渐近量子多体疤痕

Lorenzo Gotta,[1, 2, *] Sanjay Moudgalya,[3, 4, †] 和 Leonardo Mazza[2, ‡]
[1] *Department of Quantum Matter Physics, University of Geneva,24 Quai Ernest-Ansermet, 1211 Geneva, Switzerland*
[2] *Université Paris-Saclay, CNRS, LPTMS*, 91405, *Orsay, France*
[3] *Department of Physics and Institute for Quantum Information and Matter, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*
[4] *Walter Burke Institute for Theoretical Physics, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*
(日期：2023年11月13日)

我们研究了一种量子晶格自旋模型，该模型在有限尺寸下具有精确的低纠缠本征态准粒子塔，这类态称为量子多体疤痕态（QMBS）。我们表明，可以将能谱中相邻部分的态叠加起来，构造出一系列低纠缠态；随着晶格尺寸增大，这些态的能量方差渐近趋于零。因此，它们的弛豫时间在热力学极限下发散，表现出精确量子多体疤痕态的典型行为，尽管它们在任何有限尺寸下都不是哈密顿量的精确本征态。我们将这类态称为 *asymptotic* 渐近量子多体疤痕态。这些态在任何有限尺寸下都与任何精确量子多体疤痕态正交；它们的存在表明，精确量子多体疤痕态的存在会在能谱其余部分留下重要的非热化特征。因此，类似量子多体疤痕态的现象可能隐藏在通常被视为能谱热化部分的区域中。我们通过对自旋-1 XY模型（量子多体疤痕态的典型模型）进行数值模拟来支持这项研究，并在最后给出该模型的一种弱微扰：它会破坏精确量子多体疤痕态，同时保留渐近量子多体疤痕态。

arXiv:2303.05407v2 [cond-mat.str-el] 9 Nov 2023

引言 —量子多体疤痕态（QMBS） [1–4]是任意维非可积量子晶格模型中弱违背本征态热化假说（ETH） [5, 6], 的范例之一。根据本征态热化假说，非可积模型能谱中部的能量本征态，其所有局域性质都与适当温度下的热吉布斯密度矩阵所描述的性质一致 [7–10]。量子多体疤痕态是孤立的能量本征态，在许多方面都表现异常，例如局域可观测量的期望值或纠缠熵。人们已发现许多有限尺寸晶格模型中存在精确的量子多体疤痕态塔 [2, 7, 8, 11– 13, 16, 17, 19–23]。其中大多数结果也已通过统一框架或系统化构造方案得到阐释 [3, 13, 17, 20, 24–30]。

一个尚未得到充分探讨的问题是，有限尺寸下存在量子多体疤痕态是否会影响谱中其余部分的性质。文献 [3]指出，PXP 模型中存在一些低纠缠态；尽管它们与已知的精确量子多体疤痕态正交，却表现出缓慢弛豫：这类态的能量方差与系统尺寸无关，因此其保真度弛豫时间不会缩短 [32]。这种现象学十分引人注目，与短程关联态的情况形成对比：后者的能量方差随系统尺寸增大，而保真度弛豫时间则会缩短。

是否还存在更极端的缓慢弛豫态 [33], ，例如其能量方差随系统尺寸增大而减小，从而导致弛豫时间在热力学极限（TL）下呈多项式发散？具有流体动力学起源的缓慢弛豫 [33], ——在具有连续对称性的系统中无处不在，其发生于一个发散的时间尺度上，该尺度称为***Thouless***时间 [34–37], ，并与扩散或亚扩散有关 [38–43]。将量子多体疤痕态（QMBS）解释为一种非常规的非局域对称性 [29, 44] ，促使人们寻找此类缓慢弛豫。长寿命准粒子，例如超流体中发生 Beliaev 衰变的声子 [45], ，也会导致缓慢弛豫。量子多体疤痕态与具有特定动量且寿命无限的准粒子相关 [4], ，因此自然会去寻找邻近动量处的长寿命准粒子。

在这封信中，我们通过考察在任意有限尺寸下都具有精确量子多体疤痕态的自旋-1 XY模型 [2] 来回答这些问题，并表明可以构造出缓慢弛豫的低纠缠初态。这些初态表现出类似量子多体疤痕态的特征，但仍与精确量子多体疤痕态正交。它们的能量方差在热力学极限下趋于零，并渐近表现出量子多体疤痕态典型的动力学现象学，即缺乏热化；因此我们将这类初态称为渐近量子多体疤痕态。我们的工作拓宽了在定性上呈现非热化现象学的初态范围，并促使人们在谱中纠缠特征未能显露非热特征的区域寻找此类特征。

模型与精确量子多体疤痕态 — 我们考虑长度为 L even的一维自旋-1链，并研究具有外磁场的自旋-1 XY模型，以及

轴向各向异性：

$$H = J\sum_j \left(S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y\right) + h\sum_j S_j^z + D\sum_j \left(S_j^z\right)^2 + J_3\sum_j \left(S_j^x S_{j+3}^x + S_j^y S_{j+3}^y\right), \quad (1)$$

其中 S_j^α， $\alpha = x,\ y,\ z$是格点 j上的自旋-1算符。数值模拟中采用开放边界条件（OBC），部分解析结果则采用周期性边界条件（PBC）。数值研究已表明，该模型在开放边界条件下是非可积的；最后一项破坏了一种隐藏的非局域对称性 [2, 4,46]。

式 (1) 中的哈密顿量对于任意有限的 L [2] 都表现出量子多体疤痕态。为说明这一点，我们定义完全极化态 $|\Downarrow\rangle = |--\cdots--\rangle$，其中所有自旋都处于 S_j^z 的本征态，其本征值为 -1，并定义算符

$$J_k^+ = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{L} e^{ikj}\left(S_j^+\right)^2. \quad (2)$$

疤痕态为：

$$|n,\pi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{n,\pi}}}\left(J_\pi^+\right)^n|\Downarrow\rangle, \quad (3)$$

其中 $N_{n,\pi}$ 是归一化常数。该态满足能量本征值方程 $H|n,\pi\rangle = (-Lh + 2nh + LD)|n,\pi\rangle$；对于一般的 h 和 D 值，它位于哈密顿量谱的中部。它的存在与量子干涉效应有关，类似于哈伯德模型中导致 η- 配对态存在的干涉效应 [16]。

此外，还可以考虑定义在系统一半区域（通常区域 A 为 $1 \le j < L/2$）上的 $|n,\pi\rangle$ 的约化密度矩阵 $\rho_{A,n,\pi}$，并计算其纠缠熵 $S_{n,\pi} = -\,\mathrm{tr}[\rho_{A,n,\pi}\ \log\rho_{A,n,\pi}]$。参考文献 [2], 已进行了明确的计算，结果表明其按 $\log L$ 缩放，呈现出轻微的对数型纠缠面积律违背；详情见补充材料（SM） [47] 和参考文献 [1] 。通过绘制本征态 $|E_i\rangle$ 的约化密度矩阵 ρ_{A,E_i} 的纠缠熵 S_{E_i} 随能量的变化，可以很容易地在数值上找到量子多体疤痕态。事实上，几乎所有本征态似乎都满足本征态热化假说，其特征是具有仅依赖于能量 E_i 的 S_{E_i} ；它们的纠缠程度高于量子多体疤痕态，而后者确实违背本征态热化假说。

通过对精确量子多体疤痕态进行形变得到的一族态 — 现在我们考虑式 (1) 中模型动力学的其他初始态；它们如下所示：

$$|n,k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{n,k}}}J_k^+\left(J_\pi^+\right)^{n-1}|\Downarrow\rangle, \quad (4)$$

其中 $N_{n,\ k}$ 是归一化常数，与式 (3) 中的精确量子多体疤痕态一致。当 $k \neq \pi$ 且为 $\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍时，它们与精确量子多体疤痕态正交：关系式 $\overline{\langle n,\ k|n',\ \pi\rangle} = \delta_{n,\ n'}\delta_{k,\ \pi}$ 对任意$1 \le n,\ n' \le L-1$均成立，这一点已在补充材料 [47] 中证明。已有研究考察了这类多磁振子态作为精确本征态的模型 [49],；然而对于 $k \neq \pi$，它们并非自旋-1 XY模型的本征态。容易证明，这些态的平均能量不依赖于 k，其表达式为 $\langle n,\ k|H|n,\ k\rangle = -Lh + 2nh + LD$ [47]。

此外，公式（4）中的态的纠缠随系统尺寸按亚体积律标度。简要证明如下：由于 $|n,k\rangle \propto J_k^+|n-1,\pi\rangle$，我们注意到 J_k^+ 可以直接表示为键维数为 $\chi = 2$ [3, 50, 51] 的矩阵乘积算符，因此 $|n-1,\pi\rangle$ 和 $|n,k\rangle$ 的半子系统纠缠熵至多相差一个加性项 $\log 2$。换言之，由于算符 J_k^+ 可以拆分为两项，一项作用于 $j < L/2$，另一项作用于 $j \ge L/2$，可以证明 [47]： $|n,k\rangle$ 中施密特态的总数至多是 $|n-1,\pi\rangle$ 中施密特态总数的两倍。

为进一步刻画公式（4）中的量子态，我们计算周期性边界条件下哈密顿量 H 对应的能量方差 ΔH^2，并且如补充材料 [47], 所示，我们得到：

$$\Delta H^2 = 4\left[J^2\cos^2\left(\frac{k}{2}\right) + J_3^2\cos^2\left(\frac{3k}{2}\right)\right]. \quad (5)$$

在公式（4）定义的量子态中， $|n,\ \pi\rangle$ 是哈密顿量的唯一能量本征态，因为只有当 $k = \pi$时才满足 $\Delta H^2 = 0$。当 $k \neq \pi$时， $|n,\ k\rangle$ 必定是 H的能量本征态的线性叠加；这些本征态大多位于一个以n的相同能量为中心、宽度约为 ΔH的能量窗口内。若 $k \neq \pi$ 选为$\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍，则由于正交性， $|n,\ \pi\rangle$ 不属于这组量子态。由于数值结果表明， $|n,\ \pi\rangle$ 似乎是 H [2]中唯一的精确量子多体疤痕态，我们得出结论：这类量子态 $|n,\ k\rangle$ 必定是“热”本征态的线性叠加，即通常认为满足本征态热化假说的那些本征态；它们的纠缠熵和局域可观测量的期望值都是能量的平滑函数。

我们使用基于 Python 的软件包 QuSpin [52]对这一论述进行了数值验证：对哈密顿量 (1) 进行对角化，并计算所有本征态的二分划分纠缠熵 S_{E_i} 以及平均磁化平方$S_{E_i}^{z2} = \frac{1}{L}\sum_j\langle(S_j^z)^2\rangle$。随后，我们计算态 $|n,\ k\rangle$ 与 $n = L/2$ 和 $k = \pi - \frac{2\pi}{L}$ 对应的所有本征态的内积，并考察与其重叠非零的本征态的性质。结果见图 1，支持我们的论题。

动力学与渐近量子多体疤痕态 — 当系统尺寸很大时，态 $|n,k\rangle$ 的动力学性质取决于我们如何趋近 $L \to \infty$。如果在保持动量 k 固定的同时取极限，那么

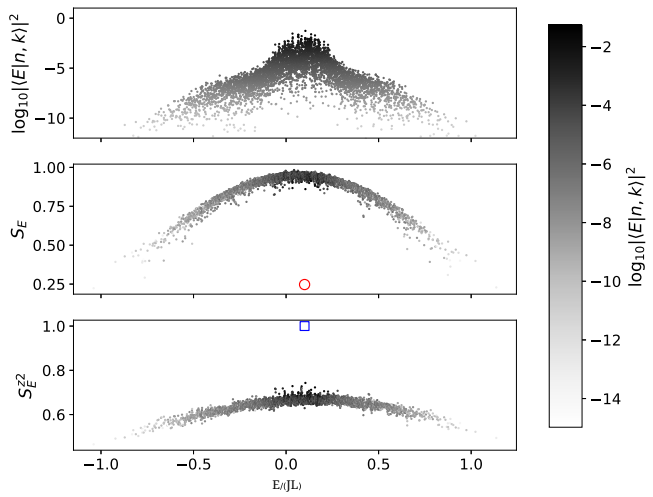

图 1. 上： $|n,\ k\rangle$ 在 $n = L/2$ 和$k = \pi - \frac{2\pi}{L}$ 条件下与哈密顿量 (1) 的零磁化强度本征态 $|E_i\rangle$ 的重叠平方， $S_z = 0$；数值模拟的参数为 $\{J, h, D, J_3\} = \{1, 0, 0.1, 0.1\}$和 $L = 10$。所有面板中标记的颜色编码也采用对数刻度表示关于 $|\langle E_i\,|n,\ k\rangle|^2$ 的信息，见色条。中和下：我们将上方面板的数据绘制在图中，横轴为能量 E，纵轴分别为二分纠缠熵 S_E 或本征态的平均磁化强度平方 $S^{z2}(E)$。对于纠缠熵，我们使用自然对数，并将结果除以 $L/2$，以获得强度量。态 $|n,\ k\rangle$ 仅与满足 S_{E_i} 或 $S^{z2}_{E_i}$ 位于连续“热”曲线上的量子态有重叠。红色圆圈和蓝色方块标出了图中量子多体疤痕态 $|n = L/2,\ \pi\rangle$ 出现的区域：没有任何灰色标记，意味着内积与数值零相符。

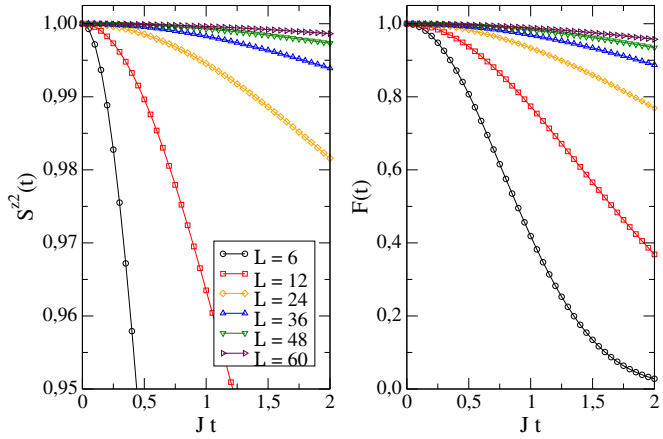

图 2. 对于不同系统尺寸 L，态 $e^{-iHt}\,|n,\ k\rangle$ 在 $n = L/2$和 $k = \pi - 2\pi/L$ 下的性质随时间的变化。左：磁化强度平方 $S^{z2}(t)$ 的时间演化。右：与初始态的保真度 $F(t)$ 的时间演化。

在热力学极限下，方差是有限的（参见文献 [3] 中 PXP 模型的示例）。粗略地说，我们可以利用广为人知的能量-时间不确定关系，将量子态的典型动力学时间尺度 τ 与能量涨落联系起来：

$$\tau \geq \frac{\hbar}{2\Delta H}, \tag{6}$$

据此可以声称，对于这些量子态，动力学在给定时间尺度 τ 内被冻结，且该时间尺度与 L无关；此后则会向热平衡演化 [47]。更准确地说，初始态的能量方差 ΔH^2 决定了保真度弛豫时间 $\tau \sim 1/\Delta H$ [6]，因为初始态 $|\Psi\rangle$ 的保真度$F(t) = |\langle\Psi|\,e^{-iHt}\,|\Psi\rangle\,|^2$ 在短时间内按 $\sim\exp\left(-\Delta H^2 t^2\right)$衰减； τ 是局域可观测量弛豫时间 [4, 10]的下界。

另一类量子态可以通过在令 k 趋于 π的同时趋近热力学极限来获得。具体做法是令 $k = \pi + \frac{2\pi}{L}m$，保持系数 $m \in \mathbb{Z}$ 不变，同时令 $L \to \infty$。在这种情况下，能量方差按 $\Delta H^2 \sim (J^2 + 9J_3^2)(k - \pi)^2$ 的标度变化，并趋于零。我们将模型的这第二类量子态称为渐近量子多体疤痕态，因为根据式 (6)，其动力学的典型弛豫时间尺度按 $\tau \sim L$ 的标度变化，也就是说，系统被冻结的时间尺度会随系统尺寸多项式增长。相反，低纠缠态由于其方差 [33], 发散，通常被认为会在随系统尺寸增加而缩短的时间尺度上失去保真度；典型可观测量的期望值则会在不随系统尺寸发生显著变化的时间尺度内弛豫 [5, 10, 55–59, 61]。因此，尽管这类量子态在有限尺寸下并非 系统的精确量子多体疤痕态，而且还与所有精确量子多体疤痕态$|n、\ \pi\rangle$正交，但其动力学在渐近意义下趋近于量子多体疤痕态式的行为。据我们所知，此前从未有人讨论过这种现象学。

我们通过数值模拟态 $|n, k\rangle$ 在 H 作用下的动力学，来支持上述论述。该模拟采用基于 ITensor 库 [62, 63] 生成的态的矩阵乘积态（MPS）表示的时间演化块解耦（TEBD）代码。我们特别考察了态$|n = L/2,\ k = \pi - 2\pi/L\rangle$，系统尺寸最大为$L = 60$，截断误差为 10^{-12}。随后，我们计算可观测量 $S^{z2}(t) = \frac{1}{L}\sum_j \langle\left(S_j^z\right)^2\rangle_t$ 以及时间演化态与初始态$F(t) = |\langle n,\ k|\,e^{-iHt}\,|n, k\rangle\,|^2$之间的保真度。图 2 所示结果表明，在这两种情况下，随着系统尺寸增大，动力学都显著减慢。我们在补充材料中展示，保真度数据可通过将时间按因子 L [47]重新缩放而塌缩，这表明热力学极限下弛豫时间发散。保真度结果 $F(t)$ 无疑表明，时间演化态与初始态的重叠随 L 增大而增加，并意味着冻结了

态。在补充材料中，我们通过将其与其他态 [47]的典型动力学进行对比，补充了这项分析；我们还分析了通过对精确量子多体疤痕态施加 $(J_k^+)^m$得到的态，即生成多个动量接近 π的准粒子，并论证只要 m 不随 L [47]标度，它们也应是渐近量子多体疤痕态。

能谱中部的缓慢弛豫与非热化 — 渐近量子多体疤痕态有两项特别引人关注的性质：（a）其纠缠有限，即遵循次体积律，但能量是广延量；（b）其能量方差 ΔH^2 衰减得足够快，在热力学极限下趋于零。任何满足这些条件的态都必然具有很长的弛豫时间，无论是保真度还是可观测量方面的弛豫时间；同时，其平均能量位于哈密顿量谱的中部。请注意，（a）和（b）都是使渐近量子多体疤痕态表现出非典型行为的必要特征。尽管任何由能量方差较小的热本征态线性叠加而成的态都会缓慢弛豫，但其纠缠通常很大 [33]。另一方面，典型的低纠缠态的能量方差会随系统尺寸增大 [33]。

人们很容易认为，渐近量子多体疤痕态的存在意味着与精确量子多体疤痕态正交的“热”态中存在某种“非热化” [3]或本征态热化假说的违背，即使在有限系统尺寸下也是如此。注意，本征态热化假说包含两部分 [6, 9, 64], ，分别涉及能量本征基中局域算符的对角和非对角矩阵元。对角矩阵元决定可观测量的晚期时间期望值，而渐近量子多体疤痕态的存在并不意味着对角本征态热化假说遭到违背，因为我们预期对于任何有限系统尺寸，它们最终都会热化。另一方面，弛豫时间尺度由初始态的能量方差和非对角矩阵元 [5]共同决定。可以认为，我们的结果意味着至少在哈密顿量谱的一部分范围内，非对角本征态热化假说遭到违背。

没有精确量子多体疤痕态的渐近量子多体疤痕态—我们对渐近量子多体疤痕态的定义基于对有限尺寸下有支撑的精确量子多体疤痕态塔进行形变；尚不清楚在没有任何精确量子多体疤痕态的模型中，或在能量远离精确量子多体疤痕态对应能量的区域，是否会存在渐近量子多体疤痕态。

现在我们展示，可以对哈密顿量施加微弱扰动

H 以一种会摧毁所有精确量子多体疤痕态的方式，但使受微扰模型仍保持渐近量子多体疤痕态。作为一个例子，我们考虑 $H' = H + V$，其中 $V = (J_z/L)\sum_j S_j^z S_{j+1}^z$。这仍是一种非平凡的局域微扰，因为其谱范数 $\|V\|_\infty$（对应于其最大奇异值）是次广延的，并按 $O(1)$ 缩放。我们使用基于 Python 的 QuSpin 软件包 [52], 对 H' 进行数值对角化，并计算纠缠熵 S_{E_i} 和平均磁化平方

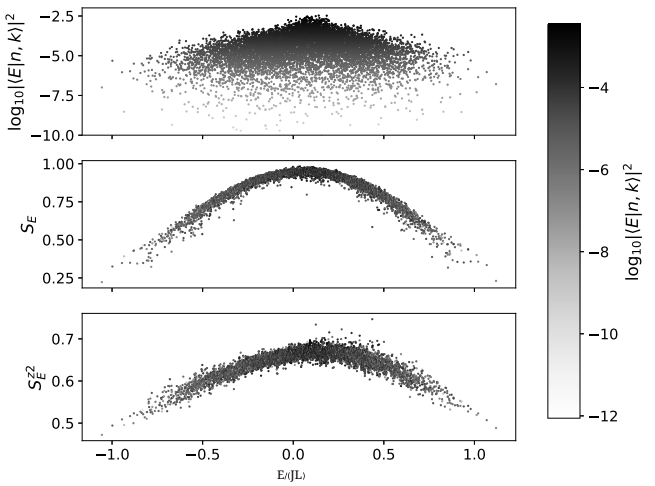

图 3. 哈密顿量 H' 在零磁化扇区 $S_z = 0$中的本征态性质；数值模拟的参数为 $\{J, h, D, J_3, J_z\} = \{1, 0, 0.1, 0.1, 1\}$和 $L = 10$。上图：$|n,\pi\rangle$ 与哈密顿量 H' 在零磁化条件下的本征态 $|E_i\rangle$ 之间的重叠平方，其中 $n = L/2$， $S_z = 0$。所有面板中标记的颜色编码也以对数刻度表示了 $|\langle E_i|n,\pi\rangle|^2$ 的信息，见色标。中图和下图：我们将上图的数据绘制在图中，横坐标为能量 E，纵坐标分别为本征态的二分纠缠熵 S_E 或平均磁化平方 S^{z2}（E）。态 $|n,\pi\rangle$ 仅与满足 S_{E_i} 或 S^{z2}（E_i）位于连续曲线上的态有重叠。在补充材料 [47] 中，我们展示了完整的谱，并证明该模型不具有任何量子多体疤痕态（这里的谱不完整，因为我们只绘制了与 $|n,\pi\rangle$有非可忽略重叠的态）。

磁化强度 $S^{z2}(E_i)$，适用于所有本征态。图 3 中的曲线并未显示存在任何精确量子多体疤痕态。

现在我们考虑式（3）中的态 $|n,\ \pi\rangle$ 它是 H 的一个精确量子多体疤痕态，但不是 H'的本征态。我们使用 ITensor 库 [62, 63], 计算 $S^{z2}(t)$ 和时间演化态 ( ) 的保真度 $F\ t$ $|\Psi\ t\ \rangle = e^{-iH't}|n\ \pi\rangle$ 4 ( ), ；结果见图 。这些图展示了这样一种哈密顿量中的渐近量子多体疤痕态现象：该哈密顿量在有限尺寸下不呈现任何精确量子多体疤痕态。$\mathcal{F}(t)$ 曲线在时间按因子 $\sqrt{L}$ [47] 重标度后呈现塌缩，表明弛豫时间发散。这种行为可直接归因于态 $|n,\ \pi\rangle$ 在哈密顿量 H' 下的方差随 $\sim 1/L$ 标度，其中 n 是 L的有限比例；这一点已在补充材料 [47]中证明。

结论 — 在这封短文中，我们重新审视了具有代表性的一维自旋-1 XY 模型。该模型在有限尺寸下支持精确量子多体疤痕态，我们还探索了其余谱的性质。我们证明，可以构造其他态，并将其称为渐近量子多体疤痕态；这些态的纠缠很少，且其弛豫时间在热力学极限下按多项式发散。这些渐近量子多体疤痕态表明存在

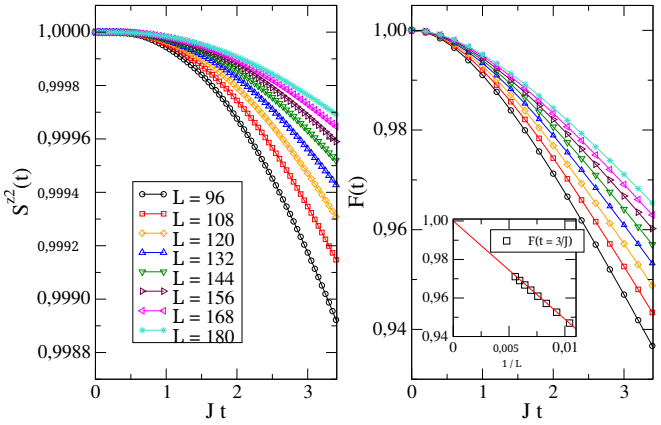

图4. 态 $e^{-iH't}|n,\pi\rangle$ 在 $n = L/2$下的性质随时间的变化；数值模拟中所用哈密顿量的参数与图3相同。左：磁化强度平方 $S^{z2}(t)$ 的时间演化；右：与初始态 $F(t)$ 的保真度随时间的演化。插图展示了 $F(t = 3/J)$ 的数值随系统尺寸变化的标度关系；我们发现，当 $1/L \to 0$ 时，该数值趋近于1。

缓慢弛豫模和具有精确量子多体疤痕态的系统中的新型长寿命准粒子；理解它们与具有类似流体力学起源的缓慢弛豫模之间的关系，将会很有意思。

值得注意的是，渐近量子多体疤痕态是“热”本征态的线性组合，而这些本征态的纠缠熵和平均磁化强度平方都是能量的“平滑”函数；我们将把对非对角本征态热化假说 [65–71] 可能被违反的问题留待今后研究。

具有类似性质的渐近量子多体疤痕态也可以在高维自旋1 XY模型中构造 [47]，不过其他推广方向也值得研究。首先，可以全面研究具有相同精确量子多体疤痕态 $|n,\pi\rangle$ [29]的局域哈密顿量代数。其次，在具有简单精确量子多体疤痕态准粒子塔 [7, 11–13, 17, 19, 25, 72] 的哈密顿量中，它们或许总是可以构造出来。第三，精确量子多体疤痕态有许多不同类型 [3], , 例如包含非局域“准粒子” [13, 27, 73], 或非孤立态 [24, 32]的情形；它们可能出现在规范理论 [74, 75] 或弗洛凯系统 [28, 76–78]中。这些模型中是否存在渐近量子多体疤痕态?

最后，还可以考虑对具有精确量子多体疤痕态的哈密顿量进行变形（我们在本文最后一部分对此问题作了部分探讨），并探究哈密顿量在不具有任何精确量子多体疤痕态的情况下呈现渐近量子多体疤痕态的条件。

致谢— 我们衷心感谢 Saverio Bocini、Xiangyu Cao、Maurizio Fagotti、David Huse、Michael Knap、Lesik Motrunich 和 Nicolas Regnault 富有启发性的讨论。我们还要感谢 Lesik Motrunich 对论文草稿提出的宝贵意见。L.G. 和 L.M. 也感谢 Guillaume Roux 和 Pascal Simon 就此前合作项目进行的讨论。本研究得到沃尔特·伯克理论物理研究所（加州理工学院）和量子信息与物质研究所、奥赛的 LabEx PALM（ANR-10-LABX-0039-PALM）、法兰西岛大区 DIM Sirteq 项目，以及瑞士国家科学基金会第二部的资助。S.M. 还感谢奥赛统计物理理论实验室（LPTMS）和苏黎世大学物理研究所的热情接待；本合作最初在前者启动，本研究的部分工作则在后者完成。

* lorenzo.gotta@unige.ch † sanjaym@caltech.edu ‡ leonardo.mazza@universite-paris-saclay.fr

[1] Maksym Serbyn、Dmitry A. Abanin 和 Zlatko Papi´c，《量子多体疤痕态与遍历性的弱破缺》，《自然·物理》**17**，675–685（2021年）。[2]Zlatko Papi´c，《从量子纠缠的角度看弱遍历性破缺》，载于 *Entanglement in Spin Chains: From Theory to Quantum Technology Applications*，由 Abolfazl Bayat、Sougato Bose 和 Henrik Johannesson 编（Springer International Publishing，Cham，2022），第 341–395 页。[3] Sanjay Moudgalya、B Andrei Bernevig 和 Nicolas Reg- nault，《量子多体疤痕态与希尔伯特空间碎片化：精确结果综述》，《物理学进展报告》**85**，086501（2022）。[4]Anushya Chandran、Thomas Iadecola、Vedika Khemani 和 Roderich Moessner，《量子多体疤痕：准粒子视角》，《凝聚态物理年度评论》**14**，443–469（2023）。[5] J. M. Deutsch，《封闭系统中的量子统计力学》，《物理评论 A》**43**，2046–2049（1991）。[6] Mark Srednicki，《混沌与量子热化》，《物理评论 E》**50**，888–901（1994）。[7] Marcos Rigol、Vanja Dunjko 和 Maxim Olshanii，《热化及其在一般孤立量子系统中的机制》，《自然》**452**，854–858（2008）。[8] Anatoli Polkovnikov、Krishnendu Sengupta、Alessandro Silva 和 Mukund Vengalattore，《专题讨论：封闭相互作用量子系统的非平衡动力学》，《现代物理评论》**83**，863–883（2011）。[9]Luca D'Alessio、Yariv Kafri、Anatoli Polkovnikov 和 Marcos Rigol，《从量子混沌与本征态热化到统计力学和热力学》，《物理学进展》**65**，239–362（2016）。[10] Takashi Mori、Tatsuhiko N Ikeda、Eriko Kaminishi 和 Masahito Ueda，《孤立量子系统中的热化与预热化：理论概述》，《物理学杂志 B：原子、分子与光学物理》**51**，112001（2018）。[11] Sanjay Moudgalya、Stephan Rachel、B. Andrei Bernevig 和 Nicolas Regnault，《非可积模型的精确激发态》，《物理评论 B》**98**，235155（2018）。[12] Sanjay Moudgalya、Nicolas Regnault 和 B. Andrei Bernevig，《Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 模型中精确激发态的纠缠：精确结果、多体疤痕态以及对强本征态热化

假说的违背》，Phys. Rev. B 98，235156（2018）。[13] Daniel K. Mark、Cheng-Ju Lin 和 Olexei I. Motrunich，《Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki 模型及其他模型中疤痕态精确塔的统一结构》，Phys. Rev. B 101，195131（2020年）。[2]Michael Schecter 和 Thomas Iadecola，《自旋1 xy 磁体中的弱遍历性破缺与量子多体疤痕》，Phys. Rev. Lett. 123，147201（2019）。[8] Julia Wildeboer、Christopher M. Langlett、Zhi-Cheng Yang、Alexey V. Gorshkov、Thomas Iadecola 和 Shenglong Xu，《双层系统中源自爱因斯坦-波多尔斯基-罗森态的量子多体疤痕》，Phys. Rev. B 106，205142（2022）。[16] Chen Ning Yang，《η 哈伯德模型中的配对与非对角长程序》，Physical Review letters 63，2144 1989( )。[17] Sanjay Moudgalya、Nicolas Regnault 和 B. Andrei Bernevig，《η 哈伯德模型中的配对：从谱生成代数到量子多体疤痕》，Phys. Rev. B 102，085140（2020）。[7] Daniel K. Mark 和 Olexei I. Motrunich，《扩展哈伯德模型中的η配对态是真正的疤痕态》，Phys. Rev. B 102，075132（2020）。[19] K. Pakrouski、P. N. Pallegar、F. K. Popov 和 I. R. Klebanov，《作为希尔伯特空间群不变子空间的多体疤痕态》，Phys. Rev. Lett. 125，230602（2020）。[20] K. Pakrouski、P. N. Pallegar、F. K. Popov 和 I. R. Klebanov，《费米子晶格模型中多体疤痕态的群论方法》，Phys. Rev. Research 3，043156（2021年）。[21]Hironobu Yoshida 和 Hosho Katsura，《扩展 SU(n) 哈伯德模型的精确本征态：具有 n粒子非对角长程序的 η配对态的推广》，Phys. Rev. B 105，024520（2022）。[22]Lorenzo Gotta、Leonardo Mazza、Pascal Simon 和 Guillaume Roux，《基于无自旋费米子链中配对或多聚体的精确多体疤痕态》，Phys. Rev. B 106，235147（2022）。[23] Masaya Nakagawa、Hosho Katsura 和 Masahito Ueda，《多组分哈伯德模型的精确本征态：SU(N) 磁性 η 配对、弱遍历性破缺与部分可积性》，arXiv 电子预印本（2022），arXiv:2205.07235 [凝聚态物理：强关联电子]。[24] Naoto Shiraishi 和 Takashi Mori，《系统构造本征态热化假说的反例》，Phys. Rev. Lett. 119，030601（2017）。[25] Sanjay Moudgalya、Edward O'Brien、B. Andrei Bernevig、Paul Fendley 和 Nicolas Regnault，《由矩阵乘积态构造的大类量子疤痕哈密顿量》，Phys. Rev. B 102，085120（2020）。[26] Jie Ren、Chenguang Liang 和 Chen Fang，《准对称群与多体疤痕动力学》，Phys. Rev. Lett. 126，120604（2021）。[27] Nicholas O'Dea、Fiona Burnell、Anushya Chandran 和 Vedika Khemani，《从隧道到塔：李代数与 q变形李代数产生的量子疤痕》，Phys. Rev. Research 2，043305（2020）。[28] Pierre-Gabriel Rozon、Michael J. Gullans 和 Kartiek Agarwal，《利用 Floquet 自动机构造量子多体疤痕哈密顿量》，Phys. Rev. B 106，184304（2022）。[29] Sanjay Moudgalya 和 Olexei I. Motrunich，《利用对易子代数全面刻画量子多体疤痕态》，arXiv 电子预印本（2022），arXiv:2209.03377 [凝聚态物理：强关联电子]。[30] Pierre-Gabriel Rozon 和 Kartiek Agarwal，《量子多体疤痕态中动力学的非幺正图景》，arXiv 电子预印本，arXiv:2302.04885 (2023)。[3] Cheng-Ju Lin、Anushya Chandran 和 Olexei I. Motrunich，《微扰下精确量子多体疤痕态的缓慢热化》，Phys. Rev. Res. 2, 033044 2020( )。[32] Cheng-Ju Lin 和 Olexei I. Motrunich，《里德堡阻塞原子链中的精确量子多体疤痕态》，Phys. Rev. Lett. 122, 173401 (2019)。[33] Mari Carmen Ba˜nuls、David A. Huse 和 J. Igna-cio Cirac，《局域一维哈密顿量的纠缠及其与能量方差的关系》，Phys. Rev. B 101, 144305 (2020)。[34] D. J. Thouless，《细线中的最大金属电阻》，Phys. Rev. Lett. 39，1167–1169 (1977)。[35] Amos Chan、Andrea De Luca 和 J. T. Chalker，《空间延展的混沌量子多体系统中的谱统计》，Phys. Rev. Lett. 121, 060601 (2018)。[36] Mauro Schiulaz、E. Jonathan Torres-Herrera 和 Lea F. Santos，《多体量子系统中的 Thouless 时间尺度与弛豫时间尺度》，Phys. Rev. B 99, 174313 (2019)。[37] Anatoly Dymarsky，《输运对本征态热化的约束》，Phys. Rev. Lett. 128, 190601 (2022)。[38] Paul M Chaikin、Tom C Lubensky 和 Thomas A Wit-ten，*Principles of condensed matter physics*，第 10 卷（Cam-bridge university press Cambridge，1995）。[39] Subroto Mukerjee、Vadim Oganesyan 和 David Huse，《强相互作用晶格费米子的输运统计理论》，Phys. Rev. B 73, 035113 (2006)。[40]Jonathan Lux、Jan M¨uller、Aditi Mitra 和 Achim Rosch，《量子淬火后的流体动力学长时尾》，Phys. Rev. A 89, 053608 (2014)。[41] Andrey Gromov、Andrew Lucas 和 Rahul M. Nand-kishore，《分形子流体动力学》，Phys. Rev. Res. 2, 033124 2020( )。[42]Johannes Feldmeier、Pablo Sala、Giuseppe De Tomasi、Frank Pollmann 和 Michael Knap，《偶极矩及更高阶矩守恒系统中的反常扩散》，Phys. Rev. Lett. 125, 245303 (2020)。[43] Sanjay Moudgalya、Abhinav Prem、David A. Huse 和 Amos Chan，《受约束多体量子混沌系统中的谱统计》，Phys. Rev. Res. 3, 023176 2021( )。[44] Berislav Bu˘ca，《局域量子多体动力学的统一理论：本征算符热化定理》，arXiv 电子预印本（2023），arXiv:2301.07091 [cond-mat.stat-mech]。[45] L. Pitaevskii 和 S. Stringari，*Bose-Einstein Condensation* 2016（牛津大学出版社，）。[46] Atsuhiro Kitazawa、Keigo Hijii 和 Kiyohide Nomura，《一维自旋-1 xy 模型的 su(2)对称性》，《物理学杂志A：数学与一般物理》36, L351 (2003)。[47] 《参见补充材料》，。[1] Oskar Vafek、Nicolas Regnault 和 B. Andrei Bernevig，《任意维 Hubbard 模型的精确激发本征态的纠缠》，SciPost Phys. 3, 043 (2017)。[49] Long-Hin Tang、Nicholas O'Dea 和 Anushya Chan-dran，《张量算符产生的多磁振子量子多体疤痕

'" Phys. Rev. Res. 4 ，043006 (2022).

[50] Gregory M. Crosswhite 和 Dave Bacon，《用于矩阵乘积算法缓存的有限自动机》，Phys. Rev. A **78**, 012356 (2008). [51] Johannes Motruk、Michael P. Zaletel、Roger S. K. Mong 和 Frank Pollmann，《圆柱上实空间与动量空间混合表述中的密度矩阵重整化群》，Phys. Rev. B **93**, 155139 (2016).[52] Phillip Weinberg 和 Marin Bukov，《QuSpin：用于量子多体系统动力学与精确对角化的 Python 软件包（第一部分：自旋链）》，SciPost Phys. **2**, 003 (2017).[6] Lorenzo Campos Venuti 和 Paolo Zanardi，《幺正平衡化：洛施密特回波的概率分布》，Phys. Rev. A **81**, 022113 (2010).[4] Takashi Mori 和 Naoto Shiraishi，《量子淬火后无需本征态热化假说的热化》，Phys. Rev. E **96**, 022153 (2017).[55] Sheldon Goldstein、Takashi Hara 和 Hal Tasaki，《宏观量子系统趋近平衡的时间尺度》，Phys. Rev. Lett. **111**, 140401 (2013). [56] Artur S. L. Malabarba、Luis Pedro Garc´ıa-Pintos、Noah Linden、Terence C. Farrelly 和 Anthony J. Short，《对于大多数可观测量，量子系统都能快速达到平衡》，Phys. Rev. E **90**, 012121 (2014).[57] Sheldon Goldstein、Takashi Hara 和 Hal Tasaki，《典型非平衡子空间中宏观量子系统的极快热化》，New Journal of Physics **17**, 045002 (2015).[58]Peter Reimann，《封闭多体系统中的典型快速热化过程》，Nature Communications **7**, 10821 (2016). [59] Luis Pedro Garc´ıa-Pintos、Noah Linden、Artur S. L. Mal-abarba、Anthony J. Short 和 Andreas Winter，《物理相关可观测量的平衡时间尺度》，Phys. Rev. X **7**, 031027 (2017). [5] Henrik Wilming、Thiago R. de Oliveira、Anthony J. Short 和 Jens Eisert，《封闭量子多体系统中的平衡时间》，载于 *Thermodynamics in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and New Directions*，由Felix Binder、Luis A. Correa、Christian Gogolin、Janet Anders 和 Gerardo Adesso 编（Springer International Publishing，Cham，2018），第435–455页。[61]Jonathon Riddell、Luis Pedro Garc´ıa-Pintos 和´Alvaro M. Alhambra，《非可积系统的弛豫与关联函数》，arXiv 预印本，arXiv:2112.09475 (2021). [62] Matthew Fishman、Steven R. White 和 E. Miles Stoudenmire，《用于张量网络计算的 ITensor 软件库》，SciPost Phys. Codebases，4 (2022). [63] Matthew Fishman、Steven R. White 和 E. Miles Stoudenmire，《ITensor 的代码库版本 0.3》，SciPost Phys. Codebases，4–r0.3 (2022).[64] Naoto Shiraishi 和 Takashi Mori，《Shiraishi 和 Mori 的答复》，Phys. Rev. Lett. **121**, 038902 (2018).[65]Ehsan Khatami、Guido Pupillo、Mark Srednicki 和 Marcos Rigol，《量子偶极玻色子孤立系统淬火后的涨落耗散定理》，Phys. Rev. Lett.**111**, 050403 (2013). [66] R. Steinigeweg、J. Herbrych 和 P. Prelov˘sek，《孤立自旋链系统中的本征态热化》，Phys. Rev. E **87**, 012118 (2013).[67]Wouter Beugeling、Roderich Moessner 和 Masudul Haque，“多体量子系统中局域算符的非对角矩阵元”，Phys. Rev. E **91**，012144（2015年）。[68]Jonas Richter、Anatoly Dymarsky、Robin Steinigeweg 和 Jochen Gemmer，“超越标准指标的本征态热化假说：低频下随机矩阵行为的涌现”，Phys. Rev. E **102**，042127 2020( )。[69] Jonathan Wurtz 和 Anatoli Polkovnikov，“混合场伊辛模型中涌现的守恒定律与非热态”，Phys. Rev. B **101**，195138（2020）。[70] Sho Sugiura、Pieter W. Claeys、Anatoly Dymarsky 和 Anatoli Polkovnikov，“遍历系统中的绝热景观与最优路径”，Phys. Rev. Res. **3**，013102（2021）。[71] Federica Maria Surace、Matteo Votto、Eduardo Gonzalez Lazo、Alessandro Silva、Marcello Dalmonte 和 Giuliano Giudici，“受限量子链中的精确多体疤痕态及其稳定性”，Phys. Rev. B **103**，104302（2021）。[72]Thomas Iadecola 和 Michael Schecter，“具有涌现动力学约束和有限纠缠复现的量子多体疤痕态”，Phys. Rev. B **101**，024306 2020( )。[73] Christopher M. Langlett、Zhi-Cheng Yang、Julia Wilde- boer、Alexey V. Gorshkov、Thomas Iadecola 和 Shen- glong Xu，“彩虹疤痕态：从面积律到体积律”，Phys. Rev. B**105**，L060301（2022）。[74]Saptarshi Biswas、Debasish Banerjee 和 Arnab Sen，“来自受保护零模及其他机制的疤痕：$U(1)$量子链规范模型与量子二聚体模型”，SciPost Phys. **12**，148（2022）。[75] Debasish Banerjee 和 Arnab Sen，“梯子晶格上阿贝尔格点规范理论中源自零模的量子疤痕态”，Phys. Rev. Lett. **126**，220601（2021）。[76] Kaoru Mizuta、Kazuaki Takasan 和 Norio Kawakami，“里德堡阻塞下的精确 Floquet 量子多体疤痕态”，Phys. Rev. Research **2**，033284（2020）。[77]Sho Sugiura、Tomotaka Kuwahara 和 Keiji Saito，“周期驱动系统固有的多体疤痕态”，Phys. Rev. Research **3**，L012010（2021）。[78]Thomas Iadecola 和 Sagar Vijay，“经典元胞自动机变形导致的非遍历量子动力学”，Phys. Rev. B **102**，180302（2020）。

《渐近量子多体疤痕》在线补充材料

LorenzoGotta[1,2],Sanjay Moudgalya[3,4],Leonardo Mazza[2]1 *Department of Quantum Matter Physics, University of Geneva, 24 Quai Ernest-Ansermet, 1211 Geneva, Switzerland*[2] *Université Paris-Saclay, CNRS, LPTMS,91405, Orsay, France*
[3] *Department of Physics and Institute for Quantum Information and Matter,California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*[4] *Walter Burke Institute for Theoretical Physics, California Institute of Technology, Pasadena, California 91125, USA*

2023年11月13日

在本补充材料中，我们给出正文所介绍的渐近量子多体疤痕态的主要相关性质的详细计算：

S1. 渐近量子多体疤痕态与精确量子多体疤痕态的正交性 S2. 渐近量子多体疤痕态的平均能量与能量方差 S3. 精确量子多体疤痕态与渐近量子多体疤痕态的纠缠熵 S4. 受扰哈密顿量下精确量子多体疤痕态的方差 S5. 非渐近量子多体疤痕态初态的动力学 S6. 哈密顿量的谱性质 H'S7. 保真度的普适重标度 S8. 渐近量子多体疤痕态的高维推广

S1. 渐近量子多体疤痕态与精确量子多体疤痕态的正交性

本节证明正文公式（4）中定义的量子态 $\{|n,k\rangle\}$ 彼此正交。首先注意，当 $n\neq n'$ 时，$|n,\ k\rangle$ 与 $|n',\ k'\rangle$ 正交，因为它们的磁化强度 $S^z=\sum_j S_j^z$ 不同，而磁化强度是 n 的简单函数：$S^z=-L+2n$。现在我们考虑具有相同 n 的量子态，并为简便起见，令系统尺寸 L 为偶数，且令 k 为 $\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍。于是我们发现，对于$n\geq 1$，有 $\langle n,\ k\,|n,\ k'\rangle\propto\langle n-1,\ \pi|\,J_k^-J_{k'}^+\,|n-1,\ \pi\rangle$。根据正文公式（2）中算符 J_k^+ 的定义，我们有：

$$\begin{aligned}
&\langle n-1,\pi|\,J_k^-J_{k'}^+\,|n-1,\pi\rangle=\frac{1}{4}\sum_{j,j'=1}^{L}e^{-i(kj-k'j')}\,\langle n-1,\pi|\,(S_j^-)^2(S_{j'}^+)^2\,|n-1,\pi\rangle\\
&=\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{L}e^{-i(k-k')j}\,\langle n-1,\pi|\,(S_j^-)^2(S_j^+)^2\,|n-1,\pi\rangle+\frac{1}{4}\sum_{j\neq j'}e^{-i(kj-k'j')}\,\langle n-1,\pi|\,(S_j^-)^2(S_{j'}^+)^2\,|n-1,\pi\rangle\\
&=\frac{1}{4}\alpha\sum_{j=1}^{L}e^{-i(k-k')j}+\frac{1}{4}\beta\sum_{j=1}^{L}e^{i(\pi-k)j}\sum_{j'\neq j}e^{i(k'-\pi)j'}=\frac{1}{4}L(\alpha-\beta)\delta_{k,k'}+\frac{1}{4}\beta L^2\delta_{k,\pi}\delta_{k',\pi},
\end{aligned}\tag{S7}$$

其中 $\alpha=4\binom{L-1}{n-1}\binom{L}{n-1}=4^{\frac{L+1-n}{L}}$和 $\beta=4\binom{L-2}{n-2}\binom{L}{n-1}=4^{(n-1)\ (L-n+1)\ L\ (L-1)}$，并且我们利用了 k和 k'均为 $\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍这一事实。这个计算直接通过将 $|n,\ \pi\rangle$ 表示为“完全磁化”乘积态的等幅叠加来完成。

$$|n,\pi\rangle=\sqrt{\frac{1}{2^{2n}\binom{L}{n}}}\sum_{1\leq j_1<j_2<\ldots<j_n\leq L}e^{i\pi\sum_{i=1}^{n}j_i}\left(S_{j_1}^+\right)^2\left(S_{j_2}^+\right)^2\ldots\left(S_{j_n}^+\right)^2|\Downarrow\rangle\,,\tag{S8}$$

并分别研究夹心算子在基态上的作用（当 $j=j'$ 和当 $j\neq j'$ 时），同时仔细计入相位因子和归一化因子。理解这种态的组合结构很重要。

这种态可在一组量子态的基底上展开，其中由 $\left(S_j^+\right)^2$ 产生的双磁振子均匀分布在各处。当 $j=j'$ 时，我们得到，方程（S7）中的 α 与不含位于位置 j 的双磁振子的完全磁化乘积态的数量直接相关；否则，算子 $(S_j^-)^2(S_j^+)^2$ 作用于这类基态时结果为零。该数量为 $\binom{L-1}{n-1}$；考虑归一化因子以及 $\left(S_j^-\right)^2(S_j^+)^2$，的具体矩阵元后，便可得到其表达式，如方程（S7）之后所示。同样，当 $j\neq j'$ 且 $n>1$ 时，我们得到，方程（S7）中的 β 与这样的完全磁化乘积态的数量相关：在位置 j 有一个双磁振子，而在位置 j' 没有双磁振子，其数量为 $\binom{L-2}{n-2}$。计入归一化因子和矩阵元后，便可直接得到方程（S7）之后给出的表达式。因此，对任意 $k\neq k'$，利用方程（S7）显然可得 $\langle n,\ k'|n,\ k\rangle=0$。鉴于我们使用的是归一化态，结合上述论证可得，只要 k 是 $\frac{2\pi}{L}$ 的整数倍且 L 为偶数，就有 $\langle n,\ k\,|n',\ \pi\rangle=\delta_{n,\ n'}\delta_{k,\ \pi}$。

—

S2. 渐近量子多体疤痕态的平均能量和能量方差

在本节中，我们计算正文公式（4）中定义的渐近量子多体疤痕态 $\{|n,k\rangle\}$ 的平均能量和方差。

A. 重写渐近量子多体疤痕态

为便于进行显式计算，我们将渐近量子多体疤痕态改写如下：

$$|n,k\rangle=\frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_{n,k}}}J_k^+\,|n-1,\pi\rangle\,. \tag{S9}$$

其中，量子态 $|n-1、\ \pi\rangle$ 和 $|n、\ k\rangle$ 均已归一化。首先，我们计算归一化因子系数 $\mathcal{M}_{n、\ k}$，它可直接由公式（S7）推出。其表达式为

$$\mathcal{M}_{n,k}=\langle n-1,\pi|\,J_k^-J_k^+\,|n-1,\pi\rangle=\frac{(L-n+1)(L-n)}{L-1}+\frac{L(L-n+1)(n-1)}{L-1}\delta_{k,\pi} \tag{S10}$$

B. 平均能量

为了计算态 $|n,\ k\rangle$ 的平均能量，我们首先将开边界自旋-1 XY 哈密顿量与对称性破缺微扰 [（见正文中式 (1) 下方的讨论）], 改写为：

$$H=\frac{J}{2}\sum_{j=1}^{L-1}\left(S_j^+S_{j+1}^-+S_j^-S_{j+1}^+\right)+h\sum_{j=1}^{L}S_j^z+D\sum_j\left(S_z^z\right)^2+\frac{J_3}{2}\sum_{j=1}^{L-3}\left(S_j^+S_{j+3}^-+S_j^+S_{j+3}^-\right). \tag{S11}$$

为了计算平均能量，我们需要研究 $[S_j^+S_{j+1}^-+h.c.]$ 对态 $|n,\ k\rangle$ 的作用。为此，考虑 $|n,\ k\rangle$ 在格点 j 和 $j+1$ 上的分解会很方便。例如，我们可以将 $|n,\ \pi\rangle$改写为

$$|n,\pi\rangle=\alpha_{n,\pi}\,|+\rangle_j\,|+\rangle_{j+1}\,|\psi_{n,\pi,1}\rangle+\beta_{n,\pi}\,|-\rangle_j\,|-\rangle_{j+1}\,|\psi_{n,\pi,2}\rangle+\gamma_{n,\pi}\left(\frac{|+\rangle_j\,|-\rangle_{j+1}-|-\rangle_j\,|+\rangle_{j+1}}{\sqrt{2}}\right)|\psi_{n,\pi,3}\rangle\,; \tag{S12}$$

其中，$\alpha_{n,\ \pi}$、 $\beta_{n,\ \pi}$和$\gamma_{n,\ \pi}$是满足$|\alpha_{n,\ \pi}|^2+|\beta_{n,\ \pi}|^2+|\gamma_{n,\ \pi}|^2=1$的数，而 $\{|\psi_{n,\pi,\ell}\rangle\}$ 对于 $1\leq\ell\leq3$ 是一些在除 j 和 $j+1$以外的格点上有支撑集的态。我们用 $|+\rangle_j$、$|-\rangle_j$ $|0\rangle_j$ $|n\ k\rangle$ 和来表示格点 j 上的三个自旋-1态。类似地，可以将，改写为：

$$\begin{aligned}|n,k\rangle=&\alpha_{n,k}\,|+\rangle_j\,|+\rangle_{j+1}\,|\psi_{n,k,1}\rangle+\beta_{n,k}\,|-\rangle_j\,|-\rangle_{j+1}\,|\psi_{n,k,2}\rangle+\\&+\gamma_{n,k}\left(\frac{|+\rangle_j\,|-\rangle_{j+1}-|-\rangle_j\,|+\rangle_{j+1}}{\sqrt{2}}\right)|\psi_{n,k,3}\rangle+\upsilon_{n,k}\left(\frac{|+\rangle_j\,|-\rangle_{j+1}+e^{ik}\,|-\rangle_j\,|+\rangle_{j+1}}{\sqrt{2}}\right)|\psi_{n,k,4}\rangle\,,\end{aligned} \tag{S13}$$

其中，$\alpha_{n,\ k}$、 $\beta_{n,\ k}$、 $\gamma_{n,\ k}$和$v_{n,\ k}$ 是满足 $|n,\ \ k\rangle$ 已归一化且 $\{|\psi_{n,\pi,\ell}\rangle\}$ 对于 $1 \leq \ell \leq 4$ 是一些在 j和 $j+1$上没有支撑集的态的数。随后可以直接计算项 $[S_j^+ S_{j+1}^- + h.c.]$ 的作用，得到：

$$\left(S_j^+ S_{j+1}^- + h.c.\right)|n,k\rangle = \sqrt{2}v_{n,k}\left(1+e^{ik}\right)|0\rangle_j |0\rangle_{j+1} |\psi_{n,k,4}\rangle\,. \tag{S14}$$

利用式 (S13)，可直接得到 $\langle n,\ \ k|\left(S_j^+ S_{j+1}^- + h.c.\right)|n,\ \ k\rangle = 0$。对于与 J_3 成正比的相互作用项，也可以采用类似的推理，得到 $\langle n,\ \ k|\left(S_j^+ S_{j+3}^- + h.c.\right)|n,\ \ k\rangle = 0$，因此总的来说，我们得到$\langle n,\ \ k|\,H\,|n,\ \ k\rangle = h(-L+2n) + DL$ 对所有 k 均成立。最后注意到，周期性边界条件下同样成立。

C. 能量方差

要计算任意态中的能量方差，很容易看出，哈密顿量中那些使该态成为本征态的项，其贡献为零。因此，在计算 $|n,k\rangle$ 的方差时，我们可以忽略式 (S11) 的 H 中的磁场项和各向异性项，即与 h 和 D 成正比的项，因为 $|n,k\rangle$ 是它们的本征态。为简便起见，我们分别将 H 中与 J 和 J_3 成正比的项称为 H_1 和 H_3，并采用周期性边界条件。正如我们在上一节所示，$\langle n,k|\,H_1\,|n,k\rangle = \langle n,k|\,H_3\,|n,k\rangle = 0$，并且运用类似的思路还可以证明 $\langle n,k|\,H_1\,H_3\,|n,k\rangle = \langle n,k|\,H_3\,H_1\,|n,k\rangle = 0$。因此，$|n,k\rangle$ 在 H 中的方差表达式可化简为 $\Delta H^2 = \langle n,k|\,(H_1+H_3)^2\,|n,k\rangle = \langle n,k|\,(H_1^2+H_3^2)\,|n,k\rangle$。现在我们给出每一项的一种改写方式：

$$\begin{aligned}\langle n,k|\,H_\ell^2\,|n,k\rangle =& \frac{1}{\mathcal{M}_{n,k}}\langle n-1,\pi|\,J_k^- H_\ell^2 J_k^+\,|n-1,\pi\rangle = \frac{1}{\mathcal{M}_{n,k}}\langle n-1,\pi|\,[J_k^-,H_\ell]\,[H_\ell,J_k^+]\,|n-1,\pi\rangle = \\ =& \frac{1}{\mathcal{M}_{n,k}}\langle n-1,\pi|\,[H_\ell,J_k^+]^\dagger\,[H_\ell,J_k^+]\,|n-1,\pi\rangle\,,\end{aligned} \tag{S15}$$

其中 $\ell = 1,\ 3$，并且我们利用了 $H_\ell\,|n-1,\ \ \pi\rangle = 0$ 这一事实。经过几步简单的代数运算，可以证明：

$$\begin{aligned}[H_1,J_k^+] &= \frac{J}{2}\sum_{j=1}^{L} e^{ikj}[S_j^+ S_{j+1}^- + S_j^- S_{j+1}^+, \frac{1}{2}(S_j^+)^2 + \frac{e^{ik}}{2}(S_{j+1}^+)^2] \\ &= -\frac{J}{2}\sum_{j=1}^{L} e^{ikj}\left[\{S_j^z,S_j^+\}S_{j+1}^+ + e^{ik}S_j^+\{S_{j+1}^z,S_{j+1}^+\}\right],\end{aligned} \tag{S16}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 表示反对易子，并且我们使用了恒等式 $[S_m^+ S_n^-,(S_n^+)^2] = -2S_m^+\{S_n^z,S_n^+\}$。计算时，将式 (S16) 代入式 (S15)；利用 $S_j^z S_j^+\,|n-1,\ \ \pi\rangle = S_j^z S_j^-\,|n-1,\ \ \pi\rangle = 0$ 这一事实，可以大大简化计算。首先，利用这个恒等式可简化 $[H_1,J_k^+]$ 对 $|n-1,\ \ \pi\rangle$ 的作用，得到

$$[H_1,J_k^+]\,|n-1,\pi\rangle = -\frac{J}{2}\sum_{j=1}^{L} e^{ikj}\left[S_j^+ S_j^z S_{j+1}^+ + e^{ik}S_j^+ S_{j+1}^+ S_{j+1}^z\right]|n-1,\pi\rangle\,, \tag{S17}$$

于是式 (S15) 可写为

$$\langle n,k|\,H_1^2\,|n,k\rangle = \frac{J^2}{4\mathcal{M}_{n,k}}\sum_{j,j'=1}^{L} e^{ik(j-j')}\langle n-1,\pi|\,[S_{j'}^z S_{j'}^- S_{j'+1}^- + e^{-ik}S_{j'}^- S_{j'+1}^z S_{j'+1}^-][S_j^+ S_j^z S_{j+1}^+ + e^{ik}S_j^+ S_{j+1}^+ S_{j+1}^z]\,|n-1,\pi\rangle\,. \tag{S18}$$

接着我们注意到，在式 (S18) 中，求和里所有带有 $j \neq j'$ 的项都为零，因为在这种情况下，夹心算子作用于 $|n-1,\ \ \pi\rangle$，必然会导致某些格点 m 上出现自旋态为 $|0\rangle_m$ 的自旋，而这些自旋

与 $\langle n-1,\pi|$ 的重叠为零。因此，我们可以将式 (S18) 简化为

$$\begin{aligned}\langle n,k|\,H_1^2\,|n,k\rangle &= \frac{J^2}{4\mathcal{M}_{n,k}}\sum_{j=1}^{L}\langle n-1,\pi|\,[S_j^zS_j^-S_{j+1}^- + e^{-ik}S_j^-S_{j+1}^zS_{j+1}^-][S_j^+S_j^zS_{j+1}^+ + e^{ik}S_j^+S_{j+1}^+S_{j+1}^z]\,|n-1,\pi\rangle \\ &= \frac{J^2}{4\mathcal{M}_{n,k}}\langle n-1,\pi|\sum_{j=1}^{L}\Big[e^{-ik}S_j^-S_j^+S_j^zS_{j+1}^zS_{j+1}^-S_{j+1}^+ + S_j^-S_j^+S_{j+1}^zS_{j+1}^-S_{j+1}^+S_{j+1}^z \\ &\quad + S_j^zS_j^-S_j^+S_j^zS_{j+1}^-S_{j+1}^+ + e^{ik}S_j^zS_j^-S_j^+S_{j+1}^-S_{j+1}^+S_{j+1}^z\Big]\,|n-1,\pi\rangle\,, \end{aligned} \tag{S19}$$

现在我们考虑 $|n-1,\pi\rangle$ 在乘积态基底中的展开，如式 (S8) 所示。注意，除非位点 j 和 $j+1$上都不存在双磁振子，否则式 (S19) 中的每一项在基态上均为零。因此，我们只需统计这类量子态的数量，并计入归一化因子，即可得到:

$$\langle n,k|\,H_1^2\,|n,k\rangle = \frac{J^2}{\mathcal{M}_{n,k}}\sum_{j=1}^{L}\frac{\binom{L-2}{n-1}}{\binom{L}{n-1}}\left[e^{-ik}+1+1+e^{ik}\right] = \frac{4J^2\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)}{1+\delta_{k,\pi}\frac{L(n-1)}{L-n}} = 4J^2\cos^2\left(\frac{k}{2}\right), \tag{S20}$$

其中在最后一步中，我们利用了分子对于 $k=\pi$无论如何都会为零这一事实。在开放边界条件下也可以进行相同的计算，其结果等于式 (S20) 的结果乘以因子 $1-\frac{1}{L}$；在热力学极限下，这不会改变周期性边界条件下的结果。通过类似的论证可以证明:

$$\langle n,k|\,H_3^2\,|n,k\rangle = 4J_3^2\cos^2\left(\frac{3k}{2}\right), \tag{S21}$$

由此恢复正文中的式 (5) 所得的结果。同样，选择开放边界条件会带来一个修正因子$1-\frac{3}{L}$，在热力学极限下可以忽略。−

D. 关于多粒子渐近量子多体疤痕态的考量

渐近量子多体疤痕态并不局限于上文明确讨论的单粒子渐近量子多体疤痕态。例如，对于任意精确量子多体疤痕态本征态，算符 $(J_k^+)^m$ for $k=\pi-\epsilon$ (for $\epsilon\sim 1/L$ small) and $m\ll L$作用于该态后，会得到一个方差近似按 $\sim m\epsilon^2$ 标度的态；图 S1 给出了一组支持这一结论的数值结果。根据这些结果，我们也可以将多粒子量子多体疤痕态认定为渐近量子多体疤痕态。在本节余下部分，我们将对上述态的能量方差进行解析计算:

$$\frac{\langle n-1,\pi|\,(J_k^-)^mH^2(J_k^+)^m\,|n-1,\pi\rangle}{\langle n-1,\pi|\,(J_k^-)^m(J_k^+)^m\,|n-1,\pi\rangle} = \frac{\|H(J_k^+)^m\,|n-1,\pi\rangle\|^2}{\|(J_k^+)^m\,|n-1,\pi\rangle\|^2}, \tag{S22}$$

其中 $\|\bullet\|$ 表示 L^2 范数。尽管我们无法精确计算方差，但将说明，通过一些近似，我们可以重现图 S1 中得到的标度关系。

首先需要指出，式 (S22) 的公式由以下事实得出：(i) 态 $(J_k^+)^m\,|n-1,\ \pi\rangle$ 是哈密顿量中与 h 和 D成正比的部分的精确本征态，其本征值为 $-Lh+2(n-1+m)h+LD$；(ii) 它对 H_1+H_3的期望值为零。这两个结论都源于这样一个事实：$(J_k^+)^m\,|n-1,\ \pi\rangle$ 只是 $|+\rangle$ 和 $|-\rangle$ 自旋态的线性叠加，其中 z 是自旋量子化轴：H_1 和 H_3 的作用必然会产生两个 $|0\rangle$ 自旋态，因此使该态与初始态正交。对于 $m=1$，补充材料第 S2 B 节中也给出了类似的推理。

只要考虑能量方差，我们就可以仅关注 $H=H_1+H_3$。不过，为了简便起见，本节将只考虑 H_1。这些结果很容易推广到 H_3。

我们首先关注式 (S22) 中表达式的分母:

$$\begin{aligned}\|(J_k^+)^m\,|n-1,\pi\rangle\|^2 &= \langle n-1,\pi|\,(J_k^-)^m(J_k^+)^m\,|n-1,\pi\rangle = \\ &= \frac{(m!)^2}{2^{2m}}\sum_{j_1<\ldots<j_m}\sum_{l_1<\ldots<l_m}e^{ik(l_1+\ldots+l_m-j_1-\ldots-j_m)}\,\langle n-1,\pi|\,(S_{j_1}^-)^2\ldots(S_{j_m}^-)^2(S_{l_1}^+)^2\ldots(S_{l_m}^+)^2\,|n-1,\pi\rangle\,. \end{aligned} \tag{S23}$$

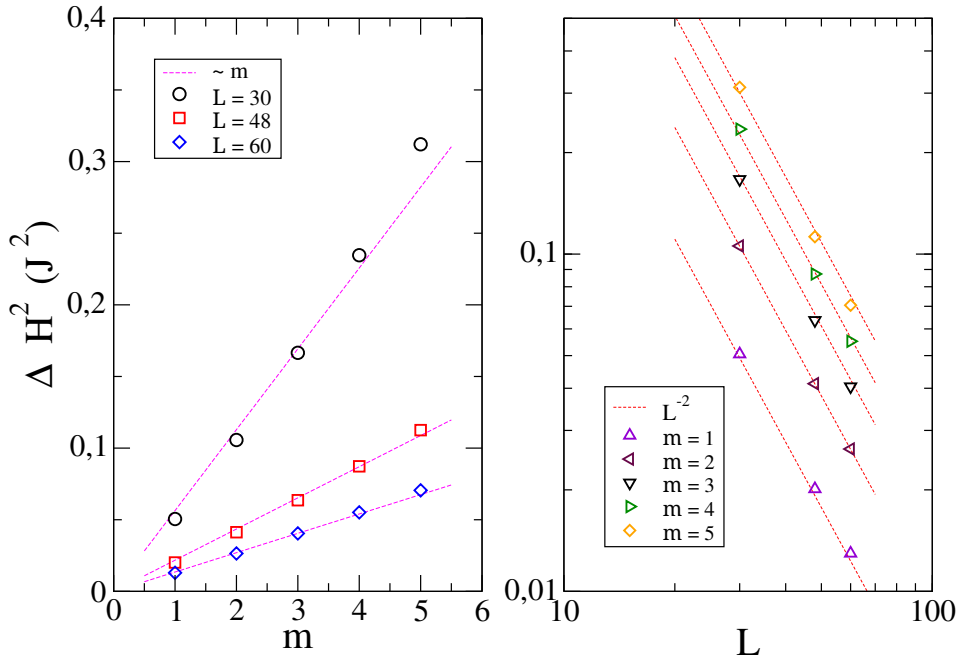

图 S 1 ΔH^2 m J_k^+ $k=$. 对精确疤痕态,作 $\pi-2\pi/L$ $|n\ \pi\rangle$ $J_k^+{}^m|n\ \pi\rangle$ 用双磁振子算符 次后得到的多粒子量子多体疤痕态的能量方差。因此，我们考虑的态正比于 ( ),。我们研究了三种不同的系统尺寸： $L=30$、48 和 60，以及 m 的五个不同取值，从 1 到 5。利用量子态的矩阵乘积态表示得到的数值数据表明， ΔH^2 的标度关系近似呈线性依赖于 m，并正比于 L^{-2}。左图中，数据以 m 为横轴绘制；右图中，相同数据以 L 为横轴绘制。虚线用于引导视线，以突出显示近似的行为：随 $\tilde{m}$ 变化以及随 $\tilde{L}^{-2}$ 变化；请注意，当 m 较大时，标度关系并不精确。

计算这个求和是一项艰巨的任务，因此我们通过仅考虑主导项 $j_i=l_i$ 来近似它；这些项的特征是相位处于驻定状态。因子 $(m!)^2$ 考虑了指标可能的排列顺序。其他项的特征是相位振荡，因此预计在热力学极限下并不重要。于是，分母可近似为以下表达式：

$$\begin{aligned}\|(J_k^+)^m|n-1,\pi\rangle\|^2) &\approx \frac{(m!)^2}{2^{2m}}\sum_{j_1<\ldots<j_m}\sum_{l_1<\ldots<l_m}\delta_{j_1,l_1}\ldots\delta_{j_m,l_m}2^{2m}\frac{\binom{L-m}{n-1}}{\binom{L}{n-1}}= \\ &=(m!)^2\binom{L}{m}\frac{\binom{L-m}{n-1}}{\binom{L}{n-1}}=m!\frac{(L-n+1)!}{(L-n-m+1)!}.\end{aligned} \tag{S24}$$

现在转到式 (S22) 的分子；计算它时，下面的关系很有用：

$$[[H_1+H_3,J_k^+],J_k^+]=0. \tag{S25}$$

让我们利用式 (S16) 中对易子的显式表达式证明式 (S25)；我们只关注哈密顿量的H_1 项，因为推广到 H_3 是直接的：

$$[[H_1,J_k^+],J_k^+]=-\frac{J}{2}\sum_j e^{ikj}\left[\{S_j^+,S_j^z\}S_{j+1}^+ + e^{ik}S_j^+\{S_{j+1}^+,S_{j+1}^z\},\frac{1}{2}e^{ikj}(S_j^+)^2+\frac{1}{2}e^{ik(j+1)}(S_{j+1}^+)^2\right] \tag{S26}$$

对易子 c 可以很容易地拆分为四个对易子的和；我们先来分析第一个 :

$$\left[\{S_j^+,S_j^z\}S_{j+1}^+,(S_j^+)^2\right]=\left[(S_j^+S_j^z+S_j^zS_j^+),(S_j^+)^2\right]S_{j+1}^+=\left(S_j^+\left[S_j^z,(S_j^+)^2\right]+\left[S_j^z,(S_j^+)^2\right]S_j^+\right)S_{j+1}^+. \tag{S27}$$

最后一个表达式中出现的对易子可以显式计算： $\left[S_j^z,(S_j^+)^2\right]=2(S_j^+)^2$。因此我们得到一个与 $(S_j^+)^3$，成正比的表达式，对于自旋1系统，该表达式等于零。通过对其他三个对易子进行类似计算，即可得出该论题。

借助公式 (S25)，可以通过归纳法证明：

$$H(J_k^+)^m\left|n-1,\pi\right\rangle = m(J_k^+)^{m-1}[H,J_k^+]\left|n-1,\pi\right\rangle, \quad 1\le m\le L-n+1. \tag{S28}$$

因此我们得到：

$$\|H(J_k^+)^m\left|n-1,\pi\right\rangle\|^2 = \|m(J_k^+)^{m-1}[H,J_k^+]\left|n-1,\pi\right\rangle\|^2 = m^2\left\langle n-1,\pi\right|[H,J_k^+]^\dagger(J_k^-)^{m-1}(J_k^+)^{m-1}[H,J_k^+]\left|n-1,\pi\right\rangle \tag{S29}$$

利用式 (S16)，我们得到：

$$\begin{aligned}\|H(J_k^+)^m\left|n-1,\pi\right\rangle\|^2 =& \frac{m^2[(m-1)!]^2}{2^{2m-2}}\left(\frac{J}{2}\right)^2 \sum_{j_1<\ldots<j_{m-1}}\sum_{l_1<\ldots<l_{m-1}}\sum_{r,s} e^{-ikr}(1+e^{-ik})e^{iks}(1+e^{ik})\times \\ &\times e^{ik(l_1+\ldots+l_{m-1}-j_1-\ldots-j_{m-1})}\times \\ &\times \left\langle n-1,\pi\right| S_r^-S_{r+1}^-(S_{j_1}^-)^2\ldots(S_{j_{m-1}}^-)^2(S_{l_1}^+)^2\ldots(S_{l_{m-1}}^+)^2S_s^+S_{s+1}^+\left|n-1,\pi\right\rangle. \end{aligned} \tag{S30}$$

该表达式可采用与处理分母时类似的近似方法求值：只保留相位不振荡的项，也就是满足 $j_i=l_i$ and $r=s$ 的项。随后，由于精确量子多体疤痕态的特殊性质，求和中的项可以解析求值，结果为

$$2(1+\cos k)\delta_{r,s}\left[\prod_{t=1}^{m-1}\delta_{j_t,l_t}(1-\delta_{j_t,r})\right]2^{2m}\frac{\binom{L-m-1}{n-1}}{\binom{L}{n-1}}. \tag{S31}$$

我们可以利用以下恒等式：

$$\sum_r\sum_{j_1<\ldots<j_{m-1}}\prod_{t=1}^{m-1}(1-\delta_{j_t,r}) = L\binom{L-1}{m-1}, \qquad L(m-1)!\frac{\binom{L-m-1}{n-1}\binom{L-1}{m-1}}{\binom{L}{n-1}} = \frac{(L-n+1)!}{(L-m-n)!(L-m)} \tag{S32}$$

最后可以表示为：

$$\|H(J_k^+)^m\left|n-1,\pi\right\rangle\|^2 = 2J^2m^2(m-1)!(1+\cos k)\frac{(L-n+1)!}{(L-m-n)!(L-m)}. \tag{S33}$$

此时，我们可以计算分子与分母之比：

$$\begin{aligned}\Delta H_1^2 \approx& \frac{2J^2m^2(1+\cos k)}{L-m}\frac{(m-1)!(L-n+1)!}{(L-m-n)!}\frac{(L-m-n+1)!}{m!(L-n+1)!} = \\ =& m4J^2\frac{L-m-n+1}{L-m}\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)\xrightarrow[m+n\ll L]{L\to+\infty} m\times 4J^2\cos^2\left(\frac{k}{2}\right)\end{aligned} \tag{S34}$$

因此我们得到，对精确量子多体疤痕态施加 m 次 J_k^+ 算符后得到的态，其能量方差随 m 呈线性标度关系。因此，只要 m 不随系统尺寸 L 标度变化，该态仍是渐近量子多体疤痕态。

E. 局域双磁振子态的范数和方差

为了突出渐近量子多体疤痕态的性质，我们在此研究局域双磁振子态的性质：

$$\left|\psi_j\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{4\frac{L-n+1}{L}}}(S_j^+)^2\left|n-1,\pi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{L(L-n+1)}}\sum_k e^{-ikj}J_k^+\left|n-1,\pi\right\rangle = \sum_k e^{-ikj}\left|\psi_k\right\rangle \qquad \text{for } 1\le n\le L. \tag{S35}$$

因此，局域双磁振子态是量子态 $\left|n,\ k\right\rangle$ 的线性叠加，因为利用式 (S9) 中的表达式，我们可以写出：

$$\left|\psi_k\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{L(L-n+1)}}J_k^+\left|n-1,\pi\right\rangle = \sqrt{\frac{\mathcal{M}_{n,k}}{L(L-n+1)}}\left|n,k\right\rangle. \tag{S36}$$

请注意，前因子的标度关系为 $L^{-1/2}$。该局域双磁振子态的平均能量为 0，因此其能量方差为：

$$\begin{aligned}\langle\psi_j|\left(H_1^2+H_3^2\right)|\psi_j\rangle &= \sum_k \langle\psi_k|\left(H_1^2+H_3^2\right)|\psi_k\rangle = \sum_k \frac{\mathcal{M}_{n,k}}{L(L-n+1)}\langle n,k|\left(H_1^2+H_3^2\right)|n,k\rangle\,,\\ &= \frac{4(J^2+J_3^2)(L-n)}{L(L-1)}\sum_k \cos^2(\frac{k}{2}) = \frac{2(J^2+J_3^2)(L-n)}{(L-1)},\end{aligned} \tag{S37}$$

这里我们使用了周期性边界条件，因此对于 $k \neq k'$ 有 $\langle n,k'|\,H_1\,|n,k\rangle = 0$；同时还有 $\langle n,k|\,H_1H_3\,|n,k\rangle = 0$，并且$|\psi_j\rangle$ 是哈密顿量其他所有项的本征态。显然，对于任意 $\frac{n}{L} < 1$，在热力学极限下该能量方差有限。因此，该态的保真度弛豫时间在热力学极限下有限，不能视为渐近量子多体疤痕态。

S3. 精确及渐近量子多体疤痕态的纠缠熵

本节回顾态 $|n,k\rangle$ 的纠缠熵计算，其计算思路与文献 [1, 2]中的计算类似。

首先将晶格划分为两部分，A 和 B。通常，我们将 A 视为由满足 $j \leq L/2$ 的晶格位点组成的集合，而将 B 视为其余部分，但这并非必要。关键在于，J_k^+ 算符总可以拆分为两项之和：一项作用于 A，另一项作用于 B：

$$J_k^+ = J_{k,A}^+ + J_{k,B}^+ = \frac{1}{2}\sum_{j\in A} e^{ikj}\left(S_j^+\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j\in B} e^{ikj}\left(S_j^+\right)^2. \tag{S38}$$

态 $|\Downarrow\rangle$ 是一个乘积态：$|\Downarrow\rangle_A \otimes |\Downarrow\rangle_B$。因此，对于 $|n,\ \pi\rangle$，我们得到 [1, 2]

$$|n,\pi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_{n,\pi}}}\left(J_{\pi,A}^+ + J_{\pi,B}^+\right)^n |\Downarrow\rangle_A \otimes |\Downarrow\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{N_{n,\pi}}}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\left(J_{\pi,A}^+\right)^m |\Downarrow\rangle_A \otimes \left(J_{\pi,B}^+\right)^{n-m} |\Downarrow\rangle_B\,, \tag{S39}$$

其中，$N_{n,\ \pi}$ 是态 $|n,\ \pi\rangle$的归一化因子，定义为 $\binom{L}{n}$。截断求和时还需特别注意采用恰当的方式：如果 A 由 L_A 个晶格格点组成，那么矩阵乘积算符 $J_{k\ ,\ A}^+$ 最多只能作用 L_A 次；L_B也同样如此。因此，为简单起见，这里假设 $n < L_A,\ L_B$。于是，式（S39）中的展开给出了该态的施密特分解，其中包含 $\ell \in \{A,B\}$ 部分的 $n+1$ 个正交态 $\{J_{k,\ell}^m|\Downarrow\rangle\}_{m=0}^n$。若存在 $n+1$ 个正交态，熵最高的态是最大混合态，此时它们具有相同的施密特系数；在这种情况下，$S_A = \log(n+1)$。如果考虑长度为 L 的晶格，并作二分划分，其中 $L_A = L_B = L/2$，那么具有广延数量双磁振子的态满足 $n = \alpha L$，且 $0 < \alpha < 1$，因此这些态满足以下关系：$S_A \sim \log L + \log\ \alpha$。众所周知，量子多体疤痕的熵按体积的对数标度增长。

现在考虑渐近量子多体疤痕态，$|n,k\rangle$。在这种情况下，我们使用公式 (S9) 得到

$$\begin{aligned}|n,k\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_{n,k}}}J_k^+|n-1,\pi\rangle =& \frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_{n,k}N_{n-1,\pi}}}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}J_{k,A}^+(J_{\pi,A}^+)^m|\Downarrow\rangle_A\otimes(J_{\pi,B}^+)^{n-1-m}|\Downarrow\rangle_B\\ &+\frac{1}{\sqrt{\mathcal{M}_{n,k}N_{n-1,\pi}}}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n-1}{m}(J_{\pi,A}^+)^m|\Downarrow\rangle_A\otimes J_{k,B}^+(J_{\pi,B}^+)^{n-1-m}|\Downarrow\rangle_B\,.\end{aligned} \tag{S40}$$

请注意，与 $|n,\pi\rangle$ 不同，公式 (S40) 通常并不是该态的施密特分解。不过，若考虑一个子系统，例如 A，则固定磁化强度 $-L_A+2m$ 的施密特态位于以下线性无关态张成的二维子空间中：

$$\left(J_{\pi,A}^+\right)^m|\Downarrow\rangle_A\,,\qquad J_{k,A}^+\left(J_{\pi,A}^+\right)^{m-1}|\Downarrow\rangle_A\,. \tag{S41}$$

因此，我们可以得出，施密特态的总数至多为 $2n$；对于大量双磁振子 $n=\alpha L$，在最高熵情形下，我们得到 $S_A \sim \log\ 2 + \log\ \alpha + \log L$。因此，相较于精确量子多体疤痕态 $|n-1,\ \pi\rangle$，渐近量子多体疤痕态 $|n,\ k\rangle$ 至多只多出一个 log 2 的加性修正。

S4. 受扰哈密顿量下精确量子多体疤痕态的方差

我们考虑受扰哈密顿量 $H' = H + V$，其中 H 是哈密顿量 (S11)，它在有限尺寸、具有周期性边界条件且满足 $V = \frac{J_z}{L}\sum_j S_j^z S_{j+1}^z$ 时具有精确疤痕态。由于 $|n,\ \pi\rangle$ 是 H的本征态，因此只需关注 V即可计算方差：

$$\begin{aligned}\Delta H'^2 = \Delta V^2 &= \langle n,\pi|\, V^2\, |n,\pi\rangle - \langle n,\pi|\, V\, |n,\pi\rangle^2 \\ &= \frac{J_z^2}{L^2}\sum_{j,j'=1}^{L}\left(\langle n,\pi|\, S_j^z S_{j+1}^z S_{j'}^z S_{j'+1}^z\, |n,\pi\rangle - \langle n,\pi|\, S_j^z S_{j+1}^z\, |n,\pi\rangle\, \langle n,\pi|\, S_{j'}^z S_{j'+1}^z\, |n,\pi\rangle\right). \end{aligned} \tag{S42}$$

随后，我们可以利用 $|n,\ \pi\rangle$ 的结构，计算式 (S42) 中出现的各种关联函数。首先计算两点关联函数，结果为

$$\langle n,\pi|\, S_j^z S_{j+1}^z\, |n,\pi\rangle = \frac{\binom{L-2}{n-2} + \binom{L-2}{n} - 2\binom{L-2}{n-1}}{\binom{L}{n}} \equiv F_2, \tag{S43}$$

其中，我们利用了 $S_j^z S_{j+1}^z$ 对构成 $|n,\ \pi\rangle$ 的乘积基态的作用，即式 (S8)，并注意到：当位点 j 和 $j+1$ 上有零个或两个双磁振子时，其取值为 $+1$；有一个双磁振子时，其取值为 -1。运用类似的方法，当 $j' \neq j-1,\ j,\ j+1$ 时，四点关联函数为

$$\langle n,\pi|\, S_j^z S_{j+1}^z S_{j'}^z S_{j'+1}^z\, |n,\pi\rangle = \frac{\binom{L-4}{n} - 4\binom{L-4}{n-1} + 6\binom{L-4}{n-2} - 4\binom{L-4}{n-3} + \binom{L-4}{n-4}}{\binom{L}{n}} \equiv F_4 \tag{S44}$$

注意，式 (S43) 和 (S44) 中的 F_2 和 F_4 是仅依赖于 L 和 n、而与 j 无关的数；并且我们假设 $n \geq 4$ 和周期性边界条件。当 $j' = j-1,\ j,\ j+1$ 时，“四点”关联函数的表达式如下

$$\langle n,\pi|\, S_{j-1}^z \left(S_j^z\right)^2 S_{j+1}^z\, |n,\pi\rangle = \langle n,\pi|\, S_j^z \left(S_{j+1}^z\right)^2 S_{j+2}^z\, |n,\pi\rangle = \langle n,\pi|\, S_j^z S_{j+1}^z\, |n,\pi\rangle = F_2, \quad \langle n,\pi|\left(S_j^z\right)^2\left(S_{j+1}^z\right)^2 |n,\pi\rangle = 1. \tag{S45}$$

结合式 (S42)-(S45)，并利用平移不变性，我们得到

$$\Delta H'^2 = \frac{J_z^2}{L^2}\left[\sum_j \sum_{j'\neq j-1,j,j+1}(F_4 - F_2^2) + \sum_j (1-F_2^2) + 2\sum_j (F_2 - F_2^2)\right] = J_z^2\left[F_4\left(1-\frac{3}{L}\right) - F_2^2 + \frac{2}{L}F_2 + \frac{1}{L}\right] \tag{S46}$$

根据式 (S46)，当 $n/L = \nu$ 时，其中 ν 是一个常数，$\Delta H'^2$ 渐近标度为 $\sim {}^{16\nu^2(1-\nu)}/_{L}$。另一方面，当 n 保持有限时，$\Delta H'^2$ 渐近标度为 $\sim {}^{16n}/_{(n-1)\ L^3}$。

S5. 非渐近量子多体疤痕态初态的动力学

在本节中，我们研究正文式 (1) 中哈密顿量 H 作用下某些非渐近量子多体疤痕态初态的动力学。我们进行这项研究，是为了进一步支持我们的观点，即 $|n,\ k = \pi - 2\pi/L\rangle$ 的动力学具有特殊性。

A. 有限能量方差的初始态

首先，我们考虑量子态 $|n, k=0\rangle$。它们属于正文公式（4）中的量子态族，但并非渐近量子多体疤痕态，因为从正文公式（5）可以看出，它们在热力学极限下具有有限能量方差。值得注意的是，文献 [3]，已讨论过具有有限能量方差的态，并得出了类似结论。在图 S2 中，我们研究 $|n, k=0\rangle$ 的动力学，给出了该态时间演化的类似数值结果。可观测量 $S^{z2}(t)$ 的动力学会在一个较短的时间尺度上“启动”，该时间尺度约为 J^{-1}，且不依赖于 L（见图 S2 的第一幅图）。动力学随后到达一个“预热化”平台 [4]，当 $L \to \infty$ 时，该平台升至初始值。请注意，这一结果并不与以下事实矛盾：在有限尺寸下的长时间极限中，可观测量应弛豫至对角系综所预测的热值。

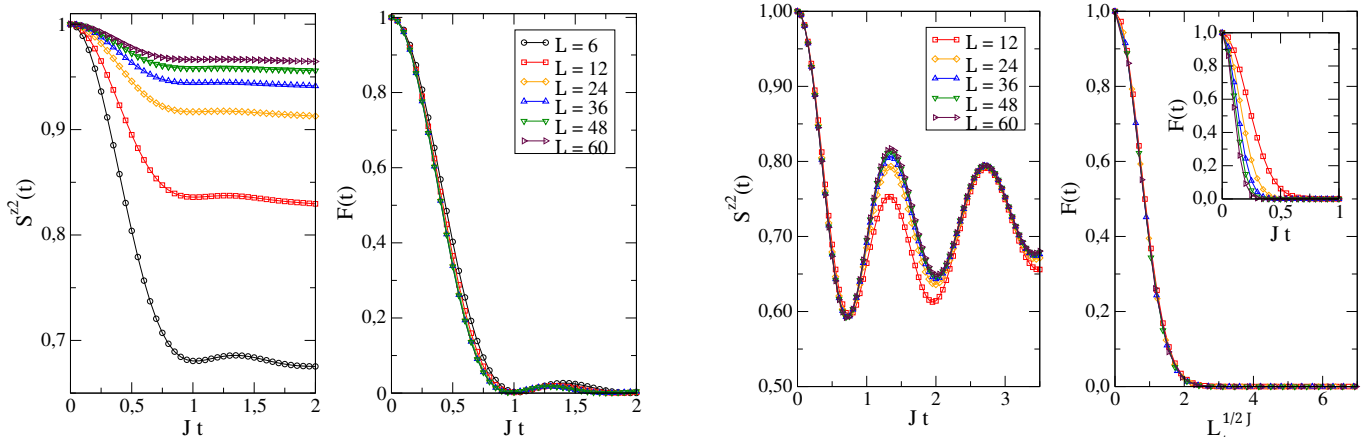

图 S2. 第一和第二个面板：态 $e^{-iHt}|n,k\rangle$ 在 $n = L/2$ 和 $k = 0$ 下的性质随时间的变化。第一个面板：磁化强度平方 $S^{z2}(t)$ 的时间演化。第二个面板：与初始态的保真度 $F(t)$ 的时间演化。第三和第四个面板：态 $e^{-iHt}|+-+-+-\ldots\rangle$ 的性质随时间的变化。第三个面板：磁化强度平方的时间演化。第四个面板：与初始态的保真度 $F(t)$ 的时间演化；插图中展示原始数据，而主图中将时间按因子 $\sqrt{L}$ 缩放，以清楚地显示曲线塌缩。

然而，热化时间尺度远长于我们使用基于矩阵乘积态的方法在数值上能够探测的典型时间。我们使用精确对角化对较小系统尺寸进行了长时间数值模拟，并验证了这一点。尽管表面上很长的热化时间可能使人将这些态视为渐近量子多体疤痕态，但对初始态 $F(t)$ 的保真度研究则呈现出截然不同的定性特征。图 S2 的第二幅图展示了这一点：在相同的时间尺度 J^{-1} 下，该态就基本上与初始态正交，而且不同尺寸的数据几乎无法区分。保真度弛豫时间的数据可理解为态 $|n = L/2, k = 0\rangle$ 具有有限能量方差的结果。

B. 初始乘积态

将渐近量子多体疤痕态的动力学与无关联乘积态的动力学进行对比也很有意思；这里我们考虑交错态 $|\ldots+-+-+-\ldots\rangle$，它与正文中所考虑的量子态具有相同的零磁化强度，并且其平均磁化强度平方与渐近量子多体疤痕态相同，均为一。对于所有所考察的 L， $S^{z2}(t)$ 的动力学数据都塌缩到同一条曲线上（图 S2 的第三个面板）；而保真度弛豫时间则随着 L 增大而缩短（图 S2 的第四个面板）。这一行为符合对一般乘积态 [5, 6], 时间演化的预期，与渐近量子多体疤痕态的行为截然不同。

S6. 哈密顿量 H' 的谱性质

在本节中，我们分析正文中讨论的哈密顿量 $H' = H + V$ 的谱，其中 H 是展现精确量子多体疤痕态的自旋-1 XY 哈密顿量，而微扰为：

$$V = \frac{J_z}{L}\sum_j S^z_j S^z_{j+1}. \tag{S47}$$

我们的目标是更清楚地阐明精确量子多体疤痕态的消失：当 $J_z = 0$ 时它存在，而当$J_z = 1$时则不存在。在图 S3 中，我们讨论了自旋链长度为 $L = 10$时，模型在 J_z 从 0 到 1 变化的多个取值下的谱性质。图中展示了所有本征态的二分纠缠熵，以及 $S^{z2} = \sum_j (S^z)^2$的期望值。在这些系统尺寸下，我们观察到，当 $J_z \lesssim 0.2$ 时，无论是在纠缠熵还是在可观测量中，都存在一个明显的离群态。当 $J_z \lesssim 0.6$ 时，我们可以观察到一个在 S^{z2}期望值方面属于离群态的量子态，但其纠缠熵较高，与其他具有相同能量的本征态相当。

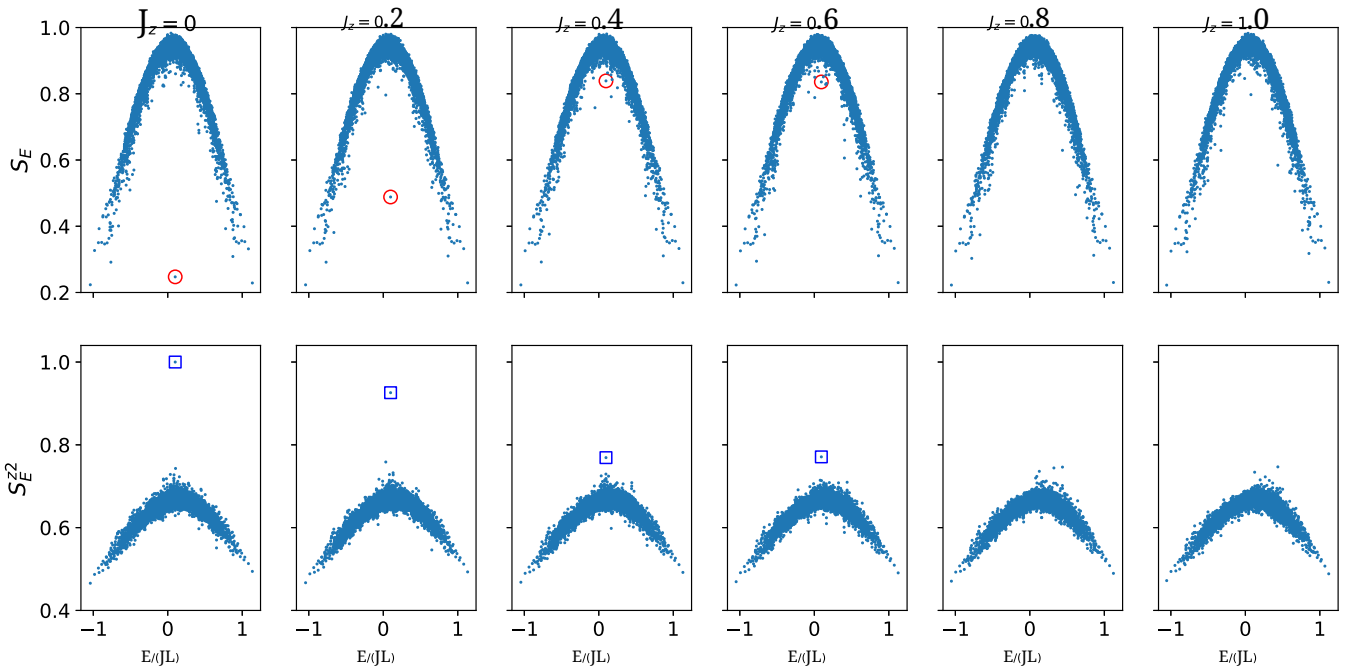

图 S3. 哈密顿量 $H' = H + V$ 在零磁化扇区 $S_z = 0$ 中，取 J_z的若干个值（范围从 $J_z = 0$到 $J_z = 1$）时的谱性质；结果通过对长度为 $L = 10$的自旋链进行精确对角化得到。数值模拟的参数为 $\{J, h, D, J_3\} = \{1, 0, 0.1, 0.1\}$，并改变 J_z。第一行绘制本征态的二分纠缠熵 S_E 随其能量 E的变化；第二行则聚焦于能量为 E的本征态上可观测量 $S^{z2} = \sum_j (S_j^z)^2$ 的期望值 S_E^{z2}。这些图突显了模型在 $J_z = 0$ 处的精确疤痕态，以及该态如何随着 J_z 增大而消失。

对于更大的 J_z 取值，很难确定唯一的离群量子多体疤痕态，尽管谱中仍有若干量子态未聚集在主曲线上。需要强调的是，这些数值模拟是在有限尺寸下进行的；若对热力学极限进行适当的标度分析，我们所展示的 $J_z \neq 0$对应的离群态可能会消失。我们还考察了 J_z 取负值的情况，所得结果与图 S3 中的结果非常相似，故为简洁起见，此处不再展示。

S7. 保真度的普适缩放

在本节中，我们展示正文中针对不同系统尺寸所呈现的渐近量子多体疤痕态保真度的数据塌缩。如图 S4 所示，在短时间内，只要按照依赖于系统尺寸的因子对时间进行重标度，就会出现这种数据塌缩。左图展示了由正文式 (1) 中的自旋-1 XY 哈密顿量 H 演化的渐近量子多体疤痕态$|n,\ k = \pi - 2\pi/L\rangle$，该哈密顿量包含与 J_3 成正比的项；通过按 $\tau = t/L$ 对时间进行重标度即可得到塌缩。右图展示了由哈密顿量 $H' = H + V$演化的态 $|n,\ \pi\rangle$；通过按 $\tau = t/L^{1/2}$ 对时间进行重标度即可得到塌缩。

值得注意的是，可以将这些结果与正文式 (6) 中的能量-时间不确定关系联系起来。该关系的证明见许多量子力学教材，此处不再赘述。时间演化态与初始态的重叠与哈密顿量及其幂的期望值有关，具体为 [6]

$$\langle\Psi| e^{-iHt} |\Psi\rangle \approx 1 - it \langle\Psi| H |\Psi\rangle - \frac{1}{2}t^2 \langle\Psi| H^2 |\Psi\rangle + \frac{i}{6}t^3 \langle\Psi| H^3 |\Psi\rangle + \dots \tag{S48}$$

因此，我们可以将保真度表示为

$$F(t) = |\langle\Psi| e^{-iHt} |\Psi\rangle|^2 \approx 1 - t^2 \left(\langle\Psi| H^2 |\Psi\rangle - \langle\Psi| H |\Psi\rangle^2 \right) + \dots \tag{S49}$$

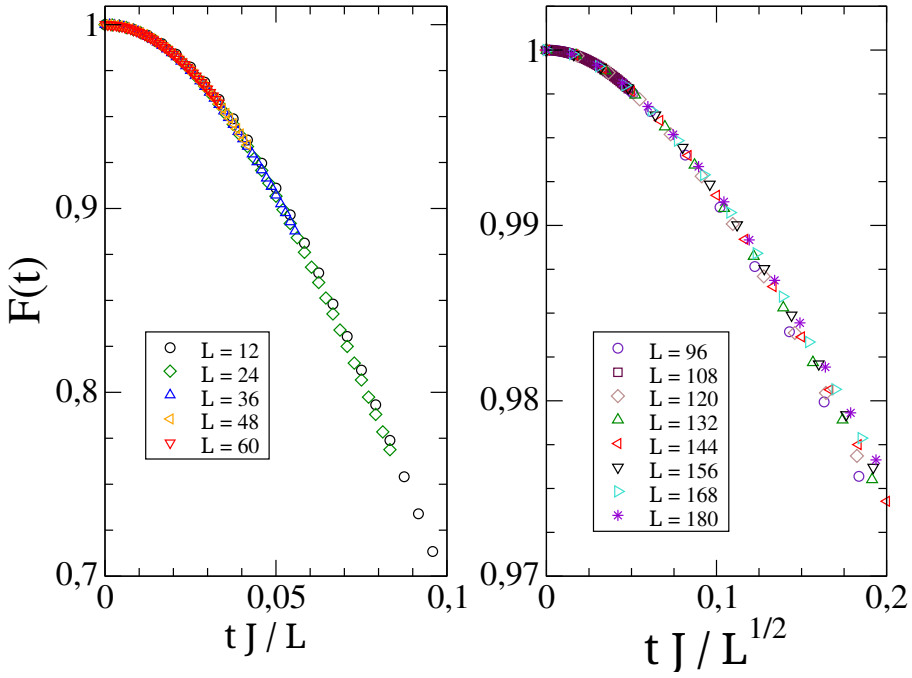

图 S4. 正文图 2 和图 4 中绘制的保真度 $F(t)$ 的重标度。

因此，短时保真度动力学完全由初始态相对于该动力学的哈密顿量的能量方差决定。

请注意，弛豫时间的具体标度关系取决于其定义。初始态的保真度在短时间内按 $F(t) \sim \exp\left(-\Delta H^2 t^2\right)$ [6] 衰减，其中 ΔH^2 为方差，由此得到的时间尺度为 $\tau \sim 1/\Delta H$。另一方面，可以将保真度弛豫时间定义为保真度衰减至两个多体态之间典型保真度所需的时间尺度；后者按 $\exp(-L)$ [6]，标度，因此会多出一个因子$\sqrt{L}$。本文采用前一种定义，主要关注方差不同的初态之间的相对衰减时间尺度。

研究具有高斯能量展宽的态颇有意义，因为其保真度的时间演化可以精确求得。事实上，可以证明这种态使该不等式取等，并且其保真度 $F(t)$ 的动力学演化具有可能的最短时间尺度。具体而言，考虑一个初始态，它是能量本征态的高斯线性叠加，平均能量为 E_0，能量方差为 σ^2（我们还引入一个归一化前因子 $\alpha \in \mathbb{C}$）：假设能量窗口 $[E_0-\sigma, E_0+\sigma]$ 内的态密度近似为常数，且取值为 $\rho(E_0)$，则时间演化态与初始态之间的内积为：

$$\langle \Psi_0 | \, e^{-iHt} \, | \Psi_0 \rangle \approx \int |\alpha|^2 e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2\sigma^2}} e^{-iEt} \rho(E) dE = |\alpha|^2 \sqrt{2\pi\sigma^2} e^{-iE_0 t} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} \rho(E_0). \tag{S50}$$

对于 $t = 0$ 计算得到的态的归一化要求 $|\alpha|^2\sqrt{2\pi\sigma^2}\rho(E_0) = 1$。保真度 $F(t)$ 是该内积模方，因此 $F(t) = \exp\left[-\sigma^2 t^2\right]$；我们可以将保真度动力学的典型时间尺度定义为 $\tau = 1/(2\sigma)$，此时能量-时间不等式得到满足并达到最小值。

一般而言，我们因此预期，短时间内保真度的动力学发生在尽可能短、且使能量-时间不等式取最小值的时间尺度上。图 S4 中绘制的数值计算确实验证了这种短时间行为。左图中我们有 $\tau \sim L$ 和 $\sigma \sim 1/L$；右图中我们有 $\tau \sim \sqrt{L}$ 和$\sigma \sim 1/\sqrt{L}$。请注意，这一时间尺度也与具有精确量子多体疤痕态 [3] 的模型在弱微扰下弛豫时间的严格下界相吻合，只需令微扰强度为 $\lambda = 1/L$；不过我们指出，后者是可观测量弛豫时间，而我们通常预期它不同于本文讨论的保真度弛豫时间。然而，务必牢记，数值计算仅在短时间内进行，长时间行为仍需进一步研究。

S8. 渐近量子多体疤痕态的高维推广

最后，我们表明，渐近量子多体疤痕态的存在并不限于一维系统，还可以轻松推广到高维晶格。作为一个例子，我们考虑一个位于 $d>1$ 维空间中的简单立方布拉菲晶格，其原始矢量为 $\mathbf{t}_i$ 和 $i=1,\dots d$；这些矢量无量纲且相互正交：$\mathbf{t}_i\cdot\mathbf{t}_j=\delta_{ij}$。晶格的线性尺寸为 L，由 L^d 个格点组成；施加周期性边界条件（PBC）。晶格的每个格点上都有一个自旋-1自由度，我们定义自旋-1算符 $S^\alpha_{\mathbf{r}}$，其中 $\alpha=x,y,z$。接下来，我们考虑带外磁场的最近邻XY模型：

$$H=J\sum_{\mathbf{r}}\sum_{i=1}^{d}\left(S^x_{\mathbf{r}}S^x_{\mathbf{r}+\mathbf{t}_i}+S^y_{\mathbf{r}}S^y_{\mathbf{r}+\mathbf{t}_i}\right)+h\sum_{\mathbf{r}}S^z_{\mathbf{r}}. \tag{S51}$$

如 [2, 7], 所述，式 (S51) 中的 L 模型在任意有限的d值以及任意维度d下都呈现精确量子多体疤痕态。请注意，当 $d>1$时，式 (S51) 中的模型是非可积的；与正文式 (1) 中的一维情形不同，我们无需添加与 D 成正比的各向异性项，也无需添加与 J_3成正比的长程项，便可破坏可积性或特殊对称性。从完全极化态 $|\Downarrow\rangle$出发，我们定义准粒子产生算符 $J^+_{\mathbf{k}}=\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r}}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}(S^+_{\mathbf{r}})^2$。

精确量子多体疤痕态为 $|n,\boldsymbol{\pi}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N_{n,\boldsymbol{\pi}}}}(J^+_{\boldsymbol{\pi}})^n|\Downarrow\rangle$ 其中 $\boldsymbol{\pi}$ 是所有 d 分量均等于π的向量。容易证明，$H|n,\boldsymbol{\pi}\rangle=h(-L^d+2n)|n,\boldsymbol{\pi}\rangle$，因此该态是哈密顿量 [2, 7, 8]谱中部的一个精确量子多体疤痕态。我们关注的态为：

$$|n,\mathbf{k}\rangle=\frac{1}{\sqrt{N_{n,\mathbf{k}}}}J^+_{\mathbf{k}}(J^+_{\boldsymbol{\pi}})^{n-1}|\Downarrow\rangle, \tag{S52}$$

其中，$\mathbf{k}$是倒易空间中位于第一布里渊区（1BZ）内的任意矢量。与一维情形类似，可以证明，只要选择的动量$\mathbf{k}$ 在所有方向上都与 PBC 相容，我们就可以证明 $\langle n,\mathbf{k}|n',\mathbf{k}'\rangle=\delta_{n,n'}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$。利用这些态，我们可以直接对第 S2 节中的证明作相应调整。我们发现，平均能量为 $\langle n,\mathbf{k}|H|n,\mathbf{k}\rangle=h(-L^d+2n)$，而能量方差为

$$\Delta H^2=\frac{4J^2\sum_{i=1}^{d}\cos^2\left(\frac{k_i}{2}\right)}{1+\frac{(n-1)L^d}{L^d-n}\delta_{\vec{k},\vec{\pi}}}=4J^2\sum_{i=1}^{d}\cos^2\left(\frac{k_i}{2}\right). \tag{S53}$$

因此，若考虑$\mathbf{k}$ 的分量为 $k_i=\pi+\frac{2\pi}{L}m_i$，并在 $L\to\infty$ 时保持 $m_i\in\mathbb{Z}$ 不变，则方差会降为零，同时该态与精确量子多体疤痕态正交。对于这类态，我们预期其具有与一维情形所讨论的渐近量子多体疤痕态相同的现象学。

* lorenzo.gotta@unige.ch † sanjaym@caltech.edu ‡ leonardo.mazza@universite-paris-saclay.fr

[1] O. Vafek、N. Regnault 和 B. A. Bernevig，SciPost Phys. **3**，043（2017）。[2] M. Schecter 和 T. Iadecola，Phys. Rev. Lett. **123**，147201（2019）。[3] C.-J. Lin、A. Chandran 和 O. I. Motrunich，Phys. Rev. Res. **2**，033044（2020）。[4] T. Mori 和 N. Shiraishi，Phys. Rev. E **96**，022153（2017）。[5] H. Wilming、T. R. de Oliveira、A. J. Short 和 J. Eisert，“封闭量子多体系统中的平衡时间”，载于 *Thermodynamics in the Quantum Regime: Fundamental Aspects and New Directions*，由 F. Binder、L. A.Correa、C. Gogolin、J. Anders 和 G. Adesso 编（Springer International Publishing，Cham，2018），第 435–455 页。[6] L. Campos Venuti 和 P. Zanardi，Phys. Rev. A **81**，022113（2010）。[7] D. K. Mark 和 O. I. Motrunich，Phys. Rev. B **102**，075132（2020）。[8] J. Wildeboer、C. M. Langlett、Z.-C. Yang、A. V. Gorshkov、T. Iadecola 和 S. Xu，Phys. Rev. B **106**，205142（2022）。