arXiv:2303.05365v1 [math.NA] 9 Mar 2023

球面设计生成的球面框架小波*

YUCHEN XIAO† 和XIAOSHENG ZHUANG‡

摘要。 本文详细研究了基于快速球谐变换的球面 t-设计变分刻画$A_{N,t}$ 、其梯度$\nabla A_{N,t}$及其海森矩阵 $\mathcal{H}(A_{N,t})$的结构。此外，我们提出使用信赖域方法求解$A_{N,t}$ 的最小化问题，从而构造具有较大 t值的球面 t-设计。基于所得球面 t-设计，我们构造了（半离散）球面紧框架小波及其截断系统，并为实际球面信号/图像处理开发了相应的快速球面框架小波变换。得益于较大的球面 t-设计以及球面框架小波的局部化性质，我们能够基于经过精细调整的球冠限制，采用局部阈值技术进行信号/图像去噪。我们进行了大量数值实验，以展示球面框架小波的效率和有效性，实验内容包括 Wendland 函数逼近、ETOPO 数据处理和球面图像去噪。

关键词。 紧框架小波，球面框架小波，球面 t-设计，快速球谐变换，快速球面框架小波变换，信赖域方法，Wendland 函数，ETOPO1，球面信号/图像，图像/信号去噪。

美国数学学会学科分类。 42C15, 42C40, 58C35, 65D18, 65D32

1. 引言与研究动机。 球面数据常见于许多现实应用中，例如全球定位系统（GPS）中的导航数据、地理学中的全球气候变化估算、天文学中的行星研究、宇宙学中的宇宙微波背景（CMB）数据分析、生物学和分子化学中的病毒分析，以及 360° 虚拟现实和计算机视觉中的全景图像和视频，等等。在许多这类现实应用场景中，观测到的球面数据可能规模庞大、在函数性质方面不规则，或者由于设备和环境的局限而不完整且带有噪声。如何“恰当地”表示这类数据，从而能够“高效地”处理它们，是成功解决这些现实问题的关键。球面数据必然是离散的，通常可以建模为球面网格或球面点集上的采样值 [10]。本文重点研究定义在单位球面上一类特殊结构点集上的球面数据，即球面 t-设计，并基于球面 t-设计构造多尺度表示系统，即半离散球面框架小波系统，用于球面数据的稀疏表示和高效处理。

如何在单位球面上“恰当地”分布点，是数学和物理学中许多基本问题的核心，例如最佳填充问题[14], 最小能量问题 [29], 与 Smale 第七问题相关的最优构型 [46], 等等。众所周知，在单位球面上定义所谓的“良好”点集 $\mathbb{S}^d := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{d+1} \,|\, \|\boldsymbol{x}\| = 1\}$（其中维数为 $d \geq 2$， $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数）并非易事。许多现实问题都可以解释为一个偏微分方程（PDE）或一个偏微分方程组，而人们随后会寻求其数值解（例如，使用有限元方法）以解决相关问题。数值

*提交给编辑部 日期。**资助：** 本研究部分得到中国香港特别行政区研究资助局项目 CityU 11309122 的资助，部分得到香港城市大学项目7005497和项目7005603的资助。

†香港城市大学数学系，达之路，九龙塘，香港（yc.xiao@my.cityu.edu.hk）。

‡香港城市大学数学系，达之路，九龙塘，香港（xzhuang7@cityu.edu.hk）。

这篇手稿仅供审阅。

积分（求积公式）因此在此类偏微分方程数值解中发挥着重要作用。从球面数值积-分的角度来看，也就是寻找一个求积（求积）公式 $Q_N := \{(\boldsymbol{x}_i,\ w_i) \in \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \,|\, i = 1, \ldots,\ N\}$ 使得 $\frac{1}{|\mathbb{S}^d|}\int_{\mathbb{S}^d} f(\boldsymbol{x})d\mu_d(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{i=1}^N w_i f(\boldsymbol{x}_i)$，其中 μ_d 表示 $\mathbb{S}^d$ 上的曲面测度，并且 $\mu_d(\mathbb{S}^d) =: |\mathbb{S}^d|$ 是 $\mathbb{S}^d$的表面积。由此可以定义一个“良好”点集 $X_N := \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N\} \subset \mathbb{S}^d$，其含义是要求权重 $w_i \equiv \frac{1}{N}$ 对某一类函数 f中的所有 i 均满足条件。更准确地说，令 $\Pi_t := \Pi_t(\mathbb{S}^d)$ 表示总次数不超过 t 、限制在 $\mathbb{S}^d$上的 $(d+1)$ 元多项式空间。若点集 X_N 满足

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N p(\boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{|\mathbb{S}^d|}\int_{\mathbb{S}^d} p(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mu_d(\boldsymbol{x}) \qquad \forall p \in \Pi_t. \tag{1.1}$$

这样的点配置 X_N，称为 球面 t-设计，由 Delsarte、Goethals 和 Seidel [18] 于 1977年提出。换言之，球面 t-设计 X_N是与 Π_t相关联的等权多项式精确求积公式。关于球面设计这一主题，可参阅 [5] Bannai 和 Bannai 撰写的优秀综述论文。

一个自然的问题随之而来：这样的球面 t-设计 X_N 是否存在？事实证明，这个问题引出了许多深刻的数学结果。Delsarte 等人 [18] 证明，对于任意次数 $t \in \mathbb{N}$，球面 t-设计 $X_N \subset \mathbb{S}^d$的点数 N下界满足 $N \geq N^*(d,t)$，其中$N^*(d,t) = 2\binom{d+\frac{t-1}{2}}{d}$当 t为奇数时成立，而 $N^*(d,t) = \binom{d+\frac{t}{2}}{d} + \binom{d+\frac{t}{2}-1}{d}$当 t为偶数时成立。当达到下界时，称其为紧球面 t-设计。注意，在圆 $\mathbb{S}^1$上，正（$t+1$）边形的顶点构成一个紧球面 t-设计，即$N^*(1,t) = t+1$。然而，值得注意的是，具有 $N^*(d,t)$ 个点的紧球面 t-设计仅在 $t = 1$、2、3、4、5、7、11 这些维数下存在，且各维数的条件有所不同d [5, 39]。另一方面，Seymour 和 Zaslavsky [43] （以非构造性方式）证明，只要 N 充分大，任意 t 都存在球面 t-设计。Wagner [51] 给出了首个可行的上界 $N = \mathcal{O}(t^{Cd^4})$。Korevaar 和 Meyers [29] 进一步证明，球面 t-设计可以取为 $N = \mathcal{O}(t^{d(d+1)/2})$，并猜想 $N = \mathcal{O}(t^d)$。Bondarenko、Radchenko 和 Viazovska [6] 利用拓扑度理论证明，球面 t-设计确实存在于 $N = \mathcal{O}(t^d)$。他们还证明，X_N 可以充分分离，即最小分离距离 $\delta_{X_N} := \min_{1\leq i<j\leq N}\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|$ 的阶为 $\mathcal{O}(N^{-1/d})$ [7]。结合 $N^*(d,t) = \mathcal{O}(t^d)$，可推出对于某些仅依赖于 d 的常数 $C_d \geq c_d > 0$，有 $c_d t^d \leq N \leq C_d t^d$，并可得出最优渐近阶为 t^d。

开篇提到的大多数现实世界球面数据，通常都是二维球面 $\mathbb{S}^2$ 上的球面信号。在本文及后续内容中，我们关注来自众多现实应用的球面信号处理。因此，我们将讨论范围限定在 $d = 2$ 的情形，并考虑通过数值优化方法得到的、定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的球面 t-设计 X_N。Hardin 和 Sloane [26] 对定义在 $\mathbb{S}^2$ 上的球面 t-设计进行了广泛研究，并提出了一系列推测性的球面 t-设计，每个设计包含 $\frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ 个点。Maier [34] 研究了利用多目标优化进行球面t-设计的数值计算。针对计算球面 t-设计的计算机辅助证明方法，则通过求解非线性方程和优化问题在 [2, 8, 9]中得到了发展。注意，$\dim(\Pi_t) = (t+1)^2$ 在 $\mathbb{S}^2$ 上。极值点集是 $\mathbb{S}^2$ 上由 $(t+1)^2$ 个点组成的集合，它使得 Π_t 的任意基的基矩阵的行列式达到最大值。

这篇手稿仅供审阅。

Sloan 和 Womersley [44] 指出，极值点集具有很好的几何性质，因为其中的点彼此间隔较远。Chen 和 Womersley 在 [9] 中通过求解欠定方程组并使用 Krawczyk 型区间算术技术，验证了当 t 较小时，存在包含 $(t+1)^2$ 个点的球面 t-设计。在 [8], 中，Chen、Frommer 和 Lang 进一步改进了区间算术技术，并证明对于所有不超过 100 的次数 t，都存在包含 $(t+1)^2$ 个点的球面 t-设计。包含 $(t+1)^2$ 个点的球面 t-设计称为极值球面 t-设计，[2] 也对此进行了研究。Womersley [55] 构造了对称球面 t-设计，其中 $N = \frac{t^2+t+4}{2}$，适用于不超过 325 的 t。区间算术方法 [8] 的时间复杂度为 $\mathcal{O}(t^6)$，因此当 t 较大时，便无法用该方法验证球面 t-设计的存在性。

Sloan 和 Womersley [45] 通过一个非负量 $A_{N,t}(X_N)$ 引入了球面 t-设计的变分刻画

$$A_{N,t}(X_N) := \frac{4\pi}{N^2} \sum_{\ell=1}^{t} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left| \sum_{i=1}^{N} Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_i) \right|^2, \tag{1.2}$$

其中，Y_ℓ^m是次数为 ℓ 、阶为 m的球谐函数。他们给出了球面 t-设计与 $A_{N,t}$之间关系的一些重要性质。其中之一是，X_N 是球面 t-设计，当且仅当 $A_{N,t}(X_N) = 0$（参见[45]中的定理 3）。因此，寻找球面 t-设计等价于求函数 $f(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N) := A_{N,t}(X_N)$ 的根，这可以通过求解以下非线性非凸问题来实现：

$$\min_{X_N \subset \mathbb{S}^2} A_{N,t}(X_N). \tag{1.3}$$

利用加法定理，可以将该量改写为勒让德多项式的形式，并可使用三项递推来加速 $A_{N,t}$ 的数值求值（以及其梯度和海森矩阵的计算）。然而，由于 [45] 中 $A_{N,t}$ 的公式实质上使用了完整的勒让德多项式求值矩阵，因此，数值球面 t-设计的计算仅适用于较小的 t。Graf 和 Potts [22] 利用基于流形优化技术和非等距快速球面傅里叶变换（NFSFTs）的快速矩阵向量计算，重新改写了 $A_{N,t}$。他们计算了满足 $N \approx \frac{t^2}{2}$ 的 $t \leq 1000$ 数值球面 t- 设计。

一旦获得球面 t-设计点集，球面上的信号便可建模为这类点集上函数的采样值。稀疏性是利用信号潜在结构、实现信号去噪等各种应用的关键。众所周知，多分辨率分析技术能够有效利用稀疏性；这类技术以欧几里得空间中的小波分析形式得到广泛应用$\mathbb{R}^d$，$d \geq 1$。过去四十年间，人们发展了包括小波、框架小波、曲波、剪切波等在内的多尺度表示系统，用于数据的稀疏表示（例如，参见[12, 16, 23, 25, 31, 35, 56]）；这些系统在逼近理论、计算机图形学、统计推断、压缩感知、偏微分方程的数值解等领域发挥着重要作用。球面上的小波最早见于[38, 40, 42]。随后，Antonio 和 Vandergheynst 在 [3, 4]采用群论方法构造了球面上的连续小波。Needlets 作为单位球面上的离散框架小波 $\mathbb{S}^d$、$d \geq 2$，在 [32, 37], 中得到研究；该方法使用 $\mathbb{S}^d$上的多项式精确求积公式。基于层次划分，[33]构造了面积正则球面 Haar 紧框架小波。球面上小波/框架小波的推广

这篇手稿仅供审阅。

以及局部化性质、紧框架性质、对称性、方向性等更理想性质的研究，随后在 [19, 28, 54, 36] 及其中的许多参考文献中得到进一步探讨。在 [52], 中，Wang 和 Zhuang 基于正交特征对、局部化核、滤波器组和仿射系统，为紧致光滑黎曼流形上的紧框架小波构造提供了一个通用框架，并研究了通过多项式精确求积公式进行的离散化。他们发展了快速框架小波滤波器组变换，并展示了其在二维球面上的实现。

本文进一步利用 $A_{N,t}$ 的结构，并结合快速非等距快速球面傅里叶变换，采用信赖域方法求得 t 较大（超过 1000）时的数值球面 t-设计。此外，我们着重于基于球面 t-设计，开发具有快速变换算法的球面紧框架小波，以用于实际的球面信号处理。本文的贡献主要体现在以下几个方面。首先，我们详细研究了 $A_{N,t}$ 的结构、其梯度 $\nabla A_{N,t}$ 及其海森矩阵 $\mathcal{H}(A_{N,t})$，并通过球谐变换及其伴随变换的快速求值来分析，无需像 [22] 中那样借助其流形版本。此外，我们提出采用信赖域方法求解最小化问题 (1.3)，以获得 t 值较大的球面 t-设计。其次，我们基于所得的球面 t-设计点集，构造了（半离散）球面紧框架小波系统。更重要的是，我们引入了一种截断球面框架小波系统，用于离散球面信号表示，并实现了相应的快速球面框架小波（滤波器组）变换，以供球面上的实际信号处理使用。第三，得益于高次数的球面 t-设计以及框架小波的局部化性质，我们能够基于经过精细调节的球冠 [15, 27] 限制，采用局部阈值技术进行信号/图像去噪。最后但同样重要的是，我们进行了大量数值实验，以展示球面框架小波的效率和有效性，内容包括 Wendland 函数逼近、ETOPO 数据处理以及球面图像去噪。

本文结构安排如下。我们在 t-设计中介绍信赖域方法，以第 2 节为例，其中包括对$A_{N,\,t}$及其梯度$\nabla A_{N,\,t}$及其海森矩阵 $\mathcal{H}$（$A_{N,\,t}$）的快速求值。在第 3 节，我们展示通过多种初始点集获得的数值球面 t-设计，并将其用于 Wendland 函数逼近。在第 4 节，基于球面 t-设计，我们给出球面框架小波系统及其截断球面框架小波系统的构造、刻画和算法实现。在第 5 节，我们通过数值实验展示截断球面框架小波系统在球面信号/图像去噪中的应用。最后，在第 6 节给出结论和总结。

2. 基于信赖域优化的球面 t-设计。本节简要介绍求解一般优化问题的信赖域方法，并说明如何将其用于寻找使 t 取值较大的球面 t-设计。

2.1. 信赖域优化。正如我们在引言中提到的，寻找X_N 以使$A_{N在t}$ 中(1.3)达到最小值，可以视为一个一般的非线性非凸优化问题:

$$\min_{x\subset X} f(x), \tag{2.1}$$

其中 $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 是待最小化的目标函数，而 $X \subset \mathbb{R}^d$ 是一个可行集。求解(2.1)主要有两种全局收敛方法：一种是线搜索，另一种是信赖域。线搜索方法使用

这篇手稿仅供审阅。

二次模型生成搜索方向，然后沿该方向寻找合适的步长。尽管线搜索方法在大多数情况下都很成功，但它可能无法充分利用 d维二次模型。与线搜索方法不同，信赖域方法 通过在当前迭代点的邻域（信赖域）内进行搜索，获得新的迭代点。与线搜索方法相比，信赖域方法具有诸多优势，例如算法鲁棒性更强、更容易建立收敛性结果、能够收敛到二阶驻点等。信赖域方法已有 70 多年的发展历史，下面我们简要介绍一下。更多详情请参阅著作 [48]。

设目标函数 f 至少二阶可微。 f在 $x=(\xi_1, \ldots\ldots, \xi_d)$ 处的梯度 $\in \mathbb{R}^d$ 定义为

$$\nabla f(x) := \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} f(x), \ldots, \frac{\partial}{\partial \xi_d} f(x)\right]^\top, \tag{2.2}$$

f 的海森矩阵定义为一个 $d \times d$ 对称矩阵，其元素为

$$[\mathcal{H} f(x)]_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial \xi_i \partial \xi_j} f(x), \qquad 1 \le i, j \le d. \tag{2.3}$$

设 x_k 为当前迭代点，并考虑用二次模型近似原目标函数 $f(x)$ 在 x_k 处的值： $q^{(k)}(s) = f(x_k) + g_k^\top s + \frac{1}{2} s^\top A_k s$，其中 $g_k = \nabla f(x_k)$ 且 $A_k = \mathcal{H} f(x_k)$。于是，优化问题(2.1) 本质上可归结为求解一系列信赖域子问题：

$$\min_s \quad q^{(k)}(s) = f(x_k) + g_k^\top s + \frac{1}{2} s^\top B_k s \quad \text{s.t.} \quad \|s\| \le \Delta_k, \tag{2.4}$$

其中， B_k 可以恰好等于 A_k ，也可以是 A_k($B_k \approx A_k$) 的对称近似。这等价于在以 x_k 为中心、半径为 Δ_k 的区域 $\Omega_k = \{x : \|x - x_k\| \le \Delta_k\}$ 中搜索一个新点 x_{k+1} 。信赖域算法见算法 2.1。给定初始值 (x_0, Δ_0) 和若干参数 $\Delta, \eta_1, \eta_2, \nu_1, \nu_2$后，该算法通过算法 2.2 中给出的预条件共轭梯度（PCG）算法，迭代近似求解 (2.4) 中的 s_k （第 2 行），并根据量 τ_k （第 3–4 行）由当前的 (x_k, Δ_k) 更新 (x_{k+1}, Δ_{k+1})。Steihaug [47] 基于预条件截断共轭梯度法提出了用于求解子问题 (2.4) 的算法 2.2。关于更多细节以及如何选择预条件矩阵 W，请参见 [13]。

关于算法 2.1 收敛性的一个著名结论如下，它表明序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ 收敛到 f的一个驻点。

THEOREM 2.1（[48]）。假设 f： $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 在有界水平集 $L = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, f(x) \le f(x_0)\}$上连续可微，近似海森矩阵 B_k的范数一致有界，且信赖域子问题 s_k 的解2.4有界，满足 $\|s_k\| \le \tilde{\eta}\Delta_k$，其中 $\tilde{\eta} > 0$ 为常数。那么， g_k 算法算法 2.1 生成的序列满足$\lim_{k\to\infty} g_k = 0$。

关于信赖域方法的计算时间复杂度，算法 2.1的总开销包括算法 2.1中总外层迭代步骤 k_{wh}（第 1 行的 while 循环）的开销，而每次外层迭代的开销又包括算法 2.2中内层迭代步骤$k_{for,\ i}$（第 4 行的 for 循环）的开销。总迭代次数为 $K_{TR} = \sum_{i=1}^{k_{wh}} k_{for,\ i}$。在每次内层或外层迭代中，主要开销来自对 f 的求值、梯度 $g = \nabla f$ 以及海森矩阵

这篇手稿仅供审稿使用。

算法 2.1信赖域算法

输入： x：初始点； $K_{\max}$：最大迭代次数； ε：终止容差；初始化 $k=0$, $x_0=x$, Δ, $\Delta_0\in(0,\Delta)$, $0<\eta_1\le\eta_2<1$, $0<\nu_1<1<\nu_2$。 1：当 $k\le K_{\max}$ 且 $\|g_k\|>\varepsilon$ 时，执行 2：近似求解子问题 2.4，求 s_k。 3：计算 $f(x_k+s_k)$ 和 $\tau_k=\frac{f(x_k)-f(x_{k+1})}{q^{(k)}(0)-q^{(k)}(s_k)}$。设置

$$x_{k+1}=\begin{cases}x_k+s_k, & \tau_k\ge\eta_1,\\ x_k, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

4: 选择 Δ_{k+1} 满足

$$\Delta_{k+1}\in\begin{cases}(0,\nu_1\Delta_k], & \tau_k<\eta_1,\\ [\nu_1\Delta_k,\Delta_k], & \tau_k\in[\eta_1,\eta_2),\\ [\Delta_k,\min\{\nu_2\Delta_k,\overline{\Delta}\}], & \tau_k\ge\eta_2 \text{ and } \|s_k\|=\Delta_k.\end{cases}$$

5: 更新 $g_{k+1}=\nabla f(x_{k+1})$ 和 $B_{k+1}\approx(\mathcal{H}f)(x_{k+1})$。设定 $k=k+1$。
6: **end while**
输出： 极小化点 x^*。

算法 2.2信赖域子问题的 PCG 算法2.4

Input: x_k: initial point; $K_{\max}$: maximum iterations; ε_k: k-th termination tolerance; W: precondition matrix. $\|g\|_W:=\sqrt{g^\top Wg}$.
Initialize $z_0=0$, $g_0=\nabla f(x_k)$, $\gamma_0=-d_0=W^{-1}g_0$, $B_k\approx(\mathcal{H}f)(x_k)$.
if $\|g_0\|<\varepsilon_k$ **then**
  $s_k=z_0$
else
  for $j=0,1,\ldots,K_{\max}$ **do**
    if $d_j^\top B_kd_j\le 0$ **then**
      find $\rho>0$ s.t. $\|z_j+\rho d_j\|_W=\Delta_k$; Set $s_k=z_j+\rho d_j$.
      break
    end if
    Set $\alpha_j=\frac{g_j^\top\gamma_j}{d_j^\top B_kd_j}$ and $z_{j+1}=z_j+\alpha_jd_j$.
    if $\|z_{j+1}\|_W\ge\Delta_k$ **then**
      find $\rho>0$ s.t. $\|z_j+\rho d_j\|_W=\Delta_k$; Set $s_k=z_j+\rho d_j$.
      break
    end if
    $g_{j+1}=g_j+\alpha_jB_kd_j$.
    if $\|g_{j+1}\|_W<\varepsilon_k\|g_0\|_W$ **then**
      $s_k=z_{j+1}$.
      break
    end if
    Set $\gamma_{j+1}=W^{-1}g_{j+1}$, $\beta_j=\frac{g_{j+1}^\top\gamma_{j+1}}{g_j^\top\gamma_j}$, $d_{j+1}=-\gamma_{j+1}+\beta_jd_j$.
  end for
end if
Output: solution s_k^*.

这篇手稿仅供审阅。

$\mathcal{H}f$(或其近似）。分别记 C_f，C_g，$C_{\mathcal{H}}$ 它们的计算时间复杂度。那么，算法 2.1 的总计算时间复杂度为 $\mathcal{O}(K_{TR}\cdot(C_f+C_g+C_{\mathcal{H}}))$ 阶。接下来，我们讨论球面 t-设计条件下的最小化问题(2.1)，即 $f=A_{N,t}$，以及相关的求值和复杂度。

2.2. 快速求值 $A_{N,t}$，$\nabla A_{N,t}$，以及 $\mathcal{H}(A_{N,t})$。 接下来，我们将详细说明 $A_{N,t}$、$\nabla A_{N,t}$以及 $\mathcal{H}(A_{N,t})$ 的求值。

对于 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{S}^2$，用球坐标（$\theta$，$\phi$）$\in[0,\pi]\times[0,2\pi$ 表示时，我们可以将其表示为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\theta,\ \phi)=(\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)\in\mathbb{S}^2$。对于每个 $\ell\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$ 和 $m=-\ell,\ \ldots,\ \ell$，球谐函数 Y_ℓ^m可表示为

$$Y_\ell^m(\boldsymbol{x})=Y_\ell^m(\theta,\phi):=\sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}P_\ell^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\phi},\tag{2.5}$$

其中 $P_\ell^m\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ 是缔合勒让德多项式，定义为 $P_\ell^m(z)=(-1)^m(1-z^2)^{\frac{m}{2}}\mathrm{d}^m\mathrm{d}z^m P_\ell(z)$，适用于 $\ell\in\mathbb{N}_0$ 和 $m=0,\ \ldots,\ \ell$，其中 $P_\ell\colon[-1,1]\to\mathbb{R}$ 是勒让德多项式，定义为 $P_\ell(z)=\frac{1}{2^\ell\ell!}\mathrm{d}^\ell\mathrm{d}z^\ell[(z^2-1)^\ell]$，适用于 $\ell\in\mathbb{N}_0$。我们采用约定 $P_\ell^{-m}:=(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_\ell^m$来定义负 m 时的 Y_ℓ^m。注意，$Y_0^0=\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$。于是，我们有 $\Pi_t=$张成空间$\{Y_\ell^m\,|\,(\ell,m)\in\mathcal{I}_t\}$，其指标集为

$$\mathcal{I}_t:=\{(\ell,m)\,|\,\ell=0,\ldots,t;m=-\ell,\ldots,\ell\}.\tag{2.6}$$

此外，$\{Y_\ell^m\,|\,\ell\in\mathbb{N}_0,|m|\le\ell\}$ 构成希尔伯特空间$L^2(\mathbb{S}^2)$的标准正交基：$=\{f\colon\mathbb{S}^2\to\mathbb{C}\,|\,\int_{\mathbb{S}^2}|f(\boldsymbol{x})|^2\mu_2(\boldsymbol{x})<\infty\}$ 上平方可积函数的空间。也就是说，$\langle Y_\ell^m,Y_{\ell'}^{m'}\rangle=\delta_{mm'}\delta_{\ell\ell'}$，其中内积定义为 $\langle f_1,f_2\rangle:=\int_{\mathbb{S}^2}f_1(\boldsymbol{x})f_2(\boldsymbol{x})d\mu_2(\boldsymbol{x})$，适用于 $f_1,\ f_2\in L^2(\mathbb{S}^2)$，且 δ_{ij} 为克罗内克 δ。因此，任意函数 $f\in L^2(\mathbb{S}^2)$都可以表示为 L^2展开式 $f=\sum_{\ell=0}^\infty\sum_{m=-\ell}^\ell\hat{}f_\ell^mY_\ell^m$，其中$\hat{}f_\ell^m:=\langle f,Y_\ell^m\rangle$ 是相对于 Y_ℓ^m的球谐函数（傅里叶）系数。

就（θ，ϕ）而言，$A_{N,t}(X_N)$ 可视为 $2N$ 个变量的函数。事实上，我们可以将点集 $X_N=\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_N\}\subset\mathbb{S}^2$ 识别为

$$X_N:=(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi}):=(\theta_1,\ldots,\theta_N,\phi_1,\ldots,\phi_N)\tag{2.7}$$

其中，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_N)$、$\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\ldots,\phi_N)$，以及 $\boldsymbol{x}_i:=\boldsymbol{x}_i(\theta_i,\phi_i)$ 是由其球坐标（θ_i,ϕ_i）$\in[0,\pi]\times[0,2\pi$）确定的第 i 个点。下文中，若无歧义，我们将 $\boldsymbol{x}_i=(\theta_i,\ \phi_i)$ 视为相同。记 $[N]:=\{1,\ldots,N\}$ 为大小为 N 的指标集。那么，式 (1.2) 中的变分刻画 $A_{N,t}(X_N)$ 可写成 $2N$ 个变量的光滑函数：

$$A_{N,t}(X_N)=A_{N,t}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi})=\frac{4\pi}{N^2}\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}\left|\sum_{i\in[N]}Y_\ell^m(\theta_i,\phi_i)\right|^2-1.\tag{2.8}$$

对于任意点集 X_N 和次数 t，我们有 $\dim\Pi_t=(t+1)^2$，且矩阵$\boldsymbol{Y}_t:=\boldsymbol{Y}_t(X_N):=(Y_\ell^m(\theta_i,\phi_i))_{i\in[N],(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}$的大小为 $N\times(t+1)^2$：

$$\boldsymbol{Y}_t=\begin{bmatrix}Y_0^0(\boldsymbol{x}_1)&Y_1^{-1}(\boldsymbol{x}_1)&Y_1^0(\boldsymbol{x}_1)&\cdots&Y_t^t(\boldsymbol{x}_1)\\Y_0^0(\boldsymbol{x}_2)&Y_1^{-1}(\boldsymbol{x}_2)&Y_1^0(\boldsymbol{x}_2)&\cdots&Y_t^t(\boldsymbol{x}_2)\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\Y_0^0(\boldsymbol{x}_N)&Y_1^{-1}(\boldsymbol{x}_N)&Y_1^0(\boldsymbol{x}_N)&\cdots&Y_t^t(\boldsymbol{x}_N)\end{bmatrix}.\tag{2.9}$$

这篇手稿仅供审阅。

其复共轭转置为 $\boldsymbol{Y}_t^\star := \boldsymbol{Y}_t(X_N)^\top \in \mathbb{C}^{(t+1)^2\times N}$。设 $\boldsymbol{e} := [1,\dots,1]^\top$ 是一个大小为 N 的向量。我们用 $\Re(\cdot)$表示对复对象（标量、向量或矩阵）逐元素取实部的操作。

我们有以下定理，它以简洁的矩阵—向量形式概括了 $A_{N,t}$ 和$\nabla A_{N,t}$ 关于 $\boldsymbol{Y}_t$ 和 $\boldsymbol{Y}_t^\star$的求值。

THEOREM 2.2. 固定 $t\in\mathbb{N}_0$。令 $A_{N,t}$ 如 (2.8) 中所定义，并定义

$$\hat{c}_\ell^m = \sum_{i=1}^N \overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_i)},\ a_\ell^m = \sqrt{\frac{\ell^2[(\ell+1)^2-m^2]}{(2\ell+1)(2\ell+3)}},\ b_\ell^m = \sqrt{\frac{(\ell+1)^2(\ell^2-m^2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)}}$$

对于 $(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+2}$，约定 $a_{-1}^m = b_{t+1}^m = b_{t+2}^m = 0$。定义向量 $\hat{\boldsymbol{c}}_0\in\mathbb{C}^{(t+2)^2}$、$\hat{\boldsymbol{d}}_0\in\mathbb{C}^{(t+1)^2}$ 以及对角矩阵 $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\theta}}$ 如下：

$$\hat{\boldsymbol{c}}_0 := \frac{8\pi}{N^2}\cdot(\hat{c}_{\ell-1}^m a_{\ell-1}^m - \hat{c}_{\ell+1}^m b_{\ell+1}^m)_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}},$$
$$\hat{\boldsymbol{d}}_0 := \frac{8\pi}{N^2}(\mathrm{i}m\hat{c}_\ell^m)_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t},\quad \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\theta}} := \mathrm{diag}(\frac{1}{\sin\theta_1},\dots,\frac{1}{\sin\theta_N}).$$

那么，$A_{N,t}$ 及其梯度 $\nabla A_{N,t}$ 的矩阵—向量形式为

$$A_{N,t}(X_N) = \frac{4\pi}{N^2}\|\boldsymbol{Y}_t^\star\boldsymbol{e}\|^2 - 1, \tag{2.10}$$

$$\nabla A_{N,t}(X_N) = \Re\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{Y}_{t+1}\hat{\boldsymbol{c}}_0\\ \boldsymbol{Y}_t\hat{\boldsymbol{d}}_0\end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

证明。式（2.10）中 $A_{N,t}$ 的矩阵—向量形式可直接由 (2.8) 和(2.9)得出。为了将 $A_{N,t}$ 的梯度改写为矩阵—向量形式，我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\xi_j}A_{N,t}(X_N) &= \frac{8\pi}{N^2}\Re\left[\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}\left(\sum_{i\in[N]}\overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_i)}\right)\frac{\partial}{\partial\xi_j}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_j)\right]\\ &= \frac{8\pi}{N^2}\Re\left[\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}\hat{c}_\ell^m\frac{\partial}{\partial\xi_j}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_j)\right],\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中 $\xi_j\in\{\theta_j,\phi_j\}$。根据以下公式（[50]），

$$\frac{\partial}{\partial\theta}Y_\ell^m = \frac{1}{\sin\theta}\left[a_\ell^m Y_{\ell+1}^m - b_\ell^m Y_{\ell-1}^m\right],\quad \frac{\partial}{\partial\phi}Y_\ell^m = \mathrm{i}mY_\ell^m, \tag{2.13}$$

因此我们可以推得

$$\frac{\partial}{\partial\theta_i}A_{N,t}(X_N) = \frac{8\pi}{N^2}\cdot\frac{1}{\sin\theta_i}\Re\left[\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}}\left(\hat{c}_{\ell-1}^m a_{\ell-1}^m - \hat{c}_{\ell+1}^m b_{\ell+1}^m\right)Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_i)\right], \tag{2.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}A_{N,t}(X_N) = \frac{8\pi}{N^2}\Re\left[\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}(\mathrm{i}m\hat{c}_\ell^m)Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_i)\right], \tag{2.15}$$

这意味着$\nabla A_{N,t}$ 在（2.11）中的表达式。证毕。 ∎

下面的定理给出了海森矩阵的矩阵-向量形式表达。

这篇手稿仅供审阅。

THEOREM 2.3. 沿用定理 2.2 中的记号，并进一步定义

$$\hat{\boldsymbol{d}}_1 := \frac{8\pi}{N^2}\cdot(a_{\ell-1}^m - b_{\ell+1}^m)_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}}, \qquad \hat{\boldsymbol{d}}_2 := \frac{8\pi}{N^2}\cdot(\mathrm{i}m\cdot 1^{\ell-\ell})_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}},$$

$$\hat{\boldsymbol{c}}_1 := \frac{8\pi}{N^2}\cdot(\hat{c}_\ell^m\cdot(-m^2))_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}, \qquad \hat{\boldsymbol{c}}_2 := \frac{8\pi}{N^2}\cdot(\hat{c}_\ell^m\cdot\ell(\ell+1))_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t},$$

$$\hat{\boldsymbol{c}}_3 := \frac{8\pi}{N^2}\cdot(\mathrm{i}m(\hat{c}_{\ell-1}^m a_{\ell-1}^m - \hat{c}_{\ell+1}^m b_{\ell+1}^m))_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}}, \quad \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\theta}} := \mathrm{diag}(\cot\theta_1,\dots,\cot\theta_N).$$

那么，海森矩阵 $\mathcal{H}(A_{N,\,t})$ 可写为

$$\mathcal{H}(A_{N,t}) = \Re\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta\theta}} & \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta\phi}}\\ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\phi\theta}} & \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\phi\phi}}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\overline{\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\theta}}}\\ \overline{\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\phi}}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\theta}}^\top & \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\phi}}^\top\end{bmatrix}\right), \tag{2.16}$$

其中

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{D}_\theta\boldsymbol{Y}_{t+1}\hat{\boldsymbol{d}}_1 \ \textit{and}\ \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\phi}} = \boldsymbol{Y}_t\hat{\boldsymbol{d}}_2, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta\theta}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\theta}}^2\boldsymbol{Y}_t\hat{\boldsymbol{c}}_1 - \boldsymbol{Y}_t\hat{\boldsymbol{c}}_2 - \boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{D}_\theta\boldsymbol{Y}_{t+1}\hat{\boldsymbol{c}}_0), \tag{2.18}$$

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta\phi}} = \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\phi\theta}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{Y}_{t+1}\hat{\boldsymbol{c}}_3), \ \textit{and}\ \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\phi\phi}} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{Y}_t\hat{\boldsymbol{c}}_1). \tag{2.19}$$

证明。对于$A_{N的t}$海森矩阵，由(2.12)可得

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi_j\partial\zeta_l}A_{N,t}(X_N) = \frac{8\pi}{N^2}\Re\left[\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_j)}\frac{\partial}{\partial\zeta_l}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l) + \hat{c}_\ell^m\delta_{jl}\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\partial\zeta_l}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l)\right)\right],$$

对于 $\xi_j\in\{\theta_j,\phi_j\}$ 和 $\zeta_l\in\{\theta_l,\phi_l\}$。因此，根据定义，海森矩阵可写成(2.16)中的形式，其中每个 $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\xi\zeta}}$ 都是对角矩阵，每个 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\xi}}$ 都是向量，对于 $\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{\zeta}\in\{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\phi}\}$ 由 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\xi}} = (\frac{8\pi}{N^2}\sum_{(\ell,\,m)\in\mathcal{I}_t}\frac{\partial}{\partial\xi_l}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l))_{l\in[N]}\in\mathbb{C}^{N\times 1}$和$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\xi\zeta}} = \mathrm{diag}(\frac{8\pi}{N^2}\sum_{(\ell,\,m)\in\mathcal{I}_t}\overline{\hat{c}_\ell^m\cdot\frac{\partial^2}{\partial\xi_l\partial\zeta_l}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l)})_{l\in[N]}$确定

由 (2.13)，类似于 (2.14)和 (2.15)的推导，我们可以推出

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\theta}} = \left(\frac{8\pi}{N^2}\frac{1}{\sin\theta_l}\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}}(a_{\ell-1}^m - b_{\ell+1}^m)Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l)\right)_{l\in[N]},$$

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\phi}} = \left(\frac{8\pi}{N^2}\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}(\mathrm{i}m)Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l)\right)_{l\in[N]},$$

它们等价于 (2.17)。

重复应用 (2.13)，得到

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}Y_\ell^m = \left[\frac{m^2}{\sin^2\theta} - \ell(\ell+1)\right]Y_\ell^m - \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_\ell^m, \quad \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_\ell^m = -m^2Y_\ell^m, \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\phi}Y_\ell^m = \frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\theta}Y_\ell^m = \mathrm{i}m\frac{\partial}{\partial\theta}Y_\ell^m = \frac{1}{\sin\theta}\left[\mathrm{i}ma_\ell^mY_{\ell+1}^m - \mathrm{i}mb_\ell^mY_{\ell-1}^m\right]. \tag{2.21}$$

因此， $\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\xi\zeta}}$ 的第 l 个对角元素为

$$[\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta\theta}}]_{l,l} = \frac{8\pi}{N^2}\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}\hat{c}_\ell^m\cdot\left(\frac{m^2}{\sin^2\theta_l}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l) - \ell(\ell+1)Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l) - \cot\theta_l\frac{\partial}{\partial\theta_l}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l)\right),$$

$$[\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\phi\phi}}]_{l,l} = \frac{8\pi}{N^2}\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t}\hat{c}_\ell^m\cdot(-m^2)Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l),$$

$$[\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{\theta\phi}}]_{l,l} = \frac{8\pi}{N^2}\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t+1}}\frac{1}{\sin\theta_l}[\mathrm{i}m(\hat{c}_{\ell-1}^m a_{\ell-1}^m - \hat{c}_{\ell+1}^m b_{\ell+1}^m)]Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_l),$$

这篇手稿仅供评审使用。

这意味着(2.18)和(2.19)。证毕。 □

2.3. 计算时间复杂度。注意，在定理 2.2 中，系数向量 $(\hat{c}_\ell^m)_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_t} = \boldsymbol{Y}_t^\star \boldsymbol{e}$ 和 a_ℓ^m, b_ℓ^m可以预先计算。此外，定理 2.2 和定理 2.3 中的 ˆvecotrs $\hat{\boldsymbol{c}}_k, \boldsymbol{d}_k$ 以及对角矩阵可以按 $\mathcal{O}(t^2+N)$ 的阶进行计算。得益于 (2.16) 中 $\mathcal{H}(A_N,t) = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$的良好结构，其中 $\mathcal{H}_1$ 由对角矩阵构成，而 $\mathcal{H}_2$ 是秩一矩阵，因此只需实现矩阵向量乘法。此外，在信赖域算法中，无需使用精确海森矩阵；海森矩阵的近似值就足以实现所需的收敛。在这种情况下，可以使用 $\mathcal{H}_1$ 或 $\mathcal{H}_2$。

对于涉及 $\boldsymbol{Y}_t$、$\boldsymbol{Y}_t^\star$ 的求值，已有基于球谐变换（SHTs）的快速求值方法。我们使用 Kunis 和 Potts 开发的软件包 [30], ，其中表明，对于给定向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^N$ ，可通过非等距快速球面傅里叶变换（NFSFT） $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}_t(X_N)\hat{\boldsymbol{c}}$ 求得 $\mathbb{C}^{(t+1)^2}$ ，其伴随算子 $\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{Y}_t(X_N)^\star \boldsymbol{y}$ 的求值时间复杂度为 $\mathcal{O}(t^2\log^2 t + N\log^2(\frac{1}{\epsilon}))$，其中 ϵ为算法预先设定的精度。

由上可知，对 $f = A_N$、$_t$、梯度 $g = \nabla A_N$、$_t$ 和海森矩阵 $\mathcal{H}(A_N,t)$ 的求值仅涉及对角矩阵、秩一矩阵、NFSFTs$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}_t(X_N)\hat{\boldsymbol{c}}$及其伴随算子 $\hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{Y}_t(X_N)^\star \boldsymbol{y}$。因此，$C_f + C_g + C_{\mathcal{H}}$的计算时间复杂度为 $\mathcal{O}(t^2\log^2 t + N\log^2(\frac{1}{\epsilon}))$。所以，算法 2.1 中用于计算球面 t-设计点集的信赖域算法，其计算时间复杂度为 $\mathcal{O}(K_{TR}\cdot(t^2\log^2 t + N\log^2(\frac{1}{\epsilon})))$。

3. 数值球面 t-设计。本节[1], 展示使用算法 2.1 从不同初始点集构造的数值球面 t-设计。对于算法 2.1，鉴于球面-t 设计的旋转不变性，我们对初始点集 $X_N \subset \mathbb{S}^2$ 进行预处理，将第一个点 $\boldsymbol{x}_1 = (\theta_1, \phi_1) = (0, 0) \in X_N$设为北极点，第二个点$\boldsymbol{x}_2 = (\theta_2, 0) \in X_N$ 设在本初子午线上。此外，我们设定 $\varepsilon = 2.2204$E-16（MATLAB 的浮点相对精度）和 $K_{\max} = 1$E+7。我们介绍以下四种 $\mathbb{S}^2$ 上的初始点集:

(I) 螺旋点（SP）。 $\mathbb{S}^2$ 上的螺旋点 $\boldsymbol{x}_k = (\theta_k, \phi_k)$（ $k \in [N]$ ）由以下方式生成: $\theta_k := \arccos\left(\frac{2k-(N+1)}{N}\right)$ 和 $\phi_k := \pi(2k - (N+1))/\mathfrak{g}$，其中$\mathfrak{g} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 为黄金比例 [49]。这是球面上的斐波那契螺旋点，与 [22]中的初始螺旋点相同。对于螺旋点集，当 $t \in \mathbb{N}$较大时，我们设定$N = N(t) = (t+1)^2$。

（II）均匀分布点（UD）。我们根据面积元 $\mathrm{d}\mu_2 = \sin\theta \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$ 在单位球面 $\mathbb{S}^2$ 上生成均匀分布点。通过 [53], ，我们为 $i \in [N]$ 均匀生成 $k_i \in (0,1)$ 和 $s_i \in (0,1)$，并定义$\boldsymbol{x}_i = (\theta_i, \phi_i)$ 为 $\theta_i := \arccos(1 - 2k_i)$，以及 $\phi_i := 2\pi s_i$。对于 UD 点集，我们令 $N = N(t) = (t+1)^2$，其中 $t \in \mathbb{N}$。

(III) 二十面体顶点网格点（IV）。二十面体有 12 个顶点、30 条棱和 20 个面。二十面体的面是等边三角形。二十面体是一种多面体，其顶点可用作球面镶嵌的起点。生成二十面体顶点后，可以得到五角十二面体的三角形表面网格。IV 点的数量 N 必须满足$N = N(k) = 4^{k-1}\times 10 + 2$，其中 $k \in \mathbb{N}$。本文中，我们固定 t之间的关系

[1]本文所有数值实验均在一台配备英特尔酷睿 i9 9820X 处理器和 32 GB DDR4 内存、运行 64 位 Windows 10 家庭版的台式计算机上使用 MATLAB R2021b 完成。

这篇手稿仅供审阅。

和 N为 $N \approx (t+1)^2$。也就是说，我们设定 $t = t(N(k)) = \lfloor \sqrt{4^{k-1} \times 10 + 2} - 1 \rfloor$，其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 为下取整算子。(IV) HEALPix 点（HL）。分层等面积等纬度像素化点[21]是通过球面的细分产生的球面等纬度点，这些细分可形成分层等面积区域。HL 点的数量 N 必须满足 $N = N(k) = 12 \times (2^{k-1})^2$，其中 $k \in \mathbb{N}$。同样，通过要求 $N \approx (t+1)^2,$，我们设定 $t = t(N(k)) = \lfloor 2^k \sqrt{3} - 1 \rfloor$。

3.1. 柏拉图立体的球面 t-设计。我们首先给出一个数值示例，以说明在算法 2.1 中使用完整海森矩阵 $\mathcal{H}(A_N,t)$ 的信赖域方法具有可行性，该方法可用于求得数值球面 t-设计；这些设计对应于著名的柏拉图正多面体。我们考虑构造正四面体、八面体和二十面体，它们分别是由 4 个点构成的球面 2-设计、由 6 个点构成的球面 3-设计，以及由 12 个点构成的球面 5-设计。我们分别使用 $N_{te} = 4$、$N_{oc} = 6$ 和 $N_{ic} = 12$ 生成三个螺旋点集。然后通过算法 2.1，我们分别得到 $x^* = X_{N_{te}}$、$X_{N_{oc}}$ 和 $X_{N_{ic}}$：对于四面体球面 2-设计，(1) $\sqrt{A_N, t}(X_{N_{te}}) = 2.04\text{E-}16$ 和 $\|\nabla A_N, t(X_{N_{te}})\|_\infty = 7.38\text{E-}16$，其中 $\|\cdot\|_\infty$ 表示 l_∞-范数；对于八面体球面 3-设计，(2) $\sqrt{A_N, t}(X_{N_{oc}}) = 4.66\text{E-}13$ 和 $\|\nabla A_N, t(X_{N_{oc}})\|_\infty = 2.37\text{E-}12$；对于二十面体球面 5-设计，(3) $\sqrt{A_N, t}(X_{N_{ic}}) = 2.83\text{E-}12$ 和 $\|\nabla A_N, t(X_{N_{ic}})\|_\infty = 2.86\text{E-}13$。初始点集和最终数值球面 t-设计如图 1 所示。

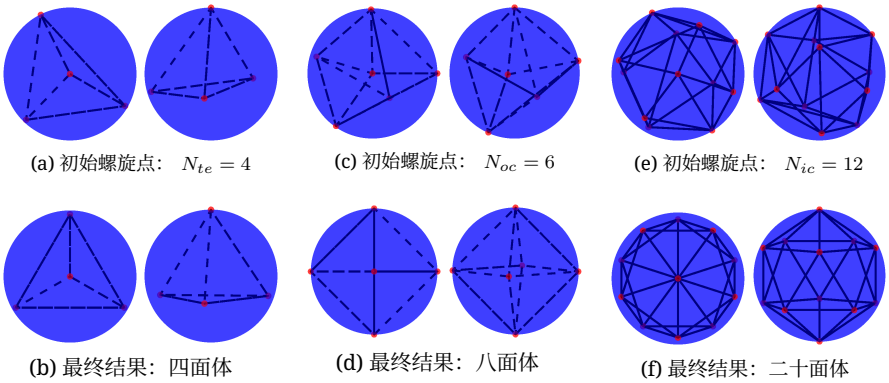


FIG. 1。柏拉图立体上的球面 t-设计 $\mathbb{S}^2$，使用算法 2.1。每组初始 SP 点集及其生成的最终点集的俯视图（左）和侧视图（右）。(a) 和 (b)：四面体。(c) 和 (d)：八面体。(e) 和 (f)：二十面体。

3.2. 球面 t-设计：由四种初始点集生成。我们在表 1 中列出了相关信息，包括次数 t、点数 N、总迭代次数 K_{TR},$\sqrt{A_N, t}(X_N)$，$\|\nabla A_N, t(X_N)\|_\infty$，以及使用四种初始点集（即 SP 点、UD 点、IV 点和 HL 点）运行算法 2.1 所需的时间。生成的最终点集分别命名为 SPD、SUD、SID 和 SHD。从表 1可以看出，$\sqrt{A_N, t}(X_N)$可达到约 1E-12 的极小值，$\|\nabla A_N, t\|_\infty$ 则可达到接近机器精度的约 1E-16。K_{TR}的总迭代次数和计算时间会随着 t的增加而增加。

关于算法 2.1的计算时间复杂度，参见第 2.3 小节：

这篇手稿仅供审阅。

TABLE 1通过 TR 方法从不同初始点集计算球面 t-设计。对于每种初始点集（SP、UD、IV、HL）和每个 t, N，我们分别给出达到最终点集（SPD、SUD、SID、SHD）所需的迭代次数 K_{TR}，以及它们的 $\sqrt{A_{N,\,t}(X_N)}$、$\|\nabla A_{N,\,t}(X_N)\|_\infty$ 和运行时间。

X_N	t	N	K_{TR}	$\sqrt{A_{N,\,t}(X_N)}$	$\|\nabla A_{N,\,t}(X_N)\|_\infty$	Time
SPD	16	289	264	2.15E-12	7.04E-16	10.51 s
	32	1089	567	1.51E-12	7.93E-16	24.61 s
	64	4225	1087	1.13E-12	1.27E-15	2.01 min
	128	16641	1929	1.55E-12	1.07E-15	11.16 分钟
	256	66049	3234	1.13E-12	1.39E-15	32.50 分钟
	512	263169	6049	1.18E-12	8.64E-15	4.59 h
	1024	1050625	9951	1.28E-12	3.80E-15	1.02 d
	25	676	422	1.73E-12	6.84E-15	15.38 s
	50	2601	764	1.58E-12	9.39E-15	46.52 s
	100	10201	1699	1.00E-12	8.51E-16	3.08 min
	200	40401	2922	1.16E-12	2.30E-15	26.85 分钟
	400	160801	4980	1.09E-12	4.22E-15	2.29 h
	800	641601	8489	1.53E-12	4.18E-14	21.74 h
	1600	2563601	18274	1.70E-10	9.26E-14	6.95 d
	3200	10246401	22371	1.07E-09	2.22E-12	2.07 mo
SUD	25	676	665	1.81E-12	8.49E-16	41.39 s
	50	2601	1660	1.44E-12	1.74E-14	1.72 min
	100	10201	3986	1.40E-12	2.15E-14	8.90 min
	200	40401	12494	1.73E-12	3.71E-14	2.01 h
	400	160801	24600	6.21E-12	7.32E-14	12.26 h
	800	641601	86972	2.04E-11	4.85E-13	6.11 d
	1000	1002001	118693	7.35E-12	4.07E-14	11.54 d
SID	11	162	71	1.17E-12	2.93E-15	27.38 s
	24	642	300	2.17E-12	5.84E-15	53.56 s
	49	2562	1001	1.58E-12	9.68E-15	1.72 min
	100	10242	1929	1.61E-12	1.23E-15	5.24 min
	201	40962	3796	1.58E-12	3.65E-15	32.61 分钟
	403	163842	8344	1.57E-12	1.25E-15	3.72 h
	808	655362	22424	2.85E-12	2.44E-14	2.04 d
	1618	2621442	49262	1.32E-10	5.19E-14	18.37 d
SHD	12	192	191	3.89E-12	1.71E-14	8.79 s
	26	768	407	2.58E-12	6.58E-16	22.34 s
	54	3072	725	1.68E-12	1.50E-15	1.35 min
	109	12288	1221	1.41E-12	8.80E-16	3.42 min
	220	49152	2045	1.54E-12	9.08E-16	17.59 分钟
	442	196608	3608	1.48E-12	3.48E-15	1.99 h
	885	786432	5757	1.39E-12	5.53E-15	10.41 h
	1772	3145728	9814	1.48E-12	1.04E-14	4.61 d

我们知道其阶为 $\mathcal{O}(K_{TR}\cdot(t^2\log^2(t)+N\log^2(\frac{1}{\epsilon})))$。由于在我们的设置中 $N\approx(t+1)^2$，其本质上是 $\mathcal{O}(K_{TR}\cdot t^2\log^2(t))$ 阶。为确认这一点，根据表 1 的每一行，我们得到次数 t、迭代总数 K_{TR} 以及生成形如 $(K_{TR}\cdot t^2\log^2(t), \text{Time})$ 数据点所需的时间（秒）。接着，我们用双对数图展示所有数据点，并通过线性拟合拟合这些数据点。结果绘于图2中，可以看到数据点的双对数图接近拟合直线。这证实了计算时间复杂度

这篇手稿仅供审阅。

算法 2.1 确实遵循 $\mathcal{O}(K_{TR}\cdot t^2\,\text{对数}^2(t))$.

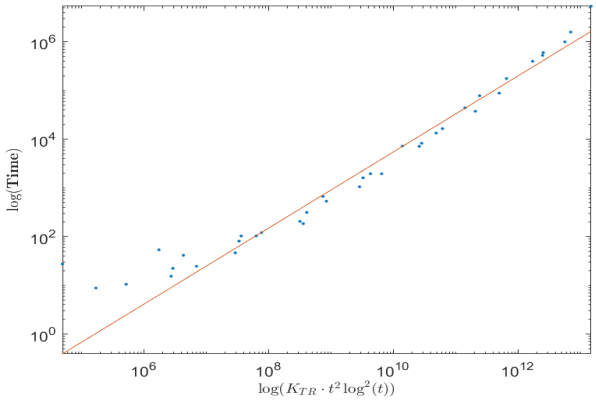


FIG. 2。时间与 $K_{TR}\cdot t^2\log^2(t)$ 的双对数图。蓝点表示 $(K_{TR}\cdot t^2\log^2(t)$，来自 表 1的时间数据。红线为拟合得到的直线。

3.3. 用于函数逼近的球面 t-设计。 利用得到的球面 t-设计点集，我们可以将函数在这些点上的离散采样值用于函数逼近。下面以定义在球面上的一类特殊函数——Wendland 函数为例，展示具体做法。

球面信号通常是从函数 $f\colon\ \mathbb{S}^2\to\mathbb{C}$ 在某个点集 $X_N=\{\boldsymbol{x}_i\,|\,i\in[N]\}$上采样得到的，也就是说，我们只有采样点 $\{(\boldsymbol{x}_i,f(\boldsymbol{x}_i))\,|\,i\in[N]\}$。注意，$X_N$ 不一定是球面 t-设计点集。我们想了解能否用多项式空间 Π_T对其进行良好的逼近。这等价于寻找一个满足以下最小化问题的 $f_T\in\Pi_T$：$f_T=\arg\min_{p\in\Pi_T}\|f|_{X_N}-p|_{X_N}\|$，其中 $f|_{X_N}:=\boldsymbol{f}:=[f(\boldsymbol{x}_1)\ldots,f(\boldsymbol{x}_N)]^\top$。于是得到 $f=f_T+g$，其残差为 $g=f-f_T$。注意，$f_T=\sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_T}\hat{c}_\ell^m Y_\ell^m$，其中某个 $\hat{\boldsymbol{c}}:=(\hat{c}_\ell^m)_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_T}$。因此，$f_T|_{X_N}=:\boldsymbol{f}_T=\boldsymbol{Y}_T(X_N)\hat{\boldsymbol{c}}$。该最小化问题等价于

$$\min_{\hat{\boldsymbol{c}}}\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{Y}_T\hat{\boldsymbol{c}}\|, \tag{3.1}$$

可通过最小二乘法求解。实际上，为了求出 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 使得 $\boldsymbol{Y}_T\hat{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{f}$，通常使用由某个权重 $\mathrm{w}:=w|_{X_N}:=\{w_1,\ldots,w_N\}$ 构造的对角矩阵 $\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(w_1,\ldots,w_N)$，以进行预条件。定义 $b:=\boldsymbol{Y}_T^\star\boldsymbol{W}\boldsymbol{f}$ 和矩阵 $A=\boldsymbol{Y}_T^\star\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}_T$。于是，$\boldsymbol{Y}_T\hat{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{f}$ 可通过正规方程求解：$A\hat{\boldsymbol{c}}=b$，这可以用共轭梯度（CG）法完成。见算法 3.1。我们指出，无需显式构造 $A=\boldsymbol{Y}_T^\star\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}_T$，只需实现矩阵-向量乘积 $A\hat{\boldsymbol{c}}$；利用我们在第 2.3 小节讨论的快速球谐变换，通过 $\boldsymbol{Y}_T^\star(\boldsymbol{W}(\boldsymbol{Y}_T\hat{\boldsymbol{c}}))$ 即可快速完成。

在下文中，我们将最大迭代次数设为 $K_{\max}=1000$，终止容差设为 $\varepsilon=2.2204$ E-16，并在算法 3.1中使用相对投影 l_2误差（采用欧几里得范数），即 $err(f,\ f_T)$:$=\frac{\|\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}_T\|}{\|\boldsymbol{f}\|}$，以衡量在不同类型的点集下近似效果的优劣。我们展示的结果采用 f 作为归一化 Wendland 函数的组合；这类函数是一族紧支撑径向基函数（RBF）。令 $(\xi)_+:=$ 最大值$\{\xi,0\}$，其中 $\xi\in\mathbb{R}$。原始

这篇手稿仅供审阅。

算法 3.1 共轭梯度投影算法 输入： T：多项式次数； X_N：球面点集；w： X_N的权重； $K_{\max}$：最大迭代次数； ε：终止容差； 初始化 $x=0, k=0$, $r_0=b=\boldsymbol{Y}_T^\star \boldsymbol{W} \boldsymbol{f}, A=\boldsymbol{Y}_T^\star \boldsymbol{W} \boldsymbol{Y}_T$， 令其为 $\boldsymbol{W}=\operatorname{diag}(\mathrm{w})$。 1：当 $\|r_{k+1}\|>\varepsilon$ 且 $k \leq K_{\max}$ 时，执行 2：若 $k=0$ ，则 3：$p_1=r_0$4：否则 5：$p_{k+1}=r_k+\frac{\|r_k\|^2}{\|r_{k-1}\|^2} p_k$6：结束若 7：计算 $\alpha=\frac{\|r_k\|^2}{p_{k+1}^\top A p_{k+1}}$。 设置 $x_{k+1}=x_k+\alpha p_{k+1}$ 和 $r_{k+1}=r_k-\alpha A p_{k+1}$。 8：$k=k+1$9：结束循环 输出：$\hat{\boldsymbol{c}}=:\ x^* \in \mathbb{C}^{(T+1)^2}$。

Wendland 函数是

$$\tilde{\phi}_k(\xi):=\begin{cases}(1-\xi)_+^2, & k=0,\\ (1-\xi)_+^4(4\xi+1), & k=1,\\ (1-t)_+^6(35\xi^2+18\xi+3)/3, & k=2,\\ (1-\xi)_+^8(32\xi^3+25\xi^2+8\xi+1), & k=3,\\ (1-\xi)_+^{10}(429\xi^4+450\xi^3+210\xi^2+50\xi+5)/5, & k=4.\end{cases}$$

归一化（等面积）Wendland 函数为 $\phi_k(\xi):=\tilde{\phi}_k\left(\frac{\xi}{\Delta_k}\right)$ ，其中 $\Delta_k:=\frac{(3k+3)\Gamma(k+\frac{1}{2})}{2\,\Gamma(k+1)}$，适用于 $k \geq 0$。当 $k \to \infty$ 时，Wendland 函数 $\phi_k(\xi)$ 逐点收敛到高斯函数，参见 [11]。因此，随着 k 增大，主要变化在于 f 的光滑性。令 $\boldsymbol{z}_1:=(1,0,0)$ $\boldsymbol{z}_2:=(-1,0,0)$ $\boldsymbol{z}_3:=(0,1,0)$ $\boldsymbol{z}_4:=(0,-1,0)$ $\boldsymbol{z}_5:=(0,0,1)$ $\boldsymbol{z}_6:=(0,0,-1)$ 为正八面体的顶点，并定义 ([20])

$$f_k(\boldsymbol{x}):=\sum_{i=1}^6 \phi_k(\|\boldsymbol{z}_i-\boldsymbol{x}\|), \quad k \geq 0. \tag{3.2}$$

函数 f_k 属于 $W^{k+\frac{3}{2}}(\mathbb{S}^2)$，其中 $W^\tau(\mathbb{S}^2):=\{f \in L_2(\mathbb{S}^2): \sum_{\ell=0}^\infty \sum_{|m| \leq \ell}(1+\ell)^{2\tau}|\hat{} f_\ell^m|^2\}<\infty\}$ 是光滑参数为 $\tau>1$ 的索博列夫空间。函数 f_k 在中心 $\boldsymbol{z}_i$ 以及以 $\boldsymbol{z}_i$ 为中心的每个球冠的边界处光滑性有限。这些特征使得 f_k 在这些区域相对难以逼近，尤其是在 k 较小时。

对于第 3 节中确定的、具有 $t=t(N)$ 的球面 t-设计的所有初始点集 SP、UD、IV、HL 及其最终点集 SPD、SUD、SID、SHD，我们在算法 3.1 中设置输入多项式次数 $T=\frac{t}{2}$和（相等）权重 $\mathrm{w} \equiv \frac{4\pi}{N}$。接着，对于次数 $t \approx 200$和 $N \approx (t+1)^2$,，我们在表 2 中展示了式 (3.2) 所定义的五个径向基函数 f_0、 ..... 、 f_4 的投影误差 $err(f_k, f_T)$。可以看出，对于每个最终球面 t-设计点集，误差的阶相对于 f_k 中的 k 从 -4 到 -11 显著降低；而对于初始点集，误差的阶则从 -4 降至 -9 。这一实验表明

这篇手稿仅供审阅。

在函数逼近方面，球面 t-设计优于常规结构点集。

TABLE 2相对 l_2误差 $err(f_k, f_T)$ Wendland 函数 $f_0,\dots,f_4$ 由 Π_T函数逼近，适用于 $T=\frac{t}{2}$和 $\mathbf{w}\equiv\frac{4\pi}{N}$在 算法 3.1 中使用不同的点集。

t	N	Q_N	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4
200	40401	SP	5.64E-04	3.19E-06	5.25E-08	3.39E-09	3.21E-09
200	40401	SPD	5.78E-04	3.20E-06	5.25E-08	1.69E-09	8.92E-11
200	40401	UD	6.09E-04	3.07E-06	8.50E-08	8.71E-08	8.53E-08
200	40401	SUD	6.99E-04	3.51E-06	5.63E-08	1.79E-09	1.07E-10
201	40962	IV	8.12E-04	3.32E-06	5.28E-08	4.57E-09	6.10E-08
201	40962	SID	6.15E-04	3.11E-06	5.08E-08	1.64E-09	8.74E-11
220	49152	HL	5.98E-04	2.28E-06	3.18E-08	8.68E-09	8.28E-09
220	49152	SHD	5.98E-04	2.28E-06	3.04E-08	8.11E-10	3.59E-11

4. 基于球面 t设计的球面框架小波。本节详细介绍基于球面 t设计的（半离散）球面框架小波系统的构造和刻画。随后引入一个截断系统，并基于滤波器组和快速球谐变换，构建快速球面框架小波变换。

4.1. 构造与刻画。遵循 Wang 和 Zhuang 关于定义在流形上的框架小波的论文设定，我们首先定义球面上的（半离散）框架小波系统。设函数 $\Psi:=\{\alpha;\,\beta_1,\dots,\beta_n\}\subset L^1(\mathbb{R})$ 与滤波器组 $\eta:=\{a;\,b_1,\dots,b_n\}\subset l_1(\mathbb{Z}):=\{h=\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}\,|\,\sum_{k\in\mathbb{Z}}|h_k|<\infty\}$ 相关联，并满足以下关系

$$\hat{\alpha}(2\xi)=\hat{a}(\xi)\hat{\alpha}(\xi),\quad \hat{\beta}_s(2\xi)=\hat{b}_s(\xi)\hat{\alpha}(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R},\,s\in[n], \tag{4.1}$$

其中，对于函数 $f\in L^1(\mathbb{R})$，其傅里叶变换 $\hat{}\,f$ 定义为 $\hat{}\,f(\xi):=\int_{\mathbb{R}}f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx$；对于滤波器（掩码） $h=\{h_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subset\mathbb{C}$，其傅里叶级数 $\hat{}h$ 定义为 $\hat{}h(\xi):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_k\,\mathrm{e}^{-2\pi ik\xi}$，其中 $\xi\in\mathbb{R}$。式 (4.1) 的第一个方程称为细化方程，其中 α 是与细化掩码 a （低通滤波器）相关联的可细化函数。函数 β_s 是与框架小波掩码 b_s （高通滤波器）相关联的框架小波生成元，适用于 $s\in[n]$，可通过扩张原理 [17, 41]推导得到。

在尺度 j 上，定义于 $\mathbb{S}^2$ 上的求积（求积公式）规则 $Q_{N_j}=(X_{N_j},\mathrm{w}j)$ 是由点集 $X_{N_j}:=\{\boldsymbol{x}_{j,k}\,|\,k\in[N_j]\}$ 和权重 $\mathrm{w}j:=\{w_{j,k}\,|\,k\in[N_j]\}$ 构成的集合 $Q_{N_j}:=\{(\boldsymbol{x}_{j,k},w_{j,k})\,|\,k\in[N_j]\}\subset\mathbb{S}^2\times\mathbb{R}$，其中 N_j 是尺度 j 下的点数。若对于所有 $p\in\Pi_{t_j}$，$\sum_{k=1}^{N_j}w_{j,k}p(\boldsymbol{x}_{j,k})=\int_{\mathbb{S}^2}f(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\mu_2(\boldsymbol{x})$，则称求积公式 Q_{N_j} 在次数 $t_j\in\mathbb{N}_0$ 以内是多项式精确的。我们称这样的 $Q_{N_j}=:Q_{N_j,t_j}$ 为次数 t_j 的多项式精确求积公式。球面 t-设计 $X_N=\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_N\}$构成一个次数为 t、权重为 $\mathrm{w}\equiv\frac{4\pi}{N}$ 的多项式精确求积公式 $Q_{N,t}:=(X_N,\mathrm{w})$。

现在给定一列 $\mathcal{Q}:=\{Q_{N_j,t_j}\}_{j\geq J}$ 多项式精确求积公式，

这篇手稿仅供评审使用。

我们可以如下定义 $s \in [n]$ 的球面框架小波$\varphi_{j,k}$ 和 $\psi_{j\,k}^{(s)}$,:

$$\varphi_{j,k}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{w_{j,k}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j}) \overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j,k})} Y_\ell^m(\boldsymbol{x}), \tag{4.2}$$

$$\psi_{j,k}^{(s)}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{w_{j+1,k}} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \hat{\beta}_s(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j}) \overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j+1,k})} Y_\ell^m(\boldsymbol{x}), \tag{4.3}$$

对于 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^2$，本文中我们设 $\lambda_{\ell,\,m} = \ell$。从尺度 $J \in \mathbb{Z}$ 开始的（半离散）球面框架小波系统 $\mathcal{F}_J(\Psi,\ \mathcal{Q})$ 定义如下:

$$\mathcal{F}_J(\Psi, \mathcal{Q}) := \{\varphi_{J,k} : k \in [N_J]\} \cup \{\psi_{j,k}^{(s)} : k \in [N_{j+1}], s \in [n]\}_{j=J}^{\infty}. \tag{4.4}$$

根据 [52,推论 2，6], 我们立即得到如下刻画结果：系统 $\mathcal{F}_J(\Psi,\ \mathcal{Q})$ 是 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 的紧框架。

THEOREM 4.1. 设 $\alpha \in L^1(\mathbb{R})$ 是一个带限函数，满足 $\mathrm{supp}\ \hat{\alpha} \subseteq [0, \frac{1}{2}]$ and $\Psi := \{\alpha;\ \beta_s, \ldots, \beta_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$ 是一组与滤波器组$\eta := \{a;\ b_1,$ $\boldsymbol{x}_{j\,k}\ w_{j\,k} \equiv$ t_j $X_{N_j} =, b_n\} \subset l_1(\mathbb{Z})$相关联 $\frac{4\pi}{N_j}\ |k \in [N_j]\}$

的函数，如 (4.1) 中所示。设 $j \in \mathbb{Z}$ and $Q_{N_j t_j} = \{(,,,)$ 是由满足 $t_{j+1} = 2t_j$ 的球面 -design $\{\boldsymbol{x}_{j,1}, \ldots, \boldsymbol{x}_{j,N_j}\} \subset \mathbb{S}^2$ 确定的求积公式。按 (4.4) 定义 $\mathcal{F}_J(\Psi, \mathcal{Q})$。设 $J_0 \in \mathbb{Z}$ 固定。则下列条件等价。

(i) 框架小波系统 $\mathcal{F}_J(\Psi, \mathcal{Q})$ 对所有 $J \geq J_0$ 都是 $L^2(\mathbb{S}^2)$ 上的紧框架，也就是说，
$f = \sum_{k=1}^{N_J} \langle f, \varphi_{J,k}\rangle \varphi_{J,k} + \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k=1}^{N_{j+1}} \sum_{s=1}^{n} \langle f, \psi_{j,k}^{(s)}\rangle \psi_{j\,k}^{(s)}$,对所有 $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$和 $J \geq J_0$,

(ii) Ψ 中的生成元满足

$$\lim_{j\to\infty} |\hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})| = 1, \quad \ell \geq 0, |m| \leq \ell, \tag{4.5}$$

$$|\hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})|^2 = |\hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2 + \sum_{s=1}^{n} |\hat{\beta}_s(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2, \quad \ell \geq 0, |m| \leq \ell, j \geq J_0. \tag{4.6}$$

(iii) 可细化函数 α 满足 (4.5) 且滤波器 η 满足

$$|\hat{a}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2 + \sum_{s=1}^{n} |\hat{b}_s(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2 = 1 \quad \forall \ell, m \in \mathcal{I}_\alpha^j, \forall j \geq J_0 + 1, \tag{4.7}$$

其中 $\mathcal{I}_\alpha^j := \{\ell \in \mathbb{N}_0, |m| \leq \ell : \hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell\ m}}{t_j}) \neq 0\}$。

证明. 由于 [52, 推论 2.6] 中的其他条件均成立，我们只需证明球谐函数 Y_ℓ^m的乘积法则成立。接下来，我们用数学归纳法证明，两个球谐函数 Y_ℓ^m和 $Y_{\ell'}^{m'}$ 的乘积属于$\Pi_{\ell+\ell'}$，即 $Y_\ell^m Y_{\ell'}^{m'} \in \Pi_{\ell+\ell'}$，并且可以表示为$\{Y_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}$的线性组合：$\tilde{\ell} \leq \ell + \ell'$, $|\tilde{m}| \leq \tilde{\ell}\}$。根据 (2.5) 中 Y_ℓ^m的定义，只需证明，两个关联勒让德多项式 $P_\ell^m(z)$ 和 $P_{\ell'}^{m'}(z)$ 的乘积可以表示为 $\{P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(z)$ 的线性组合：$\tilde{\ell} \leq \ell + \ell', m = 0, \ldots, \ell\}$，其中 $z \in [-1, 1]$。即

$$P_\ell^m(z) P_{\ell'}^{m'}(z) = \sum_{0 \leq \tilde{\ell} \leq \ell+\ell'} \sum_{0 \leq m \leq \tilde{\ell}} c_{\tilde{\ell}}^m P_{\tilde{\ell}}^m(z), \quad z \in [-1, 1]. \tag{4.8}$$

这篇手稿仅供审阅。

我们对 $\ell+\ell'$ 使用数学归纳法证明。为方便起见，我们省略 $P_\ell^m(z)$ $P_{\ell'}^{m'}(z)$ 和$P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}(z)$ 中的 z。

对于 $\ell+\ell'=0$，方程 (4.8) 显然成立。假设 (4.8) 对 $\ell+\ell'=k\in\mathbb{N}_0$ 成立。接下来证明方程 (4.8) 对 $\ell+\ell'=k+1$ 成立。不失一般性，我们可以假设 $\ell\geq 2$（否则，可以直接证明 $\ell=0$，1）。根据缔合勒让德多项式的递推公式：$(\ell-m+1)P_{\ell+1}^m(z)=(2\ell+1)zP_\ell^m(z)-(\ell+m)P_{\ell-1}^m(z)$，我们有

$$P_\ell^m P_{\ell'}^{m'}=\frac{2\ell-1}{\ell-m}zP_{\ell-1}^m P_{\ell'}^{m'}-\frac{\ell-1+m}{\ell-m}P_{\ell-2}^m P_{\ell'}^{m'}. \tag{4.9}$$

根据归纳假设以及 $P_1^0(z)=z$ 对 $z\in[-1,1]$，(4.9) 可写为

$$\begin{aligned}P_\ell^m P_{\ell'}^{m'}&=z\sum_{\tilde{\ell}\leq k}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}c_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}+\sum_{\tilde{\ell}\leq k-1}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}d_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}\\&=\sum_{\tilde{\ell}\leq k-1}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}c_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_1^0P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}+\sum_{\tilde{m}\leq k}c_k^{\tilde{m}}P_1^0P_k^{\tilde{m}}+\sum_{\tilde{\ell}\leq k-1}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}d_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}\\&=\sum_{\tilde{\ell}\leq k}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}e_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}+\sum_{\tilde{\ell}\leq k+1}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}h_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}+\sum_{\tilde{\ell}\leq k-1}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}d_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}\\&=\sum_{\tilde{\ell}\leq k+1}\sum_{\tilde{m}\leq\tilde{\ell}}a_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}P_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}},\end{aligned} \tag{4.10}$$

其中，我们根据递推关系使用 $P_1^0P_\ell^m=\frac{1}{2\ell+1}[(\ell-m+1)P_{\ell+1}^m+(\ell+m)P_{\ell-1}^m]$，而 $a_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}$，$c_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}$，$d_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}$，$e_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}$，$h_{\tilde{\ell}}^{\tilde{m}}$是不同分量中的系数。也就是说，(4.8) 对 $\ell+\ell'=k+1$成立。

因此，根据数学归纳法，对于每个 ℓ，$\ell'\in\mathbb{N}_0$，(4.8) 对 $z\in[-1,1]$。因此，我们完成了证明。□

注 4.2. 根据收缩规则和 Wigner $3j$-符号 [50], ，乘积法则成立，但很难判断两个球谐函数的乘积结果的次数。此外， [52] 中并未明确证明球谐函数的乘积法则。因此，我们在此给出一个初等证明。根据乘积法则，给定一个球面 t-设计 $X_N=\{\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_N\}$，我们立即得到

$$\frac{4\pi}{N}\sum_{i=1}^N Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_i)\overline{Y_{\ell'}^{m'}(\boldsymbol{x}_i)}=\langle Y_\ell^m,Y_{\ell'}^{m'}\rangle=\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}, \tag{4.11}$$

对于所有 $\ell+\ell'\leq t$, $|m|\leq\ell$，$|m'|\leq\ell'$。这意味着$\frac{4\pi}{N}\boldsymbol{Y}_{\lfloor t/2\rfloor}^\star(X_N)\boldsymbol{Y}_{\lfloor t/2\rfloor}(X_N)=\mathbf{I}_{(\lfloor t/2\rfloor+1)^2}$，其中$\mathbf{I}_k$是大小为 k 的单位矩阵。

4.2. 截断球面框架小波系统。在实际应用中，无限系统$\mathcal{F}_{J_0}(\Psi,\mathcal{Q})$ 在定理 4.1 中需要在某个尺度 $J_1\geq J_0$ 处截断，而滤波器组 $\eta=\{a;\ b_1,\ \dots\dots,\ b_n\}$ 在球面上离散信号的分解与重构中发挥着关键作用。这里，我们讨论用于实际球面信号处理的截断球面框架小波系统。

首先假设滤波器组 $\eta=\{a;\ b_1,\ \dots\dots,\ b_n\}$ 已预先设计好，并满足单位分解条件：

$$|\hat{a}(\xi)|^2+\sum_{s\in[n]}|\hat{b}_s(\xi)|^2=1,\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{4.12}$$

这篇手稿仅供评审使用。

对于固定的细尺度 $J \in \mathbb{Z}$，我们设

$$\hat{\alpha}^{(J+1)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{J+1}}) = \begin{cases} 1 & \text{for } \ell \le t_J, \\ 0 & \text{for } \ell > t_J, \end{cases} \tag{4.13}$$

并按照 (4.1)，我们递归地定义 $\hat{}\alpha^{(j)}$，$\hat{}\beta_s^{(j)}$，由 $\hat{}\alpha^{(j+1)}$ 得到：

$$\hat{\alpha}^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j}) = \hat{\alpha}^{(j)}(2\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}}) = \hat{a}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})\hat{\alpha}^{(j+1)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}}), \tag{4.14}$$

$$\hat{\beta}_s^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j}) = \hat{\beta}_s^{(j)}(2\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}}) = \hat{b}_s(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})\hat{\alpha}^{(j+1)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}}), \quad s \in [n], \tag{4.15}$$

当 j 从 J 递减到 J_0时。于是，我们得到

$$\Psi = \{\alpha^{(j)}, \beta_s^{(j)} \,|\, j = J_0, \dots, J; s \in [n]\}. \tag{4.16}$$

设 $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_{J_0}^{J+1} := \{Q_{N_j,t_j} \colon j = J_0, \dots, J+1\}$ 为从原始无限序列的球面 t_j-设计中截取得到的多项式精确求积公式集合，满足$t_{j+1} = 2t_j$。

利用上述 Ψ 和 $\mathcal{Q}$，我们可以定义截断的（半离散）球面框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$如下：

$$\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q}) := \{\varphi_{J_0,k} \,|\, k \in [N_{J_0}]\} \cup \{\psi_{j,k}^{(s)} \,|\, k \in [N_{j+1}], s \in [n]\}_{j=J_0}^J, \tag{4.17}$$

其中，$\varphi_{j,k}$ 和 $\psi_{j\,k}^{(s)}$,修改为

$$\varphi_{j,k}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{w_{j,k}} \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{\alpha}^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})\overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j,k})}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}), \tag{4.18}$$

$$\psi_{j,k}^{(s)}(\boldsymbol{x}) := \sqrt{w_{j+1,k}} \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}} \hat{\beta}_s^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})\overline{Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j+1,k})}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}). \tag{4.19}$$

注意，在记号 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 中，我们强调滤波器组 η 的作用。系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 完全由滤波器组 η 和求积公式 $\mathcal{Q}$ 确定。关于 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 的紧性及其与 Π_{t_J} 的关系，我们有如下结果。

THEOREM 4.3. 设 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 为按 (4.17) 定义的截断球面框架小波系统，并假设滤波器组 η 满足单位分解条件 (4.12)，其中 $\operatorname{supp}\hat{a} \subseteq [0, \frac{1}{4}]$ 且 $\operatorname{supp}\hat{}\, b_s \subseteq [0, \frac{1}{2}]$，对于 $s \in [n]$。定义 $\mathcal{V}_j :=$张成空间$\{\varphi_{j,k} \,|\, k \in [N_j]\}$ 以及 $\mathcal{W}_j :=$张成空间 $\{\psi_{j,k}^{(s)} \,|\, k \in [N_{j+1}], s \in [n]\}$。则有以下结果。

(i) $\Pi_{t_J} = \mathcal{V}_{J+1}$ 因此 $f = \sum_{k=1}^{N_{J+1}} \langle f, \varphi_{J+1,k}\rangle \varphi_{J+1,k}$ 对任意 $f \in \Pi_{t_J}$ 均成立。
(ii) 分解与重构关系 $\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j + \mathcal{W}_j$ 对 $j =J_0, \dots, J$ 成立。**(iii)** 截断球面框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 是 Π_{t_J} 的紧框架。也就是说，对于所有 $f \in \Pi_{t_J}$，我们有 $f = \sum_{k=1}^{N_0} \mathrm{v}_{J_0,k}\varphi_{J_0,k} + \sum_{j=J_0}^J \sum_{k=1}^{N_j} \sum_{s=1}^n \mathrm{w}_{j\,k}^{(s)}\psi_{j\,k}^{(s)}$，，其中 $\mathrm{v}_{j,k} := \langle f, \varphi_{j,k}\rangle$ 且 $\mathrm{w}_{j\,k}^{(s)}, := \langle f, \psi_{j,k}^{(s)}\rangle$.

这篇手稿仅供审阅。

证明。由 (4.13)，我们有 $\mathcal{V}_{J+1} \subseteq \Pi_{t_J}$。另一方面，对于 $f \in \Pi_{t_J}$，我们有

$$f = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{J+1}}} \hat{f}_\ell^m Y_\ell^m = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{J+1}}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\alpha}^{(J+1)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{J+1}})|^2 Y_\ell^m.$$

接下来我们证明，上述最后一个方程蕴含 $f = \sum_{k=1}^{N_{J+1}} \mathbf{v}_{J+1,k}\varphi_{J+1,k} \in \mathcal{V}_{J+1}$。事实上，更一般地，由于 Y_ℓ^m 的正交性，对于任意 $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$，我们有 $\mathbf{v}_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k}\rangle = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{f}_\ell^m \bar{\hat{\alpha}}^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j}) \sqrt{w_{j,k}} Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j,k})$。结合 Q_{N_j,t_j} 是一个次数为 t_j 的多项式精确求积公式，以及根据 (4.13) 和 $\operatorname{supp}\hat{a} \subseteq [0, \frac{1}{2}]$，$\hat{\alpha}^{(j)}(\frac{\lambda_\ell}{t_j}^m) = 0$ 对于 $\ell > t_{j-1}$，我们可以推得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N_j} v_{j,k}\varphi_{j,k} &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \sum_{(\ell',m')\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{f}_\ell^m \bar{\hat{\alpha}}^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j}) \hat{\alpha}^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell',m'}}{t_j}) \mathcal{U}_{\ell,m}^{\ell',m'}(Q_{N_j,t_j}) Y_{\ell'}^{m'} \\ &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\alpha}^{(j)}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2 Y_\ell^m,\end{aligned}$$

其中我们使用 $\mathcal{U}_{\ell,m}^{\ell',m'}(Q_{N_j,t_j}) := \sum_{k=1}^{N_j} w_{j,k} Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j,k}) Y_{\ell'}^{m'}(\boldsymbol{x}_{j,k}) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'}$。第 (i) 项得证。

对于第 (ii) 项，根据定义，显然有 $\mathcal{V}_j + \mathcal{W}_j \subseteq \mathcal{V}_{j+1}$。对于反方向，与上文类似，对于任意 $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$，我们可以推得 $\sum_{k=1}^{N_{j+1}} w_j^{(s)}{}_{,k}\psi_j^{(s)}{}_{,k} = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\beta}_s^{(j)}(\frac{\lambda_\ell}{t_j}^m)|^2 Y_\ell^m$。于是，由 (4.12)、(4.14) 和 (4.15)，可得

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N_{j+1}} v_{j+1,k}\varphi_{j+1,k} &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})|^2 Y_\ell^m \\ &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})|^2 \left(|\hat{a}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})|^2 + \sum_{s=1}^{n} |\hat{b}_s(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_{j+1}})|^2 \right) Y_\ell^m \\ &= \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\alpha}(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2 Y_\ell^m + \sum_{s=1}^{n} \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}} \hat{f}_\ell^m |\hat{\beta}_s(\frac{\lambda_{\ell,m}}{t_j})|^2 Y_\ell^m \\ &= \sum_{k=1}^{N_j} v_{j,k}\varphi_{j,k} + \sum_{k=1}^{N_{j+1}} \sum_{s=1}^{n} w_{j,k}^{(s)}\psi_{j,k}^{(s)}.\end{aligned}$$

因此，对于所有 $j = 0, \dots, J$，我们有 $\mathcal{V}_{j+1} \subseteq \mathcal{V}_j + \mathcal{W}_j$。命题 (ii) 成立。

命题 (iii) 直接由命题 (i) 和 (ii) 得出。证明至此完成。 □

4.3. 快速球面框架小波变换。接下来，我们将介绍利用截断系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 对球面 $\mathbb{S}^2$ 上的信号进行分解和重构的快速球面框架小波变换（SFmTs）。

对于向量 $\hat{\boldsymbol{c}} = (\hat{c}_\ell^m)^{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}}$，定义下采样算子 $\downarrow_{j+1}$ 为 $\hat{\boldsymbol{c}}\downarrow_j := (\hat{c}_\ell^m)^{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}}$。类似地，对于向量 $\hat{\boldsymbol{c}} = (\hat{c}_\ell^m)^{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}}$，定义上采样算子 $\uparrow_{j+1}$ 为 $\hat{\boldsymbol{c}}\uparrow_{j+1} := (\hat{c}_\ell^m)^{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}}$，其中 $\hat{c}_\ell^m = 0$ 适用于 $\ell > t_j$。符号 $\odot$ 表示 Hadamard逐元素乘积算子。

关于使用截断球面框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$ 进行重构的分解，我们有如下定理。

这篇手稿仅供审阅。

THEOREM 4.4. 给定一个截断系统 $\mathcal{F}_{J_0}^{J}(\eta,\ \mathcal{Q})$ 如 定理 4.3中所述。定义

$$\boldsymbol{v}_j := (v_{j,k})_{k\in[N_j]} \in \mathbb{C}^{N_j}, \qquad \boldsymbol{w}_j^{(s)} := (w_{j,k})_{k\in[N_{j+1}]} \in \mathbb{C}^{N_{j+1}}, \tag{4.20}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_j := (\hat{a}(\frac{\lambda_\ell^m}{t_{j+1}}))_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}}, \qquad \hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)} := (\hat{b}_s(\frac{\lambda_\ell^m}{t_{j+1}}))_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_{j+1}}}, \tag{4.21}$$

对于 $j = J_0,\dots,J$. 设 $w_j := \frac{4\pi}{N_j}$. 那么，对于 $j = J_0,\dots,J$，我们有如下单层框架小波分解，可由 $\boldsymbol{v}_{j+1}$得到 $\{\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_j^{(s)} \mid s\in[n]\}$：

$$\boldsymbol{v}_j = \sqrt{w_j}\boldsymbol{Y}_{t_j}\left[[(\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1})\odot\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j]\downarrow_j\right], \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{w}_j^{(s)} = \sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}\left[(\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1})\odot\bar{\hat{\boldsymbol{b}}}_j^{(s)}\right], \quad s\in[n], \tag{4.23}$$

以及从 $\{\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_j^{(s)} \mid s\in[n]\}$重构 $\boldsymbol{v}_{j+1}$ 的单层框架小波重构：

$$\boldsymbol{v}_{j+1} = \sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}\left[[\sqrt{w_j}\boldsymbol{Y}_{t_j}^\star \boldsymbol{v}_j]\uparrow_{j+1}\odot\hat{\boldsymbol{a}}_j + \sum_{s=1}^{n}[(\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{w}_j^{(s)})\odot\hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)}]\right]. \tag{4.24}$$

证明。给定 $f\in\Pi_{t_J}$，根据定理 4.3的第 (i) 项，它由其傅里叶系数序列 f_ℓ^m唯一确定，即 $f = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_J}} f_\ell^m Y_\ell^m$，并且我们可以在 $\mathcal{V}_{J+1}$ 中将其表示为 $f = \sum_{k=1}^{N_{J+1}} v_{J+1,k}\varphi_{J+1,k}$，这与球面 t-设计点集 $X_{N_{J+1}}$相关联。定义 $\hat{}\ \boldsymbol{f}_j := (\hat{}\ f_\ell^m)_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}}$ 和 $\hat{}\ \boldsymbol{\alpha}_j := (\hat{}\ \alpha^{(j)}(\lambda_\ell^m/t_j))_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}}$，其中 $\hat{}\ j = J_0,\dots,J+1$，并约定 $f_\ell^m = 0$ 对于 $(\ell,m)\notin\mathcal{I}_{t_J}$。

由 (4.14) 和 (4.15)，我们有 $v_{j,k} = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{}\ f_\ell^m\ \bar{}\ \hat{}\ \alpha^{(j)}(\frac{\lambda_\ell}{t_j})\sqrt{w_{j,k}}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j,k}) = \sum_{(\ell,m)\in\mathcal{I}_{t_j}} \hat{}\ f_\ell^m\ \bar{}\ \hat{}\ (\frac{\lambda_\ell}{t_{j+1}})\ \bar{}\ \alpha^{(j)}\hat{}\ (\frac{\lambda_\ell}{t_{j+1}})\sqrt{w_{j,k}}Y_\ell^m(\boldsymbol{x}_{j,k})$。这意味着

$$\boldsymbol{v}_{j+1} = \sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}(\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1}\odot\bar{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{j+1}),\ \boldsymbol{v}_j = \sqrt{w_j}\boldsymbol{Y}_{t_j}\left[[(\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1}\odot\hat{\boldsymbol{\alpha}}_{j+1})\odot\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j)]\downarrow_j\right], \tag{4.25}$$

其中我们使用 $w_{j,\ k} \equiv \frac{\pi}{N_j} =: w_j$。注意，根据 $\hat{}\ \alpha^{(j)}(\frac{\lambda_\ell}{t_{j+1}}) \equiv 0$ for $\ell > t_j$ 以及次数为 t_{j+1} 的多项式精确求积公式 $Q_{N_{j+1}}$，我们有

$$[\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1}]|_{\mathcal{I}_{t_j}} = [w_{j+1}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}(\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1}\odot\bar{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{j+1})]|_{\mathcal{I}_{t_j}} = (\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1}\odot\bar{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{j+1})|_{\mathcal{I}_{t_j}},$$

其中 $|_{\mathcal{I}_{t_j}}$ 表示指标集 $\mathcal{I}_{t_j}$上的限制。因此，将上式中 $(\hat{}\ \boldsymbol{f}_{j+1}\odot\bar{}\ \hat{}\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1})$ 的表达式代入 $\boldsymbol{v}_j$ 中的(4.25)，得到 (4.22)。类似地，有 $\boldsymbol{w}_j^{(s)} = \sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}[(\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1})\odot\bar{}\ \hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)}]$. 因此，我们得到单层框架小波分解。

对于重构，由 (4.22) 和 $\operatorname{supp}\hat{a}\subseteq[0,\frac{1}{4}]$，我们有 $[\sqrt{w_j}\boldsymbol{Y}_{t_j}^\star \boldsymbol{v}_j]\uparrow_{j+1}\odot\hat{}\ \boldsymbol{a}_j = (\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1}]\odot\hat{}\ \boldsymbol{a}_j)\odot\hat{}\ \boldsymbol{a}_j = [\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1}]\odot[\hat{}\ \boldsymbol{a}_j\odot\hat{}\ \boldsymbol{a}_j]$。类似地，$(\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{w}_j^{(s)})\odot\hat{}\ \boldsymbol{b}_j^{(s)} = [\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1}]\odot[\bar{}\ \hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)}\odot\hat{}\ \boldsymbol{b}_j^{(s)}]$. 因此，根据 (4.12) 中的单位分解条件以及 $\hat{a}, b_s$ 的支集约束 ($\operatorname{supp}\hat{a}\subset[0,\frac{1}{4}], \operatorname{supp}\hat{}\ b_s\subset[0,\frac{1}{2}]$)，我们有 $[\sqrt{w_j}\boldsymbol{Y}_{t_j}^\star \boldsymbol{v}_j]\uparrow_{j+1}\odot\hat{}\ \boldsymbol{a}_j + \sum_{s=1}^{n}[(\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{w}_j^{(s)})\odot\hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)}] = [\sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^\star \boldsymbol{v}_{j+1}]\odot([\bar{}\ \hat{}\ \boldsymbol{a}_j\odot\hat{}\ \boldsymbol{a}_j] + \sum_{s=1}^{n}[\bar{}\ \hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)}\odot\hat{}\ \boldsymbol{b}_j^{(s)}]) = \hat{}\ \boldsymbol{f}_{j+1}\odot\hat{}\ \boldsymbol{\alpha}_{j+1}$。现在，由 (4.25) 可得 (4.24)，证明完成。 ∎

这篇手稿仅供审稿使用。

根据定理 4.4，我们可以得到多层球面框架小波变换的伪代码，如算法 4.1和4.2所示。由于分解或重构的每一步仅涉及快速球谐变换或下采样和上采样算子，因此多层球面框架小波变换的计算时间复杂度为 $\mathcal{O}(t^2\log^2(t) + N\log^2(\frac{1}{\epsilon}))$。

算法 4.1 多层球面框架小波变换：分解 输入：$\{Q_{N_j,t_j} = (X_{N_j}, w_j = \frac{4\pi}{N_j})\}_{j=J_0}^{J+1}$：多项式精确求积公式；$\boldsymbol{f}_{J+1} = f|_{X_{N_{J+1}}}$：球面点集 $X_{N_{J+1}}$ 上 $f \in \Pi_{t_J}$ 的采样值；η：滤波器组。初始化 $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{J+1}} = w_{j+1}\boldsymbol{Y}_{t_{J+1}}^{\star}\boldsymbol{f}_{J+1}$。1：对于 j 从 J 到 J_0，执行 2：对于 s 从 1 到 n，执行 3：$\boldsymbol{w}_j^{(s)} = \sqrt{w_{j+1}}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}[\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1} \odot \bar{\hat{\boldsymbol{b}}}_j^{(s)}]$。4：结束循环 5：$\hat{\boldsymbol{f}}_j = [\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1} \odot \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j]\downarrow_j$。6：结束循环 7：$\boldsymbol{v}_{J_0} = \sqrt{w_{J_0}}\boldsymbol{Y}_{t_{J_0}}\boldsymbol{f}_{J_0}$。输出：$\{\boldsymbol{v}_{J_0}, \boldsymbol{w}_j^{(s)} \mid j = J_0, \ldots J;\ s \in [n]\}$。

算法 4.2多层球面框架小波变换：重构

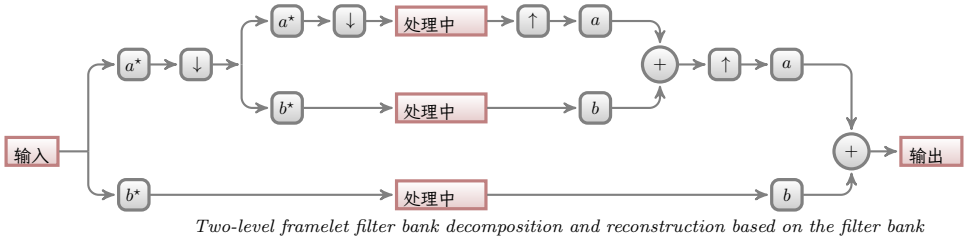
输入： $\{Q_{N_j,t_j} = (X_{N_j}, w_j = \frac{4\pi}{N_j})\}_{j=J_0}^{J+1}$：多项式精确求积公式；$\{\boldsymbol{v}_{J_0}, \boldsymbol{w}_j^{(s)} \mid j = J_0, \ldots J;\ s \in [n]\}$：系数序列；$\eta$：滤波器组。

初始化 $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{J_0}} = \sqrt{w_{J_0}}\boldsymbol{Y}_{t_{J_0}}\boldsymbol{v}_{J_0}$。

1: **对于** j 从 J_0 到 J **执行**
2: $\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1} = \hat{\boldsymbol{f}}_j\uparrow_{j+1} \odot \tilde{\hat{\boldsymbol{a}}}_j$
3: **对于** s 从 1 到 n **执行**
4: $\hat{\boldsymbol{f}}_{j+1} = \hat{\boldsymbol{f}}_{j+1} + [\sqrt{w_j}\boldsymbol{Y}_{t_{j+1}}^{\star}\boldsymbol{w}_j^{(s)}] \odot \hat{\boldsymbol{b}}_j^{(s)}$。
5: **结束循环**
6: **结束于**
7: $\hat{\boldsymbol{f}}_{\boldsymbol{J+1}} = w_{j+1}\boldsymbol{Y}_{t_{J+1}}\hat{\boldsymbol{f}}_{J+1}$。

输出： $\boldsymbol{f}_{J+1}$：球面点集 $X_{N_{J+1}}$ 上 $f \in \Pi_{t_J}$ 的样本；

球面框架小波分解与重构的流程如图3所示。



Two-level framelet filter bank decomposition and reconstruction based on the filter bank

FIG. 3. $\eta = \{a\ b_1\ \ldots\ b_n\}$. *Here the node with respect to* b *(or* $b^\star$*) runs from* b_1 *to* b_n *while the node with* ; , , *respect to* $\oplus$ *sums all* b_s, $s \in [n]$.

这篇手稿仅供审阅。

5. 用于球面信号去噪的球面框架小波。本节将通过若干数值实验，展示使用第4节中构建的球面框架小波系统进行球面信号去噪的效率和效果。

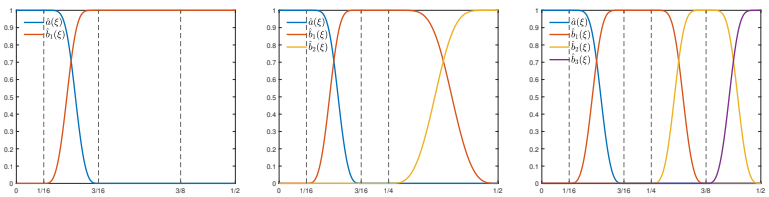
5.1. 三种框架小波系统。 我们首先讨论该系统的构成要素$\mathcal{F}_{J_0}^{J}(\eta,\ \mathcal{Q})$。对于$\mathcal{Q}=\{Q_{N_j,t_j}\}_{j=J_0}^{J+1}=\{(X_{N_j},\ w_j=\frac{4\pi}{N_j})\}_{j=J_0}^{J+1}$是第 3 节中得到并满足 第 3 节 的球面设计集合$t_{j+1}=2t_j$。对于 η，我们构造了三个不同的滤波器组 η_1，η_2 和 η_3，它们分别包含 1、2 和 3 个高通滤波器。

(1) 滤波器组 $\eta_1=\{a;\ b_1\}$ 由$\hat{a}:=\chi_{[-\frac{3}{16},\frac{1}{8}];\,1\,16,\,1\,16}$确定，并且 $b_1:=\chi_{[\frac{1}{8},\frac{9}{16}];\,1\,16,\,1\,16}$。注意，$\operatorname{supp}a\subset[0,\frac{1}{4}]$。(2) 滤波器组 $\eta_2=\{a;b_1,b_2\}$ 由与条目 (1) 中相同的$\hat{a}$、$\hat{}$ 以及 $b_1:=\chi_{[\frac{1}{8},\frac{3}{8}];\,1\,16,\,1\,8}$ 和 $b_2:=\chi_{[\frac{3}{8},1];\,1\,8,\,1\,8}$ 确定。(3) 滤波器组 $\eta_3=\{a;b_1,b_2,b_3\}$ 由与条目 (1) 中相同的$\hat{a}$、$\hat{}$ 以及 $b_1:=\chi_{[\frac{1}{8},\frac{5}{16}];\,1\,16,\,1\,16}$、$b_2:=\chi_{[\frac{5}{16},\frac{7}{16}];\,1\,16,\,1\,16}$ 和 $b_3:=\chi_{[\frac{7}{16},\frac{9}{16}];\,1\,16,\,1\,16}$ 确定。

这里的鼓包函数 $\chi_{[c_L,c_R];\ \epsilon_L,\ \epsilon_R}$ 是定义在 $[c_L-\epsilon_L,\ c_R+\epsilon_R]$ 上的连续函数，如 [24, 52] 中所定义，其表达式为

$$\chi_{[c_L,c_R];\epsilon_L,\epsilon_R}(\xi):=\begin{cases}0, & \xi\le c_L-\epsilon_L \text{ or } \xi\ge c_R+\epsilon_R,\\ \sin(\frac{\pi}{2}\nu(\frac{\xi-c_L+\epsilon_L}{2\epsilon_L})), & c_L-\epsilon_L<\xi<c_L+\epsilon_L,\\ 1, & c_L+\epsilon_L\le\xi\le c_R-\epsilon_R,\\ \cos(\frac{\pi}{2}\nu(\frac{\xi-c_R+\epsilon_R}{2\epsilon_R})), & c_R-\epsilon_R<\xi<c_R+\epsilon_R,\end{cases}$$

其中 c_L、c_R 是控制点，ϵ_L、ϵ_R 是形状参数，$\nu(t)$ 是初等函数 [16]，满足 $\nu(t)=t^4(35-84t+70t^2-20t^3)$（当 $0<t<1$ 时），$\nu(t)=1$（当 $t\ge1$ 时），且 $\nu(t)=0$（当 $t<0$ 时）。注意，$\nu(t)$ 满足 $\nu(t)+\nu(1-t)=1$。每个滤波器组 η_k 都对应球面上的一个截断紧框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^{J}(\eta_k,\mathcal{Q})$。图 4 展示了 $k=1$ 为 2、3 时的滤波器组 η_k。可以验证，对于 $\xi\in[0,\frac{1}{2}]$，$|\hat{a}(\xi)|^2+\sum_{s=1}^{n}|\hat{b}_s(\xi)|^2=1$，这意味着式 (4.12) 成立。



(a) $\eta_1=\{\hat{a};\ \hat{b}_1\}$　(b) $\eta_2=\{\hat{a};\ \hat{b}_1,\hat{b}_2\}$　(c) $\eta_3=\{\hat{a};\ \hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{b}_3\}$

FIG. 4. 滤波器组 η_1,η_2,η_3 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上

5.2. 去噪过程。接下来，我们讨论如何使用球面框架小波系统对给定的含噪信号 f_σ 进行去噪。给定定义在 $X_{N_{J+1}}$上的含噪函数 $f_\sigma=f_o+G_\sigma$，其中 f_o 是未知的真实值，G_σ 是高斯白噪声，我们将其投影到 Π_{t_J} 上（使用算法 3.1），得到 $f_\sigma=f+g$，其中 $f\in\Pi_{t_J}$是投影部分，$g=f_\sigma-f$是残差部分。注意，所有 f_σ、f、g均在 $X_{N_{J+1}}$上采样。然后，我们使用球面紧框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^{J}$（η、$\mathcal{Q}$）将 f（更准确地说，是 $\boldsymbol{f}_{J+1}=f|_{X_{N_{J+1}}}$，参见算法 4.1）分解为框架小波系数序列 $\{\boldsymbol{v}_{J_0}\}\cup\{\boldsymbol{w}_j^{(s)}\,|\,j=J_0,\dots,J;\ s\in[n]\}$。我们对 f的框架小波系数序列 $\boldsymbol{w}_j^{(s)}$ 应用阈值技术进行去噪

这篇手稿仅供审阅。

以及残差 g。之后，我们对去噪后的框架小波系数序列应用框架小波重构（算法 4.2），得到去噪后的重构信号 f_{thr} （参见图 3）。最后，将去噪后的残差 g_{thr}与之结合，即可得到去噪信号 $f_{\sigma,\ thr} = f_{thr} + g_{thr}$。为了量化框架小波去噪的性能，我们使用信噪比（SNR）和峰值信噪比（PSNR）来衡量去噪质量。

接下来，我们将详细介绍如何通过 f 和 g 的去噪过程，获得 f_{thr} 和 g_{thr}。

给定框架小波系数序列 $\boldsymbol{w}_j^{(s)} = (\mathrm{w}_{j\,k}^{(s)})_{k\in[N_{j+1}]}$，注意，$\mathrm{w}_{j,k}^{(s)}$与点 $\boldsymbol{x}_{j+1,k}$相关联。我们首先根据范数$\|\psi_{j,k}^{(s)}\|_{L_2(\mathbb{S}^2)}$对其进行归一化，即将 $\mathrm{w}_{j,k}^{(s)} = \mathrm{w}_{j,k}^{(s)}/\|\psi_{j,k}^{(s)}\|_{L_2(\mathbb{S}^2)}$ 设为 $\tilde{}$。实际上，可以通过将 $\{\boldsymbol{v}_{J_0}\}\cup\{\boldsymbol{w}_j^{(s)} \mid j = J_0,\dots,J;\ s\in[n]\}$ 中的所有系数序列设为 0（$\mathrm{w}_{j,k}^{(s)} = 1$ 除外），应用框架小波重构算法 4.2，获得相对于 $\psi_{j\,k}^{(s)}$ 的重构信号，并计算其 l_2 范数，从而得到$\|\psi_{j,k}^{(s)}\|_{L_2(\mathbb{S}^2)}$。随后，我们采用局部软阈值（LS）方法，将$\tilde{\mathrm{w}}_{j\,k}^{(s)}$ 更新为

$$\check{w}_{j,k}^{(s)} = \begin{cases} \tilde{w}_{j,k}^{(s)} - \mathrm{sgn}(\tilde{w}_{j,k}^{(s)})\tau_{j,k,r}^{(s)}, & |\tilde{w}_{j,k}^{(s)}| \ge \tau_{j,k,r}^{(s)}, \\ 0, & |\tilde{w}_{j,k}^{(s)}| < \tau_{j,k,r}^{(s)}, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $\tau_{j\,k}^{(s)}{}_{,,r}$ 是由以下因素确定的阈值

$$\tau_{j,k,r}^{(s)} = \frac{c\cdot\sigma^2}{\sqrt{(\bar{w}_{j,k,r}^{(s)} - \sigma^2)_+}} \tag{5.2}$$

c 是一个通过手动调整以优化性能的常数。这里，$\bar{\mathrm{w}}_{j\,k}^{(s)}{}_{,,r}$ 是 $\tilde{\mathrm{w}}_{j\,k}^{(s)}$ 附近系数的平均值，由半径为 r 、中心位于 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{j+1,k}$ 的球冠$C(\boldsymbol{x},r) := \{\boldsymbol{y}\in\mathbb{S}^2 : \|\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}\| \le r\}$ 确定。更准确地说，我们可以得到 $C(\boldsymbol{x}_{j+1,k},r)$ 中 $\boldsymbol{x}_{j+1,k}$ 的邻域 $\mathcal{N}_{j+1,k,r}$，即$\mathcal{N}_{j+1,k,r} := X_{N_{j+1}}\cap C(\boldsymbol{x}_{j+1,k},r)$。然后，$\bar{\mathrm{w}}_{j,k,r}^{(s)} = \frac{1}{|\mathcal{N}_{j+1,k,r}|}\sum_{\boldsymbol{x}_i\in\mathcal{N}_{j+1,k,r}} |\tilde{\mathrm{w}}_{j,i}^{(s)}|^2$，其中 $|\mathcal{N}_{j+1,k,r}|$ 表示集合 $\mathcal{N}_{j+1,k,r}$的基数。阈值处理后，我们对 $\check{\mathrm{w}}_{j,k}^{(s)}$进行反归一化，得到更新后的系数 $\mathrm{w}_{j,k}^{(s)} = \check{\mathrm{w}}_{j,k}^{(s)}\cdot\|\psi_{j,k}^{(s)}\|_{L^2(\mathbb{S}^2)}$。最后，对更新后的系数序列应用框架小波重构。

类似地，g 的局部软阈值方法为

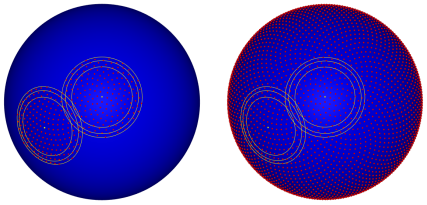
$$g_{thr}(\boldsymbol{x}_{J+1,k}) = \begin{cases} g(\boldsymbol{x}_{J+1,k}) - \mathrm{sgn}(g(\boldsymbol{x}_{J+1,k}))\tau_{J+1,k,r}, & |g(\boldsymbol{x}_{J+1,k})| \ge \tau_{J+1,k,r}, \\ 0, & |g(\boldsymbol{x}_{J+1,k})| < \tau_{J+1,k,r}. \end{cases} \tag{5.3}$$

其中$\tau_{J+1,\ k,\ r} = \frac{c_1\cdot\sigma^2}{\sqrt{(\bar{g}(\boldsymbol{x}_{J+1,k})-\sigma^2)_+}}$，其中 $\bar{g}(\boldsymbol{x}_{J+1,\ k}) = \frac{1}{|\mathcal{N}_{J+1,\ k,\ r}|}\sum_{:\ \boldsymbol{x}_i\in\mathcal{N}_{J+1,\ k,\ r}} |g(\boldsymbol{x}_{j+1,\ i})|^2$.随后，我们经过局部软阈值处理得到 g_{thr}。

在实际应用中，可以通过最近邻搜索算法（rnn 搜索）找到$\boldsymbol{x}_{j+1,\ k}$ 在 $X_{N_{j+1}}$ 中的邻域$\mathcal{N}_{j+1,\ k,\ r}$。在数值实验中，我们根据 $r_i = \frac{\rho_i}{(t_{j+1}+1)^2}$，为$\mathcal{N}_{j+1,\ k,\ r}$ 选择不同的半径 r，其中ρ_i 是 i_{th} 球冠层的一个常数，它大致可以选出由 $C(\boldsymbol{x},\ r_i)$ 的边界 $\partial C(\boldsymbol{x},\ r_i)$ 所定义的球冠层内靠近中心的点。经过一些测试后，我们设定 $\rho_i = 13.84\cdot i$。根据上述定义，我们可以预先计算集合

这篇手稿仅供审阅。

$\mathcal{N}_{r_i}(X_N) = \{\mathcal{N}_{r_i}(\boldsymbol{x}_k)$：对于某个固定的 $i \in \mathbb{N}$ 以及给定的点集 X_N，可使用$= \{\boldsymbol{x} \in C(\boldsymbol{x}_k, r) \cap X_N\} \mid k \in [N]\}$ 来加快局部软阈值处理过程。在图5中，我们展示了一个球冠边界 $\partial C(\boldsymbol{x}, r_i)$ 的示例，其对应于 $i = 15$、22、27；它们的质心分别为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 = (0, 0, 1)^\top$ 和 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{500} = (0.3018, -0.5854, 0.7525)^\top$，来自一个 SPD 球面 64-设计点集，参见表 1。



(a) 局部视图 (b) 全景视图

FIG. 5. SPD 球面 64-设计点集生成的球冠（rnn 搜索）。(a) 局部视图，显示球冠内的点。(b) 完整视图，显示所有球冠和点。

接下来，我们考虑三类数据的去噪：含噪的 Wendland 函数、ETOPO1 数据和球面图像。

5.3. Wendland 函数。对于 Wendland 函数，我们选择球面 t_j-设计点集，次数为 $t_2 = 64, t_1 = 32, t_0 = 16$，分别取自 SPD 和 SUD；$t_2 = 49, t_1 =24, t_0 = 11$ 取自 SID；$t_2 = 54, t_1 = 26, t_0 = 12$ 取自 SHD。令 $J = 1$ 和 $J_0 = 0$。我们得到球面框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta_k, \mathcal{Q})$，其滤波器组分别为 η_1, η_2, η_3。我们在 $X_{N_{J+1}}$ 上生成含噪数据 $f_\sigma = f_4 + G_{\sigma_{f_4}}$（由式 (3.2) 中的归一化 Wendland 函数 f_4 和高斯白噪声 $G_{\sigma_{f_4}}$ 生成，噪声水平为 $\sigma_{f_4} := \sigma|f_4|_{\max}$ 和 $\sigma \in \{0.050, 0.075, \ldots, 0.175, 0.200\}$，其中 $|f_4|_{\max}$ 是 $f_4|_{X_{N_{J+1}}}$ 的最大绝对值）。按照第 5.2 小节所述的去噪过程，我们得到去噪信号 $f_{\sigma,thr}$。我们使用信噪比 SNR，即 SNR$(f_4, f_{\sigma,thr}) := 10\log_{10}(\frac{\|f_4\|}{\|f_\sigma, thr - f_4\|})$，来衡量使用滤波器组 η_1, η_2, η_3 对 f_σ 进行信号去噪的效果，并比较不同球面 t_j-设计点集 X_{N_j}。

为了确定 (5.1) 和 (5.3) 中合适的常数 c, c_1，我们通过改变 c 和 c_1 的取值进行了大量实验，观察 SNR$(f_4, f_{\sigma,thr})$ 的变化，并得出结论：$c = 1, c_1 = 3$ 是合适的参数。对于采用球冠 r_i的局部软阈值处理，我们分别为滤波器组 η_1, η_2, η_3设置球冠层阶数 $i = 15$、22、27（示例见图5）。表3展示了去噪结果，图6展示了使用 η_3 和 SPD 点集得到的相关图形。

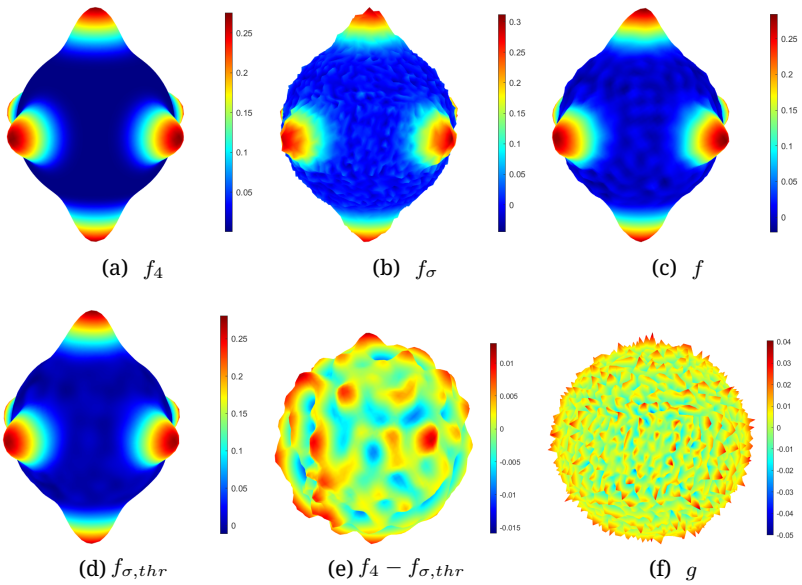
从图3可以看出，不同滤波器组的性能遵循$\eta_3 > \eta_2 > \eta_1$，这意味着系统中的高通滤波器越多，$\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta_k, \mathcal{Q})$在去噪方面的表现就越好。此外，在相同噪声水平和相同点数下，使用 SPD 点集通常比使用 SUD 点集效果更好。对于 SID 和 SHD，点数和次数t 必须满足某些限制，而 SPD 点可以很容易地生成，且适用于任意 $t \in \mathbb{N}$。基于这些观察，在接下来的实验中，我们将滤波器组固定为 η_3，并将球面 t-设计点集设为 SPD 点集。

5.4. ETOPO。接下来讨论 ETOPO1 数据 [1] 的去噪处理。它是一个地球高程数据集，包含在网格 X_E 上采样的 10800×21600 个点的高程信息 $\mathbb{S}^2$。ETOPO1 是由均匀分布的位置构成的球面几何数据。也就是说，网格由 $X_E := \{(\theta_i, \phi_j) \in$给出

这篇手稿仅供审阅。

TABLE 3Wendland f_4 去噪结果。信噪比$_0$ = 信噪比(f_4, f_σ)。该行 η_k 为使用滤波器组 η_k 进行去噪后的最终信噪比(f_4, $f_{\sigma,\ thr}$)，其中包含 $k = 1$、2、3。

$Q_{N_{J+1},t_{J+1}}$	σ	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2
SPD(64)	SNR_0	**13.63**	**10.11**	**7.61**	**5.67**	**4.09**	**2.75**	**1.59**
	η_1	20.67	18.06	16.42	15.21	14.19	13.24	12.31
	η_2	23.11	20.05	18.03	16.47	15.18	14.02	12.88
	η_3	**24.48**	**21.25**	**19.03**	**17.30**	**15.82**	**14.49**	**13.19**
SUD(64)	SNR_0	**13.63**	**10.11**	**7.61**	**5.67**	**4.09**	**2.75**	**1.59**
	η_1	20.70	18.02	16.39	15.23	14.22	13.20	12.18
	η_2	22.98	19.98	17.95	16.38	15.09	13.90	12.70
	η_3	**24.15**	**20.90**	**18.73**	**17.07**	**15.63**	**14.29**	**12.97**
SID(49)	SNR_0	**13.63**	**10.11**	**7.61**	**5.67**	**4.09**	**2.75**	**1.59**
	η_1	20.13	16.86	14.70	13.15	11.91	10.82	9.77
	η_2	23.34	19.90	17.44	15.51	13.90	12.43	11.05
	η_3	**24.54**	**21.03**	**18.51**	**16.46**	**14.68**	**13.09**	**11.59**
SHD(54)	SNR_0	**13.58**	**10.05**	**7.55**	**5.62**	**4.03**	**2.69**	**1.53**
	η_1	19.91	16.68	14.64	13.07	11.76	10.60	9.50
	η_2	22.21	18.80	16.42	14.57	13.00	11.59	10.28
	η_3	**23.21**	**19.70**	**17.22**	**15.26**	**13.59**	**12.07**	**10.64**



(a) f_4 (b) f_σ (c) f

(d) $f_{\sigma,thr}$ (e) $f_4 - f_{\sigma,thr}$ (f) g

FIG. 6. 使用 LS 对带有 $t_0 = 16$、$t_1 = 32$ 和 $t_2 = 64$ 的 SPD 进行去噪时，Wendland $f_{\sigma,thr}$ 与 $\sigma = 0.05$、η_3 的行为。

$[0,\pi] \times [0,2\pi)\ |\ i = 1,\ \ldots\ldots,\ 10800,\ j = 1,\ \ldots\ldots,\ 21600\}$，其中 $\theta_i = (i-1)\Delta$、$\phi_j = (j-1)\Delta$ 且 $\Delta = \frac{\pi}{10800}$。对于球面点集 X_N，我们可以轻松地将 ETOPO1 数据从 X_E 重采样到 X_N 上的数据：根据 $i_{\boldsymbol{x}} = \lceil \frac{\phi}{\Delta} \rceil$ 和 $j_{\boldsymbol{x}} = \lceil \frac{\theta}{\Delta} \rceil$，找到相对于最近 ETOPO1 索引的 $\boldsymbol{x}(\theta,\ \phi) \in X_N$，其中 $\lceil \cdot \rceil$ 是上取整算子。因此，对于给定的 $X_{N_{J+1}}$，我们可以通过 $f_o(\boldsymbol{x}) = \mathrm{ETOPO1}(i_{\boldsymbol{x}},\ j_{\boldsymbol{x}})$，$\boldsymbol{x} \in X_{N_{J+1}}$，获得 $X_{N_{J+1}}$ 上的 ETOPO1 数据，其中 $\mathrm{ETOPO1}(i,\ j)$ 表示 ETOPO1 数据的第 $(i,\ j)$ 个元素。

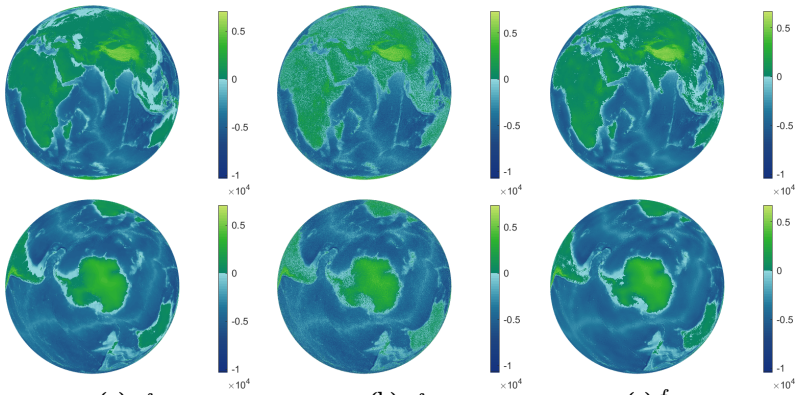
这篇手稿仅供审阅。

我们在 $X_{N_{J+1}}$ 上生成带有噪声的 ETOPO1 数据 $f_\sigma = f_o + G_{\sigma_{f_o}}$，噪声水平为 $\sigma_{f_o} = \sigma|f_0|_{\max}$，对应 $\sigma \in \{0.050, 0.075, \ldots, 0.175, 0.200\}$。给定一组球面 t-设计点集 X_{N_j}（SPD），其次数为 $t_0 = 256$、$t_1 = 512$、$t_2 = 1024$，我们得到球面框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$（$J_0 = 0$，$J = 1$），其中 $\eta = \eta_3$。我们进行了大量实验，以确定球冠半径 r_i 下的 $c = c_1 = 0.6$ 和球冠层阶数 $i = 12$。按照第 5.2 小节所述的去噪过程，我们获得了去噪信号 $f_{\sigma,thr}$。我们使用 $\mathrm{SNR}(f_o, f_\sigma, thr) = 10\log_{10}\left(\frac{\|f_o\|}{\|f_\sigma\|}, \frac{\|f_o\|}{\|thr - f_o\|}\right)$ 来衡量去噪质量。结果列于表 4。

TABLE 4采用滤波器组 η_3时，ETOPO1 在不同噪声水平 σ 下的去噪结果。SNR_0 行表示 f_σ 与 f_o之间的初始信噪比。η_3 行表示使用滤波器组 η_3进行去噪后的最终信噪比（f_o, f_σ, thr）。

σ	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2
SNR_0	**16.38**	**12.85**	**10.36**	**8.42**	**6.83**	**5.50**	**4.34**
η_3	**22.36**	**20.41**	**19.01**	**17.95**	**17.12**	**16.45**	**15.92**

从表 4 可以看出，去噪过程确实将去噪信号的信噪比提高了，最高可达 11.6 dB。图 7 展示了真实信号 f_o、其在 $\sigma = 0.05$下的含噪版本 f_σ，以及重建去噪信号 $f_{\sigma,thr}$。最终去噪数据的信噪比比含噪数据高 5.98 dB。我们还在图 8 中展示了 $f_\sigma = f + g$在采用截断系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta, \mathcal{Q})$进行投影分解时，$f$的框架小波系数序列 $\{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{w}_j^{(s)} \mid j = 0,1;$ $s = 1, 2, 3\}$，其中涉及一些满足$t_J = 512$ 的 $f \in \Pi_{t_J}$。可以看出，$j = 0$对应的系数序列$\boldsymbol{w}_j^{(s)}$，$s = 1, 2, 3$ 确实含有来自原始数据的显著噪声。这证实了使用多尺度系统从球面含噪数据中提取噪声的有效性。



(a) f_o (b) f_σ (c) $f_{\sigma,thr}$

FIG. 7。对 SPD 上 $\sigma = 0.05$ 进行 ETOPO 1 f_σ η_3 $t_0 = 256$ $t_1 =$ 去噪的行为，,,。上：北视图。下：南视图。512 $t_2 = 1024$ 3 3

5.5. 球面图像。最后，我们讨论球面图像的去噪。给定一幅大小为 $m \times n$、像素值范围为 $[0, 255]$的灰度图像 IMG，与 ETOPO1 类似，我们将其视为网格 $X_G = \{(\theta_i, \phi_j)$ 上的球面数据：$i =1, \ldots\ldots, m, j = 1, \ldots\ldots, n\} \subset [0, \pi] \times [0, 2\pi)$，其中 $\theta_i = (i - 1)\Delta_\theta$, $\phi_j = (j - 1)\Delta_\phi$ 且

这篇手稿仅供审阅。

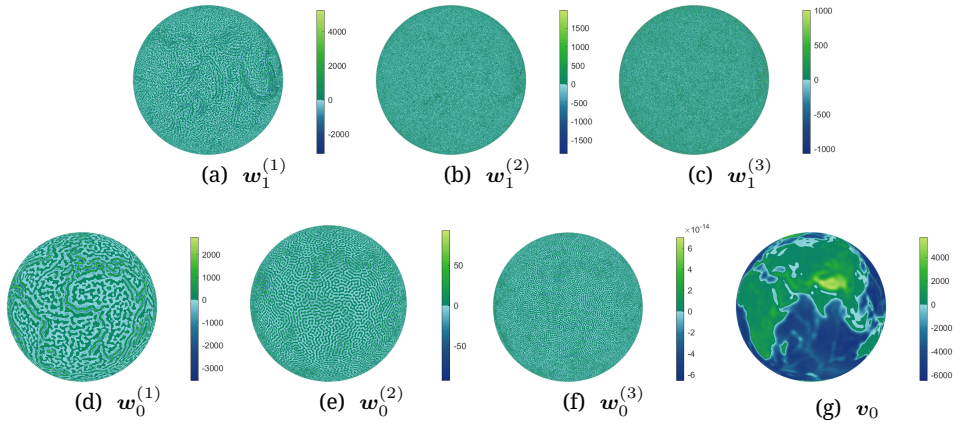


FIG. 8。ETOPO f_σ 在 SPD 上通过 η_3 个 $\sigma = 0.05$ 进行的 2 层框架小波分解$t_0 = 256$, $t_1 = 512$, $t_2 = 1024$。 $\boldsymbol{w}_j^{(s)}$ 对应于第 j 层分解中的第 s 个高通滤波器。 $\boldsymbol{v}_0$ 对应于最粗层的低通滤波器分解。

$\Delta_\theta = \frac{\pi}{m}$, $\Delta_\phi = \frac{2\pi}{n}$。对于球面点集 X_N，我们可以通过根据 $i_{\boldsymbol{x}} = \lceil \frac{\phi}{\Delta_\theta} \rceil$ 和 $j_{\boldsymbol{x}} = \lceil \frac{\theta}{\Delta_\phi} \rceil$ 找到距离最近图像索引的 $\boldsymbol{x}(\theta, \phi) \in X_N$，轻松地将 X_G 上的图像数据重新采样为 X_N 上的数据。因此，给定 $X_{N_{J+1}}$，我们可以通过 $f_G(\boldsymbol{x}) = \text{IMG}(i_{\boldsymbol{x}}, j_{\boldsymbol{x}})$, $\boldsymbol{x} \in X_{N_{J+1}}$，在 $X_{N_{J+1}}$ 上获得球面图像数据，其中 IMG(i, j) 是图像的 (i, j) 项。

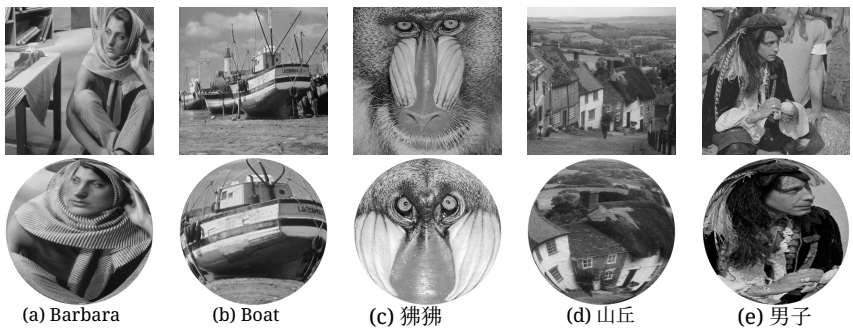


FIG. 9。在 $\mathbb{S}^2$ 上通过球面1024设计点集（SPD）投影图像。上：原始图像。下：球面图像。

我们使用 512×512 像素级经典图像 Barbara、Boat、狒狒、山丘和男子作为输入数据，生成球面图像数据 f_0，具体步骤如上所述，见图9。给定与次数$t_0 = 256$、$t_1 = 512$、$t_2 = 1024$对应的球面 t-设计点集 X_{N_j}（SPD）。令 $J_0 = 0$ 和 $J = 1$。在 $X_{N_{J+1}}$上的含噪球面图像数据 $f_\sigma = f_0 + G_{\sigma \cdot 255}$，其 $\sigma \in \{0.05, 0.075, \ldots, 0.175, 0.2\}$。我们使用具有滤波器组 $\eta = \eta_3$的球面框架小波系统 $\mathcal{F}_{J_0}^J(\eta、\mathcal{Q})$，并采用局部软阈值方法（LS），设置为 $c = 0.6$、$c_1 = 0.5$，球冠层阶数为 $i = 23$。我们按照上述去噪过程得到去噪后的信号$f_{\sigma、thr}$。我们使用峰值信噪比来衡量图像去噪质量，即 PSNR$(f_G、 f_{\sigma、thr}) := 10 \log_{10}(\frac{255^2}{\text{均方误差}})$，其中均方误差定义为

这篇手稿仅供审阅。

均方误差为 $= \frac{1}{N_{J+1}} \sum_{\boldsymbol{x} \in X_{N_{J+1}}} |f_G(\boldsymbol{x}) - f_{\sigma,\ thr}(\boldsymbol{x})|^2$。结果见表5。

TABLE 5图像去噪结果。对于每幅图像，第一行是峰值信噪比$_0$:= 峰值信噪比(f_G, f_σ)，第二行至第四行是使用 η_3得到的峰值信噪比(f_G, $f_{\sigma,\ thr}$)值。

图像	σ	0.05	0.075	0.1	0.125	0.15	0.175	0.2
Barbara	PSNR_0	**26.34**	**22.81**	**20.31**	**18.38**	**16.79**	**15.45**	**14.29**
	η_3	**30.84**	**28.56**	**27.07**	**25.97**	**25.12**	**24.45**	**23.87**
Boat	PSNR_0	**26.02**	**22.50**	**20.00**	**18.06**	**16.48**	**15.14**	**13.98**
	η_3	**31.45**	**29.39**	**27.90**	**26.66**	**25.62**	**24.74**	**24.05**
狒狒	PSNR_0	**28.18**	**24.66**	**22.16**	**20.22**	**18.63**	**17.30**	**16.14**
	η_3	**30.43**	**27.90**	**26.23**	**25.00**	**24.08**	**23.40**	**22.89**
Hill	PSNR_0	**26.70**	**23.17**	**20.68**	**18.74**	**17.15**	**15.81**	**14.65**
	η_3	**31.71**	**29.66**	**28.21**	**27.16**	**26.39**	**25.81**	**25.35**
Man	PSNR_0	**26.51**	**22.99**	**20.49**	**18.55**	**16.97**	**15.63**	**14.47**
	η_3	**32.18**	**29.97**	**28.46**	**27.28**	**26.35**	**25.61**	**25.02**

从表中可以得出结论：基于球面 t-设计点集的（半离散）球面紧框架小波结合局部软阈值方法，在去噪和重构方面确实能取得有效结果。

6. 结论与最后说明。本文从数值求解一个最小化问题出发，利用球面 t-设计$A_{N,\ t}$ 的变分刻画，通过信赖域方法寻找取值较大的球面 t-设计 t 。我们利用所得的球面 t-设计进行函数逼近，并构造球面紧框架小波系统。特别地，我们为离散球面信号处理构造了截断球面紧框架小波系统。若干数值实验表明，我们的球面框架小波系统在处理球面上的信号或图像时高效且有效。我们指出， [52], 并未研究这些截断系统, 而它们在此处的离散信号处理中起着关键作用。与 [22], 相比，我们采用信赖域方法而非线搜索方法，且无需参考梯度和海森矩阵的流形版本。

球面 t-设计的多项式精确性在构造球面紧框架小波系统及其截断版本中发挥着关键作用。框架小波系统的快速框架小波变换和多尺度结构能够高效地从含噪球面信号中分离噪声。正如数值实验所示，噪声在 f 和 g 的分解中均会扩散$f_\sigma = f + g$。在实际应用中，截断系统只能处理到某个多项式逼近空间 f ，而部分 Π_t 则可能扩散到高频谱中。在我们的去噪过程中，部分 g 中的噪声可能无法得到有效抑制（例如，见图 6）。今后我们将进一步研究如何改进 g的去噪效果。此外，求积规则序列 $\mathcal{Q}$ 通常并非嵌套序列。鉴于欧几里得域上用于常规图像处理（网格数据）的传统框架小波系统具有多层结构，若能为球面紧框架小波构造嵌套求积规则序列，将会十分理想。

参考文献

[1] C. AMANTE AND B. W. EAKINS, *Etopo1 arc-minute global relief model: procedures data sources ,, 美 and analysis. noaa technical memorandum nesdis ngdc-24* 国国家海洋和大气管理局国家地球物理数据中心，10（2009年），第 V5C8276M 页。

这篇手稿仅供评审使用。

[2] C. An, X. Chen, I. H. Sloan, and R. S. Womersley, *Well conditioned spherical designs for integration and interpolation on the two-sphere*, 《SIAM 数值分析杂志》, 48 (2010), 第 2135–2157 页。
[3] J.-P. Antoine and P. Vandergheynst, *Wavelets on the n-sphere and related manifolds*, 《数学物理杂志》, 39 (1998), 第 3987–4008 页。[4] J.-P. Antoine and P. Vandergheynst, *Wavelets on the 2-sphere: A group-theoretical approach* 7 1999 262 291 , 《应用与计算调和分析》, () , 第 – 页。[5] E. Bannai and E. Bannai, *A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres* 30 2009 1392 1425 , 《欧洲组合学杂志》, () , 第 – 页。[6] A. Bondarenko, D. Radchenko, and M. Viazovska, *Optimal asymptotic bounds for spherical designs* 2013 443 452 , 《数学年刊》, () , 第 – 页。[7] A. Bondarenko, D. Radchenko, and M. Viazovska, *Well-separated spherical designs*, 《构造性逼近》, 41 (2015), 第 93–112 页。[8] X. Chen, A. Frommer, and B. Lang, *Computational existence proofs for spherical t-designs*, 《数值数学》, 117 (2011), 第 289–305 页。
[9] X. Chen and R. S. Womersley, *Existence of solutions to systems of underdetermined equations and spherical designs* 44 2006 2326 , 《SIAM 数值分析杂志》, () , 第 – 2341 页。[10] X. Chen and R. S. Womersley, *Spherical designs and nonconvex minimization for recovery of sparse signals on the sphere* 11 2018 1390 1415 , 《SIAM 成像科学杂志》, () , 第 – 页。[11] A. Chernih, I. H. Sloan, and R. S. Womersley, *Wendland functions with increasing smoothness converge to a gaussian* 40 2014 185 , 《计算数学进展》, () , 第 – 200 页。[12] C. K. Chui, *An introduction to wavelets*, 第 1 卷, 学术出版社, 1992 年。
[13] T. F. Coleman and Y. Li, *An interior trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds* 6 1996 418 445 , 《SIAM 优化杂志》, () , 第 – 页。[14] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups*, 第 290 卷, 施普林格科学与商业媒体, 2013年。[15] F. Dai and H. Wang, *Positive cubature formulas and marcinkiewicz–zygmund inequalities on spherical caps* 31 2010 1 36 , 《构造性逼近》, () , 第 – 页。[16] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992 年。[17] I. Daubechies, B. Han, A. Ron, and Z. Shen, *Framelets: Mra-based constructions of wavelet frames* 14 2003 1 46 , 《应用与计算调和分析》, () , 第 – 页。[18] P. Delsarte, J. Goethals, and J. Seidel, *Spherical codes and designs*, 《专献几何》, 6 (1977年), 第 363–388 页。[19] L. Demanet and P. Vandergheynst, *Directional wavelets on the sphere*, 技术报告 R-2001-2, 洛桑联邦理工学院信号处理实验室（LTS）, 洛桑, (2001年)。[20] Q. T. Gia, I. H. Sloan, and H. Wendland, *Multiscale analysis in sobolev spaces on the sphere* 48 2010 2065 2090 , 《SIAM 数值分析杂志》, () , 第 – 页。[21] K. M. Gorski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelmann *Healpix: A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere* 622 2005 759 , 《天体物理学杂志》, () , 第 页。[22] M. Gräf and D. Potts, *On the computation of spherical designs by a new optimization approach based on fast spherical fourier transforms*, 《数值数学》, 119 (2011), 第 699–724 页。[23] B. Han, *Framelets and wavelets*, 《算法、分析与应用》, 《应用与数值调和分析》。Birkh¨auser xxxiii Cham, （2017年）。
[24] B. Han, Z. Zhao, and X. Zhuang, *Directional tensor product complex tight framelets with low redundancy* 41 2016 603 637 , 《应用与计算调和分析》, () , 第 – 页。[25] B. Han and X. Zhuang, *Algorithms for matrix extension and orthogonal wavelet filter banks over algebraic number fields* 82 2013 459 490 , 《计算数学》, () , 第 – 页。[26] R. H. Hardin and N. J. Sloane, *Mclaren's improved snub cube and other new spherical designs in three dimensions* 15 1996 429 441 , 《离散与计算几何》, () , 第 – 页。[27] K. Hesse and R. S. Womersley, *Numerical integration with polynomial exactness over a spherical cap* 36 2012 451 483 , 《计算数学进展》, () , 第 – 页。[28] I. Iglewska-Nowak, *Frames of directional wavelets on n-dimensional spheres*, 《应用与计算调和分析》, 43 (2017), 第 148–161 页。[29] J. Korevaar and J. Meyers, *Spherical faraday cage for the case of equal point charges andchebyshev-type quadrature on the sphere*, 《积分变换与特殊函数》, 1 (1993), 第 105–117 页。[30] S. Kunis and D. Potts, *Fast spherical fourier algorithms*, 《计算与应用数学杂志》, 161 (2003), 第 75–98 页。

这篇手稿仅供审阅。

[31] G. Kutyniok and D. Labate, *Shearlets: Multiscale analysis for multivariate data*, 施普林格，2012年。
[32] Q. T. Le Gia and H. N. Mhaskar, *Localized linear polynomial operators and quadrature formulas on the sphere* 2008 440 466 , SIAM 数值分析杂志, ( ), pp. – . [33] J. Li, H. Feng, and X. Zhuang, *Convolutional neural networks for spherical signal processing via area-regular spherical haar tight framelets*, IEEE《神经网络与学习系统汇刊》, (2022年). [34] U. Maier, *Numerical calculation of spherical designs*, 《多元逼近进展》, (1999年), pp. 213–226. [35] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, 爱思唯尔, 1999年. [36] J. D. McEwen, C. Durastanti, and Y. Wiaux, *Localisation of directional scale-discretised wavelets on the sphere* 44 2018 59 ,《应用与计算调和分析》, ( ), pp. – 88. [37] F. J. Narcowich, P. Petrushev, and J. D. Ward, *Localized tight frames on spheres*, SIAM《数学分析杂志》, 38 (2006年), pp. 574–594. [38] F. J. Narcowich and J. D. Ward, *Nonstationary spherical wavelets for scattered data*, 逼近与分解丛书, 6 (1995年), pp. 301–308.
[39] G. Nebe and B. Venkov, *On tight spherical designs*, 《圣彼得堡数学杂志》, 24 (2013年), pp. 485–491.
[40] D. Potts and M. Tasche, *Interpolatory wavelets on the sphere*, 逼近与分解丛书, 6 (1995年), pp. 335–342. [41] A. Ron and Z. Shen, *Affine systems inl2 (rd): the analysis of the analysis operator*, 《泛函分析杂志》, 148 (1997 年), pp. 408–447. [42] P. Schröder and W. Sweldens, *Spherical wavelets: Efficiently representing functions on thesphere*, 载于《第22届计算机图形学与交互技术年会论文集》，1995年，pp. 161–172. [43] P. Seymour and T. Zaslavsky, *Averaging sets: a generalization of mean values and spherical designs* 52 1984 213 240 ,《数学进展》, ( ), pp. – . [44] I. H. Sloan and R. S. Womersley, *Extremal systems of points and numerical integration on the sphere* 21 2004 107 125 ,《计算数学进展》, ( ), pp. – . [45] I. H. Sloan and R. S. Womersley, *A variational characterisation of spherical designs*, 《逼近理论杂志》, 159 (2009年), pp. 308–318. [46] S. Smale, *Mathematics: frontiers and perspectives chapter mathematical problems for the next century* 2000 271 294 , , 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯, ( ), pp. – . [47] T. Steihaug, *The conjugate gradient method and trust regions in large scale optimization*, SIAM 数值分析杂志, 20 (1983年), pp. 626–637. [48] W. Sun and Y.-X. Yuan, *Optimization theory and methods: nonlinear programming*, 第1卷，施普林格科学与商业媒体，2006年。[49] R. Swinbank and R. James Purser, *Fibonacci grids: A novel approach to global modelling*, 《英国皇家气象学会季刊：大气科学、应用气象学与物理海洋学杂志》, 132 (2006年), pp. 1769–1793. [50] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Quantum theory of angular momentum* 1988 , 世界科学出版社, .
[51] G. Wagner and B. Volkmann, *On averaging sets*, Monatshefte f¨ur Mathematik, 111 (1991年), pp. 69–78. [52] Y. G. Wang and X. Zhuang, *Tight framelets and fast framelet filter bank transforms on manifolds* 48 2020 64 95 ,《应用与计算调和分析》, ( ), pp. – . [53] E. W. Weisstein, *Sphere point picking*, 2004年, https://mathworld.wolfram.com/ SpherePointPicking.html. 摘自 MathWorld——Wolfram 网络资源。
[54] Y. Wiaux, J. D. McEwen, and P. Vielva, *Complex data processing: Fast wavelet analysis on the sphere* 13 2007 477 493 ,《傅里叶分析与应用杂志》, ( ), pp. – . [55] R. S. Womersley, *Efficient spherical designs with good geometric properties*, 载于《当代计算数学——庆祝 Ian Sloan 80岁生日》，施普林格，2018年，pp. 1243–1285. [56] X. Zhuang, *Digital affine shear transforms: fast realization and applications in image/video processing* 9 2016 1437 1466 , SIAM 成像科学杂志, ( ), pp. – .

这篇手稿仅供审阅。