我们将对 v 施加某些有界性和衰减假设，并对 $\alpha\geq 1$ 施加温和的正则性假设。函数 ζ 是一个截断函数，我们关注交换子对过渡区域大小的依赖性；在该区域内，ζ 从零变为一。

本节分为三个部分，分别对应截断函数ζ的不同选取。在小节 7.1 中，我们考虑在距离原点较远处进行截断；在小节 7.2 中，考虑在距离边界超平面较近处进行截断；在小节 7.3 中，则考虑两者的结合。

关于 v 的假设形式始终如下：

$$|v(x)| \leq (1\wedge|x|^{-d-\alpha})(1\wedge x_d)^p \qquad \text{for all } x\in\mathbb{R}^d_+ \tag{23}$$

其中参数为 $p\geq\frac{\alpha-1}{2}$。这个界令人联想到定理 9 中的热核界；事实上，在下一节中，我们将用该定理在应用中验证 (23)，其中 $v\in \mathrm{e}^{-tL_\lambda}C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$。在那里，参数 p 将像主要结果中那样依赖于 λ，但在本节中，p 是任意参数。

额外的正则性假设将通过以下 H¨older 半范数来表述。对于集合 Ω 上的函数 u 以及 $0<\beta\leq 2$，记

$$[u]_{C^\beta(\Omega)} := \begin{cases} \sup_{x,y\in\Omega}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\beta} & \text{if } 0<\beta\leq 1\,,\\ \sup_{x,y\in\Omega}\frac{|\nabla u(x)-\nabla u(y)|}{|x-y|^{\beta-1}} & \text{if } 1<\beta\leq 2\,. \end{cases} \tag{24}$$

因此，我们对 v 的假设可写为

$$[v]_{C^\beta(B_{\ell_x}(x))} \leq (1\wedge|x|^{-d-\alpha})\,(1\wedge x_d)^{p-\beta} \qquad \text{for all } x\in\mathbb{R}^d_+ \text{ with } \ell_x := 1\wedge\tfrac{x_d}{2}\,. \tag{25}$$

我们始终假设 $\beta>\alpha-1$。

7.1. 径向截断。在本小节中，我们对该项进行估计

$$I(x) := \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\chi(x)-\chi(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}v(y)\,dy\,,$$

其中，v 的支集位于$\overline{\mathbb{R}^d_+}$。关于函数 χ，我们假设对于某个参数$R\geq 1$,

$$0\leq\chi\leq 1\,,\qquad \chi(x)=1 \text{ if } |x|\leq R\,,\qquad \chi(x)=0 \text{ if } |x|\geq 2R\,,\qquad |\nabla\chi|\lesssim R^{-1}\,, \tag{26}$$

以及，如果 $\alpha \geq 1$,

$$|D^2\chi| \lesssim R^{-2}\,. \tag{27}$$

此处 $D^2\chi$ 表示 χ 的海森矩阵。

引理 20. 设 $0<\alpha<2$。设 $R\geq 1$，假设 χ 满足 (26)，并且若 $\alpha\geq 1$，还满足 (27)。设 $p\geq \frac{\alpha-1}{2}$，假设 v 满足 (23)，并且若 $\alpha\geq 1$，还满足某个 $\beta>\alpha-1$ 对应的 (25)。

(a) 若 $\alpha<1$，则

$$|I(x)| \lesssim \mathbf{1}_{|x|\leq R} R^{-d-2\alpha} + \mathbf{1}_{|x|>R}|x|^{-d-\alpha} \qquad \textit{for all } x\in\mathbb{R}^d_+\,.$$

(b) 若 $\alpha\geq 1$，则

$$\begin{aligned}|I(x)| &\lesssim \mathbf{1}_{|x|\leq R} R^{-d-2\alpha} + \mathbf{1}_{|x|>R}|x|^{-d-\alpha} \\ &\quad + \mathbf{1}_{|x|\sim R} R^{-d-\alpha-1}\left((1\wedge x_d)^{-(p-\alpha+1)_-} + \mathbf{1}_{p=\alpha-1}\ln\tfrac{1}{1\wedge x_d} + \mathbf{1}_{\alpha=1}\ln R\right) \\ &\quad \textit{for all } x\in\mathbb{R}^d_+\,.\end{aligned}$$

(c) 两种情况下，

$$\|I\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim R^{-\alpha-d/2}\,.$$

在 (b) 的表述中，我们回顾记号 $a_- := \max\{-a,0\}$。

引理 20 的证明。情形 $\alpha<1$。步骤 1。我们断言

$$\begin{aligned}|I(x)| &\lesssim \mathbf{1}_{|x|\leq 4R}\int_{|y|>R}\frac{1}{|y|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy + \mathbf{1}_{|x|>\frac{R}{2}}\frac{1}{|x|^{d+\alpha}}\int_{|y|\leq 2R}|v(y)|\,dy \\ &\quad + \mathbf{1}_{\frac{R}{2}<|x|\leq 4R}\frac{1}{R}\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{1}{|x-y|^{d+\alpha-1}}|v(y)|\,dy\,.\end{aligned} \tag{28}$$

为证明 (28)，注意到若 $|x|\leq\frac{R}{2}$，则

$$|I(x)| = \left|\int_{|y|>R}\ldots\right| \lesssim \int_{|y|>R}\frac{1}{|y|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy\,.$$

若 $|x|>4R$，则

$$|I(x)| = \left|\int_{|y|\leq 2R}\ldots\right| \lesssim \int_{|y|\leq 2R}\frac{1}{|x|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy\,.$$

最后，若 $\frac{R}{2}<|x|\leq 4R$，则

$$\begin{aligned}|I(x)| &\lesssim \int_{|y|>8R}\frac{1}{|y|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy + \int_{|y|\leq\frac{R}{4}}\frac{1}{|x|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy \\ &\quad + \frac{1}{R}\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{1}{|x-y|^{d+\alpha-1}}|v(y)|\,dy\,,\end{aligned}$$

其中我们用到了 $|\chi(x)-\chi(y)|\lesssim R^{-1}|x-y|$，这由 χ 上的梯度界得到。综合上述各界，得到 (28)。

步骤 2。现在将 v 的界代入 (28) 的右侧。显然有

$$\int_{|y|\leq 2R}(1\wedge|y|^{-d-\alpha})(1\wedge y_d)^p\,dy \lesssim 1$$

and

$$\int_{|y|>R}\frac{1}{|y|^{d+\alpha}}(1\wedge|y|^{-d-\alpha})(1\wedge y_d)^p\,dy \lesssim R^{-d-2\alpha}\,.$$

如果 $p \geq 0$，则最后一个界显然成立（这也是 $\lambda \geq 0$ 时唯一相关的情况）。当 $p < 0$ 时，对限制在 $y_d \geq 1$ 上的积分，同样的界仍然成立。对于相反限制下的积分，容易看出其有界于 $R^{-d-1-2\alpha}$。（注意，在这个积分中有 $|y'| \sim |y|$。）最后，如果 $\frac{R}{2} < |x| \leq 4R$，那么，由于 $\alpha \in (0,1)$，

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R} \frac{1}{|x-y|^{d+\alpha-1}}(1\wedge |y|^{-d-\alpha})(1\wedge y_d)^p\,dy\\ &\quad\lesssim R^{-d-\alpha}\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{(1\wedge y_d)^p}{|x-y|^{d+\alpha-1}}\,dy \lesssim R^{-d-2\alpha+1}\,.\end{aligned}$$

这里，为了得到上界，我们将对 $\{\frac{R}{4} < |y| \leq 8R\}$ 的积分替换为对$|x-y| \leq 12R$的积分。对于 $p \geq 0$，我们可以去掉因子 $(1\wedge y_d)^p$。对于 $p < 0$，我们采用与之前类似的方法，区分 $y_d \leq 1$ 和 $y_d > 1$两种情形。

这就证明了 (a) 中所述的逐点界。(c) 中的 L^2-界可通过简单积分得到。□

剩下要证明 $\alpha \geq 1$的情形下的引理 20。我们将更一般地讨论论证的第一部分，因为它在下一小节中也会用到。我们要估计

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}v(y)\,dy\,,$$

其中 ζ 是 C^2，而 v 是具有某个指数 β的 H¨older 连续函数。在引理 20 的情形下，我们有 $\zeta = \chi$。

我们固定一个依赖于 $x \in \mathbb{R}^d_+$的局部长度尺度 ℓ_x，并将其分解为

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d_+}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}v(y)\,dy &= \int_{|y-x|\leq \ell_x}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}(v(y)-v(x))\,dy\\ &\quad + v(x)\int_{|y-x|\leq\ell_x}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)+\nabla\zeta(x)\cdot(y-x)}{|x-y|^{d+\alpha}}\,dy\\ &\quad + \int_{|y-x|>\ell_x}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}v(y)\,dy\,.\end{aligned}\tag{29}$$

注意，由于采用柯西主值，我们可以自由地引入项 $\nabla\zeta(x)\cdot(y-x)$。该项对积分的贡献为零（因为它是奇函数），但能使积分绝对收敛。我们总是将第一项估计为

$$\begin{aligned}&\left|\int_{|y-x|\leq\ell_x}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}(v(y)-v(x))\,dy\right|\\ &\quad\leq [v]_{C^\beta(B_{\ell_x}(x))}[\zeta]_{C^1(B_{\ell_x}(x))}\int_{|y-x|\leq\ell_x}\frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha-1-\beta}}\,dy\\ &\quad\lesssim [v]_{C^\beta(B_{\ell_x}(x))}[\zeta]_{C^1(B_{\ell_x}(x))}\ell_x^{-\alpha+1+\beta}\end{aligned}\tag{30}$$

其中某个 $\beta > \alpha - 1$。类似地，我们将第二项估计为

$$\begin{aligned}&\left|v(x)\int_{|y-x|\leq\ell_x}\frac{\zeta(x)-\zeta(y)+\nabla\zeta(x)\cdot(y-x)}{|x-y|^{d+\alpha}}\,dy\right|\\ &\quad\leq |v(x)|[\zeta]_{C^2(B_{\ell_x}(x))}\int_{|y-x|\leq\ell_x}\frac{dy}{|x-y|^{d+\alpha-2}}\,dy\lesssim |v(x)|[\zeta]_{C^2(B_{\ell_x}(x))}\ell_x^{2-\alpha}\,.\end{aligned}\tag{31}$$

完成这些预备工作后，我们回到引理 20 的证明。

引理 20 的证明。情形 $\alpha \geq 1$。我们应用前面的讨论，其中 $\zeta = \chi$。对于 (29) 中的第一项，我们使用估计 (30)，并注意到 $[\chi]_{C^1(B_{\ell_x}(x))}$ 除非 $|x| \sim R$，否则为零；此时它等于 $\lesssim R^{-1}$。由此得到估计

$$\mathbf{1}_{|x|\sim R}(1\wedge|x|^{-d-\alpha})(1\wedge x_d)^{p-\alpha+1}R^{-1}\,.$$

类似地，对 (29) 中的第二项使用估计 (31)，可得

$$\mathbf{1}_{|x|\sim R}(1\wedge|x|^{-d-\alpha})(1\wedge x_d)^{p-\alpha+2}R^{-2}\,.$$

由于 $1\wedge x_d \leq 1 \leq R$，第二项的这个估计小于第一项的估计，因此可以忽略。

现在我们转向 (29) 中的第三项，

$$\widetilde{I}(x) := \int_{|y-x|>\ell_x} \frac{\chi(x)-\chi(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} v(y)\,dy\,.$$

我们断言

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{I}(x)\right| &\lesssim \mathbf{1}_{|x|\leq 4R}\int_{|y|>R}\frac{1}{|y|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy + \mathbf{1}_{|x|>\frac{R}{2}}\frac{1}{|x|^{d+\alpha}}\int_{|y|\leq 2R}|v(y)|\,dy \\ &\quad + \mathbf{1}_{\frac{R}{2}<|x|\leq 4R}\frac{1}{R}\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{\mathbf{1}_{|x-y|>\ell_x}}{|x-y|^{d+\alpha-1}}|v(y)|\,dy\,. \end{aligned} \tag{32}$$

这可以完全仿照 (28) 的证明方法得到。

现在将关于 v 的界代入 (32) 右侧。前两项的估计与情形 $\alpha < 1$ 相同。然而，(32) 中第三项的估计现在有所不同，因为 $|x-y|^{-d-\alpha+1}$ 在局部不可积。我们断言

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{\mathbf{1}_{|x-y|>\ell_x}}{|x-y|^{d+\alpha-1}}|v(y)|\,dy \\ &\quad\lesssim R^{-d-\alpha}\left((1\wedge x_d)^{-(p-\alpha+1)_-} + \mathbf{1}_{p=\alpha-1}\ln\tfrac{1}{1\wedge x_d} + \mathbf{1}_{\alpha=1}\ln R\right).\end{aligned}$$

事实上，$R^{-d-\alpha}$ 的因子来自对 v 的界中的一个因子，因此只需证明

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{\mathbf{1}_{|x-y|>\ell_x}}{|x-y|^{d+\alpha-1}}(1\wedge y_d)^p\,dy \\ &\quad\lesssim (1\wedge x_d)^{-(p-\alpha+1)_-} + \mathbf{1}_{p=\alpha-1}\ln\tfrac{1}{1\wedge x_d} + \mathbf{1}_{\alpha=1}\ln R\,.\end{aligned}$$

我们根据 $y_d > 3$ 或 $y_d \leq 3$ 将 y 积分拆分。先看前一种情形，我们注意到，如果 $x_d \leq 2$，则有 $|x-y| \geq |x_d - y_d| > 1$。因此，对所有 $x_d > 0$，

$$\begin{aligned}\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{\mathbf{1}_{|x-y|>\ell_x}\mathbf{1}_{y_d>3}}{|x-y|^{d+\alpha-1}}(1\wedge y_d)^p\,dy &\lesssim \int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{\mathbf{1}_{|x-y|>1}}{|x-y|^{d+\alpha-1}}\,dy \\ &\leq 1 + (\ln R)\mathbf{1}_{\alpha=1}\,.\end{aligned}$$

接下来，我们考虑在 $y_d \leq 3$ 上的积分。对整个 $\mathbb{R}^{d-1}$ 进行 y' 积分，得到

$$\begin{aligned}&\int_{\frac{R}{4}<|y|\leq 8R}\frac{\mathbf{1}_{|x-y|>\ell_x}\mathbf{1}_{y_d\leq 3}}{|x-y|^{d+\alpha-1}}(1\wedge y_d)^p\,dy \\ &\lesssim \int_{y_d\leq 3}\frac{y_d^p}{|x'-y'|^{d+\alpha-1}+|x_d-y_d|^{d+\alpha-1}+\ell_x^{d+\alpha-1}}\,dy \lesssim \int_0^3\frac{y_d^p}{|x_d-y_d|^{\alpha}+\ell_x^{\alpha}}\,dy_d\end{aligned}$$

很容易看出，该积分为

$$\lesssim x_d^{-\alpha}\mathbf{1}_{x_d>1} + x_d^{-(p-\alpha+1)-}\mathbf{1}_{x_d\le 1} + \ln\frac{1}{1\wedge x_d}\mathbf{1}_{p=\alpha-1}\,.$$

（为证明这一点，我们对 $x_d \le 3/2$ 在 $y_d = 2x_d$ 处将 y_d-积分拆开。）这就证明了所声称的界。

综合所有这些界，我们得到引理 20 的陈述 (b) 中关于 I 的所声称的逐点界。(c) 中关于 L^2 的界可通过积分得到。容易验证，与 $\alpha < 1$ 的情形相比，“额外”项是次主导的。这里注意到 $2(p-\alpha+1) > -1$，这使得相关的 x_d-积分在原点附近有限。□

7.2. 边界截断。在本小节中，我们对该项进行界定

$$II(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\theta(x)-\theta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} v(y)\,dy\,.$$

与前面一样，函数 v 的支集包含于 $\overline{\mathbb{R}^d_+}$ 中。对于函数 θ，我们假设存在某个参数 $r \le 1$，使得

$$0\le\theta\le 1\,,\qquad \theta(x)=0 \text{ if } x_d\le r\,,\qquad \theta(x)=1 \text{ if } x_d\ge 2r\,,\qquad |\nabla\theta|\lesssim r^{-1}\,, \tag{33}$$

以及，如果 $\alpha \ge 1$ 和 $d = 1$,

$$|D^2\theta| \lesssim r^{-2}\,. \tag{34}$$

为简化计　　算，我们假设 θ 仅是 $x = (x', x_d)$ 的最后一个坐标 x_d 的函数。

引理 21. 设 $0 < \alpha < 2$。设 $r \le 1$，并假设 θ 满足 (33)，且若 $\alpha \ge 1$ 和$d = 1$，还满足 (34)。设 $\frac{\alpha-1}{2} \le p < \alpha$，假设 v 满足 (23)，且若 $\alpha \ge 1$ 和 $d = 1$，还满足含某个 $\beta > \alpha - 1$ 的 (25)。那么

$$|II(x)| \lesssim \left(r^{p-\alpha}\wedge\frac{r^{p+1}}{x_d^{1+\alpha}}\right)(1+x_d)^{1+\alpha}(1\wedge|x|^{-d-\alpha}) \qquad \textit{for all } x\in\mathbb{R}^d_+\,.$$

特别地

$$\|II\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p-\alpha+1/2}\,.$$

引理 21 的证明。情形 $d \ge 2$ 或 $d \ge 1$ 和 $\alpha < 1$。步骤 1。我们断言

$$\begin{aligned}|II(x)| \lesssim{}& \mathbf{1}_{x_d\le 4r}\int_{y_d>r}\frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+y_d^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy \\ &+\mathbf{1}_{x_d>\frac{r}{2}}\int_{y_d\le 2r}\frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy \\ &+\mathbf{1}_{\frac{r}{2}<x_d\le 4r}\frac{1}{r}\int_{\frac{r}{4}<y_d\le 8r}\frac{|x_d-y_d|}{|x'-y'|^{d+\alpha}+|x_d-y_d|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy\,.\end{aligned} \tag{35}$$

为证明 (35）我们采用与处理（28）时相同的方法进行论证。注意，若 $x_d \le \frac{r}{2}$，则 n

$$|II(x)| = \left|\int_{y_d>r}\dots\right| \lesssim \int_{y_d>r}\frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+y_d^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy\,.$$

若 $x_d > 4r$，则

$$|II(x)| = \left|\int_{y_d\le 2r}\dots\right| \lesssim \int_{y_d\le 2r}\frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy\,.$$

最后，若 $\frac{r}{2} < x_d \leq 4r$，则

$$|II(x)| \lesssim \int_{y_d>8r} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+y_d^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy + \int_{y_d\leq\frac{r}{4}} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy + \frac{1}{r}\int_{\frac{r}{4}<y_d\leq 8r} \frac{|x_d-y_d|}{|x'-y'|^{d+\alpha}+|x_d-y_d|^{d+\alpha}}|v(y)|\,dy\,,$$

这里我们用到了 $|\theta(x)-\theta(y)| \lesssim r^{-1}|x_d-y_d|$，这是由 θ 的梯度界以及它仅依赖于最后一个坐标这一事实得到的。结合上述界，我们得到 (35)。

步骤 2。现在将 v 的界代入 (35) 的右侧。在两个对 y_d 有上界的积分中，我们使用 $1\wedge|y|^{-d-\alpha} \sim 1\wedge|y'|^{-d-\alpha}$。这样便可计算第二个积分中的$y_d$积分。由此我们得到

$$\begin{aligned}|II(x)| \lesssim{}& \mathbf{1}_{x_d\leq 4r}\int_{y_d>r} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+y_d^{d+\alpha}}(1\wedge|y|^{-d-\alpha})(1\wedge y_d)^p\,dy \\ &+ \mathbf{1}_{x_d>\frac{r}{2}} r^{p+1}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}}(1\wedge|y'|^{-d-\alpha})\,dy' \\ &+ \mathbf{1}_{\frac{r}{2}<x_d\leq 4r} r^{p-1}\int_{\frac{r}{4}<y_d\leq 8r} \frac{|x_d-y_d|}{|x'-y'|^{d+\alpha}+|x_d-y_d|^{d+\alpha}}(1\wedge|y'|^{-d-\alpha})\,dy\,. \end{aligned} \tag{36}$$

直接计算可得，若 $\frac{r}{2} < x_d \leq 4r$，则

$$\int_{\frac{r}{4}<y_d\leq 8r} \frac{|x_d-y_d|}{|x'-y'|^{d+\alpha}+|x_d-y_d|^{d+\alpha}}\,dy_d \sim \frac{r^2}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}}\,. \tag{37}$$

（事实上，我们代入 $y_d = x_d + |x'-y'|t$，并注意到 t积分中的上下界均为 r量级。）我们注意到，若 $d=1$，则 (37) 要求假设 $\alpha<1$（约定涉及 x' 或 y' 的项不存在）。

若将 (37) 代入 (36)，可见 (36) 右侧的第三项不超过第二项的某个常数倍，因此可以舍去。

现在，我们利用下面的引理 22 计算 (36) 中第一和第二个积分里的 y' 积分。（注意，$1\wedge|y'|^{-d-\alpha} \sim (1+|y'|^{d+\alpha})^{-1}$ 且 $1\wedge|y|^{-d-\alpha} \sim ((1+y_d)^{d+\alpha}+|y'|^{d+\alpha})^{-1}$。）由此得到

$$|II(x)| \lesssim \mathbf{1}_{x_d\leq 4r}\int_{y_d>r} \frac{y_d^{-1-\alpha}}{(1+y_d)^{d+\alpha}+|x'|^{d+\alpha}}(1\wedge y_d)^p\,dy_d + \mathbf{1}_{x_d>\frac{r}{2}} r^{p+1}\frac{x_d^{-1-\alpha}(1+x_d)^{1+\alpha}}{(1+x_d)^{d+\alpha}+|x'|^{d+\alpha}}\,.$$

最后，我们计算

$$\int_{y_d>r} \frac{y_d^{-1-\alpha}}{(1+y_d)^{d+\alpha}+|x'|^{d+\alpha}}(1\wedge y_d)^p\,dy_d \sim \frac{r^{p-\alpha}}{1+|x'|^{d+\alpha}}\,.$$

主要贡献来自 $[r,1]$ 上的积分，我们用到了 $p<\alpha$。

这就得到了所述的逐点界。（注意，对于 $x_d\leq 4r$，我们有 $(1+|x'|^{d+\alpha})^{-1} \sim 1\wedge|x|^{-d-\alpha}$。） L^2界可通过简单积分得到。主要贡献来自 $[0,1]$上的 x_d积分。□

引理 22. 设 $N\geq 1$。则对所有 $\beta>0$ 以及所有 a、$b\in\mathbb{R}^N$、r、$s>0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{(rs)^\beta\,dx}{(r^{N+\beta}+|x-a|^{N+\beta})(s^{N+\beta}+|x-b|^{N+\beta})} \lesssim \frac{(r+s)^\beta}{(r+s)^{N+\beta}+|a-b|^{N+\beta}}\,.$$

引理 22 的证明。由对称性，不妨设 $r \le s$。通过平移和伸缩，不妨且将假设 $b=0$ 和 $s=1$。因此，只需证明

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{r^\beta\,dx}{(r^{N+\beta}+|x-a|^{N+\beta})(1+|x|^{N+\beta})} \lesssim \frac{(1+r)^\beta}{(1+r)^{N+\beta}+|a|^{N+\beta}}\,. \tag{38}$$

我们区分 $|a| \lessgtr (1+r)$。

情形 $|a| \le (1+r)$。(38) 的右侧与 $\mathbf{1}_{r<1} + r^{-N}\mathbf{1}_{r\ge 1}$ 可比。当 $r<1$ 时，我们将 (38) 的左侧上界估计为

$$r^\beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{r^{N+\beta}+|x-a|^{N+\beta}} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{1+|x|^{N+\beta}} \sim 1.$$

当 $r \ge 1$ 时，我们将 (38) 的左侧上界估计为

$$r^\beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{r^{N+\beta}(1+|x|^{N+\beta})} \sim r^{-N}.$$

情形 $|a| \ge (1+r)$。(38) 的右侧与 $(1+r)^\beta\,|a|^{-N-\beta}$ 可比。我们将 (38) 的左侧上界估计为

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \frac{r^\beta}{(r^{N+\beta}+|x-a|^{N+\beta})(1+|x|^{N+\beta})} \left(\mathbf{1}_{|x|<\frac{|a|}{2}} + \mathbf{1}_{\frac{|a|}{2}\le|x|\le 2|a|} + \mathbf{1}_{|x|\ge 2|a|}\right) dx \\
&\lesssim r^\beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{|a|^{N+\beta}(1+|x|^{N+\beta})} + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{r^\beta \mathbf{1}_{|x|\in[|a|/2,2|a|]}}{(r^{N+\beta}+|x-a|^{N+\beta})|x|^{-N-\beta}}\,dx \\
&\quad + r^\beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{|x|^{2N+2\beta}} \mathbf{1}_{|x|\ge 2|a|} \\
&\lesssim r^\beta |a|^{-N-\beta} + |a|^{-N-\beta} r^\beta \int_{\mathbb{R}^N} \frac{dx}{r^{N+\beta}+|x|^{N+\beta}} + r^\beta |a|^{-N-2\beta} \lesssim \frac{1+r^\beta}{|a|^{N+\beta}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 21 的证明。情形 $d=1$ 和 $\alpha \ge 1$。事实上，我们将对一般的 $d \ge 1$ 进行论证，并假设 (25) 和 (34) 成立。我们按照上一节在 (29) 附近所述的方法进行论证，选取 $\zeta = \theta$。

对于 (29) 中的第一项，我们使用界 (30)，并注意到 $[\theta]_{C^1(B_{\ell_x}(x))}$ 除非 $x_d \sim r$，否则为零；在这种情况下，其阶为 r^{-1}。由此得到如下界

$$\mathbf{1}_{x_d\sim r}(1\wedge|x|^{-d-\alpha})(1\wedge x_d)^{p-\alpha+1} r^{-1}\,.$$

类似地，对于 (29) 中的第二项，我们使用界 (31)，得到

$$\mathbf{1}_{x_d\sim r}(1\wedge|x|^{-d-\alpha})(1\wedge x_d)^{p-\alpha+2} r^{-2}\,.$$

由于 $1\wedge x_d \sim r$ 对于 $x_d \sim r$，这两个界的阶相同。

We 现在转向 (29) 中的第三项，将其记为 $\widetilde{II}(x)$。我们声称 t

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{II}(x)\right| &\lesssim \mathbf{1}_{x_d\le 4r} \int_{y_d>r} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+y_d^{d+\alpha}} |v(y)|\,dy \\
&\quad + \mathbf{1}_{x_d>\frac{r}{2}} \int_{y_d\le 2r} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}} |v(y)|\,dy \\
&\quad + \mathbf{1}_{\frac{r}{2}<x_d\le 4r} \frac{1}{r} \int_{\frac{r}{4}<y_d\le 8r} \frac{|x_d-y_d|}{|x'-y'|^{d+\alpha}+|x_d-y_d|^{d+\alpha}} |v(y)|\,dy\,.
\end{aligned} \tag{39}$$

这可用与（35）完全相同的方法证明。

现在将 v 上的界代入 (39) 的右侧。前两项的估计与引理 21 的证明相同。然而，第三项的估计现在有所不同。注意到

在积分域上 $1 \wedge |y|^{-d-\alpha} \sim (1+|y'|^{d+\alpha})^{-1}$，我们得到第三项的如下上界

$$\mathbf{1}_{\frac{r}{2}<x_d\leq 4r} r^{p-1} \int_{\frac{r}{4}<y_d\leq 8r} \frac{|x_d-y_d|}{|x'-y'|^{d+\alpha}+|x_d-y_d|^{d+\alpha}} \frac{1}{|y'|^{d+\alpha}+1}\, dy\,.$$

利用 (37) 计算 y_d-积分，并利用引理 22 计算 y'-积分，我们可以得到以下界

$$\begin{aligned} &\lesssim \mathbf{1}_{\frac{r}{2}<x_d\leq 4r} r^{p+1} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \frac{1}{|x'-y'|^{d+\alpha}+x_d^{d+\alpha}} \frac{1}{|y'|^{d+\alpha}+1}\, dy' \\ &\lesssim \mathbf{1}_{\frac{r}{2}<x_d\leq 4r} \frac{r^{p-\alpha}}{1+|x'|^{d+\alpha}}\,. \end{aligned}$$

综合这些界，我们得到所声称的逐点界。L^2-界的推导与之前相同。□

7.3. 组合截断。现在我们将引理 20 和引理 21 结合起来。

推论 23. 设 $0<\alpha<2$。设 $0<r\leq 1\leq R<\infty$，假设 χ 和 θ 满足 (26) 和 (33)，并且若 $\alpha\geq 1$，还满足 (27) 和 (34)。设 $\frac{\alpha-1}{2}\leq p<\alpha$，假设 v 满足 (23)，并且若 $\alpha\geq 1$，还满足某个 $\beta>\alpha-1$ 对应的 (25)。于是

$$\|[(-\Delta)^{\alpha/2},\chi\theta]v\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p-\alpha+1/2}+R^{-\alpha-d/2}\,.$$

证明。我们将其分解为

$$\tfrac{1}{\mathcal{A}(d,-\alpha)}[(-\Delta)^{\alpha/2},\chi\theta]v(x) = \theta(x)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\chi(x)-\chi(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}v(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\theta(x)-\theta(y)}{|x-y|^{d+\alpha}}\chi(y)v(y)\,dy$$

并分别估计右侧两项的 L^2-范数。对于第一项，我们可以去掉 $\theta(x)\in[0,1]$ 这一项，并应用引理 20。对于第二项，我们应用引理 21，并注意到乘积 χv 满足其假设。对于 $\alpha<1$，这一点显而易见。对于 $\alpha\geq 1$，我们使用

$$\begin{aligned} &[\chi v]_{C^\beta(B_r(a))} \\ &\quad\leq \begin{cases} \|\chi\|_{L^\infty(B_r(a))}[v]_{C^\beta(B_r(a))}+\|v\|_{L^\infty(B_r(a))}[\chi]_{C^\beta(B_r(a))} & \text{if } \beta\leq 1\,, \\ \|\chi\|_{L^\infty(B_r(a))}[v]_{C^\beta(B_r(a))}+\|\nabla v\|_{L^\infty(B_r(a))}[\chi]_{C^{\beta-1}(B_r(a))} & \\ \quad+\|\nabla\chi\|_{L^\infty(B_r(a))}[v]_{C^{\beta-1}(B_r(a))}+\|v\|_{L^\infty(B_r(a))}[\chi]_{C^\beta(B_r(a))} & \text{if } \beta>1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

由 (26)、(27) 和 $R\geq 1$ 可知，右侧所有涉及 χ 的因子均 . 1。此外，我们注意到，若 v 对某个 $\beta=\beta_0>0$ 满足 (23) 和 (25)，则对任意 $0<\beta<\beta_0$，它也满足 (25)。由此得出，χv 满足 (25)，且其 β 与 v 所具有的相同。□

8. Density of $C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$

本节的目标是证明以下定理。它将是证明定理 1 中所述算子核性质的主要依据。

定理 24. 设 $\alpha\in(0,2]$，且当 $\alpha<2$ 时 $\lambda\geq 0$，当 $\alpha=2$ 时 $\lambda\geq -1/4$。令 p 由 (4) 定义，并设 $s\in(0,2]$。假设 $s<(1+2p)/\alpha$。那么，对于任意 $f\in L^2(\mathbb{R}^d_+)$，存在一个序列 $(\varphi_n)\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，使得

$$L_\lambda^{s/2}\varphi_n \to f \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d_+)\,.$$

如果，在此外 $f\in \operatorname{dom} L_\lambda^{-s/2}$，则该序列可以选取得满足，此外，一个

$$\varphi_n \to L_\lambda^{-s/2} f \text{ in } L^2(\mathbb{R}^d_+)\,.$$

注 25. 设 $\alpha \in (0,2)$, $\lambda \in [\lambda_*, 0)$, 并假设 $e^{-tL_\lambda}(x,y)$ 满足 (9) 中的上界，其中 p 由 (4) 定义。则定理 24 对此 λ 值仍然成立。这可由下文证明中的相同论证得到，因为引理 26 对此 λ 值仍然成立。

我们证明该定理的策略借鉴了 [KVZ16 引理 4.4] 中的一些思路。基本策略是先对具有特殊形式的 f 证明定理 24，即对某个 $0 < t < \infty$，令 $f \in L_\lambda^{s/2} e^{-tL_\lambda} C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$。为此，我们将使用以下关于 $e^{-tL_\lambda} C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 中函数的逐点界。关于 H¨older 半范数的定义，见 (24)。

引理 26。设 α、λ 和 p 与定理 24 中的相同。设 $0 < t < \infty$ 和 $\psi \in e^{-tL_\lambda} C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$。则对所有 $x \in \mathbb{R}^d_+$,

$$|\psi(x)| \lesssim (1 \wedge x_d)^p (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) , \tag{40}$$

$$|L_\lambda \psi(x)| \lesssim (1 \wedge x_d)^p (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) , \tag{41}$$

$$|(-\Delta)^{\alpha/2} \psi(x)| \lesssim (1 \wedge x_d)^{p-\alpha} (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) , \tag{42}$$

$$[\psi]_{C^\beta(B_{\ell_x}(x))} \lesssim (1 \wedge x_d)^{p-\beta} (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) \quad \textit{with } \ell_x := 1 \wedge \tfrac{x_d}{2} , \ 0 < \beta < \alpha . \tag{43}$$

我们注意到，对于 $\alpha = 2$，这些界中的衰减可以大幅改善，但采用统一的表述对我们而言更为方便。

引理 26 的证明。我们写作 $\psi = e^{-tL_\lambda} k$。(40) 中的估计可由定理 9 和定理 10 立即得到。对于 (41) 中的估计，我们写作 $L_\lambda \psi = e^{-tL_\lambda} L_\lambda k$。对于 $\alpha = 2$，我们有$L_\lambda k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，因此所需的估计再次由定理 10 得到。对于 $0 < \alpha < 2$，容易验证

$$|L_\lambda k(x)| \lesssim 1 \wedge |x|^{-d-\alpha}$$

然后利用这一估计和定理 9，再次推出 (41)。我们省略这一计算的细节。

为证明 (42)，我们回顾注 7 中 λ_0 的定义。如其中所示，对于支集包含于 $\overline{\mathbb{R}^d_+}$ 上的函数，我们有 $(-\Delta)^{\alpha/2} = L_{\lambda_0}$。因此，

$$(-\Delta)^{\alpha/2} \psi = L_\lambda \psi - (\lambda - \lambda_0) x_d^{-\alpha} \psi .$$

因此，(42) 由 (40) 和 (41) 得出。

最后，为证明 (43)，我们使用 Schauder 估计。这些估计表明，对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的函数 u，当 $a \in \mathbb{R}^d$、$r > 0$ 且 $0 < \beta < \alpha$ 时，有

$$\begin{aligned} [u]_{C^\beta(B_{r/2}(a))} \lesssim_{\alpha,\beta,d} & \, r^{-\beta} \|u\|_{L^\infty(B_{2r}(a))} + r^{\alpha-\beta} \| |\cdot - a|^{-d-\alpha} u \|_{L^1(B_{2r}(a)^c)} \\ & + r^{\alpha-\beta} \|(-\Delta)^{\alpha/2} u\|_{L^\infty(B_{2r}(a))} . \end{aligned} \tag{44}$$

对于 $\alpha = 2$，这一界是经典结果，例如可由 [GT01，定理 3.9 及其证明] 推得。（事实上，在这种情况下，不需要涉及 $B_{2r}(a)^c$ 上范数的那一项。）对于 $0 < \alpha < 2$，例如可在 [ROS14，推论 25] 中找到这一界。

我们在 $a = x$ 的条件下应用 (44)，并在 $r = 2\ell_x$ 的条件下取 $\ell_x = 1 \wedge \frac{x_d}{8}$。利用 (40) 和 (42)，容易得到

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_x^{-\beta} \|\psi\|_{L^\infty(B_{4\tilde{\ell}_x}(x))} &\lesssim (1 \wedge x_d)^{p-\beta} (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) , \\ \tilde{\ell}_x^{\alpha-\beta} \|(-\Delta)^{\alpha/2} \psi\|_{L^\infty(B_{4\tilde{\ell}_x}(x))} &\lesssim (1 \wedge x_d)^{p-\beta} (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) . \end{aligned}$$

此外，利用 (40) 进行计算（计算细节从略）可得

$$\tilde{\ell}_x^{\alpha-\beta} \| |\cdot - x|^{-d-\alpha} \psi \|_{L^1(B_{4\tilde{\ell}_x}(x)^c)} \lesssim (1 \wedge x_d)^{p-\beta} (1 \wedge |x|^{-d-\alpha}) .$$

˜将这些界代入 (44)，即可得到将 ℓ_x 替换为 ℓ_x 的 (43)。关于 ℓ_x 的界可通过简单的覆盖论证得到：对于给定的 x，结合 $B_{\ell_x}(x)$ 中的界以及 $y \in B_{\ell_x}(x) \setminus B_{\tilde{\ell}_x}(x)$ 的 $B_{\ell_y}(y)$ 中的界即可。□

定理 24 的证明。步骤 1。我们首先证明此定理对于具有特殊形式的 f 成立，即 $f \in L^{s/2}_\lambda e^{-tL_\lambda} C^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$，其中某个 $0 < t < \infty$。

令 $0 < t < \infty$，并令 $\psi \in e^{-tL_\lambda} C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$。对于待确定的参数 $0 < r \le 1 \le R < \infty$，我们令 χ 和 θ 为推论 23 中的函数，并简记

$$\varphi := \chi\theta\psi\,.$$

于是，由 (40) 得，

$$\|\varphi - \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \|\mathbf{1}_{x_d \le 2r}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|\mathbf{1}_{|x|>R}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p+1/2} + R^{-\alpha-d/2}\,.$$

此外，

$$\|L_\lambda(\varphi - \psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} = \|(1-\chi\theta)L_\lambda\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|[(-\Delta)^{\alpha/2}, \chi\theta]\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}$$

并且，由 (41) 得，

$$\|(1-\chi\theta)L_\lambda\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p+1/2} + R^{-\alpha-d/2}\,.$$

对于 $\alpha < 2$，我们应用推论 23，得到

$$\|[(-\Delta)^{\alpha/2}, \chi\theta]\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p-\alpha+1/2} + R^{-\alpha-d/2}\,.$$

对于 $\alpha = 2$，同样的界也成立，这可通过写出

$$[-\Delta, \chi\theta]\psi = -2\nabla(\chi\theta)\cdot\nabla\psi - \Delta(\chi\theta)\psi$$

并利用逐点界 (40) 和 (43) 得到。因此，对所有 $\alpha \le 2$,

$$\|L_\lambda(\varphi - \psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p-\alpha+1/2} + R^{-\alpha-d/2}\,.$$

由于 $0 < s \le 2$，由谱定理可得

$$\|L^{s/2}_\lambda(\varphi-\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \|\varphi-\psi\|^{1-s/2}_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \|L_\lambda(\varphi-\psi)\|^{s/2}_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\,.$$

代入上述各界，我们得出

$$\|L^{s/2}_\lambda(\varphi-\psi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \lesssim r^{p+1/2-\alpha s/2} + R^{-\alpha-d/2}\,.$$

由于根据假设 $s < (1+2p)/\alpha$，当 $r \to 0$ 和 $R \to \infty$ 时，它趋于零。另请注意，$\|\varphi-\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}$ 趋于零，这就证明了定理中关于 $f = L^{s/2}_\lambda\psi$ 的第二个断言。

步骤 2。现在我们证明一般情形下的定理 24。

令 $f \in L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 和 $\varepsilon > 0$。根据谱定理，我们有 $e^{-tL_\lambda} f \to f$ as $t \to 0$ and$e^{-tL_\lambda} f \to 0$ as $t \to \infty$。（后一个收敛性用到了 0 不是 L_λ 的特征值这一事实。）因此，存在 $t_1 > 0$ 使得 $\|e^{-t_1 L_\lambda} f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \varepsilon$，并且存在 $t_2 < \infty$ 使得$\|e^{-t_2 L_\lambda} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \varepsilon$。于是，取 $t := t_1/2$ 和 $T := t_2/2$,

$$\|(e^{-2tL_\lambda} - e^{-2TL_\lambda})f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \|e^{-t_1 L_\lambda} f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} + \|e^{-t_2 L_\lambda} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le 2\varepsilon\,.$$

由于 $C^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 中稠密，且 $L^{-s/2}_\lambda(e^{-tL_\lambda} - e^{-TL_\lambda})$ 有界（因为 $s \in [0,2]$），因此存在一个 $k \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d_+)$ 使得

$$\|k - L^{-s/2}_\lambda(e^{-tL_\lambda} - e^{-TL_\lambda})f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \varepsilon\,.$$

我们定义 $\psi := (e^{-tL_\lambda} + e^{-TL_\lambda})k$并记作

$$e^{-2tL_\lambda} - e^{-2TL_\lambda} = L^{s/2}_\lambda(e^{-tL_\lambda} + e^{-TL_\lambda})L^{-s/2}_\lambda(e^{-tL_\lambda} - e^{-TL_\lambda})$$

求

$$\begin{aligned}\|L_\lambda^{s/2}\psi - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} &\le \|L_\lambda^{s/2}(e^{-tL_\lambda}+e^{-TL_\lambda})\|\|k - L_\lambda^{-s/2}(e^{-tL_\lambda}-e^{-TL_\lambda})f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\\ &\quad + \|(e^{-2tL_\lambda}-e^{-2TL_\lambda})f - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)}\\ &\le \left(\|L_\lambda^{s/2}(e^{-tL_\lambda}+e^{-TL_\lambda})\| + 2\right)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

根据步骤 1（分别应用于 $L_\lambda^{s/2}e^{-tL_\lambda}k$ 和 $L_\lambda^{s/2}e^{-TL_\lambda}k$），存在一个 $\varphi \in C_c^\infty$，使得

$$\|L_\lambda^{s/2}\varphi - L_\lambda^{s/2}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \varepsilon\,.$$

由此可得

$$\|L_\lambda^{s/2}\varphi - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \left(\|L_\lambda^{s/2}(e^{-tL_\lambda}+e^{-TL_\lambda})\| + 3\right)\varepsilon\,.$$

这就证明了定理的第一个断言。

对于第二个断言，我们假设 $f \in \operatorname{dom} L_\lambda^{-s/2}$。于是我们选取 $t_1, t_2 \in (0,\infty)$，此外还满足 $\|e^{-t_1L_\lambda}L_\lambda^{-s/2}f - L_\lambda^{-s/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \varepsilon$ 和 $\|e^{-t_2L_\lambda}L_\lambda^{-s/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \varepsilon$。那么 $\|(e^{-2tL_\lambda}-e^{-2TL_\lambda})L_\lambda^{-s/2}f - L_\lambda^{-s/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le 2\varepsilon$。此外，根据步骤 1，我们还可以假设 $\|\varphi-\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \varepsilon$。由此可以像之前一样推出，

$$\|\varphi - L_\lambda^{-s/2}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d_+)} \le \left(\|e^{-tL_\lambda}+e^{-TL_\lambda}\| + 3\right)\varepsilon\,,$$

由此完成定理的证明。 □

9. Proof of the main result

定理 1 的证明。我们先证明函数 $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$ 满足的 (6) 和 (7)。仅利用三角不等式，这些结论便可直接由通常的 Hardy 不等式及其反向和推广形式（见定理 3 和定理 5）得出。论证与 [KMV+18、FMS21] 中的相同，故略去细节。

现在我们将 (6) 推广到所有 $u \in \operatorname{dom} L_\lambda^{s/2}$。根据定理 24（应用于 $f = L_\lambda^{s/2}u$），存在一个序列 $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$，使得 $\varphi_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 且 $L_\lambda^{s/2}\varphi_n \to L_\lambda^{s/2}u$ in$L^2(\mathbb{R}^d_+)$。将不等式 (6) 应用于 $\varphi_n - \varphi_m$，可知 $(L_0^{s/2}\varphi_n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ 中是柯西序列，因此收敛到某个 $f \in L^2(\mathbb{R}^d_+)$。由于算子 $L_0^{s/2}$ 是闭的，我们得出 $u \in \operatorname{dom} L_0^{s/2}$ 且 $L_0^{s/2}u = f$。对 φ_n 的不等式取极限，即得所声称的 u 所满足的不等式 (6)。

式 (7) 的推广可类似地得出。我们只需指出，与 $\lambda = 0$ 对应的 p 是 $(\alpha-1)_+$。因此，定理 1 中的假设 $s < (1+2(\alpha-1)_+)/\alpha$ 与定理 24 中的假设一致（取 $\lambda = 0$）。□

现在我们讨论定理 1 中假设的最优性。

命题 27. 设 $\alpha \in (0,2]$，并令 $\lambda \ge 0$ 在 $\alpha \in (0,2)$ 时取值，$\lambda \ge -1/4$ 在 $\alpha = 2$ 时取值。令 p 由 (4) 定义，并设 $s \in (0,2]$。

(1) 若 $\lambda < 0$, $p < d - 1/2$ 且 $\operatorname{dom}(L_\lambda^{(\alpha)})^{s/2} \subset \operatorname{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2}$，则 $s < (1+2p)/\alpha$。(2) 若 $\lambda > 0$，$(\alpha-1)_+ < d - 1/2$ 且 $\operatorname{dom}(L_0^{(\alpha)})^{s/2} \subset (L_0^{(\alpha)})^{s/2}$，则 $s < (1+2(\alpha-1)_+)/\alpha$。

注意，当 $d \ge 2$，或当 $d = 1$ 且 $\alpha \le 3/2$ 时，‘附加’假设 $p < d - 1/2$ 和 $(\alpha-1)_+ < d - 1/2$ 自动成立。

注记 28. 设 $\alpha \in (0,2)$，$\lambda \in [\lambda_*, 0)$，并假设 $e^{-tL_\lambda}(x,y)$ 满足 (9) 中的下界，其中 p 在 (4) 中定义。则命题 27 的第 (1) 部分对这个 λ 值仍然成立。这可由下文证明中的同样论证得出。

证明. 我们证明第 (1) 部分，另一部分的证明类似。我们将在附加假设 $s < \frac{1+2(\alpha-1)}{2}_+ \wedge \frac{2d}{\alpha}$ 下证明该定理。注意，假设 $\lambda < 0$（它等价于 $p < (\alpha-1)_+$）和假设 $p < d-1/2$ 意味着区间 $\left[\frac{1+2p}{\alpha}, \frac{1+2(\alpha-1)}{2}_+ \wedge \frac{2d}{\alpha}\right)$ 非空。因此，我们的证明将表明，在此区间内，包含关系 $\operatorname{dom} L_\lambda^{s/2} \subset \operatorname{dom} L_0^{s/2}$ 不成立。根据取根运算的算子单调性（例如参见 [BS87，第 10.4] 节），可得该不等式对所有 $s \geq \frac{1+2(\alpha-1)}{2}_+ \wedge \frac{2d}{\alpha}$ 也不成立。

因此，假设 $s < \frac{1+2(\alpha-1)}{2}_+ \wedge \frac{2d}{\alpha}$。令 $u \in e^{-L_\lambda} C_c^\infty(\mathbb{R}^d_+)$。则 $u \in \operatorname{dom} L_\lambda^{s/2} \subset \operatorname{dom} L_0^{s/2}$。利用 $\lambda = 0$ 和 $g = L_0^{s/2} u$ 应用定理 13（此处需要 s 的上界），我们推得 $x_d^{-\alpha s/2} u \in L^2(\mathbb{R}^d_+)$。利用定理 9 中的下界，并按照定理 13 证明中必要性部分的论证，我们可得 $s < (1+2p)/\alpha$，如所述。□

Appendix A. Definition of the exponent p

在本附录中，我们始终假设 $\alpha \in (0,2)$。对于 $p \in (-1, \alpha)$，令

$$\gamma(\alpha,p) := \int_0^1 \frac{(t^p-1)(1-t^{\alpha-p-1})}{(1-t)^{1+\alpha}}\, dt\,.$$

函数 C 在 CKSV20 的注 3.3] 中针对 $d=1$ 定义如下：

$$(-1,\alpha) \ni p \mapsto C(p) := \mathcal{A}(1,-\alpha)\,\gamma(\alpha,p)$$

以及在 [CKSV20, Equation (3.4)] 中，对于 $d \geq 2$，有

$$(-1,\alpha) \ni p \mapsto C(p) := \mathcal{A}(d,-\alpha)\,\frac{|\mathbb{S}^{d-2}|}{2}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{d-1}{2}\right)\gamma(\alpha,p)$$

其中贝塔函数为 B。下面说明，这些定义与我们的定义 (3) 一致；特别是，它们与 d 无关。

首先，我们回顾公式 (2) 中的 $\mathcal{A}(d,-\alpha)$，并由 $|\mathbb{S}^{d-2}| = \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})}$ 得到

$$\mathcal{A}(d,-\alpha)\,\frac{|\mathbb{S}^{d-2}|}{2}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) = \mathcal{A}(1,-\alpha)\,,$$

这已经说明了其与 d 无关。因此，从现在起 $d=1$。此外，由伽马函数的反射公式和倍增公式，我们得到

$$\mathcal{A}(1,-\alpha) = \frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}\,\Gamma(\alpha+1)\,. \tag{45}$$

接下来，根据 [BD11, (2.2)]，对于 $\alpha \neq 1$ 和 $\alpha > p > -1$，有

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,p) = \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\,[&(p+1-\alpha)(p+2-\alpha)B(p+1,2-\alpha)\\ &-(1-\alpha)(2-\alpha)B(1,2-\alpha)+p(p-1)B(\alpha-p,2-\alpha)]\,.\end{aligned}$$

将 t 表示为 将贝塔函数表示为伽马函数，并利用其函数方程，我们得到 d

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha,p) &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)}\left[\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(p-\alpha+1)} - (1-\alpha) + \frac{\Gamma(\alpha-p)\,\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(-p)}\right]\\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha}\left[\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(-p)}\right].\end{aligned} \tag{46}$$

利用伽马函数的反射公式，我们得到

$$\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha-p)}{\Gamma(-p)} = -\frac{1}{\pi}\Gamma(1+p)\Gamma(\alpha-p)\,(\sin\pi(p-\alpha)+\sin\pi p)\,.$$

将其代入（46），并与（45）结合，我们得到

$$C(p)=\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi}\Gamma(\alpha)+\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+p)\Gamma(\alpha-p)\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\pi^2}\left(\sin\pi(p-\alpha)+\sin\pi p\right).$$

现在由 $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\pi/\sin(\pi\alpha)$（根据反射公式）以及

$$\frac{\sin\frac{\pi\alpha}{2}}{\sin\pi\alpha}\left(\sin\pi(p-\alpha)+\sin\pi p\right)=\sin\frac{\pi(2p-\alpha)}{2}.$$

既然我们已经证明了对 C 的定义与 [CKSV20], 中的定义相同，就可以利用其在 [CKSV20 第 3.1], 小节中确立的性质，即其在$[\frac{\alpha-1}{2},\alpha)$ 上严格单调，在 $p=\alpha$ 处发散，并在 $p=\alpha-1$ 处为零（0）。其关于 $p=\frac{\alpha-1}{2}$ 的对称性可由式 (3) 直接得出。

AppendixB. Proof of Theorem 10

在本节中，我们始终假设 $\alpha=2$。

步骤 1。通过变量分离，我们有

$$e^{-tL_\lambda}(x,y)=e^{t\Delta_{\mathbb{R}^{d-1}}}(x',y')\cdot e^{-t(-\Delta_{\mathbb{R}_+}+\lambda x_d^{-2})}(x_d,y_d).$$

由于第一个因子等于 $(4\pi t)^{-\frac{d-1}{2}}e^{-|x'-y'|^2/4t}$，因此，$d\geq 2$ 维情形下的定理可由其在 $d=1$ 情形下的特例推出。故下文考虑后一情形。

步骤 2。采用与 L_λ 酉等价的版本会更方便。具体而言，对于 $\mu\geq 0$，我们考虑非负二次型

$$\int_0^\infty |u'|^2 r^{2\mu+1}\,dr$$

其定义在 $u\in C_c^1(\mathbb{R}_+)$ 上。根据 Friedrichs 定理，该二次型在希尔伯特空间 $L^2(\mathbb{R}_+,r^{2\mu+1}dr)$ 中导出一个自伴非负算子 $\mathcal{L}_\mu$。注意，算子 $\mathcal{L}_\mu$ 定义域中的函数 u 二阶弱可微，且 $\mathcal{L}_\mu u=-u''-(2\mu+1)r^{-1}u'$。

众所周知，算子 $\mathcal{L}_\mu$ 可通过汉克尔变换对角化；特别地，这给出了其热核的积分公式。利用标准公式可以计算出涉及贝塞尔函数的积分，从而得到显式表达式

$$\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}_\mu}(r,s)=(2t)^{-1}\left(\frac{1}{rs}\right)^\mu\cdot\exp\left(-\frac{r^2+s^2}{4t}\right)I_\mu\left(\frac{rs}{2t}\right)\tag{47}$$

例如，该公式见 [BS02，第 75] 页。我们强调，这是相对于底层测度 $r^{2\mu+1}\,dr$ 的热核，即

$$(e^{-t\mathcal{L}_\mu}f)(r)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}_\mu}(r,s)f(s)\,s^{2\mu+1}\,ds.$$

利用以下事实

$$\lim_{z\to 0}z^{-\mu}I_\mu(z)=\frac{2^{-\mu}}{\Gamma(1+\mu)}\qquad\text{and}\qquad\lim_{z\to\infty}z^{\frac12}e^{-z}I_\mu(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

由式（47）我们立即得到

$$\mathrm{e}^{-t\mathcal{L}_\mu}(r,s)\sim\left(1\wedge\frac{r\cdot s}{t}\right)^{\mu+\frac12}\left(\frac{1}{rs}\right)^{\mu+\frac12}\cdot t^{-\frac12}\cdot\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{4t}\right).\tag{48}$$

接下来，我们证明存在一个 $0<c<1$，使得对于所有 r、s、$t>0$，都有

$$\begin{aligned}&\left(1\wedge\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\mu+\frac12}\left(1\wedge\frac{s}{\sqrt{t}}\right)^{\mu+\frac12}\left(\frac{1}{rs}\right)^{\mu+\frac12}\cdot t^{-\frac12}\cdot\exp\left(-\frac{(r-s)^2}{4t}\right)\\&\lesssim \mathrm{e}^{-t\mathcal{L}_\mu}(r,s)\\&\lesssim\left(1\wedge\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^{\mu+\frac12}\left(1\wedge\frac{s}{\sqrt{t}}\right)^{\mu+\frac12}\left(\frac{1}{rs}\right)^{\mu+\frac12}\cdot t^{-\frac12}\cdot\exp\left(-c\frac{(r-s)^2}{4t}\right).\end{aligned}\tag{49}$$

事实上，我们证明这对任意 $0<c<1$ 都成立，但我们的证明对第二个“.”给出的常数会在 c趋近于 1 时发散。

注意，当 r、$s\le\sqrt{t}$ 或 r、$s\ge\sqrt{t}$ 时，$(1\wedge\frac{r}{\sqrt{t}})(1\wedge\frac{s}{\sqrt{t}})$ 与 $1\wedge\frac{rs}{t}$ 重合；并且对于任意 r、s，前者都不大于后者。由 (48) 可知，这证明了 (49) 中第一个“.”，并表明我们只需在区域 $r\le\sqrt{t}\le s$ 和 $s\le\sqrt{t}\le r$ 中证明第二个“.”。根据对称性，只需考虑前一个区域。此外，根据缩放，我们可以假设 $t=1/4$。记 $p:=\mu+1/2$，并证明存在一个 $0<c<1$，使得对所有 $r\le1/2\le s$,

$$(1\wedge rs)^p\exp\left(-(r-s)^2\right)\lesssim r^p\cdot\exp\left(-c(r-s)^2\right).\tag{50}$$

这显然将推出（49）中的第二个“.”。

为证明（50），我们区分 $rs\le1$ 和 $rs\ge1$ 两种情形，并先讨论前一种情形。这里需要证明

$$s^p\exp(-(r-s)^2)\lesssim\exp(-c(r-s)^2).$$

取 p次方根，并利用不等式 $s=(s-r)+r\le(s-r)+1/2$，即可推出这一结论。通过取 $c<1$ 任意，可以控制与 $(s-r)$ 对应的项。要证明 $rs\ge1$ 时的（50），我们需要证明

$$\exp\left(-(r-s)^2\right)\lesssim r^p\cdot\exp\left(-c(r-s)^2\right).$$

乘以 r^p，再取 p次方根，并利用不等式 $r^{-1}\le s=(s-r)+r\le(s-r)+1/2$，即可推出这一结论。与前面一样，通过取 $c<1$ 任意，可以控制与 $(s-r)$ 对应的项。至此，（50）的证明完成。

步骤 3。还需将结果从算子 $\mathcal{L}_\mu$ 转换到算子 L_λ。算子 U，由 $(Uf)(x)=x^{\mu+\frac12}f(x)$ 定义，是从 $L^2(\mathbb{R}_+,r^{2\mu+1}\,dr)$ 到 $L^2(\mathbb{R}_+,dx)$ 的酉算子。它将 $C_c^1(\mathbb{R}_+)$ 映入自身；对于来自该空间的函数 u，通过分部积分可得

$$\int_0^\infty\left(|(Uu)'(x)|^2+(\mu^2-\tfrac14)x^{-2}|Uu(x)|^2\right)dx=\int_0^\infty|u'(r)|^2r^{2\mu+1}\,dr.$$

这意味着

$$U^*L_{\mu^2-1/4}U=\mathcal{L}_\mu$$

因此，对于所有 t、x、$y>0$,

$$e^{-tL_{\mu^2-1/4}}(x,y)=(xy)^{\mu+\frac12}e^{-t\mathcal{L}_\mu}(x,y).$$

根据 (49)，我们得到定理 10 中的结论。 □

References

[BBC03] Krzysztof Bogdan、Krzysztof Burdzy 和 Zhen-Qing Chen。删失稳定过程。《概率论及相关领域》，127(1):89–152，2003。[BD11] Krzysztof Bogdan 和 Bart lomiej Dyda。分数阶 Hardy 不等式中的最佳常数。《数学新闻》，284(5-6):629–638，2011。[BD23] The Anh Bui 和 Piero D'Ancona。广义 Hardy 算子。《非线性》，36(1):171–198，2023。[BN22] The Anh Bui 和 Georges Nader。与广义 Hardy 算子相关的 Hardy 空间及其应用。《非线性微分方程及其应用》，29(4):第40篇论文，共40页，2022。[BS87] M. Sh. Birman 和 M. Z. Solomjak。《希尔伯特空间自伴算子谱理论》。数学及其应用（苏联系列）。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，1987。由 S. Khrushch¨ev 和 V. Peller 从1980年俄文原版译出。[BS02] Andrei N. Borodin 和 Paavo Salminen。《布朗运动手册——事实与公式》。概率及其应用。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，第二版，2002。[CK03] Zhen-Qing Chen 和 Takashi Kumagai。d-集上类稳定过程的热核估计。《随机过程及其应用》，108(1):27–62，2003。[CKS10] Zhen-Qing Chen、Panki Kim 和 Renming Song。删失类稳定过程的双侧热核估计。《概率论及相关领域》，146(3-4):361–399，2010。[CKSV20] Soobin Cho、Panki Kim、Renming Song 和 Zoran Vondra˘cek。具有临界杀死项的非局部算子之狄利克雷热核的分解与估计。《纯粹与应用数学杂志》(9)，143:208–256，2020。[FG16] Rupert L. Frank 和 Leander Geisinger。拉普拉斯算子分数幂的精细半经典渐近。《克雷尔数学杂志》，712:1–37，2016。[FLS07] Rupert L. Frank、Elliott H. Lieb 和 Robert Seiringer。核电荷不超过临界值时磁场中相对论物质的稳定性。《数学物理通讯》，275(2):479–489，2007。[FLS08] Rupert L. Frank、Elliott H. Lieb 和 Robert Seiringer。分数阶薛定谔算子的 Hardy-Lieb-Thirring 不等式。《美国数学会杂志》，21(4):925–950，2008。[FMS21] Rupert L. Frank、Konstantin Merz 和 Heinz Siedentop。涉及广义 Hardy 算子的 Sobolev 范数等价性。《国际数学研究通知》，2021(3):2284–2303，2021年2月。[FMS23a] Rupert L. Frank、Konstantin Merz 和 Heinz Siedentop。相对论强 Scott 猜想：简短证明。载于 B.-G. Englert、H. Siedentop 和 M.-I. Trappe 编，《多粒子系统的密度泛函：数学理论与物理应用》，《讲义系列》第41卷，新加坡国立大学数学科学研究所，第69–79页。世界科技出版公司，2023年4月。[FMS23b] Rupert L. Frank、Konstantin Merz 和 Heinz Siedentop。大库仑系统的 Scott 猜想：综述。《数学物理快报》，113(1):第11篇论文，2023。[FMSS20] Rupert L. Frank、Konstantin Merz、Heinz Siedentop 和 Barry Simon。钱德拉塞卡原子的强 Scott 猜想证明。《纯粹与应用泛函分析》，5(6):1319–1356，2020年12月。[FS08] Rupert L. Frank 和 Robert Seiringer。非线性基态表示与最佳 Hardy 不等式。《泛函分析杂志》，255(12):3407–3430，2008。[FS10] Rupert L. Frank 和 Robert Seiringer。半空间中的最佳分数阶 Hardy 不等式。载于《Vladimir Maz'ya 研究选集（一）》，《国际数学丛书（纽约）》第11卷，第161–167页。施普林格出版社，纽约，2010。[GT01] David Gilbarg 和 Neil S. Trudinger。《二阶椭圆偏微分方程》。《数学经典》。施普林格出版社，柏林，2001。1998年版重印。[Har19] G. H. Hardy。积分学若干问题札记 LI：关于希尔伯特双重级数定理，以及有关无穷级数与积分收敛性的若干相关定理。《数学信使》，48:107–112，1919。[Har20] G. H. Hardy。希尔伯特定理的一则注记。《数学杂志》，6(3–4):314–317，1920。[Her77] Ira W. Herbst。算子 $(p^2+m^2)^{1/2}-Ze^2/r$ 的谱理论。《数学物理通讯》，53:285–294，1977。

[JKS22a] Tomasz Jakubowski、Kamil Kaleta 和 Karol Szczypkowski。具有奇异势的分数阶类型薛定谔算子的束缚态与热核。arXiv 预印本，文章编号 arXiv:2208.00683，2022年8月。[JKS22b] Tomasz Jakubowski、Kamil Kaleta 和 Karol Szczypkowski。具有临界势的相对论稳定算子。arXiv 预印本，文章编号 arXiv:2208.00687，2022年8月。[KMP06] Alois Kufner、Lech Maligranda 和 Lars-Erik Persson。Hardy 不等式的前史。《美国数学月刊》，113(8):715–732，2006。[KMV+17] Rowan Killip、Changxing Miao、Monica Visan、Junyong Zhang 和 Jiqiang Zheng。具有反平方势的能量临界非线性薛定谔方程。《离散与连续动力系统》，37(7):3831–3866，2017。[KMV+18] R. Killip、C. Miao、M. Visan、J. Zhang 和 J. Zheng。适配于具有反平方势的薛定谔算子的索伯列夫空间。《数学杂志》，288(3-4):1273–1298，2018。[KMVZ17] Rowan Killip、Jason Murphy、Monica Visan 和 Jiqiang Zheng。三维空间中具有反平方势的聚焦型三次非线性薛定谔方程。《微分与积分方程》，30(3-4):161–206，2017。[KPS81] V. F. Kovalenko、M. A. Perelmuter 和 Ya. A. Semenov。具有 $L_w^{l/2}(\mathbb{R}^l)$- 势的薛定谔算子。《数学物理杂志》，22:1033–1044，1981。[KVZ16] Rowan Killip、Monica Visan 和 Xiaoyi Zhang。凸障碍物外的黎斯变换。《国际数学研究通知》，(19):5875–5921，2016。[Kwa11] Mateusz Kwa´snicki。从属布朗运动在半直线上的谱分析。《数学研究》，206(3):211–271，2011。[Kwa19] Mateusz Kwa´snicki。分数阶拉普拉斯算子及其性质。载于《分数阶微积分及其应用手册》第1卷，第159–193页。德古意特出版社，柏林，2019。[Mer21] Konstantin Merz。关于与广义 Hardy 算子相关的索伯列夫空间尺度。《数学杂志》，299(1):101–121，2021。[Mer22] Konstantin Merz。通过Phragm´en-Lindel¨of原理研究分数阶薛定谔算子的复时间热核。《演化方程杂志》，22(3):第62号论文，30页，2022。[OK90] B. Opic 和 A. Kufner。《Hardy 型不等式》，Pitman 数学研究笔记丛书第219卷。朗文科技出版社，哈洛，1990。[ROS14] Xavier Ros-Oton 和 Joaquim Serra。分数阶拉普拉斯算子的狄利克雷问题：直至边界的正则性。《纯粹与应用数学杂志》(9)，101(3):275–302，2014。[SWW22] Renming Song、Peixue Wu 和 Shukun Wu。具有多重奇异临界杀死项的非局部算子的热核估计。arXiv 预印本，文章编号 arXiv:2203.03891，2022年3月。[Yaf99] D. Yafaev。Hardy–Rellich 不等式的最佳常数。《泛函分析杂志》，168(1):212–144，1999年10月。

(Rupert L. Frank) Mathematisches Institut, Ludwig-Maximilans Universität München, Theresienstr. 39, 80333 München, Germany, and Munich Center for Quantum Science and Technology (MCQST), Schellingstr. 4, 80799 München, Germany, and Mathematics 253-37, Cal-tech, Pasadena, CA 91125, USA
电子邮箱：r.frank@lmu.de

(KonstantinMerz) Institut für Analysis und Algebra, Technische Universität Braunschweig, Universitätsplatz 2, 38106 Braunschweig, Germany, and Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan电子邮箱：k.merz@tu-bs.de