arXiv:2303.05414v1 [math.AG] 9 Mar 2023

实曲线上抛物向量丛模空间的布劳尔群与皮卡群

Usha N. Bhosle 与 Indranil Biswas

Abstract. 我们确定了实曲线 Y 上稳定抛物向量丛的模空间 $U^{'s}_{L,\ par}$ 中秩为 r 、行列式为 L 的情形下的布劳尔群和皮卡群；该曲线的算术亏格为 $g \geq 2$ ，且奇点至多为节点。

Contents

1. 引言 1 2. 实节点曲线上的抛物丛模空间 2 2.1. 记号 2 2.2. 抛物层 2 2.3. 抛物层的模叠与模空间 4 3. 稳定轨迹补集的余维 4 4. 抛物模空间的皮卡群 9 5. 非局部自由层轨迹的余维 10 5.1. 抛物 GPB 10 6. 抛物模空间的布劳尔群 13 6.1. 布劳尔类 β 136.2. Leray谱序列 14 致谢 15 参考文献 15

1. Introduction

对任意簇，都有与之对应的布劳尔群和皮卡群。许多研究已经对各种模空间的这些群进行了计算。我们回顾一下，概形 Z 上的布劳尔群 $Br(Z)$由以下等价类定义：

2010 年数学主题分类。14D20，14F05。关键词和短语：实曲线；抛物向量丛；模空间；布劳尔群；皮卡群。

Z上的阿祖马亚代数。等价地， Z上的 ´étale 局部平凡射影丛的 Morita等价类定义了 $Br(Z)$。

这里我们考虑一个定义在实数域上的不可约射影曲线 Y，其奇点至多为节点。固定 Y 上一个由实光滑点组成的有限子集。此外，固定 Y 的皮卡德变种上的一个实点 L。令 $U^{'s}_{L,\ par}$ 表示 Y 上稳定抛物丛 E_* 的模空间，这些抛物丛在所选点处带有抛物结构，具有固定的数值类型，并满足其底层向量丛 E_* 的行列式为 L 这一条件。我们的主要目标是计算 $U^{'s}_{L,\ par}$ 的布劳尔群。定理 6.4 给出了这一计算。

We a还计算了 $U^{'s}_{L,\ par}$ 的皮卡群；定理 4.2 给出了这一计算 .

在第 3 节中，我们估计抛物丛模空间及抛物丛模叠中稳定轨迹补集的余维。在第 5 节中，我们估计抛物层模空间中非局部自由层轨迹的余维。这些估计用于上述计算。

2. Moduli of parabolic bundles over a real nodal curve

2.1. 记号。设 Y 是一条定义在 $\mathbb{R}$ 上、算术亏格为 g 的几何不可约射影代数曲线，其奇点至多为节点。我们假设 $g \geq 2$。设 $p\colon X \longrightarrow Y$ 是 Y 的正规化。令 $X_{\mathbb{C}} = X \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$（分别为 $Y_{\mathbb{C}} = Y \times_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$）为由 X（分别为 Y）经基变换到 $\mathbb{C}$ 后得到的不可约复射影代数曲线。

复共轭 $\sigma\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, c \longmapsto \overline{c}$ 诱导出对合反全纯自同构

$$\sigma_X : X_{\mathbb{C}} \longrightarrow X_{\mathbb{C}}, \quad \sigma_Y : Y_{\mathbb{C}} \longrightarrow Y_{\mathbb{C}}$$

使得 $p \circ \sigma_X = \sigma_Y \circ p$。 Y（分别为 X）的实点恰为 σ_Y（分别为 σ_X）的不动点。我们假设 Y（因而 X）具有非奇异实点。

Pic($Y_{\mathbb{C}}$)中的点对应于 $Y_{\mathbb{C}}$上的线丛 ξ。对于线丛 ξ，任意同态 $\eta : \xi \xrightarrow{\cong} \sigma_Y^*\overline{\xi}$ 都会产生一个同态

$$\overline{\sigma_Y^*\eta} : \overline{\sigma_Y^*\xi} = \sigma_Y^*\overline{\xi} \longrightarrow \overline{\sigma_Y^*\sigma_Y^*\overline{\xi}} = \xi\,.$$

~若存在同构 $\eta\colon \xi \xrightarrow{=} \sigma_Y^*\overline{\xi}$，使得$\overline{\sigma_Y^*\eta} \circ \eta = \mathrm{Id}_\xi$，则称线丛 ξ 为实的。皮卡变种Pic(Y)的实点对应于 $Y_{\mathbb{C}}$ 上的线丛 ξ，满足$\sigma_Y^*\overline{\xi}$ 与 ξ同构。每个这样的 ξ 都有一个实结构（回想一下， Y 有实点）。

2.2. 抛物层。设 I 是 Y的光滑实点轨迹的一个有限子集。

定义 2.1. 在 $x \in I$ 处的秩为 r 的无挠层 E 上的拟抛物结构，是纤维 E_x上的实向量子空间旗

$$E_x = F_1(E_x) \supset \cdots \supset F_{l_x}(E_x) \supset F_{l_x+1}(E_x) = 0\,. \tag{2.1}$$

如果 c_i^x = 维数 $F_i(E_x)$，那么

$$\overline{n}(x) = (c_1^x, \cdots, c_{l_x}^x) \tag{2.2}$$

称为 x处旗的类型。注意， $c_1^x = r$。

在 E 上方的 I 上的抛物结构，是指在每个 $x \in I$处都具有上述拟抛物结构，并且对每个子空间 F_i（E_x），都配有一个有理数 α_i（x），称为抛物权，满足

$$0 < \alpha_1(x) < \cdots < \alpha_{l_x}(x) < 1.$$

令 k_i（x） =维数 F_i（E_x） −维数 F_{i+1}（E_x） $i = 1$、 $\cdots$、 l_x，以及

$$r_i(x) = \dim E_x - c_i^x = \dim E_x - \dim F_i(E_x),\ i \geq 2; \tag{2.3}$$

上述整数 k_i（x）称为抛物权 α_i（x）的重数。定义

$$\overline{\alpha}(x) := (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \cdots, \alpha_{l_x}(x)),\ \ \overline{k}(x) := (k_1(x), k_2(x), \cdots, k_{l_x}(x))\,.$$

Y上的抛物无挠层 E_*，其抛物结构定义在 I 上，是指带有 I上抛物结构的 Y 上的无挠层 E。若 E 是局部自由的，则称抛物无挠层 E_*为抛物向量丛。

对于上述抛物无挠层 $E_* := (E, \{F_i(x)\}, \{\alpha_i(x)\})$，其抛物次数定义为

$$\text{par-deg}(E_*) := \text{degree}(E) + \sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x} \alpha_i(x)k_i(x)\,.$$

抛物斜率定义为

$$\text{par-}\mu(E_*) := \frac{\text{par-deg}(E_*)}{\text{rank}(E)} = \frac{\text{par-deg}(E_*)}{r} \in \mathbb{Q}\,.$$

定义 2.2. 对于抛物无挠层 E_*，任意非零子层 $F \subset E$ 都具有诱导抛物结构。我们将配备由 E_*诱导的抛物结构的层 F 记为 F_*。

A 若抛物无挠层 E_* 满足以下条件，则称其为稳定（分别称为半稳定）：

$$\text{par-}\mu(F_*) < \text{par-}\mu(E_*)$$

（分别地，$\text{par-}\mu(F_*) \leq \text{par-}\mu(E_*)$），对于 E 的所有满足 $1 \leq \text{rank}(F) < \text{rank}(E)$ 的子层 F。

对于每个 $x \in I$，令 $P_x \subset \text{SL}(r, \mathbb{C})$ 为保持 $\mathbb{C}^r$ 的一个定型为 $\overline{n}(x)$ 的固定滤过的抛物子群（见 (2.2)）。令

$$\mathbf{F} := \prod_{x\in I} \text{SL}(r, \mathbb{C})/P_x\,. \tag{2.4}$$

簇 F 光滑、完备且有理 [13]。此外，

$$\text{Pic}(\mathbf{F}) = \mathbb{Z}^{\sum_{x\in I}(l_x-1)}\,.$$

我们将描述 Pic(F) 的一组生成元。对于每个 $1 \leq j \leq l_x$，令

$$f_j : \mathrm{SL}(r,\mathbb{C})/P_x \longrightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^{c_i^x} \mathbb{C}^r)$$

是将任意滤过映射

$$\mathbb{C}^r = V_1 \supset V_2 \cdots \supset V_{l_x} \supset V_{l_x+1} = 0$$

到直线 $\bigwedge^{c_j^x} V_j \subset \bigwedge^{c_j^x} \mathbb{C}^r$。定义 $\xi_j^x := f_j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\wedge^{c_i^x}\mathbb{C}^r)}(1)$。对于任意 $x \in I$，群 Pic(SL(r, $\mathbb{C}$)/P_x) 由 ξ_j^x, $j = 2, \cdots, l_x$ 生成。因此，群 Pic(F) 由ξ_j^x, $x \in I$, $j = 2, \cdots, l_x$ 生成。

2.3. 抛物层的模叠与模空间。若 E_* 是 Y上的半稳定抛物向量丛，则 $E_{*,\mathbb{C}} = E_* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 在 $Y_{\mathbb{C}}$ 上是半稳定的。对于 Y上的稳定抛物向量丛 E_*，向量丛 $E_{*,\mathbb{C}}$ 是多稳定的，但它未必稳定。

定义 2.3. 若抛物向量丛 E_* 在 Y 上满足抛物向量丛 $E_{*,\ \mathbb{C}}$ 在 $Y_{\mathbb{C}}$ 上稳定，则称其为几何稳定。

固定整数 $r \geq 2$ 和 d，以及一点 $L \in$ Pic^d(Y)。因此， L 是 $Y_{\mathbb{C}}$上的实直线丛。令 M_{par}(r, d)（分别为 M_{par}(r, L)）表示 Y上秩为 r、次数为 d 的抛物向量丛（分别为具有固定行列式 L的抛物向量丛）的模叠。它们都是不可约光滑模叠。令 M_{par}^{gs}(r, d) $\subset$ M_{par}(r, d) 和M_{par}^{gs}(r, L) $\subset$ M_{par}(r, L)分别为几何稳定抛物向量丛的开子模叠。令 $U_{par}^{'s}$(r, d) 和 $U_{par}^{'s}$(r, L)分别表示它们的模空间；这些是拟射影光滑簇。

令$U_{Y,par}$(r, d) 表示 Y 上次数为 d、秩为 r、具有固定类型的抛物结构，并且遍及所有 $x \in I \subset Y$ 的半稳定抛物层的模空间。于是，$U_{Y,par}$(r, d) 是一个射影半正规簇 [21, 定理 1.1]。令$U'_{Y,par}$(r, d) 表示其中对应于抛物向量丛的开子簇，它是一个正规拟射影簇。令$U'_{Y,par}$(r, L) 表示其中对应于具有固定行列式 $detE = L$ 的抛物向量丛 E_* 的正规闭子簇。我们将其在$U_{Y,par}$(r, d) 中的闭包记为$U_{Y,par}$(r, L)，并赋予约化结构；我们不知道它是否正规。我们将证明$U_{Y,par}$(r, L) 的奇异集的余维至少为 3（见定理 5.3）。

3. Codimension of the complement of the stable locus

定义 3.1. 设 $E_{(y)}$ 表示在节点 $y \in Y$ 处的无挠层 E（其在 Y 上的秩为 r）的茎。那么

$$E_{(y)} \cong \mathcal{O}_y^{\oplus a(E)} \oplus m_y^{\oplus b(E)},$$

对于某些整数 a(E) 和 b(E)，有 $0 \leq a(E)$ $b(E)$ $\leq r$，其中 m表示 y 的极大理想。我们称整数 b(E) 为 E 在 y 处的局部类型。

若 E在 y_j处关于 $j = 1, \cdots, m$的局部类型为 b_j(E)，则 m元组 $\overline{b}$(E) =(b_1(E) $\cdots$, b_m(E)) 称为 E的局部类型。

我们固定整数 r 和 d，使得 $r \geq 1$ 和 $d >> 0$。令 $Quot$ 表示 $\mathcal{O}_Y^n$ 的商的Quot概形，其希尔伯特多项式为 $P(m) = mr + d + r(1-g)$；设 $P(0) = n$。令

$$\mathcal{O}_{Quot\times Y}^n \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

是 $Quot \times Y$ 上的泛商层。

令 $R \subset Quot$ 为对应于无挠层 E 的子集，使得$H^1(E) = 0$ 且 $H^0(E) \cong \mathbb{R}^n$。令 $R^0 \subset R$ 表示对应于局部自由层 E 的开子集。子集 R^0 不可约且非奇异 [20, 定理 5.3']。我们有维数 $R^0 = r^2(g-1) + 1 +$ 射影线性群(n) 的维数。

在 Y 中固定一个有限点集 I。定义

$$Q_{par} := \times_{\substack{Quot \\ x\in I}} Flag_{\overline{n}(x)}\mathcal{E}_x\,,$$

这是相对旗概形 $\overline{n}(x)$ 在 $Quot$ 上的纤维积。Q_{par} 在商 $E \in Quot$ 上的纤维，是向量空间 E_x 中类型为 $\overline{n}(x)$ 的旗所构成的簇。令$R_{par}^0 \longrightarrow R^0$ 为 Q_{par} 在 R^0上的限制，也就是说，

$$R_{par}^0 = \times_{\substack{R^0 \\ x\in I}} Flag_{\overline{n}(x)}(\mathcal{E}|_{x\times R^0}).$$

由于 R^0 是非奇异的，且相对旗概形既不可约又非奇异，因此 R_{par}^0 不可约且非奇异。

令 $R_{L,\ par}^0$ 表示 R_{par}^0 中所有行列式为固定线丛 L 的商 E 所组成的子集。则 $R_{L,\ par}^0$ 不可约且非奇异。令 $R^{0,\ L^{ss},\ par}$（分别为 $R^{0,\ L^{s},\ par}$）表示 $R_{L,\ par}^0$ 中对应于半稳定（分别为稳定）向量丛的子集。类似地，我们可以定义 R_{par}、$R_{L,\ par}$，以及子集 $R_{L,\ par}^{ss}$（分别为 $R_{L,\ par}^{s}$），后者对应于半稳定（分别为稳定）无挠层。

我们首先证明以下结果，该结果本身具有独立意义，且后文也将用到。假设 I 非空。对于 Y 光滑的情形，这一结果已为人所知。我们的证明思路与 [19, 附录]（当 $\mathbf{r}=2$ 时）和 [21, 命题 5.1]（当 $r \geq 2$ 时）中的证明类似。不过，为推广到结点曲线，证明需要作若干修改。

定理 3.2. 设 $g \geq 2$。

$$\begin{aligned}
&(1)\ \ \operatorname{codim}\,(R_{par}^{0,ss} \setminus R_{par}^{0,s},\, R_{par}^{0,ss}) \ \geq\ (r-1)(g-1)+1\,.\\
&(2)\ \ \operatorname{codim}\,(R_{par}^{0} \setminus R_{par}^{0,ss},\, R_{par}^{0}) \ \geq\ (r-1)(g-1)+1\,.\\
&(3)\ \ \operatorname{codim}\,(R_{L,par}^{0,ss} \setminus R_{L,par}^{0,s},\, R_{L,par}^{0,ss}) \ \geq\ (r-1)(g-1)+1\,.\\
&(4)\ \ \operatorname{codim}\,(R_{L,par}^{0} \setminus R_{L,par}^{0,ss},\, R_{L,par}^{0}) \ \geq\ (r-1)(g-1)+1\,.
\end{aligned}$$

证明。（1）：考虑 $E \in R^{0,\ _{par}^{ss}} \setminus R^{0,\ _{par}^{s}}$。存在秩分别为$r_1$、$r_2$、次数分别为 d_1、d_2 的无挠层 E^1、E^2，使得 E^1、E^2、E 构成一个正合列

$$0 \longrightarrow E^1 \longrightarrow E \longrightarrow E^2 \longrightarrow 0\,, \tag{3.1}$$

对于诱导抛物结构（由 E_* 诱导），它们有

$$\text{par-}\mu(E_*^1) = \text{par-}\mu(E_*) = \text{par-}\mu(E_*^2)\,. \tag{3.2}$$

对于 $x \in I$，设 $m_1^x, \cdots, m_{l_x}^x$ 为 E^1 上诱导抛物结构的重数；若 $m_i^x = 0$，则省略 m_i^x。于是，(3.2) 中的等式可写为

$$rd_1 - r_1 d \;=\; \sum_{x\in I}\sum_{i=1}^{l_x}(r_1 k_i(x) - r m_i^x)\alpha_i(x) \tag{3.3}$$

我们首先构造可数多个准射影簇，用以参数化类型为 (3.1) 的扩张。令 n_1, n_2 为满足 $n_1 + n_2 = n$ 的整数。对于 $i = 1, 2$，令 Q^i 表示商 $\mathcal{O}_Y^{n_i} \longrightarrow E^i \longrightarrow 0$ 的 Quot概形，其中 rank(E^i) 为 $= r_i$，degree(E^i) 为 $= d_i$。令

$$\mathcal{O}_{Q^i\times Y}^{n_i} \longrightarrow \mathcal{E}^i \longrightarrow 0$$

为 $Q^i \times Y$ 上的通用商。对于 $i = 1, 2$，令 $\overline{b}_i = ((b_{i,\,j})_j)$ 为一个整数串，其中 j 遍历各节点。对于 $0 \le b_{i,\,j} \le r_i$，定义（有限多个）局部闭子集

$$Q^i_{\overline{b}_i} \;:=\; \{q_i \in Q^i \mid \overline{b}_i(\mathcal{E}^i_{q_i}) = \overline{b}_i\}\,,$$

其中 $\overline{b}_i(\mathcal{E}^i_{q_i})$ 表示层 $\mathcal{E}^i_{q_i}$ 的局部类型。

置 $Q^{1,\,2} = Q^1 \times Q^2$。在 $Q^{1,\,2} \times Y$ 上，我们有 $\mathcal{E}^i$，$i = 1, 2$ 的拉回，为简化记号仍以相同符号表示。令 $t = (h, \overline{b}_1, \overline{b}_2)$，其中 h 为非负整数。定义（可数多个）局部闭子集

$$Q_t^{1,2} := \{q = (q_1, q_2) \in Q^{1,2} \,\big|\, h^1(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^2_q, \mathcal{E}^1_q)) = h,\, q_i \in Q^i_{\overline{b}_i},\, i = 1, 2\}\,. \tag{3.4}$$

令 ϕ: $Q^{1,\,2}\times Y \longrightarrow Q^{1,\,2}$为自然投影。记 $\mathrm{Ext}^1_\phi(\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^1)$ 为此映射上的相对Ext层 $Q^{1,\,2}$（关于相对Ext层的一般介绍，见 [16] ）。由[5, 引理2.5(B)]，我们有

$$\dim \mathrm{Ext}^1_Y(\mathcal{E}^2_q, \mathcal{E}^1_q) \;=\; h^1(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^2_q, \mathcal{E}^1_q)) + 2\sum_j b_{1,j}b_{2,j}.$$

因此，对于 $q \in Q^{1,\,t^2}$，当 q变化时，$\dim \mathrm{Ext}^1_Y(\mathcal{E}^2_q, \mathcal{E}^1_q)$ 为常数（且 $\dim \mathrm{Ext}^0_Y(\mathcal{E}^2_q, \mathcal{E}^1_q)$ 也为常数）。因此，相对 Ext 层 $\mathrm{Ext}^1_\phi(\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^1)$ 在 $Q^{1,\,t^2}$ 上是局部自由的。

若 $h = 0$（见（3.4）），定义 $P_t := Q^1_{\overline{b}_1} \times Q^2_{\overline{b}_2}$以及 $\mathcal{E}^t = \mathcal{E}^1 \oplus \mathcal{E}^2$于 P_t 上。

若 $h > 0$，定义 $P_t := \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1_\phi(\mathcal{E}^2, \mathcal{E}^1)^*)$，这是 $Q^{1,\,t^2}$ 上的一个射影丛。在 $P_t \times Y$ 上，我们有通用扩张

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^1 \otimes \mathcal{O}_{P_t}(1) \longrightarrow \mathcal{E}^t \longrightarrow \mathcal{E}^2 \longrightarrow 0\,.$$

令 $P'_t \subset P_t$ 为与 $p_t \in P_t$ 对应的开子集，使得 $\mathcal{E}^t|_{p_t\times Y}$ 局部自由。拟射影簇 P'_t 参数化了 (3.1) 型的扩张。

对于每个 $x \in I$，令 $u(x) = (r_1, d_1, t, m_1^x, \cdots, m_{l_x}^x)$，其中 $t = (h, \overline{b}_1, \overline{b}_2)$。定义局部闭子概形

$$S_{u(x)} \subset \mathcal{F}lag_{\overline{n}(x)}\mathcal{E}^t_x\,,$$

它们是以 P'_t 为基底的纤维化，且其纤维 $S^0_{u(x)}$ 由旗组成

$$E_x = F_1(E_x) \supset \cdots \supset F_{l_x}(E_x) \supset F_{l_x+1}(E_x) = 0$$

使得

$$\dim\left(F_i(E_x)\cap E_{1,x}\right) \;=\; r_1-\sum_{j=1}^{i} m_j^x\,.$$

Let

$$S_u \;:=\; \underset{x\in I}{\times_{P_t'}} S_{u(x)}\,.$$

我们有

$$\dim\, S_u \;\leq\; \dim\, P_t+\sum_{x\in I}\dim\, S^0_{u(x)}\,.$$

每个 S_u 参数化了一个抛物层族 E，这些抛物层是由类型为 (3.1) 的扩张（可能为分裂扩张）得到的，并在 $x\in I$ 处具有类型为 $\overline{n}(x)$ 的抛物结构，使得诱导到 E^1 上的结构为类型 $\overline{m}(x)=(m_1^x,\cdots,m_{l_x}^x)$（回想一下，若 $m_i^x=0$，我们会省略 m_i^x）。

利用黎曼-罗赫定理和 [5, 引理2.5(B)], ，我们有

$$\dim \mathrm{Ext}^1_Y(\mathcal{E}^2_q,\,\mathcal{E}^1_q) \;=\; r_1r_2(g-1)+\sum_j b_{1,j}b_{2,j}+h^0(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^2_q,\,\mathcal{E}^1_q))\,.$$

如 [5, 命题 2.7], 的证明所示，有

$$\dim Q^i_{\overline{b}_i}\leq r_i^2(g-1)+1-\sum_j b_{i,j}^2+\;\dim\,\mathrm{PGL}(n_i).$$

由此可得

$$\begin{array}{rcl}\dim\, P_t & \leq & (g-1)\sum_{i=1}^2 r_i^2+2-\sum_j b_{1,j}^2-\sum_j b_{2,j}^2+\sum_{i=1}^2\,\dim\mathrm{PGL}(n_i)\\ & & +r_1r_2(g-1)+\sum_j b_{1,j}b_{2,j}+h^0(\mathrm{Hom}(\mathcal{E}^2_q,\mathcal{E}^1_q)).\end{array}$$

Let

$$S_u^{ss}\;\subset\; S_u \tag{3.5}$$

是对应于半稳定抛物丛的子集。令 $\mathcal{E}^u$ 表示 $\mathcal{E}^t$ 到 S_u^{ss}的拉回（见（3.5））。记 F^u 为 $\mathcal{E}^u$ 到 S_u^{ss}的直接像的标架丛；它是一个主 GL(n)-丛。存在一个态射

$$\psi_u\,:\,F^u\;\longrightarrow\; R^{0,ss}_{par}\setminus R^{0,s}_{par}\,.$$

$\psi_u(F^u)$（当 u 变化时）的并覆盖 $R^{0,\;ss}_{par}\setminus R^{0,\;s}_{par}$。令 c 为 ψ_u的纤维的不可约分支维数的下确界。由于 $E=\mathcal{E}^t_q$ 由截面全局生成，Aut(E)的任意元素都在 $H^0(E)$上非平凡地作用。若 $h=0$ （见（3.4）），则 dim Aut(E) $\geq 2+h^0$(Hom(E^2, E^1))；若 $h>0$，则 dim Aut(E) $\geq 1+h^0$(Hom(E^2, E^1))，因此

$$\begin{aligned} c\;&\geq\; h^0(\mathrm{Hom}(E^2,\,E^1))+n_1^2+n_2^2\;\text{ if }\;h=0\,,\\ c\;&\geq\; h^0(\mathrm{Hom}(E^2,\,E^1))+n_1^2+n_2^2-1\;\text{ if }\;h>0\,.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{array}{rcl}\dim\,\psi_u(F^u) & = & \dim\, S_u^{ss}+n^2-c\\ & \leq & n^2+(g-1)\sum_{i=1}^2 r_i^2+r_1r_2(g-1)+\sum_j b_{1,j}b_{2,j}-\sum_j b_{1,j}^2-\sum_j b_{2,j}^2\\ & & +\sum_{x\in I}\;\dim\, S^0_{u(x)}\,.\end{array}$$

因此，以下结论成立：

$$\begin{aligned}\text{codim } \psi_u(F^u) &\geq r^2(g-1)+1+ \text{ dim PGL}(n)+ \text{ dim } \mathbf{F} - \text{dim } \psi_u(F^u)\\ &= r_1r_2(g-1)+\textstyle\sum_j(b_{i,j}-b_{2,j})^2+\sum_j b_{1,j}b_{2,j}\\ &\quad +\textstyle\sum_{x\in I} \text{ codim } S^0_{u(x)}\\ &\geq r_1r_2(g-1)+\textstyle\sum_{x\in I} \text{ codim } S^0_{u(x)}\\ &\geq (r-1)(g-1)+\textstyle\sum_{x\in I} \text{ codim } S^0_{u(x)}\,.\end{aligned}$$

$S^0_{u(x)}$ 的余维由 [21, 引理 5.1]给出。因此，方程 (3.3) 与 [21,引理 5.2] 合起来可得，$\text{codim } \psi_u(F^u) \geq (r-1)(g-1)+1$。由于 $\psi_u(F^u)$（当 u变化时）覆盖 $R^{0,\ ss}_{par}\setminus R^{0,s}_{par}$，因此可得

$$\text{codim } (R^{0,ss}_{par}\setminus R^{0,s}_{par},\, R^{0,ss}_{par}) \;\geq\; (r-1)(g-1)+1\,.$$

(2)：第 (2) 部分可仿照第 (1) 部分的证明。我们考虑 $E\in R^0\setminus R^{0,ss}$。存在秩分别为 r_1、 r_2，次数分别为 d_1、 d_2 的无挠层 E^1、 E^2，使得

$$\frac{d_1}{r_1} > \frac{d_2}{r_2}, \tag{3.6}$$

并且 E^1、 E^2 包含在扩张 (3.1) 中。与第 (1) 部分一样，我们构造可参数化此类扩张的可数个准射影簇。我们构造射影丛 P_t、标架丛 F^u 以及映射

$$\psi_u\,:\,F^u\;\longrightarrow\; R^0\setminus R^{0,ss}\,,$$

其像（当 u 变化时）覆盖 $R^0\setminus R^{0,ss}$.

在此种情况下，我们有 $\deg(\text{Hom}(\mathcal{E}^2_q,\,\mathcal{E}^1_q))= r_2d_1-r_1d_2+\sum_j b_{1,j}b_{2,j}$，因此

$$\text{dim Ext}^1_Y(\mathcal{E}^2_q,\,\mathcal{E}^1_q)\;=\;r_1r_2(g-1)+r_1d_2-r_2d_1+\sum_j b_{1,j}b_{2,j}+h^0(\text{Hom}(\mathcal{E}^2_q,\mathcal{E}^1_q))\,.$$

因此，

$$\begin{aligned}\text{dim } \psi_u(\mathcal{F}_u) &\leq n^2+(g-1)\textstyle\sum_{i=1}^2 r_i^2+r_1r_2(g-1)+r_1d_2-r_2d_1\\ &\quad +\textstyle\sum_j b_{1,j}b_{2,j}-\sum_j b^2_{1,j}-\sum_j b^2_{2,j}+\sum_{x\in I}\text{ dim } S^0_{u(x)}\,.\end{aligned}$$

Then

$$\text{codim } \psi_u(F^u)\;\geq\;(r-1)(g-1)-r_1d_2+r_2d_1+\sum_{x\in I}\text{ codim } S^0_{u(x)}\;\geq\;(r-1)(g-1)+1$$

与第 (1) 部分类似，使用 (3.6)。至此，第 (2) 部分的证明完成。

(3)：第 (3) 部分由第 (1) 部分借助行列式映射得出。(4)：同理，第 (4) 部分由第 (2) 部分借助行列式映射得出。 □

由于 $U'_{Y,par}(r,\,d)$（分别地，$U'_{Y,par}(r,\,L)$）是 $R^{0,\ ss}_{par}$（分别地，$R^{0,L^{\ ss}}_{par}$）的几何不变式论商，以下推论是定理 3.2 的直接推论。

推论 3.3. 假设 $g \geq 2$。则有以下结论 :

(1) $\operatorname{codim}\,(U'_{Y,par}(r,\,d) \setminus U'^{s}_{Y,par}(r,\,d),\, U'_{Y,par}(r,\,d)) \;\geq\; (r-1)(g-1)+1\,.$

(2) $\operatorname{codim}\,(U'_{Y,par}(r,\,L) \setminus U'^{s}_{Y,par}(r,\,L),\, U'_{Y,par}(r,\,L)) \;\geq\; (r-1)(g-1)+1\,.$

推论 3.4. 假设 $g \geq 2$。则以下结论成立 :

(1) $\operatorname{codim}\,(M_{par}(r,\,d) \setminus M^{gs}_{par}(r,\,d),\, M_{par}(r,\,d)) \;\geq\; (r-1)(g-1)+1\,.$

(2) $\operatorname{codim}\,(M_{par}(r,\,L) \setminus M^{gs}_{L,par},\, M_{par})(r,\,L) \;\geq\; (r-1)(g-1)+1\,.$

证明。由定理 3.2 可知这一点，因为 $R^0_{par}(r,\,d)$, $R^0_{L,\ par}(r,\,d)$, $R^{0,\ s}_{par}(r,\,d)$ 和 $R^{0,\ s}_{L,\ par}(r,\,d)$ 分别是 $M_{par}(r,\,d)$, $M_{par}(r,\,L)$, $M^{gs}_{par}(r,\,d)$ 和 $M^{gs}_{par}(r,\,L)$ 的光滑图册。□

4. Picard group of the parabolic moduli space

本节的目标是计算稳定抛物模空间 $U'^{s}_{Y,\ par}(r,\,L)$ 的皮卡群。我们首先计算抛物模叠的皮卡群，并由此推导出模空间的皮卡群。由于几何稳定抛物向量丛 E_* 只有标量自同构，栈 $M^{gs}_{par}(r,\,L)$ 是一个带$\mathbb{G}_m$ 的丛，位于$U'^{s}_{Y,\ par}(r,\,L)$ 之上。

考虑 $Y \times M_{par}(r,\,L)$ 上的万有丛。令 $L(det)$ 表示 $M_{par}(r,\,L)$ 上相应的上同调行列式线丛。令 $L_{\mathbb{C}} = L \otimes \mathbb{C}$ 为 $Y_{\mathbb{C}}$ 上的线丛，它由 L 从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$的基变换得到。令 $L_{\mathbb{C}}$ 为 $M_{par}(r,\,L_{\mathbb{C}})$ 上的线丛，其在对应于抛物向量丛 E_* 的点上的纤维为 $\mathrm{Hom}(L_{\mathbb{C}},\, \det E)$。将 $L_{\mathbb{C}}$ 在非奇异实点 $p_0 \in Y_{\mathbb{C}}$处的纤维平凡化后，我们~可以将 $L_{\mathbb{C}}$ 识别为一个线丛，其在 $E_{*,\ \mathbb{C}}$ 处的纤维为 $\det(E_{*,\ \mathbb{C}})_{p_0}$。

~注意，线丛 $L_{\mathbb{C}}$ 是实的。

~命题 4.1。 $M_{par}(r,\,L)$ 的皮卡群由 $L(det)$、 $L_{\mathbb{C}}$ 以及 Pic(F) 的生成元 ξ^x_j、$x \in I$、 $j = 2$、 $\cdots$、 l_x 生成。
这些线丛的限制生成 $\mathrm{Pic}(M^{gs}_{par}(r,\,L))$。

证明. 令 $\mathcal{SL}_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\,d)$ 表示由次数为 d 、秩为r 的抛物向量丛 E 以及同构 $\delta : \det E \xrightarrow{\cong} L_{\mathbb{C}}$ 构成的模空间栈。它是一个 $\mathbb{G}_m$-主丛~，在 $M_{par}(r,\,L_{\mathbb{C}})$ 上由线丛 $L_{\mathbb{C}}$ 给出。令 $f_p : \mathcal{SL}_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\,d) \longrightarrow M_{par}(r,\,L_{\mathbb{C}})$ 为忘却同构 δ 的典范（忘却）映射。同态

$$f_p^* \;:\; \mathrm{Pic}(M_{par}(r,\,L_{\mathbb{C}})) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{SL}_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\,d))$$

~由此典范映射诱导，它是满射，且其核由 $L_{\mathbb{C}}$ 生成。

根据 [7, 定理 6.1], ，栈 $\mathcal{SL}_{Y_{\mathbb{C}}}(r,\,d)$ 的皮卡群同构于 $\mathbb{Z} \times$Pic(F)，且由线丛 $L(det)_{Y_{\mathbb{C}}}$ 在 $M(r,\,L_{\mathbb{C}})$ 上的拉回以及 Pic(F) 的生成元生成。因此， $M_{par}(r,\,L_{\mathbb{C}})$ 的皮卡群由线~丛 $L(det)_{Y_{\mathbb{C}}}, L_{\mathbb{C}}$ 和 Pic(F) 的生成元生成。注意， Pic(F) 的生成元

都是实线丛。由于 Pic($M_{par}(r,\, L)$) 是 $\widetilde{\ }$Pic($M_{par}(r,\, L_{\mathbb{C}})$) 中实线丛构成的子群，因此 Pic($M_{par}(r,\, L)$) 由 $L(det)$ L 和 $(\xi_j^x)_{x,\ j}$ 生成。

由于 $M_{par}(r,\, L)$ 是一个光滑栈（它有一个光滑图册 R^0_{par} [7, 第 3.1] 小节），限制映射

$$Res : \mathrm{Pic}(M_{par}(r,\, L)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(M^{gs}_{par}(r,\, L))$$

是满射。因此，这些线丛的限制生成 Pic($M^{gs}_{par}(r,\, L)$) . □

定理 4.2. 假设 $g \geq 3$ 或 $g = 2, r \geq 3$。令 $\chi = d + r(1-g)$。那么 $U'^s_{Y,\ par}(r,\, L)$ 的皮卡群可与 Pic($M_{par}(r,\, L)$) 的子群等同，该子群由以下形式的元素组成

$$L(det)_Y^{\otimes a} \bigotimes \widetilde{L}^{\otimes b} \bigotimes \otimes_{x,j} (\xi_j^x)^{\otimes d_j^x}\,, \tag{4.1}$$

其中 $a, b, d_j^x \in \mathbb{Z}$ 满足唯一的关系

$$a\chi + br + \sum_{x,j} d_j^x c_j^x \;=\; 0\,. \tag{4.2}$$

证明。在定理的假设下，光滑栈 $M_{par}(r,\, L)$ 中由几何稳定丛组成的开子集 $M^{gs}_{par}(r,\, L)$ 的余维至少为二（见推论 3.4）。因此，满射限制映射 Res 也是单射，并且 Pic($M^{gs}_{par}(r,\, L)$) $=$Pic($M_{par}(r,\, L)$)。所以，Pic($M^{gs}_{par}(r,\, L)$) 由$\widetilde{\ }$线丛 $L(det)_Y, L$ 以及 Pic(F) 的生成元自由生成；这由 [17, 第 499–500 页的$\widetilde{\ }$定理]可得。线丛 $L(det)_Y, L$ 和 $\xi_j^x,\ x \in I,\ j = 2, \cdots, l_x$ 都是实的。

在 $M^{gs}_{par}(r,\, L)$ 上的线丛下降到 $U'^s_{Y,\ par}(r,\, L)$ 当且仅当它们的权为 0。我们回顾一下：不可约栈 $M^{gs}_{par}(r,\, L)$ 上的线丛 N 的权是$\ell \in \mathbb{Z}$，若对任意 $E_* \in M^{gs}_{par}(r,\, L)$ 以及任意 $\lambda \in \mathbb{G}_m$，由乘以 λ 给出的 E_* 的自同构在纤维 N_{E_*} 上的作用为乘以 λ^ℓ。现在，$L(det)_Y\widetilde{\ }$ 的权为 χ，而 L 的权为 r，线丛 ξ_j^x 对于 $x \in I$,$j = 2, \cdots, l_x$ 的权为 c_j^x。因此定理得证。□

注 4.3. 请注意，皮卡群($U'^s_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\, L_{\mathbb{C}})$)由定理 4.2 所述形式的元素组成。

5. Codimension of the locus of non locally free sheaves

本节中，我们利用抛物 GPB 估计 $U_{Y,\ par}(r,\, d)$ 中由非局部自由的无挠层构成的闭子集的余维。

5.1. 抛物 GPB。对于 $j = 1, \cdots, m$，固定除子 $D_j = x_j + z_j, x_j \neq z_j$，其中 $(x_j,\, z_j)$ 是正规化 X of Y上的互异闭点对。令 I 为 X 上一组互异闭点，且这些点与 $x_j,\, z_j,\, j = 1, \cdots, m$ 均不相同。

定义 5.1. 秩为 r 、次数为 d 且定义在 X 上的广义抛物丛（简称 GPB） $\overline{E}=(E, F(E))$, 是定义在 X 上、秩为 r 、次数为 d 的向量丛 E ，并带有关于除子 D_j 的 GPB 结构, 即一个 m-元组 $F(E)=(F_1(E)\cdots, F_m(E))$, 其中 $F_j(E)\subset E_{x_j}\oplus E_{z_j}$ 是一个维数为 r 的向量子空间, 适用于 $j=1,\cdots,m$。

定义 5.2. 在 X 上, 秩为 r 、次数为 d 的抛物 GPB $\overline{E}_*=(E_*, F(E))$, 是一个定义在 X 上的秩为 r 、次数为 d 的抛物向量丛 E_* ，其在 I的点处带有抛物结构，并且在除子 D_j 上带有 GPB 结构。

我们可以将 GPB 的行列式定义为秩为 1 的 GPB。线丛 L （定义在 Y 上）与 X 上的秩为 1 的 GPB $\overline{L}$ 之间存在一一对应关系（更多细节见 [10, 第 3] 节）。对于实数 $0\leq\alpha\leq 1$, 可以定义 GPB 和抛物 GPB 的 α-(半)稳定性。我们用 $P^{par}(r, \overline{L})$表示 X 上秩为 r、次数为 d ，且 α 充分接近 1 的 α-半稳定抛物 GPB（E_*, $F(E)$)的模空间。它是一个正规射影簇，其维数为 $(r^2-1)(g-1)+\dim \mathrm{F}$。存在一个满射态射

$$f_{par}: P^{par}(r, \overline{L})\longrightarrow U_{Y,par}(r, L), \tag{5.1}$$

这是一个在 $U'_{Y,par}(r, L)$ 上的同构。

对于 X 上秩为 r 、次数为 d 的抛物 GPB $(E_*, F(E))$, (5.1) 中的映射 f_{par} 关联到一个由以下扩张给出的、在 Y 上秩为 r 、次数为 d 的抛物无挠层 F_*

$$0\longrightarrow F_*\longrightarrow p_*E_*\longrightarrow \oplus_j\, p_*\frac{(E_{x_j}\oplus E_{z_j})}{F_j(E)}\longrightarrow 0.$$

设 p_{x_j}: $F_j(E)\longrightarrow E_{x_j}$ 和 p_{z_j}: $F_j(E)\longrightarrow E_{z_j}$ 为两个投影。那么， F 在节点 y_j 处的局部类型 $b_j(F)$ 为

$$b_j(F)=\dim\, ker\, p_{x_j}+\dim\, ker\, p_{z_j}.$$

对于 $\overline{s}=(s_1,\cdots,s_m)$ 和 $\overline{t}=(t_1,\cdots,t_m)$, 其中 s_j 和 t_j 是满足 $0\leq s_j\leq r$ 和 $0\leq t_j\leq r$ 的整数, 定义 $P^{par}_{\overline{s}\,\overline{t}}(r, \overline{L})$ 如下

$$P^{par}_{\overline{s},\overline{t}}(r, \overline{L}):=\{(E, F(E))\in P^{par}(r, \overline{L})\;\big|\;\dim\, ker\, p_{x_j}=s_j,\ \dim\, ker\, p_{z_j}=t_j\}.$$

对于 $\overline{b}=(b_1,\cdots,b_m)$, 其中 b_j 是满足 $0\leq b_j\leq r$ 的整数, 令

$$P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L})=\bigcup_{\overline{s}+\overline{t}=\overline{b}} P^{par}_{\overline{s},\overline{t}}(r, \overline{L}).$$

模空间 $P(r, \overline{L})$ 是 $P_{\overline{b}}(r, \overline{L})$ 的并集。像 $f_{par}(P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L}))$ 由局部类型为 b_j at y_j for all j 的半稳定无挠层组成, 而 $U_{Y,par}(r, L)$ 是子集 $f_{par}(P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L})$ 的并集。特别地, 对于 $\overline{0}=(0,\cdots,0)$, 这个 $P^{par}_{\overline{0}}(r, \overline{L})$ 同构映射到 $U'_{Y,par}(r, L)$。

由于行列式 L 固定且局部自由, 对于 $(E, F(E))\in P^{par}(r, \overline{L})$, 要么$p_{x_j}$ 和p_{z_j} 都是同构, 要么二者都不是同构（ [8, 命题 3.3]证明中的情形 (ii)）。因此, 不会出现 $s_j=0$, $t_j\neq 0$ 或 $s_j\neq 0$,$t_j=0$, 所以 $b_j\geq 2$ 若非零。

定理 5.3. 设 Y 是一个算术亏格为 $g \geq 2$ 且至少有一个节点的不可约节点曲线。那么

$$\operatorname{codim}\left(U_{Y,par}(r, L) \setminus U'_{Y,par}(r, L), U_{Y,par}(r, L)\right) \geq 3$$

对于 $r \geq 2$。

证明。证明的主要部分与 [10, 定理 1.3]的证明思路类似。为避免重复，我们只给出所需的修改。首先注意到，对于 $g(X) \geq 1$，抛物模空间$U_{X,\ par}(r, p^*L)$的维数为$(r^2-1)(g(X)-1) + \dim \mathbf{F}$。因此，我们只需考虑两种情形，即 $g(X) \geq 1$ 和 $g(X) = 0$。

当 Y 不是有理的（即 $g(X) \geq 1$）时，证明与 [10,定理 3.11]的证明完全相同，只需将

- 将 $M_X(r, \pi^*L_0)$替换为$U'_{X,\ par}(r, p^*L)$,
- 将 $\overline{M}(r, L_0)$替换为$U_{Y,\ par}(r, L)$,
- $M(r, L_0)$ 替换为 $U'_{Y,\ par}(r, L)$，并且
- 广义抛物丛模空间中子集 $P_{s,\ t}(r, \overline{L}_0)$ 和 $P_{\overline{b}}(r, \overline{L}_0)$，分别替换为抛物 GPB 模空间中的子集 $P^{par}_{s\ t}$，$(r, \overline{L})$ 和 $P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L})$。

由于集合 I 由 Y 的光滑点组成，抛物 GPB $(E_*, F(E))$ 上的抛物结构与 GPB 所给出的 Y 上 F_* 的抛物结构彼此确定。因此，纤维在 F_* 上的维数 d_f 与非抛物情形的公式相同。接着，类似于非抛物情形的计算可得

$$\operatorname{codim} f_{par}(P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L})) \geq \frac{3rb_j}{4}.$$

由于 $b_j \geq 2$，因此可得

$$\operatorname{codim}\left(U_{Y,par}(r, L) \setminus U'_{Y,par}(r, L), U_{Y,par}(r, L)\right) \geq 3 \text{ for } r \geq 2,\ g(X) \geq 1.$$

现在讨论 Y 为有理曲线的情形（即，$g(X) = 0$）。若 $(E_*, F(E))$ 是 $\mathbb{P}^1$ 上的半稳定抛物广义抛物丛，则抛物半稳定性意味着底层丛 E 只有有限种选择。因此，$P^{par}(r, \overline{L})$ 至多有有限个不可约分支，每个分支的维数为

$$m(r^2-1) + \dim \mathbf{F} - \mathrm{P}(\mathrm{Aut}(E)) \leq \dim \mathbf{F} + (m-1)(r^2-1)$$

（根据 [10,命题 3.10]的证明）。因此有

$$\dim P^{par}_{\overline{s},\overline{t}}(r, \overline{L}) \leq \dim \mathbf{F} + (r^2-1)(m-1) + r^2 - s^2 - 1,$$

因此

$$\dim f_{par}(P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L})) \leq \dim \mathbf{F} + (r^2-1)(m-1) - \frac{3rb_j}{4}.$$

由于 $U_{Y,par}(r, L)$ = 维数 $\mathbf{F} + (r^2-1)(g-1)$，且 $g = m$，这意味着

$$\operatorname{codim} f_{par}(P^{par}_{\overline{b}}(r, \overline{L})) \geq \frac{3rb_j}{4} \geq 3 \text{ for } r \geq 2.$$

因此，余维数 $(U_{Y,\ par}(r,\ L)\setminus U'_{Y,\ par}(r,\ L)\ U_{Y,\ par}(r,\ L)) \ \geq\ 3$ 对于 $r\ \geq\ 2$ 和 $g(X)\ =\ 0$。□

推论 5.4. 设 $g\ \geq\ 2$ 和 $r\ \geq\ 2$。则以下两条成立：

(1) $H^0(U'_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\ L_{\mathbb{C}})\ \mathcal{O})\ =\ \mathbb{C}$.
(2) $H^0(U'^{s}_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\ L_{\mathbb{C}})\ \mathcal{O})\ =\ \mathbb{C}$.

证明. (1)：令 $h : N\ \longrightarrow\ U_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\ L_{\mathbb{C}})$ 为正规化。由于 $U'_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\ L_{\mathbb{C}})$ 是正规的，因此 h 在 $U'_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\ L_{\mathbb{C}})$ 上是一个同构。由于正规化映射是有限的，我们有

$$\text{余维}\ (N\setminus h^{-1}(U'_{Y\ \mathbb{C},par}(r,\ L_{\mathbb{C}})), N)\ =\ \operatorname{codim}\left(U_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\ L_{\mathbb{C}})\setminus U'_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\ L_{\mathbb{C}}), U_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\ L_{\mathbb{C}})\right)\ \geq\ 3$$

由定理 5.3。簇 N 是正规的，因此 $h^{-1}(U'_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\ L_{\mathbb{C}}))$ 上的函数可唯一延拓为 N 上的函数，故为常数。由此可知，$U'_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\ L_{\mathbb{C}})$ 上的函数为常数。

(2)：这可利用推论 3.3 和定理 5.3，按照第 (1) 部分类似地证明。 □

6. Brauer group of the parabolic moduli space

由于 $U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L)$ 是域上的光滑拟射影代数簇，因此 $U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L)$ 的布劳尔群 $\mathrm{Br}(U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L))$ 就是上同调布劳尔群 $H^2_{\text{et}}(U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L)\ \mathbb{G}_m)$；后者是一个挠群。

6.1. 布劳尔类 β。

定义6.1。令 $\beta\ \in\ \mathrm{Br}(U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L))$ 为由以下丛给出的布劳尔类

$$M^{gs}_{par}(r,\ L)\ \longrightarrow\ U'^{s}_{Y,par}(r,\ L)$$

其带为 $\mathbb{G}_m$。

令 $\mathbb{Z}\beta\ \subseteq\ \mathrm{Br}(U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L))$ 表示由 β 生成的子群。

选取一个非奇异闭点 $p_0\ \in\ Y$，布劳尔类 β 可描述为在 $U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L)$ 上的射影丛 $\mathbb{P}_{p_0}$ 的类；其在任意 $E_*\ \in\ U'^{s}_{Y,\ par}(r,\ L)$ 上的纤维为 $\mathbb{P}(E_{p_0})$。换言之，β 由纤维为 $\mathrm{End}(E_{p_0})$ 的阿祖马亚代数给出。

根据 [7, 定理 1.2]，我们在 $Y_{\mathbb{C}}$ 上有如下结果。

定理 6.2 。假设 $g\ \geq\ 2$，并且若 $g\ =\ 2\ =\ r$，则假设 d 为奇数。于是

$$Br(U'^{s}_{Y_{\mathbb{C}},par}(r,\ L_{\mathbb{C}}))\ =\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}\,,$$

其中

$$m\ =\ \text{g.c.d.}(r,\ d,\ \{k_1(x),\ k_2(x),\ \cdots,\ k_{l_x}(x)\}_{x\in I}) \tag{6.1}$$

（见（2.3））。此外，布劳尔群布劳尔群$(U'^{s}_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r,\ L_{\mathbb{C}}))$由定义6.1中的类 β 生成。

P命题6.3。设 L 是皮卡变种 $\mathrm{Pic}^d(Y)$的一个实点。那么

$$\beta \in \mathrm{Br}(U'^s_{Y,par}(r, L))$$

的指数为 m。

*Proof。*这由命题 4.1、 [15, 引理 3.10(v) 和引理 3.9]推出 . □

6.2. Leray谱序列。令

$$\psi : U'^s_{Y,par}(r, L)_{\mathbb{C}} = U'^s_{Y_{\mathbb{C}},par}(r, L_{\mathbb{C}}) \longrightarrow U'^s_{Y,par}(r, L)$$

为投影。令

$$\psi_{p,2} : \mathrm{Br}(U'^s_{Y,par}(r, L)) \longrightarrow \mathrm{Br}(U'^s_{Y_{\mathbb{C}},par}(r, L_{\mathbb{C}}))$$

为由 ψ诱导的同态。由于$\psi_{p,\ 2}(\beta) = \beta_{\mathbb{C}}$，映射$\psi_{p,\ 2}$是满射。

Let

$$f : U'^s_{Y,par}(r, L) \longrightarrow \mathbb{R}$$

是结构 态射。与之关联的Leray谱序列定义如下

$$E_2^{p,q} = H^p_{\mathrm{et}}(\mathbb{R}, R^q f_* \mathbb{G}_m) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathrm{et}}(U'^s_{Y,par}(r, L), \mathbb{G}_m)\,.$$

它在低次项中给出一个短正合列

$$H^1 \longrightarrow E_2^{0,1} \longrightarrow E_2^{2,0} \longrightarrow \mathrm{kernel}\{H^2 \longrightarrow E_2^{0,2}\} \longrightarrow E_2^{1,1}\,. \tag{6.2}$$

根据推论 5.4， $H^0(U'^s_{Y_{\mathbb{C}},par}(r, L)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = \mathbb{C}$。由此可得 $H^0(U'^s_{Y_{\mathbb{C}},par}(r, L)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}^*) = \mathbb{C}^*$。自然映射

$$\mathbb{G}_m \longrightarrow f_* f^* \mathbb{G}_m = f_* \mathbb{G}_m$$

是一个同构，因此 $f_* \mathbb{G}_m = \mathbb{G}_m$。

我们有 $R^1 f_* \mathbb{G}_m = \mathrm{Pic}(U'^s_{Y_{\mathbb{C}},par}(r, L)_{\mathbb{C}})$ 和 $R^2 f_* \mathbb{G}_m = \mathrm{Br}(U'^s_{Y,par}(r, L)_{\mathbb{C}})$。此外，

$$E_2^{1,1} = H^1_{et}(\mathbb{R}, \mathbb{Z}) = 0$$

（详情请参见定理 3.3] 的 [12, 证明）。因此，谱序列（6.2）给出一个正合列

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pic}(U'^s_{Y,par}(r, L)) \xrightarrow{\psi_{p,1}} \mathrm{Pic}(U'^s_{Y_{\mathbb{C}},par}(r, L_{\mathbb{C}})) \longrightarrow \mathrm{Br}(\mathbb{R}) \\ &\xrightarrow{f^*} \mathrm{Br}(U'^s_{Y,par}(r, L)) \xrightarrow{\psi_{p,2}} \mathrm{Br}(U'^s_{Y_{par}}(r, L)_{\mathbb{C}}) \longrightarrow 0\,. \end{aligned} \tag{6.3}$$

根据定理 6.2， $\mathrm{Br}(U'^s_{Y_{\mathbb{C}},\ par}(r, L_{\mathbb{C}})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ，且它由 $\beta_{\mathbb{C}}$ 生成。此外，我们有 $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$；其非平凡元素 [$\mathbb{H}$] 是四元数代数 $\mathbb{H}$ 的类。因此，（6.3）中的正合列变为

$$0 \longrightarrow \mathrm{Cokernel}\ \psi_{p,1} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{f^*} \mathrm{Br}(U'^s_{Y,par}(r, L)) \xrightarrow{\psi_{p,2}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0\,. \tag{6.4}$$

注意，(6.1) 中定义的 m 也可以写作

$$m = \mathrm{g.c.d.}(r, \chi, \{c_2^x, \cdots, c_{l_x}^x\}_{x \in I})\,.$$

定理 6.4. 假设 $g \geq 3$ 或 $g = 2$、$r \geq 3$ 成立。那么

$$\mathrm{Br}(U^{'s}_{Y,par}(r,\, L)) \;=\; \mathbb{Z}\beta \oplus f^{*}(\mathrm{Br}(\mathbb{R})) \;\cong\; \frac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}\,.$$

证明。证明思路与 [7, 定理 1.3], [12, 定理 3.3] 类似。我们先作一个观察。由 (6.4)，群 Cokernel $\psi_{p,\,1} \subset \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。因此，若它非零，则 Cokernel $\psi_{p,\,1} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$。

由定理 4.2 和注 4.3 可知，Cokernel $\psi_{p,\,1} = 0$。由于 β 和 $\beta_{\mathbb{C}}$ 的指数相同，即 m（命题 6.3(1)），序列 (6.4) 分裂，因此

$$\mathrm{Br}(U^{'s}_{Y,par}(r,\, L)) \;=\; \mathbb{Z}\beta \oplus f^{*}(\mathrm{Br}(\mathbb{R})) \;=\; \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

证明至此完成。 □

Acknowledgements

我们非常感谢审稿人指出早期版本中的一个关键错误，并提出了许多改进表述的建议。第一作者担任印度统计研究所班加罗尔分部的印度国家科学院高级科学家期间完成了这项工作。本工作的部分内容是在第一作者访问孟买塔塔基础研究所、参加2022年3月至4月向量丛讨论会期间完成的；她感谢塔塔基础研究所的款待。第二作者获得了 J. C. Bose 研究员奖的部分资助。

References

[1] Arusha, C., Bhosle, U. N., Singh, S. K. (2021). 向量丛在结点曲线上的模空间的射影庞加莱丛与皮卡丛，《Bull. Sci. Math.》166，102930。[2] Bhosle, U. N. (1989). 曲线上的抛物向量丛，《Arkiv Math.》27，15–22。[3] Bhosle, U. N. (1999). 向量丛模空间的皮卡群，《数学年刊》314，245–263。[4] Bhosle, U. N. (2010). 曲线上无挠层模空间的皮卡群，载于《向量丛与复几何》，《当代数学》，美国数学学会，普罗维登斯，522，31–42。[5] Bhosle, U. N. (2006). 结点曲线上无挠层的极大子层，《J. London Math. Soc.》74，59–74。[6] Bhosle, U. N. (2020). 实节点曲线上的向量丛模空间，《Beitr Algebra Geom.》61，615–626。[7] Bhosle, U. N. (2021). 结点曲线上抛物向量丛模空间的布劳尔群与皮卡群。预印本。[8] Bhosle, U. N. (2005). 不可约节点曲线上具有固定行列式的向量丛，《Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)》115，445–451。[9] Bhosle, U. N., Biswas, I. (2014). 结点曲线上无挠层模空间的布劳尔群与双有理类型，《Comm. Algebra》42，1769–1784。[10] Bhosle, U. N., Singh, S. K. (2020). 紧化雅可比上的傅里叶–穆凯变换，《国际数学研究通知》，第2020卷，第13期，3991–4015。[11] Biswas, I., Dey, A. (2011). 曲线上抛物向量丛模空间的布劳尔群，《Jour. K-理论》8，437–449。[12] Biswas, I., Hoffmann, N., Hogadi, A., Schmitt, A. (2011). 实曲线上向量丛模空间的布劳尔群，《Proc. Amer. Math. Soc.》139，4173–4179。

[13] Borel, A., Remmert, R. (1962). 关于紧致齐性凯勒流形，《数学年刊》145，429–439。[14] Gabber, O. (1981). 阿祖马亚代数的一些定理，载于：《布劳尔群》（研讨会，Les Plans-sur-Bex, 1980），第129–209页，《数学讲义》844，施普林格，柏林—纽约。[15] Hoffmann, N. (2007). 曲线上带附加结构的向量丛的有理性与庞加莱族，《国际数学研究通知》，第3期，文章编号 rnm010。[16] Lange, H. (1983). 扩张的万有族，《代数杂志》83，101–112。[17] Laszlo, L., Sorger, C. (1979). 曲线上抛物向量丛模空间上的线丛及其截面，《Ann. Sci. École Norm. Sup.》30（1997），499–525。[18] Milne, J. S. (1980). ´étale上同调，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿。[19] Narasimhan, M. S., Ramadas, T. R. (1993). 广义西塔函数的因解 I，《数学发明》114，565–623。[20] Newstead, P. E. (1978).《模问题与轨道空间导论》，塔塔基础研究所《数学与物理讲座》51。塔塔基础研究所，孟买；纳罗萨出版社，新德里。[21] Sun, X. (2000). 模空间的退化与广义西塔函数，《代数几何杂志》9，459–527。

Statistics and Mathematics Unit, Indian Statistical Institute, Bangalore 560059, India
电子邮件地址：usnabh07@gmail.com

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India
电子邮件地址：indranil@math.tifr.res.in