arXiv:2303.05417v1 [math.AG] 9 Mar 2023

对数比较定理

F. J. Castro-Jiménez*, D. Mond†, L. Narváez-Macarro‡

2023年3月10日

我们谨以此章纪念同事 Jim Damon 和 José Luis Vicente Córdoba。

摘要

本文研究复流形上沿除子的对数德拉姆复形与亚纯德拉姆复形之间的比较。我们重点考察自由除子的情形，首先从局部拟齐次除子的情形入手，并阐述如何运用 D-模理论进行这种比较。

引言

我们概述一系列沿袭格罗滕迪克比较定理思路、被称为比较定理的结果。格罗滕迪克比较定理指出，对于复流形 X 中的任意超曲面 D，关于 $D \subset X$ 的亚纯德拉姆复形（即 $h^q(\Omega^\bullet_X(\star D))$，当 $0 \leqslant q \leqslant$ 维数为 X 时）的上同调与 $\mathbb{R}^q j_* \mathbb{C}_U$ 相同，其中 $j\colon U := X \smallsetminus D \to X$ 是包含映射，而 $\mathbb{C}_U$ 是 U 上的常值层 $\mathbb{C}$。实际上，这个复形的超上同调就是（拓扑）上同调 $H^\bullet(U;\ \mathbb{C})$。如果 D 是正规交叉除子（NCD），那么这一比较结果已由 Atiyah 和 Hodge 证明；格罗滕迪克的证明则借助 Hironaka 奇点消解，将一般情形归约为正规交叉除子的情形。当 D 是 $\mathbb{C}^n$ 中的超平面配置时，布里斯科恩复形 $B^\bullet$ 计算补集 $U = \mathbb{C}^n \smallsetminus D$ 的奇异上同调，$H^\bullet(U;\ \mathbb{C})$；这也是一个比较结果。由斋藤恭司引入的一类除子，即所谓的**自由除子**，可以证明若干比较结果。我们综述这些结果，并说明$\mathscr{D}$–模理论如何提供处理这些问题的方法。

本文内容如下。在第 1.1 节中，我们首先回顾 Grothendieck 比较定理（另见第 2.6 节），即存在一个典范同构

$$h^q(\Omega^\bullet_X(\star D)) \to \mathbb{R}^q j_* \mathbb{C}_U$$

*代数系 & 数学研究所（IMUS），数学学院，塞维利亚大学，西班牙，电子邮箱：castro@us.es

†数学研究所，华威大学，考文垂 CV4 7AL，英国，电子邮箱：d.m.q.mond@warwick.ac.uk

‡代数系 & 数学研究所（IMUS），数学学院，塞维利亚大学，西班牙，电子邮箱：narvaez@us.es

对于 $0 \leqslant q \leqslant$ 维 X。如果 X 是 Stein 的，那么与前述映射类似的整体态射

$$h^q(\Gamma(X, \Omega_X^\bullet(\star D))) \to H^q(U; \mathbb{C})$$

都是同构。接下来我们回顾布里斯科恩定理：该定理证明，若 D 是 $X = \mathbb{C}^n$中的有限个超平面的并，其方程为 $h_j = 0$，那么补集 $H^q(X \setminus D; \mathbb{C})$ 的上同调可以通过所谓的布里斯科恩复形 $B^\bullet$的上同调来计算；该复形是由形式 $\frac{dh_j}{h_j}$生成的外代数 $\Gamma(X, \Omega_X^\bullet(\star D))$ 的 $\mathbb{C}$-子代数。

斋藤恭司（见第 1.3 节）引入了关于复流形 X中除子 D 的对数亚纯形式这一概念：亚纯形式 ω 沿除子D 有对数极点，当且仅当 $h\omega$ 和 $hd\omega$ 均为全纯，其中 h 是 D的局部方程。特别要注意，所有 Brieskorn 形式沿超平面配置 $D \subset \mathbb{C}^n$都有对数极点。对数亚纯形式构成亚纯德拉姆复形 $\Omega_X^\bullet(\star D)$的一个 $\mathcal{O}_X$-子复形。一个自然的问题是：对于哪些除子 $D \subset X$，包含映射

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D)$$

是一个拟同构（即两个复形具有相同的上同调）。类比格罗滕迪克比较定理，若态射 $\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D)$ 是一个拟同构，我们就说除子 D 满足对数比较定理（LCT），或者说 LCT 对D成立。定理（1.5）指出，任何局部拟齐次自由除子 $D \subset X$ 都满足 LCT。1977 年，H. Terao 猜想（见第 1.4 节）对数比较定理总是适用于超平面配置（当然，它们都是局部拟齐次的），而这一猜想最终由 Daniel Bath 在 [2]证明。

若自由除子的模$\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log D)$（即关于 D的对数导子，如 K. Saito 在 [60], 中定义，见第 1.3 节）具有一组基，且基中的向量场的系数均为线性形式，则称该自由除子为线性的。第 1.5 节将回顾若干关于线性自由除子的结果，尤其是 [28],关于 LCT 对“约化”线性自由除子成立的定理。

在第 §2 节中，我们介绍第 §3 节所用到的$\mathscr{D}$–模理论背景。最后这一节旨在给出自由除子的对数比较定理的$\mathscr{D}$–模判据。首先，按照 F.J. Calderón-Moreno [9], 的论文，我们考虑关于自由除子 $D \subset X$ 的对数微分算子层 $\mathscr{V}_X^D$，以及对数 Spencer 复形 $\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$，后者是 $\mathscr{V}_X^D$– 模 $\mathcal{O}_X$ 的局部自由分解。利用 [12]，可以将这一复形的构造推广到任意左$\mathscr{V}_X^D$–模。这些构造用于证明这一背景下的主定理。该定理由 Calderón-Moreno 和 Narváez-Macarro 证明（[12, 推论 4.2] 和 [55, 推论 1.7.2]），指出自由除子 $D \subset X$ 满足对数比较定理，当且仅当自然态射

$$\varrho : \mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\star D)$$

是$\mathscr{D}_X$-模的导出范畴中的一个同构（见定理（3.7））。固定一个点 $p \in D$、芽 $(D$ 的约化局部方程 f，以及$\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log D)_p$ 的一个基 $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$，态射
ϱ_p 是同构，当且仅当复形 $\mathscr{D}_{X,p} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D,p} \mathcal{O}_{X,p}(D)$集中在上同调次数0，$\mathscr{D}_{X,p} f^{-1} = \mathcal{O}_{X,p}(\star D)$ 并且$\mathscr{D}_{X,p}$–湮灭子 $\mathcal{O}_{X,p}(\star D)$等于左理想$\mathscr{D}_{X,p}(\delta_1 + \alpha_1, \ldots, \delta_n + \alpha_n)$，其中 $\delta_i(f) = \alpha_i f$ 对于 $i = 1, \ldots, n$，见第 3.3节。这给出了一个$\mathscr{D}$–模判据，用于检验给定的自由除子 $D \subset X$ 是否满足对数比较定理。最后，我们讨论一些例子，说明如何在实践中应用这一判据。

§1 比较定理

1.1 格罗滕迪克比较定理

要计算空间在常系数 $\mathbb{C}$ 下的上同调，可以先对常值层 $\mathbb{C}_X$ 取一个分解，再计算该分解的超上同调。例如，在复流形上，全纯庞加莱引理（例如参见 [26, 第2章、第2节、例2.5.1]–关于 C^∞ 形式的证明很容易改写为全纯情形）表明，全纯微分形式复形

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X = \Omega_X^0 \xrightarrow{d} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \cdots \tag{1}$$

是正合的，因此 $\Omega_X^\bullet$ 是由局部自由的 $\mathscr{O}_X$-模构成的 $\mathbb{C}_X$ 的分解。如果 X 还是 Stein 空间——例如，$\mathbb{C}^n$中除子 D 的补集，或 $\mathbb{C}^n$ 中的凸开集——那么复形中的所有层都是无挠上同调的： $H^j(X$，对 $j>0$ 和 $k \geqslant 0$ 而言，$\Omega_X^k)=0$（实际上，这就是“Stein 空间”的定义）。在这种情况下，用于计算超上同调的双复形便约化为整体截面构成的复形

$$0 \to \Gamma(X, \mathscr{O}_X) \to \Gamma(X, \Omega_X^1) \to \cdots$$

因此便有解析德拉姆定理：

(1.1) 定理。如果 X 是 *Stein* 流形，那么

$$h^q(\Gamma(X, \Omega_X^\bullet)) \longrightarrow H^q(X; \mathbb{C}) \tag{2}$$

是一个同构。

这里若将 $H^j(X;\mathbb{C})$ 视为奇异上同调群，则该箭头由沿奇异链对微分形式进行积分给出，我们将其称为德拉姆态射。请注意，这个定理已经蕴含了一个非平凡的事实：Stein 流形的上同调在高于中间维数时消失。

若 X 是除子（超曲面）$D \subset \mathbb{C}^n$的补集，则 Ω_X^k （或者更准确地说， $j_*\Omega_X^k$，其中 $j: X \to \mathbb{C}^n$ 是包含映射）等于沿 D具有任意奇点的全纯形式芽层。它严格大于由沿 D有极点的亚纯形式构成的层 $\Omega^k(\star D)$，因为它对延拓到 D时的行为不加任何限制，尤其也允许沿 D有本性奇点的形式。在 [32, 定理 2][1], 中，亚历山大·格罗滕迪克证明，尽管存在这种差异，复向量空间层之间仍存在典范同构

$$h^q\left(\Omega_{\mathbb{C}^n}^\bullet(\star D)\right) \simeq \mathbb{R}^q j_* \mathbb{C}_{\mathbb{C}^n \smallsetminus D}, \quad q=0, \ldots, n, \tag{3}$$

其中 $\mathbb{R}^q j_*$ 是左正合函子 j_* 的第 q 个右导出函子，参见例如 [36, I.7]。**(3)** 中的映射由伴随与庞加莱拟同构的逆 $\mathbb{R}^q j_*$ Ω q 复合而成。

$$\Omega_{\mathbb{C}^n}^\bullet(\star D) \to j_* j^{-1} \Omega_{\mathbb{C}^n}^\bullet(\star D) = j_* \Omega_{\mathbb{C}^n \smallsetminus D}^\bullet$$

[1]据 [32] 所述，本文内容曾是作者于1963年10月14日写给 M. F. Atiyah 的一封信的一部分，但有些注记除外，这些注记写于1963年11月和1965年7月。

与庞加莱拟同构 $\mathbb{C}_{\mathbb{C}^n\smallsetminus D} \xrightarrow{\sim} \Omega^{\bullet}_{\mathbb{C}^n\smallsetminus D}$ 的逆复合。

考虑到 $\mathbb{C}^n$ 是 Stein，根据 [32, 第 97], 页的推论，有 $H^j(\mathbb{C}^n$，对 $j>0$ 以及任意 k，$\Omega^k_{\mathbb{C}^n}(\star D))=0$，并且存在如下复向量空间的典范同构

$$h^q(\Gamma(\mathbb{C}^n,\Omega^{\bullet}_{\mathbb{C}^n}(\star D))) \longrightarrow H^q(\mathbb{C}^n\smallsetminus D;\mathbb{C}) \tag{4}$$

对 $q\geqslant 0$。

这些映射在形式上是自然的，因为它们来自伴随和庞加莱引理。一个众所周知（但并不显然）的事实是，这些映射与德拉姆映射相一致；该映射通过沿奇异链对亚纯形式积分，并与系数为 $\mathbb{C}$ 的奇异上同调和系数为常值层 $\mathbb{C}_{\mathbb{C}^n\smallsetminus D}$ 的层上同调之间的同构复合而得（见 [58, 第 4 章；定理 4. 14]）。参见注（1.2）。

（3）中的同构可以表述为导出范畴中的同构；显然，这对任意复流形 X 和任意除子 $D\subset X$均成立，即

$$\Omega^{\bullet}_X(\star D)\simeq \mathbb{R}j_*\mathbb{C}_{X\smallsetminus D}. \tag{5}$$

这被称为 格罗滕迪克比较定理（见定理 (2.11)）。其核心断言是，可以忽略沿着 D 的本性奇点。

在结束本节时，我们要强调，格罗滕迪克在证明 (5) 时，实质性地运用了 Hironaka 奇点消解（在复代数和复解析情形下）；这一证明也成为研究任意域上代数簇的上同调问题时可循的典范。这一事实使正特征下的奇点分解在构建上同调理论时占据了特殊地位，甚至成了这一领域中一个实质性的问题。另一方面，格罗滕迪克比较定理提供了一种全新且出人意料的方式，来理解代数纤维丛上可积联络的（无穷远处）正则奇点（见 [32], dated July 1965 中的脚注 (13)，以及关键著作 [21]）；更一般地说，它提供了一种概念性方法，将正则性 纳入$\mathscr{D}$-模理论的核心概念（见 [46]）。最后，$\mathscr{D}$-模理论本身也提供了新的工具，帮助理解格罗滕迪克比较定理，并在处理该定理时避免奇点分解 [48, 49]（另见 [50]）。

本文旨在：（1）阐释对数比较的含义，并与 Grothendieck 比较定理作一些类比；（2）概述局部拟齐次自由除子的对数比较定理的原始证明（见定理（1.5））；（3）说明$\mathscr{D}$-模理论如何刻画满足对数比较定理的自由除子（见第3.3节）。我们强调，在这三方面中，奇点消解都不起任何作用。

（1.2）注。对于任意拓扑空间 X，记 $H_q(X;\mathbb{C})$ 为取值于 $\mathbb{C}$ 的 X 的奇异同调群，其中 $q\geqslant 0$。回顾一下，奇异同调群 $H_q(X;\mathbb{C})$ 按定义是复形 $(C_\bullet(X),\partial)$ 的同调群 $h_q(C_\bullet(X),\partial)$；该复形由 X 的奇异链构成，系数取自 $\mathbb{C}$，其中 ∂ 表示边界映射。

还要记住，奇异上链复形 $(C^\bullet(X),\delta)$ 定义为

$$C^\bullet(X):=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C_\bullet(X),\mathbb{C}),$$

其中 δ 是与边界映射 ∂ 相关联的余边界映射。 X 在 $q \geqslant 0$ 上取值于 $\mathbb{C}$ 的奇异上同调群 $H^q(X;\ \mathbb{C})$, 按定义是上同调群 $h^q(C^\bullet(X), \delta)$。

存在一个自然态射

$$H^q(X;\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi_q} H_q(X;\mathbb{C})^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(H_q(X;\mathbb{C}), \mathbb{C}).$$

对于任意 $[\eta] \in H^q(X;\ \mathbb{C})$ 以及任意 $[\gamma] \in H_q(X;\ \mathbb{C})$, 有

$$\psi_q([\eta])([\gamma]) = \eta(\gamma)$$

其中 $[\,]$ 表示相应（上）同调群中的等价类。态射 ψ_q 是一个同构，对于 $q \geqslant 0$而言，因为 $\mathbb{C}$ 是一个域。

如果 X 是一个复流形，且 $\dim X = n \geqslant 1$，德拉姆态射

$$dR_q : h^q(\Gamma(X, \Omega_X^\bullet)) \longrightarrow H^q(X;\mathbb{C})$$

由此定义 （或诱导）而来：将微分 q-形式在奇异 q-链上积分：

$$dR_q([\omega])([\gamma]) := \int_\gamma \omega \in \mathbb{C}$$

其中 ω 是一个 q-形式， γ 是一个奇异 q-链，而 $[\,]$ 表示相应（上）同调群中的等价类。这里，严格来说，需要考虑 C^∞ 链；关键在于，将 X 上系数取自 $\mathbb{C}$ 的 C^∞ 奇异链复形包含到 $C_\bullet(X)$ 中，是一个拟同构（参见 [45, 附录 A，定理 2.1]）。

德拉姆定理指出，若 X 是一个 Stein 流形，则对 $q = 0, \ldots, n$， dR_q 是一个同构；例如参见 [45, 附录 A，定理 3.1]。在 C^∞ 范畴中，德拉姆定理适用于更一般的情形，涵盖所有副紧可微流形（参见同上）。

回忆一下，根据庞加莱引理，复形 (1)，即复形

$$0 \to \mathbb{C}_X \to \Omega_X^\bullet,$$

是正合的。由于层 $\mathbb{C}$-向量空间的范畴 $\mathbf{Mod}(\mathbb{C}_X)$有足够多的内射对象（例如参见[67, 习题 2.3.12]），因此存在一个内射分解

$$0 \to \mathbb{C}_X \to I_X^\bullet$$

以及一个自然态射

$$\Omega_X^\bullet \to I_X^\bullet,$$

在同伦等价意义下唯一，使显然的图表交换（参见 [31, Rq. 3, Th. 2.4.1]以及例如 [67, 2.5]）。因此，对于任意 q，都有一个自然态射

$$\alpha_q :\ h^q(\Gamma(X, \Omega_X^\bullet)) \to h^q(\Gamma(X, I_X^\bullet)) = H^q(X;\mathbb{C}_X)$$

其中，最后一个等式正是常值层 $\mathbb{C}_X$ 的层上同调的定义。

此外，正如引言中所提到的，若 X 是 Stein 空间，则每个 Ω_X^q 对“整体截面函子” $\Gamma(X$ 都是无挠上同调的； $)$ 因此，自然态射 α_q 是一个同构（参见 [31, Rq. 3, Th. 2.4.1]，例如 [67, 2.5]）。

最后，对于任意复流形 X （事实上，对于任意局部可缩拓扑空间），我们考虑（例如参见 [58, 第 4 章，定理 4.14],）复形

$$0 \to \mathbb{C}_X \to \widetilde{S}_X^\bullet \tag{6}$$

~其中，对于 $q \geqslant 0$，用 S_X^q 表示与预层 S_X^q （X上的奇异 q–上链）相关联的层。局部可缩性意味着每个点都有一个由可缩邻域组成的邻域基。在这些邻域中，奇异上链复形是正合的。因此，层的复形 ~（6）是正合的。与前面对复形 $\Omega_X^\bullet$ 的处理一样（现在以复形 $S_X^\bullet$ 取代它），并再次使用 $\mathbb{C}_X$的内射分解 $I_X^\bullet$，对于每个 q，都有一个自然态射

$$\beta_q : H^q(X;\mathbb{C}) = h^q(\Gamma(X, \widetilde{S}_X^\bullet)) \to h^q(\Gamma(X, I_X^\bullet)) = H^q(X;\mathbb{C}_X)$$

其中，第一个等式正是奇异上同调 $H^q(X$ 的定义； $\mathbb{C})$ （参见 [58, 第 4 章，命题 4.12]）。由于层 S_X^q 都是柔软层，因此对于函子 $\Gamma(X$； $)$，它们也都是无挠上同调的（参见 [58,第 4 章，习题 1.10（2）和命题 3.3]）。因此，对于 $q \geqslant 0$，态射 β_q 是一个同构。

因此，对于任意 q，我们都有以下同构图

$$\begin{array}{ccc} h^q(\Omega^\bullet(X)) & \xrightarrow{dR_q} & H^q(X;\mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_q} & \swarrow{\scriptstyle \beta_q} & \\ H^q(X;\mathbb{C}_X). & & \end{array} \tag{7}$$

众所周知，该图在相差一个符号的意义下是交换的，不过这一结果似乎难以找到具体的参考文献。

1.2 布里斯科恩复形

对于一类特殊的除子，即仿射空间 $X = \mathbb{C}^n$ 中的超平面配置，Brieskorn 在 [6] 中推广了 Arnol'd 在 [1], 中的工作，早已给出了计算补空间上同调的方法。若 D 是由超平面 H_j 组成的并，其方程为 $h_j = 0$、 $j = 1$、.....、 N，那么亚纯 1-形式 $\frac{dh_j}{h_j}$ 生成外代数 $\Gamma(X$、$\Omega_X^\bullet(\star D))$ 的一个 $\mathbb{C}$ 子代数 $B^\bullet$。由于 $d\left(\frac{dh_j}{h_j}\right) = 0$， $B^\bullet$ 上的所有外微分都为零，而 $B^\bullet$ 是复形 $\Gamma(X$、$\Omega_X^\bullet(\star D))$ 的一个子复形，其微分为零，这个复形称为布里斯科恩复形。Brieskorn 证明了

(1.3) 定理。 德拉姆态射 $B^p \to H^p(U;\mathbb{C})$ 是同构。 □

注意，Brieskorn 形式中的每一个

$$\omega_{j_1,\ldots,j_k} := \frac{dh_{j_1}}{h_{j_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{dh_{j_k}}{h_{j_k}}$$

沿 D 至多有一个一阶极点，因此在这个特殊情形下，他的结果比格罗滕迪克的结果更强。

布里斯科恩结果的一个早期版本表明，该结果对正规交叉除子（NCD）([34])成立；这一结果在德利涅的混合霍奇理论中发挥了重要作用：每个拟射影簇 U 都有一个射影紧化 $U \hookrightarrow X$，其中 $D := X \setminus U$ 是正规交叉除子。类似地，每个奇异簇都有一个分解，其例外除子同样是正规交叉除子。德利涅利用极点来定义 U上上同调的权重滤过。

如果 $D = \bigcup_{j=1}^{N}\{h_j = 0\}$ 是更一般的不可约除子 $\{h_j = 0\}$之并，由闭形式 $\frac{dh_j}{h_j}$ 生成的类似布里斯科恩复形 $B^\bullet$ 通常不能计算补集的上同调：例如，如果 D 不可约，该复形就退化为 $0 \to B^0 \to B^1 \to 0$，而 $X \setminus D$ 可能在更高维度上有上同调。德利涅和迪姆卡探讨了 [22]中极点阶数与霍奇滤过之间的关系。

1.3 对数比较定理

斋藤恭司在 [60], 中引入了布里斯科恩复形的一种富有成果的推广。若亚纯形式 ω 满足 $h\omega$ 和 $hd\omega$ 均为正则形式，则称它沿除子 D 有一个对数极点，其中 h 是 D的局部方程。特别要注意，所有 Brieskorn 形式沿 D 都有对数极点。

将具有对数极点的亚纯 k-形式芽层记为 $\Omega_X^k(\log D)$。那么 $\Omega_X^\bullet(\log D)$ 仍是 $\Omega_X^\bullet(\star D)$的子复形。在同一篇文章中，斋藤还描述了 $\Omega_X^1(\log D)$的对偶，即“对数导子”层，$\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log D)$；其在 $x \in D$ 处的茎由 X 上的向量场芽组成，这些向量场在 D 的光滑点处与其相切。这种对偶性来自缩并配对

$$\Omega_X^1(\log D) \times \mathscr{D}er(-\log D) \to \mathcal{O}_X, \quad (\omega, \xi) \mapsto \iota_\xi(\omega) = \omega(\xi).$$

Saito 证明了这是一个完美配对，因此 $\Omega_X^1(\log D)$ 也是$\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log D)$的对偶。Saito 尤其关注 D 是自由除子的情形，也就是说，$\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log D)$（或者等价地，$\Omega_X^1(\log D)$）是一个局部自由的$\mathcal{O}_X$-模层。由于任何$\mathcal{O}_X$-模的对偶在深度$\mathcal{O}_X \geqslant 2$ 时深度至少为 2（参见例如 [62], 或 [39, 引理 9.2]），由此可知每条平面曲线都是自由除子。更有趣的是，K. Saito 证明，孤立超曲面奇点的整体变形底空间中的判别式是自由除子。卢伊延加通过证明 [39, 推论 6.13]中的结果同样适用于孤立完全交叉奇点（ICIS）的整体变形底空间中的判别式，将这一结果推广了；后来的作者（[65],[7]）又将其推广至一系列非 ICIS 奇点的判别式、箭图表示空间中的判别式 [8]，以及更一般的预齐次向量空间中的判别式 [29]。

由于对于任意除子 $D \subset X$，都有一个自然态射

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D)$$

因此可以探讨满足以下条件的除子 $D \subset X$：前述自然态射是拟同构（或是 $\mathbb{C}_X$–向量空间层的导出范畴中的同构）。

(1.4) 定义。 如果态射 $\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D)$ 是拟同构，我们就称除子 D 满足对数比较定理 （*LCT*），也可以说对数比较定理对 D成立。

根据格罗滕迪克比较定理，除子 D 满足对数比较定理，当且仅当态射$h^q(\Omega_X^\bullet(\log D)) \to \mathbb{R}^q j_*\mathbb{C}_U$在 $0 \leqslant q \leqslant \dim X$时是同构。任何正规交叉除子都满足对数比较定理，依据[21, Cap. II, Lemme 6.9]。上文引用的 Atiyah 和 Hodge 的结果表明，除子补集上的每个上同调类都可以由对数形式表示，但并未说明对数复形能够计算该上同调。

（1.5）定理。 [对数比较定理， [15]] 若 $D \subset X$ 是局部拟齐次自由除子，且其补集为 U，则德拉姆态射

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \to \mathbb{R}j_*\mathbb{C}_U \tag{8}$$

是拟同构。

这里，局部拟齐次是指：在每个点 $p \in D$，都存在 X 上的局部坐标，使得 D 有一个所有权都严格为正的加权齐次局部方程——换言之，局部存在一个以 p 为中心的良好 $\mathbb{C}^*$-作用。具有这一性质的除子也称为强拟齐次，也称为正。显然，超平面配置具有这一性质；Mather 所谓“良好维数”中的稳定映射的判别式也具有这一性质，因为有一个引人注目（但尚无解释）的事实：在良好维数中，所有稳定芽在适当坐标下都是拟齐次的（参见 [52, 第 7 节4]，其中给出了一个通俗的证明）。

局部拟齐次性在定理（1.5）的证明中用到了两次。首先，它使得我们可以对分层的余维进行归纳论证。

(1.6) 引理。 设 X 是维数为 n的复流形， D 是 X中的强拟齐次除子，且 $p \in D$。那么存在 p 的一个开邻域 U，使得对于每个 $q \in U \cap D$，满足 $q \neq p$，成对对象 $(X$在 q 处的芽， $D)$ 同构于积 $(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$在$0$ 处的芽， $D_0 \times \mathbb{C})$，其中 D_0 是强拟齐次除子。

为了证明 (8) 在 $p \in D$处是同构，需要对除子的维数使用归纳法。容易看出，若 (8) 对除子 $D_0 \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 成立，则对 $D_0 \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$也成立。因此，引理（1.6）表明，我们可以通过归纳法假设 (8) 在 $D \cap U \smallsetminus \{p\}$的所有点处成立。请注意，归纳法从除子 $0 \subset \mathbb{C}$开始；众所周知， $H^1(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$；由对数形式$\frac{dz}{z}$ 生成的$\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$。因此，下文中我们假设 $n \geqslant 2$。

因此，(1.5) 的证明主体在于证明 (8) 在 p 处也成立（为方便起见，我们假设该点为 $(0, \ldots, 0)$），方法是证明对于任意以 p 为中心且足够小的多圆柱V，德拉姆态射

$$h^p(\Gamma(V, \Omega_X^\bullet(\log D)) \to H^p(V \smallsetminus D; \mathbb{C})$$

是一个同构。论证涉及两个与 Stein 覆盖 $\{V_i\}$ of $V \smallsetminus \{0\}$、含有 $V_i = V \smallsetminus \{x_i = 0\}$ 的 Stein 覆盖，以及 $\{V_i' = V_i \smallsetminus D\}$ of $V \smallsetminus D$ 相关联的切赫-德拉姆双复形，还有与每个双复形相关联的两个标准谱序列。这些复形为

$$K^{p,q} = \bigoplus_{i_0 < i_1 < \cdots < i_q} \Gamma\left(\bigcap_{j=0}^{q} V_{i_j}, \Omega_X^p(\log D)\right) \tag{9}$$

and

$$\tilde{K}^{p,q} = \bigoplus_{i_0<i_1<\cdots<i_q} \Gamma\left(\bigcap_{j=0}^{q} V'_{i_j}, \Omega_X^p\right) \tag{10}$$

ˇ，其微分为 d（外微分）和 d（切赫微分）。包含映射 $V'_i \hookrightarrow V_i$ deter-

˜ ˇ确定了一个态射 $\rho_0 : K^{p,\,q} \to K^{p,\,q}$，该态射与 d 和 d 相容，因而诱导出相关谱序列之间的态射，记作 $'\rho_\ell$ 和 $''\rho_\ell$，其中下标 ℓ 指谱序列的页数。

第一谱序列

将 d 应用于 (9) 和 (10)，我们得到与每个双复形相关的第一谱序列的第一页：

$$'E_1^{p,q} = h^p(K^{\bullet,q}) = \bigoplus_{i_0<i_1<\cdots<i_q} h^p\left(\Gamma\left(\bigcap_{j=0}^{q} V_{i_j}, \Omega_X^\bullet(\log D)\right)\right)$$

and

$$'\tilde{E}_1^{p,q} = h^p(\tilde{K}^{\bullet,q}) = \bigoplus_{i_0<i_1<\cdots<i_q} h^p\left(\Gamma\left(\bigcap_{j=0}^{q} V'_{i_j}, \Omega_X^\bullet\right)\right) = \bigoplus_{i_0<i_1<\cdots<i_q} H^p(\bigcap_{j=0}^{q} V'_{i_j}; \mathbb{C}).$$

由于覆盖中的所有开集都不包含 0，归纳假设表明，对于所有 p、q，$'\rho^{p}{}_{,1}{}^{q} : {}'E^{p,\,q}_1 \to {}'\tilde{E}^{p,\,q}_1$ 都是同构，因此 $'\rho^{p}{}_{,\infty}{}^{q}$也是同构。˜因此，$\rho_0$ 在 $K^{\bullet,\bullet}$ 和 $K^{\bullet,\bullet}$ 的全复形的上同调之间诱导出一个同构。

第二谱序列

因为 $\{V_i\}$ 和 $\{V'_i\}$ 是 ˇ Stein 覆盖，应用 d 后，得到第二谱序列的第一页 s,

$$''E_1^{p,q} = H^q(V \smallsetminus \{0\}, \Omega_X^p(\log D)) \quad \text{and} \quad ''\tilde{E}_1^{p,q} = H^q(V \smallsetminus D, \Omega_X^p).$$

由于 D是自由除子，所有的 $\Omega^p_X(\log\ D)$以及 Ω^p_X都是自由的$\mathcal{O}_X$-模，因此，由于$H^q(V \smallsetminus \{0\},\ \mathcal{O}_X)$除 $q = 0$和 $q = n-1$之外均为零（例如参见 [39,(8.14)]），$H^q(V \smallsetminus \{0\},\ \Omega^p_X(\log\ D))$也只在这些维数上非零。换言之

$$''\tilde{E}_1^{p,q} = 0 \ \text{ except for } q = 0 \text{ and } q = n-1.$$

˜现在，由于 $V \smallsetminus D$ 是 Stein 空间且 Ω^p_X 是凝聚的，$''E^{p,\,}{}_1{}^q = H^q(V \smallsetminus D,$ 对所有$q > 0,\ \Omega^p_X)$ 都等于 0，并且谱序列 $''E$ 在 E_2处退化，其中

$$''\tilde{E}_\infty^{p,0} = H^p(V \smallsetminus D; \mathbb{C}), \ \ ''\tilde{E}_\infty^{p,q} = 0 \ \text{ if } q > 0. \tag{11}$$

我们断言，$''E$ 也在 E_2 处退化。鉴于前面已经提到的消失，只需证明复形 $(''E^{\bullet,\,}{}_1{}^q, d)$，也就是说，

$$0 \to H^{n-1}(V \smallsetminus \{0\},\ \Omega^0_X(\log\ D)) \to H^{n-1}(V \smallsetminus \{0\},\ \Omega^1_X(\log\ D)) \to \cdots \to H^{n-1}(V \smallsetminus \{0\},\ \Omega^t_X(\log\ D)) \to 0 \tag{12}$$

是正合的。这 这是论证中唯一偏离“一般废话”的地方。

(12) 中的每个群都由如下形式的类生成： $c_\alpha\omega_\alpha$ 其中 $c_\alpha \in H^{n-1}(V \smallsetminus \{0\},\ \mathscr{O}_X)$且 ω_α 是 $\Omega^p_X(\log\ D)$ 在 V中的一个基元素。

回顾一下， $(D,0)$ 假定在 V中关于坐标函数的正权重 $w_1,\ldots,w_t$是加权齐次的。我们有

$$H^{n-1}(V \smallsetminus \{0\},\mathscr{O}_X) = \frac{\Gamma(V \smallsetminus \bigcup_i\{x_i=0\},\mathscr{O}_X)}{\sum_j \Gamma(V \smallsetminus \bigcup_{i\neq j}\{x_i=0\},\mathscr{O}_X)}.$$

分子中的每一项都可以表示为一个所有指数均为负的洛朗级数；分母中的级数则有一个指数以外的所有指数均为负。一个简单的引理表明， $\Omega^p_X(\log\ D)_0$有一个基，其元素由加权次数严格小于 $\sum_j w_j$ 的形式构成。因此，复形(12) 的权零部分为零。但由于外微分 d 保持加权次数不变，因此利用欧拉形式的李导数，可以构造从该复形到其权零部分的收缩同伦。于是，它是正合的。

我们还剩下

$$''E^{p,8\ 0} = h^p(\Gamma(V \smallsetminus \{0\},\Omega^\bullet_X(\log D)) = h^p(\Gamma(V,\Omega^\bullet_X(\log D)),\ \ ''E^{p,q}_\infty = 0 \ \text{ if } q>0 \tag{13}$$

（因为 $tn > 1$ 和 $\Omega^p(\log D)$ 局部自由，0 是一个可去奇点）。由 (11)、(13) 以及 $K^\bullet,\bullet$ 与 $K^\bullet,\bullet$的全复形上同调同构，定理由此得证~。

局部拟齐次性对于对数比较定理的重要性仍不清楚。已有结果表明，对于平面曲线，局部拟齐次性是必要条件 [14], ；对于三维空间中的自由曲面也是如此 [30], 。但在更高维情形下，局部弱拟齐次性已足够，参见 [19], [55, 备注 1.7.4] 和定理（3.14）。

(1.7) 定义。除子 D 称为局部弱拟齐次的 *[19, 定义 2.1]* ，如果在每个点$p \in D$ 处，都存在 X 上的局部坐标，使得 D 具有弱加权齐次的局部约化方程 $f=0$，也就是说：所有权均为非负，且不全为 *0*，其中 f 的权严格为正。

1.4 Terao 猜想

H. Terao 在 [63, 猜想 3.1] 中猜想，LCT 对超平面配置总是成立。在 Wiens 和 Yuzvinsky 于 [68], 得出部分结果后，该猜想最终由 Daniel Bath 在 [2] 证明。Bath 的证明采用归纳法，按照配置中平坦的余维进行归纳，并使用了类似于上文 [15] 所给论证的谱序列论证。

1.5 L线性自由除子与对数比较再探 d

自由除子 $D \subset \mathbb{C}^n$ 若导子线性，即 $\mathrm{Der}(-\log\ D) = \Gamma(\mathbb{C}^n、\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log\ D))$ 具有一组系数为线性形式的向量场基。正规交叉除子当然是最简单的例子，而且实际上是超平面配置中唯一的线性自由除子。在 [8] R.-O. Buchweitz 和

第二作者证明，Dynkin 箭图的表示空间中，以底层图的一个根作为维数向量时，其判别式是线性自由除子。所有不可约线性自由除子都已得到分类，尽管当时并未使用这个名称； [61], 中的 castling 变换可从四个基本例子导出它们。

如果 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是线性自由除子，那么 Der(–log D) 中零权向量场的集合构成一个维数为 n的李代数；它同构于 G_D 中由保持这一对 $(\mathbb{C}^n, D)$的线性自同构组成的李子群的李代数。对于线性自由除子， [28] 给出了一个与 [15]的证明截然不同的对数比较定理论证。当 D 是线性自由除子时，$\mathbb{C}^n \smallsetminus D$ 实际上是群G_D的单位连通分支 G_D^0 的单个轨道，因此 $H^*(\mathbb{C}^n \smallsetminus D;\ \mathbb{C})$ 是 G_D^0/S_p, 的上同调，其中 S_p 是点 p的各向同性子群。由于 G_D^0 是路径连通的， S_p 在 $H^*(G_D^0$上的作用是平凡的；$\mathbb{C})$；因此 $H^*(G_D^0/S_p;\ D) = H^*(G_D^0;\ \mathbb{C})$。其次，在这种情况下， $\Gamma(\mathbb{C}^n$中的零权子复形 $\Omega^\bullet_{\mathbb{C}^n}(\log D))$ 与 G_D^0的李代数 $\mathfrak{g}_D$ 在复系数下的李代数上同调复形一致。通过利用加权齐次性的论证， $\Gamma(\mathbb{C}^n, \Omega^\bullet_{\mathbb{C}^n}(\log D))$ 与其零权子复形链同伦。因此， $\Gamma(\mathbb{C}^n, \Omega^\bullet_{\mathbb{C}^n}(\log D))$ 与 $\mathfrak{g}_D$ 在复系数下的李代数上同调一致。对于紧致连通李群 G，一个众所周知的论证表明，李代数上同调与群的拓扑上同调一致。对于线性自由除子，群 G_D^0 从不紧致，但对于更广泛的约化群类，这一同构仍然成立；对于一类重要的线性自由除子（包括上述所有情形）， G_D^0 确实是约化的。

1.6 配对 $\mathbf{H^p(X \smallsetminus D) \times H^q(D) \to H^{p+q}(D)}$

论文 [51] 引入了凯勒形式模 Ω_D^k 的一个变体 $\check{\Omega}_D^k$，定义如下:

$$\check{\Omega}_D^k := \frac{\Omega_X^k}{h\Omega_X^k(\log D)},$$

其中 h 是 D 的约化方程。注意，$\check{\Omega}_D^0 = \Omega_D^0 =O_D$。由于 $\frac{dh}{h}$ 有对数极点，且 $\Omega_X^k(\log D) \supset \Omega_X^k$，可得 $h\Omega_X^k(\log D) \supseteq dh \wedge \Omega_X^{k-1} + h\Omega_X^k$，因此 $\check{\Omega}_D^k$ 是 Ω_D^k 的商。若 D 是自由除子，则每个 $\check{\Omega}_D^k$ 都是极大 Cohen–Macaulay O$_D$-模，并且在 D 的光滑点处与 Ω_D^k 重合。$\check{\Omega}_D^k$ 关于通常的外微分构成一个复形：若 $\omega \in \Omega_X^k(\log D)_x$，则 $\frac{dh}{h} \wedge \omega \in \Omega_X^{k+1}(\log D)$，由此可得 $d(h\omega) \in h\Omega_X^{k+1}(\log D)$。我们将此复形上的外微分记为 $\check{d}$。若 D 是拟齐次的，则 $(\check{\Omega}_D^\bullet, \check{d})$ 是 $\mathbb{C}_D$ 的一个分解（[51,引理 3.3]）。

直接计算可得

1. 存在一个定义良好的配对

$$\Omega_X^k(\log D) \times \check{\Omega}_D^\ell \to \check{\Omega}_D^{k+\ell}, \ \text{ defined by } (\omega_k, \omega_\ell) \mapsto \omega_k \wedge \omega_\ell. \tag{14}$$

请注意，不存在可比的楔积配对

$$\Omega_X^k(\log D) \times \Omega_D^\ell \to \Omega_D^{k+\ell}.$$

要使这样的配对定义良好， $\omega_k \in \Omega_X^k(\log\ D)$ 与 $\omega_\ell \in (dh \wedge \Omega_X^{\ell-1} + h\Omega_X^\ell)$的楔积必须属于 $dh \wedge \Omega_X^{k+\ell-1} + h\Omega_X^{k+\ell}$，但一般而言，这并不成立。例如，若$h = h_1h_2$，并取 $\omega_1 = \frac{dh_1}{h_1} \in \Omega_X^1(\log\ D)$ 和 $\omega_1' = dh \in dh \wedge \Omega_X^0$，则

$$\omega_1 \wedge \omega_1' = \frac{dh_1}{h_1} \wedge \big(h_1dh_2 + h_2dh_1\big) = dh_1 \wedge dh_2 \notin \big(dh \wedge \Omega_X^1 + h\Omega_X^2\big).$$

2. 该　配对 (14) 下降为两个复形同调上的配对　　s,

$$h^k(\Gamma(X, \Omega_X^\bullet(\log D)) \times h^\ell(\Gamma(X, \check{\Omega}_D^\bullet)) \to h^{k+\ell}(\Gamma(X, \check{\Omega}_D^\bullet)).$$

˘ 3. 当　D　局部拟齐次时，鉴于对数比较定理以及 $\Omega_D^\bullet$ 的正合性，这给出了一个配对

$$H^k(X \smallsetminus D; \mathbb{C}) \times H^\ell(D; \mathbb{C}) \to H^{k+\ell}(D; \mathbb{C}).$$

这个配对的性质仍有待探究。

§2 $\mathscr{D}_X$–模

本节回顾一些 $\mathscr{D}$–模理论的基础知识。我们主要遵循 [38], [47] 和 [27]。本节包含后续各节所需的术语和结果。

2.1 基本对象

设 X 是一个维数为 $n \geqslant 1$ 的复流形，并令$\mathscr{O}_X$ （或简写为$\mathscr{O}$）表示 X上的全纯函数芽层。环层（更准确地说， $\mathbb{C}$–代数层）$\mathscr{O}_X$ 是凝聚的：这就是冈田定理 [57], [42]。

我们用$\mathscr{D}_X$ （或简写为$\mathscr{D}$）表示 X 上的全纯系数线性微分算子层 [38, I, §1], [27, 定义 3]。有时我们用算子（或微分算子） X 来指代 X 上的全纯系数线性微分算子。对于任意开集 $U \subseteq X$, $\mathscr{D}(U)$ 是一个$\mathscr{O}(U)$–代数，因此$\mathscr{D}$ 是一个$\mathscr{O}$–代数层。

若 $(U;\ x_1, \ldots, x_n)$ 是 X中的一个坐标图，且 $U \subset X$ 是连通的，则任意算子 $P \in \mathscr{D}(U)$ 都可以唯一地写成有限和

$$P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \partial^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha^n}$$

其中 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $c_\alpha \in \mathscr{O}(U)$，且 ∂_i是偏导数 $\frac{\partial}{\partial x_i}$。对于任意 $x \in X$，茎 $\mathscr{D}_{X,x}$是一个非交换的 $\mathscr{O}_{X,x}$–代数，因为对于 $1 \leqslant i \leqslant n$，有 $\partial_i x_i - x_i\partial_i = 1$。

如果 $P \in \mathscr{D}(U)$ 非零，那么 P的阶是非负整数

$$\operatorname{ord}(P) = \max\{|\alpha|\,;\, c_\alpha \neq 0\}$$

其中 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$。我们也将 $\mathbf{ord}(0) = -\infty$记作。

对于 $k \in \mathbb{N}$，我们用 $F^k(\mathscr{D})$ 表示$\mathscr{D}$ 的子层，其截面在局部可写为阶数小于或等于 k的算子。每个 $F^k(\mathscr{D})$ 都是凝聚$\mathscr{O}$–模层，而族 $F^\bullet := (F^k(\mathscr{D}))_k$是$\mathscr{D}$的离散递增穷尽滤过。对于 $k, \ell \geqslant 0$，有 $F^0(\mathscr{D}) = \mathscr{O}$ 以及$F^k(\mathscr{D})F^\ell(\mathscr{D}) = F^{k+\ell}(\mathscr{D})$。相应的分次环层（更准确地说，分次 $\mathbb{C}$–代数层）为

$$\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \frac{F^k(\mathscr{D})}{F^{k-1}(\mathscr{D})}$$

其中我们将 $F^{-1}(\mathscr{D}) = \{0\}$ 记作。

若 P, Q 是 $\mathscr{D}$ 中的局部截面，则差 $[P,Q] := PQ - QP$ 称为 (P,Q) 的交换子。对于 $x \in X$，茎 $\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_x) \simeq \mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})_x$ 是交换环，因为 $\mathbf{ord}([P,Q]) \leqslant \mathbf{ord}(P) + \mathbf{ord}(Q) - 1$。因此，$\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$ 是交换 $\mathbb{C}$–代数的层。

层 环 $\mathscr{D}_X$ 和 $\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X)$ 是凝聚的（见 [38, I, Th. 3.2], [27, Prop. 9]） .

我们记

$$\sigma_k : F^k(\mathscr{D}) \to \frac{F^k(\mathscr{D})}{F^{k-1}(\mathscr{D})}$$

自然投影映射（它是一个 $\mathscr{O}$–模的态射），并称之为 k^{th} 符号映射。

若 P 是一个阶为 k 的算子，我们简写为

$$\sigma(P) = \sigma_k(P)$$

并称此元素为 P的主符号 。

若 $(x_1, \ldots, x_n)$ 是点 $x \in X$附近的一个局部坐标系，则 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \in F^1(\mathscr{D}_x)$，并记 $\xi_i = \sigma(\partial_i)$ 表示 $1 \leqslant i \leqslant n$。

存在一个$\mathscr{O}_x$–代数同构

$$\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_x) \longrightarrow \mathscr{O}_x[\xi_1, \ldots, \xi_n] \tag{15}$$

例如参见 [38, I, 第 1], [27, 节，命题 4]; 元素 $P + F^{k-1}(\mathscr{D}_x)$的像，其中 $P \in F^k(\mathscr{D}_x)$，就是 $\sigma_k(P)$。将此态射与 (2.3) 比较。由于 $\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_x)$ 是诺特的，利用对算子阶数归纳的标准论证可证明$\mathscr{D}_x$ 是左、右诺特环。

2.2 滤过

设$\mathscr{M}$ 是一个左$\mathscr{D}$–模（即左$\mathscr{D}$–模的层）。$\mathscr{M}$ 的一个滤过是由一族$\mathscr{O}$-子模组成的集合，$(\mathscr{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$，满足：

(i) 对任意 $k, \ell \in \mathbb{N}$： $\mathscr{M}_k \subset \mathscr{M}_{k+1}$ 且$F^\ell(\mathscr{D})\mathscr{M}_k \subset \mathscr{M}_{k+\ell}$。

(ii) $\mathscr{M} = \cup_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{M}_k$.

对于任意滤过 $\Gamma := (\mathscr{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ of $\mathscr{M}$ ， 我们将其与分次 $\mathscr{O}$–模

$$\mathrm{gr}_\Gamma(\mathscr{M}) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \frac{\mathscr{M}_k}{\mathscr{M}_{k-1}}$$

with $\mathscr{M}_{-1} := \{0\}$ 联系起来。更一般地，$\mathrm{gr}_\Gamma(\mathscr{M})$ 是一个 $\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$–模。若满足以下两个条件，则称 $\mathscr{M}$ 的滤过 $(\mathscr{M}_k)_k$ 为良好

1. 对于任意 $k \in \mathbb{N}$，$\mathscr{M}_k$ 是一个凝聚的 $\mathscr{O}_X$–模。

2. 存在 $k_0 \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $\ell \in \mathbb{N}$, $F^\ell(\mathscr{D})\mathscr{M}_{k_0} = \mathscr{M}_{k_0+\ell}$。

任意凝聚的 $\mathscr{D}$–模 $\mathscr{M}$ 都局部具有良滤过（即限制到 X 中充分小的开子集后；例如参见 [38, I，第 7], [27, 页，命题 10]）。

设 $\Gamma := (\mathscr{M}_k)_k)$ 是 $\mathscr{M}$ 的一个滤过。那么，Γ 局部良（即限制到 X 中充分小的开子集后，Γ 是一个良滤过）当且仅当 $\mathrm{gr}_\Gamma(\mathscr{M})$ 是一个凝聚的 $\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$– 模（参见 [38, I，命题 4.1], [27, 定理 1]）。

设 $\mathscr{M}$ 是一个凝聚的左 $\mathscr{D}_X$–模。那么存在一个 $\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X)$ 的相干理想层 $\mathscr{J}(\mathscr{M})$，具有如下性质：对于任意开子集 $U \subset X$，若限制 $\mathscr{M}_U$ 具有良滤过，则有 $\mathscr{J}(\mathscr{M})_U \simeq \sqrt{\mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(\mathscr{D}_U)}(\mathrm{gr}(\mathscr{M}_U))}$，其中 $\mathrm{gr}(\mathscr{D}_U) = \mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_U)$，且 $\mathrm{ann}_{\mathrm{gr}(\mathscr{D}_U)}(\mathrm{gr}(\mathscr{M}_U))$ 是凝聚的 $\mathrm{gr}(\mathscr{D}_U)$–模 $\mathrm{gr}(\mathscr{M}_U)$ 的湮灭理想层（参见 [27, 命题 17；注记 6]）。

(2.1) 定义。 设$\mathscr{M}$ 是一个凝聚$\mathscr{D}_X$–模。由相干理想层$\mathscr{J}(\mathscr{M})$ 定义的余切丛 T^*X 中的闭解析子集，称为$\mathscr{M}$ 的特征簇，记作$\mathrm{Char}(\mathscr{M})$。

(2.2) 例。1) $\mathscr{D}_X$–模 $\{0\}$ 的特征簇为 $\varnothing$，且 $\mathrm{Char}(\mathscr{D}_X) = T^*X$，于是 $\dim \mathrm{Char}(\mathscr{D}_X) = 2n = 2\dim X$。

2) 若$\mathscr{M} = \mathscr{D}^X/\mathscr{I}$，其中$\mathscr{I} \subset \mathscr{D}_X$ 是$\mathscr{D}_X$中的相干左理想层，则特征簇 $\mathrm{Char}(\mathscr{M})$是由理想层 $\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{I}) \subset \mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X)$定义的 T^*X中的闭解析子集，因为商$\mathscr{M}$上由$\mathscr{D}_X$的 $F^\bullet$ 滤过诱导的滤过是局部良滤过。

3) D_X–模 O_X 局部可表示为商 $\mathrm{D}_{X,x}/\mathrm{D}_{X,x}(\partial_1, \cdots, \partial_n)$，其中 $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$是 $\mathrm{Der}(\mathrm{O}_{X,x})$的一个基。分次理想 $\mathrm{gr}(\mathrm{D}_{X,x}(\partial_1, \cdots, \partial_n))$ 等于 $\mathrm{gr}(\mathrm{D})(\xi_1, \ldots, \xi_n)$（回忆一下，$\xi_i$是 (2.1) 中 ∂_i的主符号）。于是 $\mathrm{Char}(\mathrm{O}_X) = T^*_X X$，也就是余切丛 T^*X的零截面，并且 $\dim \mathrm{Char}(\mathrm{O}_X) = n$。

凝聚的$\mathscr{D}_X$模的特征簇 $\mathrm{Char}(\mathscr{M}) \subset T^*X$ 是对合的（例如见 [43], [25]，[27, 附录 B]）。因此，若$\mathscr{M}$ 是非零模，则有 $2n \geqslant \dim(\mathrm{Char}(\mathscr{M})) \geqslant n$。这称为伯恩斯坦不等式。文献 [3] 证明了魏尔代数上的模满足该不等式。

(2.3) 定义。 若凝聚的$\mathscr{D}_X$模满足全纯 条件，即$\mathscr{M} = \{0\}$ 或$\dim(\mathrm{Char}(\mathscr{M})) = \dim X$，则称其为全纯模。

$\mathscr{D}_X$模$\mathscr{O}_X$是全纯的，而$\mathscr{D}_X$作为$\mathscr{D}_X$模并非全纯。若$\mathscr{M} = \mathscr{D}^X/\mathscr{I}$，其中$\mathscr{I}$是非零局部主理想的层（即局部由单个微分算子生成），则$\mathscr{M}$ 是全纯的当且仅当 $\dim X = 1$，因为 $\dim \mathrm{Char}(\mathscr{D}_X/\mathscr{I}) = 2n - 1$。$\mathscr{D}_X$模理论中的一个核心结果是

(2.4) 定理。 [37]如果 D是复流形 X中的一个超曲面，那么在 X 上以 D 为极点的亚纯函数的$\mathscr{D}_X$–模 $\mathscr{O}_X(\star D)$是全纯的。

W我们以一个稍后会用到的结果结束本小节（见第 2.5 节）。 :

(2.5) 定理。 非零凝聚 $\mathscr{D}_X$–模 $\mathscr{M}$ 是全纯的，当且仅当 $\mathscr{E}xt^i{}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)=0$对 $i\neq n$成立。在此情形下，$\mathscr{E}xt^n{}_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M},\mathscr{D}_X)$是一个凝聚的全纯右 $\mathscr{D}_X$–模。

证明由 [38, IV；定理 4.2.5、4.2.6], 推出，另见 [27, 定理 7, 8]。

2.3 自然同构 $\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X))\xrightarrow{\sim}\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X)$

存在一个 $\mathscr{O}_X$–模的自然单射态射

$$\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\iota}\mathrm{gr}^{(1)}_{F^\bullet}(\mathscr{D})\subset\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$$

将局部截面 $\delta\in\mathscr{D}\mathbf{er}\,(\mathscr{O}_X)$映射到 $\sigma(\delta)\in\mathbf{gr}^{(1)}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$。于是，根据对称代数的泛性质（见 [5, §6，命题 2]），存在唯一的 $\mathscr{O}_X$–代数态射

$$\kappa:\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X))\to\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X),\tag{16}$$

延拓态射 ι: $\mathscr{D}\mathbf{er}\,(\mathscr{O}_X)\to\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$.。由于 $\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X)$是分次 $\mathscr{O}_X$–代数，且$\iota(\mathscr{D}\mathbf{er}\,(\mathscr{O}_X))\subset\mathbf{gr}^{(1)}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$, 根据 [备注 1（同上，第 498 页）]，态射 κ是分次的，因此对任意 $k\geqslant 0$，有一个 $\mathscr{O}_X$–模态射

$$\kappa_k:\mathrm{Sym}^{(k)}_{\mathscr{O}_X}(\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X))\to\mathrm{gr}^{(k)}_{F^\bullet}(\mathscr{D}_X).$$

根据 [5, §6，定理 1]，并且由于 $\mathscr{D}\mathbf{er}\,(\mathscr{O}_X)$是秩为 n 的局部自由 $\mathscr{O}_X$–模，对于任意 $x\in X$, $\mathbf{Sym}_{\mathscr{O}_{X,x}}(\mathscr{D}\mathbf{er}(\mathscr{O}_{X,x}))$ 都与多项式代数 $\mathscr{O}_{X,x}[T_1,\dots,T_n]$规范同构，该规范同构由将 ∂_i映射到 T_i（$1\leqslant i\leqslant n$）得到。局部地，对于 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$和$|\alpha|=\sum_i\alpha_i=k$，有 $\kappa_k(\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n})=\sigma(\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n})$，其中 $\sigma(\ )$表示主符号（见 **(2.1)**）。于是，对于任意 k， κ_k 都是同构，而 κ 是分次同构。同构 κ 是同构 **(15)** 的内在版本。

2.4 Spencer 复形

设 X 是一个维数为 $n\geqslant 1$ 的复流形。

(2.6) 定义。[47, 第一章，（2.1）] X 中的 ***Spencer*** 复形是下列左$\mathscr{D}_X$–模复形，记作 $\mathrm{Sp}^\bullet_X$（或简记为 $\mathrm{Sp}^\bullet$）：

$$0\to\mathscr{D}\otimes_{\mathscr{O}_X}\bigwedge^n\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\epsilon_{-n}}\cdots\xrightarrow{\epsilon_{-2}}\mathscr{D}\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\epsilon_{-1}}\mathscr{D}$$

其中微分 $\epsilon_\bullet$ 定义为

$$\epsilon_{-1}(P\otimes\delta)=P\delta,$$

$$\epsilon_{-p}(P\otimes(\delta_1\wedge\cdots\wedge\delta_p))=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}P\delta_i\otimes(\delta_1\wedge\cdots\widehat{\delta_i}\cdots\wedge\delta_p)+$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j}P\otimes([\delta_i,\delta_j]\wedge\delta_1\wedge\cdots\widehat{\delta_i}\cdots\widehat{\delta_j}\cdots\wedge\delta_p)\ \ (2\leqslant p\leqslant n).$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$我们将增广复形记为$\mathrm{Sp}^\bullet{}_X$ （或简记为$\mathrm{Sp}^\bullet$）

$$\mathrm{Sp}^\bullet_X \xrightarrow{\epsilon_0} \mathscr{O}_X \to 0$$

其中 $\epsilon_0(P) = P(1)$。

(2.7) 注。复形 $\mathsf{Sp}^\bullet_X$是左 $\mathscr{D}_X$–模 $\mathscr{O}_X$的局部自由分解。由于 $\mathscr{D}\mathsf{er}\,(\mathscr{O}_X)$是局部自由的 $\mathscr{O}_X$–模，每个左 $\mathscr{D}_X$–模

$$\mathrm{Sp}^p_X := \mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)$$

是局部自由的（或秩为 $\binom{n}{p}$）。

$\widetilde{\quad}$为证明 $\mathsf{Sp}^\bullet_X$ 是 $\mathscr{O}_X$的分解，或等价地证明 $\mathsf{Sp}^\bullet{}_X$ 是无挠上同调的，我们可以在每个点 $x \in X$ 处局部进行。若在 X 上 x附近选取局部坐标 $(x_1, \dots, x_n)$，则偏导数$(\partial_1, \dots, \partial_n)$–其中 $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$–构成自由 $\mathscr{O}_X$–模 $\mathscr{D}\mathsf{er}(\mathscr{O}_X)_x$的一组基。微分 $\epsilon_{-p,x}$可写为

$$\epsilon_{-p,x}(P \otimes (\partial_{i_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{i_p})) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j-1} P\partial_{i_j} \otimes (\partial_{i_1} \wedge \cdots \widehat{\partial_{i_j}} \cdots \wedge \partial_{i_p}).$$

$\widetilde{\quad}$因此，复形 $\mathsf{Sp}^\bullet{}_{X,x}$ 是一个 Koszul 复形（记作 $K(\partial_1, \dots, \partial_n; \mathscr{D}_X)$ 中的 [44, I.2]）。这个$\widetilde{\quad}$复形是正合的（例如参见 [24]）。这里我们给出一个基于 [9, 定理 3.1.2；命题 4.1.3] 的 $\mathsf{Sp}^\bullet{}_{X,x}$ 无挠上同调性的证明（该结果证明了一个更一般的结论，并采纳了 B. Malgrange [44, I.2]的建议）。

我们考虑复形 $\widetilde{\quad}\mathsf{Sp}^\bullet{}_X$ 上的离散递增滤过 $G^\bullet := G^\bullet\left(\widetilde{\quad}\mathsf{Sp}^\bullet{}_X\right)$（更$\widetilde{\quad}$准确地说，是复形 $\mathsf{Sp}^\bullet{}_{X,x}$ 上的滤过）。离散滤过 $G^\bullet$ 与微分相容，并且$\widetilde{\quad}$伴随分次复形是正合的。由于滤过$G^\bullet$ 是离散的（即 $G^k = 0$ 若 $k < 0$），这意味着复形 $\mathsf{Sp}^\bullet{}_X$ 是正合的。

$G^\bullet$ 的定义如下：对于 $0 \leqslant p \leqslant n$ 和 $k \in \mathbb{N}$，记

$$G^{k,-p} := G^k\left(\mathscr{D} \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)\right) = F^{k-p}(\mathscr{D}) \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)$$

其中 $F^\bullet(\mathscr{D})$ 是$\mathscr{D}$中的阶滤过。我们还记 $G^{k,1} := G^k(\mathscr{O}_X) = \mathscr{O}_X$，对所有 $k \in \mathbb{N}$均成立。

对于每个 k, p，都有 $\epsilon_{-p}(G^{k,-p}) \subset G^{k,-p+1}$，因为对任意 $P \in F^{k-p}(\mathscr{D})$，都有 $P\partial_i \in F^{k-p+1}(\mathscr{D})$。因此，$G^{k,\bullet}$ 对任意 k 都是一个 $\mathscr{O}_X$-模复形，而 $(G^{k,\bullet})_k$ 是复形 $\mathsf{Sp}^\bullet{}_X$的一个离散递增穷尽滤过$\widetilde{\quad}$（简记为 $G^\bullet$）。

对于每个 $0 \leqslant p \leqslant n$，族 $(G^{k,\,-p})_k$ 是 $\mathscr{D}$– 模 $\mathscr{D} \otimes \bigwedge^p \mathscr{D}\mathsf{er}\,(\mathscr{O}_X)$ 上的离散递增穷尽滤过，其关联分次 $\mathscr{O}_X$–模

$$\mathrm{gr}_{G^{\bullet,-p}}\left(\mathscr{D} \otimes \bigwedge^p \mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)\right)$$

自然同构于

$$\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})[-p]\otimes\bigwedge^{p}\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X).$$

最后一个同构源于以下事实：$\bigwedge^p\mathscr{D}\mathbf{er}\,(\mathscr{O}_X)$是局部自由的$\mathscr{O}_X$–模，因此是$\mathscr{O}_X$–平坦的。

$\widetilde{\ }$于是，伴随分次复形 $\mathbf{gr}_{G^\bullet}(\mathbf{Sp}^\bullet)$ 为

$$0\to\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})[-n]\otimes\bigwedge^{n}\mathscr{D}er(\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\tau_{-n}}\cdots\xrightarrow{\tau_{-1}}\mathrm{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})\xrightarrow{\tau_0}\mathscr{O}_X\to 0$$

其中，微分 $\tau_\bullet=\mathbf{gr}(\epsilon_\bullet)$ 作用为

$$\begin{aligned}\tau_0(Q)&=Q_0,\\ \tau_{-1}(Q\otimes\partial_i)&=Q\sigma(\partial_i),\\ \tau_{-p}(Q\otimes(\partial_{i_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_p}))&=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1}Q\sigma(\partial_{i_j})\otimes(\partial_{i_1}\wedge\cdots\widehat{\partial_{i_j}}\cdots\wedge\partial_{i_p}))\ \ (2\leqslant p\leqslant n),\end{aligned}$$

其中，张量积取在$\mathscr{O}_X$上，Q_0是 $Q\in\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$的 $0-th$次齐次分量，而$\sigma(\,)$ 是相应微分算子的主符号（见 (2.1)）。因此，最后这个复形正是交换环 $\mathbf{gr}_{F^\bullet}(\mathscr{D})$中关于正则序列 $\{\sigma(\partial_1),\ldots,\sigma(\partial_n)\}$ 的增广 Koszul 复形。故此复形无挠上同调。

2.5 $\mathbf{D}_X$–模的德拉姆复形

这里我们遵循 [47, 第 I 章 (2.6)]。设$\mathscr{M}$ 是一个左$\mathscr{D}_X$–模。左正合函子

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X,*):\mathrm{Mod}(\mathscr{D}_X)\longrightarrow\mathrm{Mod}(\mathbb{C}_X)$$

可导出得到一个函子

$$\mathbb{R}\,\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X,*):D^b(\mathscr{D}_X)\longrightarrow D^b(\mathbb{C}_X).$$

这里，$\mathbf{Mod}(A_X)$表示（左） A_X–模的范畴，而 $D^b(A_X)$表示具有有界上同调的 A_X–模复形的导出范畴。

（2.8）定义。 设$\mathscr{M}$是一个左$\mathscr{D}_X$–模。复形 $\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X,\ \mathscr{M})$属于 $D^b(\mathbb{C}_X)$，称为$\mathscr{M}$的德拉姆复形。记作$\mathrm{DR}(\mathscr{M})$。

设$\mathscr{M}$ 是一个左$\mathscr{D}_X$–模。由于$\mathscr{M}$ 带有可积联络，因此存在一个层的 $\mathbb{C}_X$–向量空间自然态射

$$\nabla:\mathscr{M}\longrightarrow\Omega^1_X\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{M}$$

局部由下式给出

$$\nabla(m)=\sum_{i=1}^{n}dx_i\otimes\partial_i(m).$$

(2.9) 命题。 [47, 引理 (2.6.3)] 对于任意左$\mathscr{D}_X$–模$\mathscr{M}$，复形$\mathrm{DR}(\mathscr{M})$ 可由复形表示

$$\Omega_X^\bullet(\mathscr{M}) := 0 \to \mathscr{M} \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^1 \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \xrightarrow{\nabla} \cdots \xrightarrow{\nabla} \Omega_X^n \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{M} \to 0$$

集中于度数 $[0, n]$，其中 $\nabla(\omega \otimes m) = \omega \wedge \nabla(m) + (-1)^{\deg(\omega)} d\omega \otimes m.$

证明。由注记 (2.7)，复形 $\widetilde{\mathrm{Sp}}^\bullet$ 是左 D_X–模 O_X 的局部自由分解。因此，$\mathrm{DR}(\mathrm{M})$ 可由 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(\mathrm{Sp}^\bullet, \mathrm{M})$ 表示。此外，对于 $p = 0, \ldots, n$，O_X–模 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(\mathrm{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathrm{Der}(\mathrm{O}_X), \mathrm{M})$ 与 $\Omega_X^p \otimes \mathrm{M}$ 同构。并且存在一个自然的拟同构，在 $D^b(\mathbb{C}_X)$ 中，从 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}_X}(\mathrm{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^\bullet \mathrm{Der}(\mathrm{O}_X), \mathrm{M})$ 到 $\Omega_X^\bullet \otimes \mathrm{M}$。证毕。

沿用 [47, 第 1 章，(4.1)], 若 $\mathscr{M}$ 是导出范畴 $D_c^b(\mathscr{D}_X)$ （左$\mathscr{D}_X$–模的复形，具有有界且凝聚的上同调）中的一个复形，则复形

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X)$$

右$\mathscr{D}_X$–模具有有界且凝聚的上同调。

(2.10) 定义。 设$\mathscr{M}$ 是 $D_c^b(\mathscr{D}_X)$中的一个复形。$\mathscr{M}$ 的对偶是复形$\mathscr{M}^*$ ，它定义在 $D^b(\mathscr{D}_X)_c$中：

$$\mathscr{M}^* = \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_X}(\Omega_X^n, \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}, \mathscr{D}_X))[n]$$

其中 $n =$ 维数 X。

$\mathscr{M}^*$ 的对偶也记作 $\mathrm{D}(\mathscr{M})$。全纯$\mathscr{D}_X$–模$\mathscr{M}$ 的对偶$\mathscr{M}^*$ 也是全纯的（见 [47, 第 I 章，(4.1)] 及定理 (2.5) ）。$\mathscr{O}_X^*$ 的对偶自然同构于 $\mathscr{O}_X$，并且在导出范畴中存在一个自然同构 $D^b(\mathbb{C}_X)$

$$\mathrm{DR}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{M}^*, \mathscr{O}_X).$$

最后一个复形称为$\mathscr{M}^*$的（全纯）解复形。

2.6 重新审视格罗滕迪克比较定理

（某个版本的）格罗滕迪克比较定理的表述如下（见第 1.1 节）：

(2.11) 定理。 ([32, 定理 2]) </style}若 是复流形 中的一个除子，且：$U := X \smallsetminus D \hookrightarrow X$ 是包含映射，则德拉姆态射

$$\Omega_X^\bullet(\star D) \longrightarrow \mathbb{R}j_*\mathbb{C}_U \tag{17}$$

是一个拟同构。

(2.12) 注。如果 D 是正规交叉除子，该结果归功于 Atiyah-Hodge [34]。格罗滕迪克的证明利用 Hironaka 奇点消解，将一般情形归结为正规交叉除子的情形。

[32] 中的定理 2 更一般。对于约化复解析空间 X 和解析闭子集 $D \subset X$，在假设 $U := X \smallsetminus D$ 在 X 中非奇异且稠密，并且 U 可在局部由一个方程定义的情况下，该定理成立。

Mebkhout（[47, 第 2 章，第 §2] 节）[2] 将 Grothendieck 比较定理解释为 {style id='4'>正则性 的性质，即关于 {style id='6'>D_X–模 {style id='9'>O_X 的正则性。这种正则性等价于以下事实：在导出范畴 $D^b(\mathbb{C}_X)$ 中，自然态射

$$\mathrm{DR}(\mathscr{O}_X(\star D)) \to \mathrm{DR}(\mathbb{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)$$

对于任意除子 D，都是拟同构。这个最后的态射就是德拉姆态射 (17)，因为 $\mathbf{DR}(\mathscr{O}_X(\star D))$ 等于 $\Omega^\bullet_X(\star D)$，且由庞加莱引理，$\mathbf{DR}(\mathbb{R}j_*j^{-1}\mathscr{O}_X)$ 与 $\mathbb{R}j_*j^{-1}\mathbf{DR}(\mathscr{O}_X) = \mathbb{R}j_*j^{-1}\Omega^\bullet_X \simeq \mathbb{R}j_*\mathbb{C}_U$ 拟同构。

§3 自由除子与对数 D–模

3.1 关于自由除子的对数微分算子层

设 X 是一个维数为 n 的复解析流形，$D \subset X$ 是一个超曲面。记 $U = X \smallsetminus D$ 和 $j\colon U \hookrightarrow X$ 为相应的开浸入。

当 D 是自由除子时，线性微分算子层 $\mathscr{D}_X$ 有一个很好的子环层，即相对于 D 的对数微分算子层，记作 $\mathscr{V}_X^D$。它是 $\mathscr{D}_X$ 的子环层，其茎为

$$\mathscr{V}_{X,x}^D = \{P \in \mathscr{D}_{X,x} \mid P(\mathscr{I}_x^j) \subset \mathscr{I}_x^j \ \forall j \geqslant 0\}.$$

此外，$\mathscr{V}_X$ 是一个滤过环层，其滤过由 $\mathscr{D}_X$ 中的阶滤过诱导；它的分次环是交换的，且典范映射

$$\mathrm{Sym}_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}er(-\log D) \longrightarrow \mathrm{gr}\,\mathscr{V}_X^D \tag{18}$$

是交换分次 $\mathscr{O}_X$-代数之间的同构（见 [9, 推论 2.1.6]；与第 2.3 节对照）。因此，$\mathscr{V}_X^D$ 由 $\mathscr{O}_X$ 和 $\mathscr{D}\mathbf{er}(-\log\ D)$ 生成，并且 $\mathscr{V}_X^D$ 是将 $\mathscr{D}\mathbf{er}(-\log\ D)$ 视为李代数丛所得的包络代数（参见 [20, §(2.1)]）。由此可推得 $\mathscr{V}_X^D$ 是左、右相干环层（可按 $\mathscr{D}_X$ 的情形，即第 2.1 节中的方法处理，也可参照 [4, 定理 1.2.5]），并且它在 X 中每一点处的茎都是左、右诺特环，且整体同调维数有限 $\leqslant 2n$（参见 [4, 附录 IV, 命题 4.14 和定理 5.1]）。

3.2 对数 Spencer 复形

从现在起，我们假设 $D \subset X$ 是复流形 X 上的一个自由除子，其维数为 $n \geqslant 1$。

[2] 遵循 Mebkhout 的博士论文

（3.1）定义。[9, 定义 3.1。1] 与 $D \subset X$ 相关联的对数 *Spencer* 复形是如下左 $\mathscr{V}_X^D$–模复形，记作 $\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$:

$$0 \to \mathscr{V}_X^D \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^n \mathscr{D}er(-\log D) \xrightarrow{\epsilon_{-n}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{-2}} \mathscr{V}_X^D \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{D}er(-\log D) \xrightarrow{\epsilon_{-1}} \mathscr{V}_X^D$$

其中微分 $\epsilon_\bullet$ 定义为

$$\epsilon_{-1}(P \otimes \delta) = P\delta,$$

$$\epsilon_{-p}(P \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_p)) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} P\delta_i \otimes (\delta_1 \wedge \cdots \widehat{\delta_i} \cdots \wedge \delta_p)) +$$

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant p} (-1)^{i+j} P \otimes ([\delta_i, \delta_j] \wedge \delta_1 \wedge \cdots \widehat{\delta_i} \cdots \widehat{\delta_j} \cdots \wedge \delta_p) \ \ (2 \leqslant p \leqslant n).$$

我们用 $\widetilde{\mathrm{Sp}}^\bullet(\log D)$ 表示增广复形

$$\mathrm{Sp}^\bullet(\log D) \xrightarrow{\epsilon_0} \mathscr{O}_X$$

其中 $\epsilon_0(P) = P(1)$。

对于自由除子 D，复形 $\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$ 是左 $\mathscr{V}_X^D$-模 $\mathscr{O}_X$[9, 的局部自由分解。定理 3.1。2]（这是命题 (3.6) 的一个特例）。

(3.2) 注。对数 Spencer 复形应与 Spencer 复形进行比较（见定义 (2.6)）。

对数 Spencer 复形推广了附录 A (A.4)] 中给出的正规交叉除子 $D \subset X$对应的复形。实际上，这一定义是 Lie-Rinehart 代数的 Rinehart 复形的层版本（见 [59]）。

一个对数 联络（相对于 D）定义在一个 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathscr{E}$ 上，是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla : \mathscr{E} \to \Omega_X^1(\log D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E}$$

满足 Leibniz 法则，即 $\nabla(ae) = da \otimes e + a\nabla(e)$ 对于任意全纯函数 a 和任意局部截面 e （取自$\mathscr{E}$）。

与经典情形（见第 2.5 节）一样，这样的 ∇ 可以扩展为一族 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla^p : \Omega_X^p(\log D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E} \to \Omega_X^{p+1}(\log D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E},$$

其中 $\nabla^p(\alpha \otimes e) = d\alpha \otimes e + (-1)^p \alpha \wedge \nabla(e)$ 对于任意对数 p-形式 α 以及任意局部截面 e（取自 $\mathscr{E}$）。

若对所有 $p \geqslant 0$均有 $\nabla^{p+1} \circ \nabla^p = 0$，则称对数联络 ∇ 是可积的。在这种情况下，$(\mathscr{E}\ \nabla)$ 的对数 ***de Rham*** 复形按定义为以下复形（由复向量空间层构成）

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{E}) := \mathscr{E} \to \Omega_X^1(\log D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E} \to \Omega_X^2(\log D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E} \to \cdots \to \Omega_X^n(\log D) \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E},$$

其中$\mathscr{E}$ 置于 0 次度。

任意$\mathcal{O}_X$-模 $\mathscr{E}$ 上的对数联络 ∇ 都会导出对数向量场 $\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log\ D)$ 在$\mathscr{E}$上的作用

$$(\delta, e) \longmapsto \nabla_\delta(e) = \langle \delta, \nabla(e) \rangle$$

对任意对数向量场 δ 以及$\mathscr{E}$的任意局部截面 e，其中 $\langle \delta, \nabla(e) \rangle$ 由对数向量场对对数1-形式的收缩所诱导。

显然，外微分 $d\colon \mathcal{O}_X \to \Omega^1_X(\log\ D)$ 是一个可积的对数联络，并且 $\Omega^\bullet_X(\log D)(\mathcal{O}_X) = \Omega^\bullet_X(\log\ D)$。

当 D 为自由除子时，以下结果成立，其证明本质上与经典情形相同。

(3.3) 命题。 设 D 是一个自由除子，且 ∇ 是$\mathcal{O}_X$-模 $\mathscr{E}$上的对数联络。以下性质等价:

(i) ∇ 可积。

(ii) 对所有对数向量场 δ, δ'，$\nabla_{[\delta,\delta']} = [\nabla_\delta, \nabla_{\delta'}]$。

由于对数微分算子层$\mathscr{V}_X^D$是李代数丛$\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log\ D)$ 的包络代数（前提是 D是自由除子），我们得到如下推论。

(3.4) 推论。 假设 D 是自由除子，并设$\mathscr{E}$ 是一个$\mathcal{O}_X$-模。以下数据等价:

(a) $\mathscr{E}$上的可积对数联络 ∇ 。

(b) $\mathscr{E}$ 上的左$\mathscr{V}_X^D$-模结构，该结构扩展其$\mathcal{O}_X$-模结构 $re.$

此外，在 ***(b)*** 中，对数导子 δ 在$\mathscr{E}$ 上的作用由 $\delta \cdot e = \nabla_\delta(e)$ 给出，其中 e 是$\mathscr{E}$的任意局部截面。

从现在起，我们假设 D 是自由除子。

任何有限秩的局部自由$\mathcal{O}_X$-模，只要配备了可积对数联络，就简称为可积对数联络（ILC）。可积对数联络的例子包括可逆$\mathcal{O}_X$-模$\mathcal{O}_X(kD)$, $k \in \mathbb{Z}$，它们自然具有左$\mathscr{V}_X^D$-模结构。

我们按如下方式定义任意左$\mathscr{V}_X^D$-模的对数 Spencer 复形。

(3.5) 定义。[12] 设 $\mathscr{E}$ 是一个左 $\mathscr{V}_X^D$ 模。$\mathscr{E}$ 的对数 ***Spencer*** 复形（相对于 $D \subset X$）是如下左 $\mathscr{V}_X^D$–模复形，记作 $\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)(\mathscr{E})$:

$$0 \to \mathscr{V}_X^D \otimes_{\mathcal{O}_X} \bigwedge^n \mathscr{D}er(-\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E} \xrightarrow{\epsilon_{-n}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{-2}} \mathscr{V}_X^D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{D}er(-\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E} \xrightarrow{\epsilon_{-1}} \mathscr{V}_X^D \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{E}$$

其中微分 $\epsilon_\bullet$ 定义为

$$\epsilon_{-1}(P\otimes\delta\otimes e)=P\delta\otimes e-P\otimes\delta e,$$
$$\epsilon_{-p}(P\otimes(\delta_1\wedge\cdots\wedge\delta_p))\otimes e=$$
$$\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}P\delta_i\otimes(\delta_1\wedge\cdots\widehat{\delta_i}\cdots\wedge\delta_p))\otimes e-\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}P\otimes(\delta_1\wedge\cdots\widehat{\delta_i}\cdots\wedge\delta_p))\otimes\delta_i e+$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}(-1)^{i+j}P\otimes([\delta_i,\delta_j]\wedge\delta_1\wedge\cdots\widehat{\delta_i}\cdots\widehat{\delta_j}\cdots\wedge\delta_p)\otimes e\ \ (2\leqslant p\leqslant n).$$

我们用 $\widetilde{\mathrm{Sp}}^\bullet(\log D)(\mathscr{E})$ 表示增广复形

$$\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)(\mathscr{E})\xrightarrow{\epsilon_0}\mathscr{E}$$

其中 $\epsilon_0(P\otimes e)=Pe$。

注意，对于 $\mathscr{E}=\mathscr{O}_X$，我们有 $\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X)=\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$。

(3.6) 命题。 对于任意可积对数联络$\mathscr{E}$，$\mathscr{E}$ 的对数 ***Spencer*** 复形（相对于 $D\subset X$）$\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)(\mathscr{E})$ 是$\mathscr{E}$的局部自由分解。

该命题的证明与备注（2.7）中的证明类似。具体而言，我们在复形 $\widetilde{\mathrm{Sp}}^\bullet(\log D)(\mathscr{E})$ 上考虑离散递增滤过 $G^\bullet:=G^\bullet\left(\widetilde{\mathrm{Sp}}^\bullet(\log D)(\mathscr{E})\right)$，对于 $0\leqslant p\leqslant n$ 和 $k\in\mathbb{N}$，其定义如下

$$G^{k,-p}:=G^k\left(\mathscr{V}_X^D\otimes_{\mathscr{O}_X}\bigwedge^p\mathscr{D}er(-\log D)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{E}\right)=F^{k-p}(\mathscr{V}_X^D)\otimes_{\mathscr{O}_X}\bigwedge^p\mathscr{D}er(-\log D)\otimes_{\mathscr{O}_X}\mathscr{E}$$

其中 $F^\bullet(\mathscr{V}_X^D)$ 是由$\mathscr{D}$上的阶滤过诱导的滤过。我们还将 $G^{k,1}:=G^k(\mathscr{E})=\mathscr{E}$记作，适用于所有 $k\in\mathbb{N}$。伴随分次复形可以看作$\mathscr{O}_X$ 上的$\mathscr{E}$ 与关于 $\{\sigma(\delta_1),\ldots,\sigma(\delta_n)\}\subset$ 的增广 Koszul 复形的（局部）张量积，其中 $\mathrm{gr}\,\mathscr{V}_X^D$, $\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$ 是$\mathscr{D}\mathrm{er}\ (-\log\ D)$的局部$\mathscr{O}_X$-基。该复形是正合的，因为$\mathscr{E}$ 在$\mathscr{O}_X$上局部自由，并且 $\mathrm{gr}\,\mathscr{V}_X^D$是$\mathscr{O}_X$上以变量 $\{\sigma(\delta_1),\ldots,\sigma(\delta_n)\}$ 为变量的（局部）多项式环（见同构（18））。

通过使用对数 Spencer 分解 (3.6)，如同$\mathscr{D}_X$ 的情形（见第 2.4 节），我们得到复向量空间层复形的典范同构

$$\mathscr{H}om_{\mathscr{V}_X^D}(\mathrm{Sp}^\bullet(\log D),\mathscr{E})\simeq\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{E}),$$

对于任意左$\mathscr{V}_X^D$-模$\mathscr{E}$，从而在导出范畴中得到一个同构 $\mathbb{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathscr{V}_X^D}(\mathscr{O}_X,\mathscr{E})\simeq\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{E})$。这与命题 (2.9) 完全类似。

3.3 对数比较定理的一个$\mathscr{D}$–模判据

Grothendieck 比较定理（见 (1.1) 和 (2.6)）告诉我们，通过将伴随映射 $\Omega_X^\bullet(\star D)\to\mathbb{R}j_*j^{-1}\Omega_X^\bullet(\star D)=\mathbb{R}j_*\Omega_{X\smallsetminus D}^\bullet=j_*\Omega_{X\smallsetminus D}^\bullet$ 与庞加莱拟同构 $\Omega_X^\bullet(\star D)\to\mathbb{R}j_*\mathbb{C}_{X\smallsetminus D}\Omega_X^\bullet(\star D)\to\mathbb{R}j_*j^{-1}$ 所诱导映射的逆复合而得到的自然映射 $\Omega_X^\bullet(\star D)\to\mathbb{R}j_*\mathbb{C}_{X\smallsetminus D}$

是复向量空间层的导出范畴中的一个同构。定义 (1.4) 告诉我们，若自然态射

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet(\star D) \tag{19}$$

是一个准同构。下面说明在自由除子的情形下，如何从 $\mathscr{D}$–模理论的角度理解这一映射。

一方面，我们有如下典范同构（在导出范畴中）

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{V}_X^D}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X\right).$$

取 $\mathscr{D}_X$-对偶 $\mathbf{D}(-)$（见定义 (2.10)），得到

$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X\right) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathbb{D}\,\mathscr{O}_X, \mathbb{D}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X\right)\right) \simeq$$
$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathscr{O}_X, \mathbb{D}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X\right)\right) = \mathrm{DR}\left(\mathbb{D}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X\right)\right),$$

并利用 对偶公式 [12, 推论 3.1.2]（另见 [56, 定理 (A.32)]），得到 in

$$\mathbb{D}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X\right) \simeq \mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D),$$

因此

$$\Omega_X^\bullet(\log D) \simeq \cdots \simeq \mathrm{DR}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D)\right). \tag{20}$$

另一方面，我们还有另一个典范同构（见命题（2.9））

$$\Omega_X^\bullet(\star D) = \Omega_X^\bullet(\mathscr{O}_X(\star D)) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(\star D)) = \mathrm{DR}(\mathscr{O}_X(\star D)). \tag{21}$$

关键在于，包含映射 $\mathscr{O}_X(D) \subset \mathscr{O}_X(\star D)$ 诱导出一个典范的左 $\mathscr{D}_X$-线性映射

$$\varrho : \mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D) \longrightarrow \mathscr{O}_X(\star D), \tag{22}$$

并且我们有如下定理（[12, 推论 4.2] 和 [55, 推论 1.7.2]）：

(3.7）定理。 在上述假设下，以下性质成立 :

(1) 对数比较映射 *(19)* 在 DR 函子以及典范同构 *(20)* 和 *(21)* 下对应于映射 *(22)*。

(2) 以下性质等价:

(2-1) 对于 D，对数比较定理成立，即映射 *(19)* 是拟同构。*(2-2)* 映射 *(22)* 是（$\mathscr{D}_X$-模的导出范畴中的）同构。

(2-3) 典范映射

$$j_!\mathbb{C}_{X\smallsetminus D} \longrightarrow \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X(-D))$$

是一个拟同构。

(3.8) 注。（a）请注意，上述性质（2-3）是通过取 Grothendieck-Verdier 对偶得到的。也就是说，$(\mathbb{R}j_*\mathbb{C}_{X\smallsetminus D})^\vee \simeq j_!\mathbb{C}_{X\smallsetminus D}$ 和

$$(\Omega_X^\bullet(\log D))^\vee \simeq \left(\mathrm{DR}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D)\right)\right)^\vee \overset{(\star)}{\simeq} \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D), \mathscr{O}_X\right) \simeq$$
$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{V}_X^D}\left(\mathscr{O}_X(D), \mathscr{O}_X\right) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{V}_X^D}\left(\mathscr{O}_X^*, \mathscr{O}_X(D)^*\right) \simeq$$
$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{V}_X^D}\left(\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(-D)\right) \simeq \Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X(-D)),$$

这里我们在 $(\star)$ 中使用了 Mebkhout 局部对偶公式（见 [47, 第 I 章, （4.3）]; 另见 [54]）。（b）还请注意，复形 $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X(-D))$ 是 $\Omega_X^\bullet$ 的子复形，因为局部有 $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X(-D)) = f\Omega_X^\bullet(\log D)$，其中 $f=0$ 是 D 的一个约化局部方程，并且 $f\Omega_X^p(\log D) \subset \Omega_X^p$ 对于 $p = 0, \ldots\ldots, n$。此外，

$$\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X(-D)) \simeq \cdots \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D), \mathscr{O}_X\right) \simeq$$
$$\mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathbb{D}\mathscr{O}_X, \mathbb{D}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X(D)\right)\right) \simeq \mathbb{R}\mathscr{H}om_{\mathscr{D}_X}\left(\mathscr{O}_X, \mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X\right) = \mathrm{DR}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X\right)$$

并且我们可以证明，包含映射 $\Omega_X^\bullet(\log D)(\mathscr{O}_X(-D)) \hookrightarrow \Omega_X^\bullet$ 来自 $\mathscr{D}_X$-模之间的映射

$$\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X, \quad P \otimes a \longmapsto P(a), \tag{23}$$

通过应用 $\mathbf{DR}(-)$ 函子。

(3.9) 备注。让我们具体理解映射 (22) 是同构的意义。首先，(22) 是同构，当且仅当它在茎上是同构；显然，对于每个 $p \in X \smallsetminus D$， ϱ_p 都是同构。取一点 $p \in D$、 D的一个约化局部方程 $f \in \mathscr{O}_{X,\,p}$，以及$\mathscr{D}\mathbf{er}(-\log D)_p$的一组基 $\delta_1, \ldots, \delta_n \in$，其中 $\delta_i(f) = \alpha_i f$, $\alpha_i \in \mathscr{O}_{X,\,p}$, $i = 1, \ldots, n$。另一方面，$\mathscr{O}_{X,\,p}(D)$ 作为$\mathscr{V}_{X,\,p}^D$-模由 f^{-1} 生成，而其核

$$P \in \mathscr{V}_{X,p}^D \longmapsto P(f^{-1}) \in \mathscr{O}_{X,p}(D)$$

是由 $\delta_1 + \alpha_1, \ldots, \delta_n + \alpha_n$ 生成的左理想，即

$$\mathscr{O}_{X,p}(D) \simeq \mathscr{V}_{X,p}^D / \mathscr{V}_{X,p}^D\langle \delta_1 + \alpha_1, \ldots, \delta_n + \alpha_n\rangle.$$

因此，映射 $\varrho_p : \mathscr{D}_{X,\,p} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_{X,\,p}^D} \mathscr{O}_{X,\,p}(D) \longrightarrow \mathscr{O}_{X,\,p}(\star D)$ 是一个同构（在$\mathscr{D}_{X,\,p}$-模的导出范畴中），当且仅当满足以下性质:

(i) 复形 $\mathscr{D}_{X,\,p} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_{X,\,p}^D} \mathscr{O}_{X,\,p}(D)$ 在上同调次数 $\neq 0$ 上正合，并且

(ii) $\mathscr{O}_{X,p}(\star D) \simeq \mathscr{D}_{X,p}/\mathscr{D}_{X,p}\langle \delta_1 + \alpha_1, \ldots, \delta_n + \alpha_n \rangle$.

(ii) 中的同构来自映射

$$P \in \mathscr{D}_{X,p} \longmapsto P(f^{-1}) \in \mathscr{O}_{X,p}(\star D),$$

因此，性质 (ii) 等价于

(ii-1) $\mathscr{O}_{X,p}(\star D)$ 由 f^{-1} 生成，作为 $\mathscr{D}_{X,p}$-模，并且

(ii-2) $f^{-1} \in \mathscr{O}_{X,p}(\star D)$ 的 $\mathscr{D}_{X,p}$-湮灭子是由 $\delta_1 + \alpha_1, \ldots, \delta_n + \alpha_n$ 生成的左理想。

注意，性质 (ii-2) 等价于： f^{-1} 的 $\mathscr{D}_{X,p}$-湮灭子由一阶算子生成。由 [64] 可知，后一性质意味着芽 f 的 b-函数没有严格小于 -1 的整数根，因此性质 (ii-2) 蕴含性质 (ii-1)（根据伯恩斯坦函数方程）。我们得出，映射 ϱ_p 是同构，当且仅当以下性质成立：

(i) 复形 $\mathscr{D}_{X,p} \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{T}_X^D,p} \mathscr{O}_{X,p}(D)$ 在上同调次数 $\neq 0$ 上正合，并且

(ii-2) $f^{-1} \in \mathscr{O}_{X,p}(\star D)$ 的 $\mathscr{D}_{X,p}$-湮灭子是由 $\delta_1 + \alpha_1, \ldots, \delta_n + \alpha_n$ 生成的左理想。

回顾以下定义 [16]。

(3.10) 定义。 称自由除子 $D \subset X$ 为 Spencer，如果复形$\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{T}_X^D} \mathscr{O}_X$ 集中在上同调次数 0，且$\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{T}_X^D} \mathscr{O}_X$ 是全纯的。

如果对 D 的对数比较定理成立，那么 $\mathbf{D}(\mathscr{O}_X(\star D)) \simeq \mathbf{D}\left(\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{T}_X^D} \mathscr{O}_X(D)\right) \simeq \mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{T}_X^D} \mathscr{O}_X$，因此 D是 Spencer，且 $\mathbf{D}(\mathscr{O}_X(\star D)) \simeq \mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{T}_X^D} \mathscr{O}_X$（因为$\mathscr{O}_X(\star D)$及其对偶都是全纯的）。

$\mathbb{L}$要检查复形 $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{T}_X^D} \mathscr{O}_X$ 是否集中在上同调次数 0，可以使用对数 Spencer 复形 $\mathbf{Sp}^\bullet(\log D)$，它是$\mathscr{O}_X$ 作为左$\mathscr{T}_X^D$-模的局部自由分解。因此，我们需要检查复形$\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{T}_X^D} \mathbf{Sp}^\bullet(\log D)$ 是否集中在上同调次数 0。

为此，我们可以再次考虑复形 $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{T}_X^D} \mathbf{Sp}^\bullet(\log D)$ 上的离散递增滤过 $G^\bullet := G^\bullet\left(\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{T}_X^D} \mathbf{Sp}^\bullet(\log D)\right)$，其定义为：对于 $0 \leqslant p \leqslant n$ 和 $k \in \mathbb{N}$,

$$G^{k,-p} := G^k\left(\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(-\log D)\right) = F^{k-p}(\mathscr{D}_X) \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(-\log D)$$

其中 $F^\bullet(\mathscr{D}_X)$ 是$\mathscr{D}$中的阶滤过。伴随分次复形局部来看是关于 $\{\sigma(\delta_1)$、……、$\sigma(\delta_n)\} \subset \mathbf{gr}\,\mathscr{D}_X$、$\{\delta_1$、……、$\delta_n\}$的 Koszul 复形，其中后者是局部

$\mathcal{O}_X$-基；但一般而言，这并非正则序列[3]，因此 $\mathrm{gr}_{G^\bullet}\left(\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathrm{Sp}^\bullet(\log\ D)\right)$并不集中于上同调次数0。这一事实引出了以下定义 [9, 定义 4.1.1]。

(3.11) 定义。我们称自由除子 $D \subset X$ 在点 $p \in D$ 处是 Koszul 的，如果其某个（因而也就是任意一个）局部基 $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ 的 $\mathscr{D}er(-\log\ D)_p$ 的符号 $\{\sigma(\delta_1), \ldots, \sigma(\delta_n)\}$ 在 $\mathrm{gr}\mathscr{D}_{X,p}$ 中构成一个正则序列；若 D 在任意点 $p \in D$处都具有这一性质，则称其为 Koszul 的。

注意，对于自由除子 $D \subset X$，Koszul 性质等价于复形 $\mathrm{gr}\ \mathscr{D}_X \otimes_{\mathrm{gr}\,\mathscr{V}_X^D} \mathcal{O}_X$ 集中在上同调次数 0。此时，模 $\mathrm{gr}\ \mathscr{D}_X \otimes_{\mathrm{gr}\,\mathscr{V}_X^D} \mathcal{O}_X$ 的维数自动为 $n = \dim\ X$。

任意 Koszul 自由除子 D 都是 Spencer 的，因为根据定义，复形 $\mathrm{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$ 集中在上同调次数0（相对于 $G^\bullet$ 的分次复形也集中在上同调次数0）；而 $\mathrm{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathrm{O}_X$ 是全纯的，因为它在局部可表示为 $\mathrm{D}_{X,p}/\mathrm{D}_{X,p}\langle\delta_1, \ldots, \delta_n\rangle$，其中 $\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ 是 $\mathrm{Der}\,(-\log\ D)_p$ 的一个基，并且 $\mathrm{gr}\ \mathrm{D}_{X,p}$ 除以理想 $\langle\sigma(\delta_1), \ldots, \sigma(\delta_n)\rangle$ 所得的商的维数为 n。此外，在这种情况下，$\mathrm{gr}\left(\mathrm{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathrm{O}_X\right) \simeq \mathrm{gr}\ \mathrm{D}_X \otimes_{\mathrm{gr}} \mathrm{V}_X^D \mathrm{O}_X$,$\{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$ 是理想 $\mathrm{D}_{X,p}\langle\delta_1, \ldots, \delta_n\rangle$ 关于阶滤过的一个对合基，而 $\mathrm{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathrm{O}_X$ 的特征簇（局部地）由 $\sigma(\delta_1) = \cdots = \sigma(\delta_n) = 0$ 给出。

事实上，自由除子为 Koszul 自由的条件，等价于 D [60, §3] 的对数分层局部有限；或者等价地，D 的任意对数分层在*loc. cit.* 所述意义下都是全纯的（参见 [28, 定理（7.4）]）。特别地，任何平面曲线和任何自由超平面配置都是 Koszul 自由除子。

另一方面，我们知道任何局部拟齐次自由除子都是 Koszul 自由的 [10][4]。此外，任何局部拟齐次自由除子的约化局部方程 $f = 0$ 的 b-函数的根关于 -1 对称（参见 [11, 定理 5.6], [56, 推论（4.2）]），且 f^s 的$\mathscr{D}[s]$-湮灭子由一阶算子生成 [11, 推论 5.8]。由此我们基于定理（3.7）推得定理（1.5）的一个纯代数证明（参见 [56, 推论（4.5）和注释（4.6）]）。

(3.12) 注。还请注意，对于任意超平面配置，无论其是否自由，方程为 $f = 0$，无论其是否约化，若 $f^{-1} \in \mathcal{O}_{X,p}(*D)$ 的 $\mathscr{D}_{X,p}$–湮灭子由阶数为 1 [66, Th. 5.3] 的算子生成。正如前面提到的，见第 1.4 节，对任意超平面配置 [2]，对数比较定理都成立。

如果自由除子 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是 Spencer 的，且其多项式定义方程为 $f = 0$，那么根据 [17, 推论 3.1 和 4.1]，D 满足对数比较定理，当且仅当 $\mathscr{D}$ 中 $1/f$ 的湮灭理想由一阶算子生成；也就是说，备注 (3.9) 中的条件 (ii.2) 成立。在 [17, 例 5.8] 中，给出了 $\mathbb{C}^3$中三个自由除子的例子，它们由拟齐次多项式（具有严格正权重）定义，却不满足对数比较定理，因此根据定理 (1.5)，它们不是局部拟齐次的。这就对 [11,问题 6.5]中提出的一个问题给出了否定答案。

[3]请记住，由于该环是以变量 $\{\sigma(\delta_1)$、……、$\sigma(\delta_n)\}$ 为变量、系数取自 $\mathcal{O}_X$ 的（局部）多项式环，因此 $\{\sigma(\delta_1)$、……、$\sigma(\delta_n)\}$ 是 $\mathrm{gr}\mathscr{V}_X^D$ 中的正则序列。[4]事实上，容易看出，对于任意局部拟齐次除子，无论其是否自由，D 的对数分层都是局部有限的。

(3.13) 备注。 [51] 中引入的层 $\check{\Omega}^{\bullet}_{D}$ （见 1.6）是 $\Omega^{\bullet}_{X}$ 对其子复形 $\Omega^{\bullet}_{X}(\log D)(\mathscr{O}_X(-D))$的商，因此存在一个由 $\mathbb{C}$-向量空间上的层复形构成的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & j_!\mathbb{C}_{X\smallsetminus D} & \xrightarrow{\text{adj.}} & \mathbb{C}_X & \longrightarrow & \mathbb{C}_D & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \text{q-i}} & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\lambda}} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^{\bullet}_X(\log D)(\mathscr{O}_X(-D)) & \xrightarrow{\text{incl.}} & \Omega^{\bullet}_X & \longrightarrow & \check{\Omega}^{\bullet}_D & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{24}$$

正合行，其中竖直箭头是自然的。底行由三角形

$$\mathscr{D}_X \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{O}_X \longrightarrow \mathscr{O}_X \longrightarrow K^{\bullet} \xrightarrow{+1}$$

通过应用 $\mathbf{DR}(-)$ 函子得到。

由庞加莱引理，(24) 中间的竖直箭头是拟同构，并且 λ 是拟同构当且仅当 $\overline{\lambda}$ 是拟同构。因此，我们可以为定理（3.7）中的 (2) 增添另一条等价性质：

(2-4) 典范映射 $\mathbb{C}_D \longrightarrow \check{\Omega}^{\bullet}_D$ 是拟同构。

利用 [51, 引理 3.3], ，我们得到了定理（1.5）的一种新证明，其中证明了对于任意局部拟齐次除子（不一定是自由除子），映射 $\overline{\lambda}$ 是拟同构。

事实上，类似的论证表明，对数比较定理对任意局部弱拟齐次自由除子都成立；并且事后可知，任何这样的自由除子都是 Spencer 除子（见定义（1.7））（见 [19, 注 3.11]和 [55, 注 1.7.4], ，不过 [19, 注 3.11] 中关于任意对数微分形式都具有非负权重的说法是错误的）。具体而言，我们有如下结论。

(3.14) 定理。如果 $D \subset X$ 是局部弱拟齐次自由除子，那么 D 满足对数比较定理。

证明。根据定理（3.7）（2-3），我们需要证明，对于任意 $p \in D$，复形 $\Omega^{\bullet}_X(\log D)(\mathscr{O}_X(-D))_p$都是正合的。由于 D 是局部弱拟齐次的，因此存在以 p为中心的局部坐标$x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}, \ldots, x_n$，权为 $(w_1, \ldots, w_r, 0, \ldots, 0)$，其中 $i = 1, \ldots, r$均满足 $w_i > 0$，并且 D 在 p 处的约化局部方程 f 在这些坐标下是拟齐次的，且 $\mathrm{wt}(f) > 0$。

根据标准论证（参见 [51]中的引理3.3），复形

$$\Omega^{\bullet}_X(\log D)(\mathscr{O}_X(-D))_p = f\Omega^{\bullet}_X(\log D)_p$$

同伦等价于其零权子复形，因此该定理是以下引理的推论。证毕。

(3.15) 引理。 设 f 是关于权 $(w_1, \ldots, w_r, 0, \ldots, 0)$ 的 $\mathbb{C}\{x_{r+1}, \ldots, x_n\}[x_1, \ldots, x_r]$ 中的拟齐次多项式，且权严格为正。假设 $w_1, \ldots, w_r$ 均严格为正。那么，对于任意 $p > 0$ 以及任意非零拟齐次对数 p-形式 ω，有 权 $\omega > -$权 f。

证明。由于 $f\omega$ 必须是全纯的，我们知道权 $\omega \geqslant -$权 f。不妨设 $\partial f/\partial x_1 \neq 0$（即 f 实际上依赖于 x_1）。

假设 ω 是一个非零对数 p-形式，且 $\mathsf{wt}\ \omega = -\mathsf{wt}\ f$。那么， $\alpha = f\omega$ 是一个非零全纯 p-形式，且 $\mathsf{wt}\ \alpha = 0$。这意味着 α 只依赖于权重为 0 的变量 x_{r+1}、……、 x_n：

$$\alpha = \sum_{r+1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant n} \alpha_{i_1,\ldots,i_p}(x_{r+1},\ldots,x_n)dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}.$$

重新排列变量后，我们可以假设 $\alpha_{r+1,\ldots,r+p} \neq 0$。

由于 ω 是对数的， $p+1$-形式 $df\wedge\omega$ 是全纯的（这是因为 $f\omega$ 和 $fd\omega$ 都是全纯的）。 $df\wedge\omega$ 中 $dx_1\wedge dx_{r+1}\wedge\ldots\wedge dx_{r+p}$ 的系数必定是全纯的，它为

$$\frac{\alpha_{r+1,\ldots,r+p}}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1}.$$

因此， f 在幂级数环 $\mathbb{C}\{x_1、\ldots\ldots、x_r、x_{r+1}、\ldots\ldots、x_n\}$ 中整除 $\alpha_{r+1,\ldots,r+p}\frac{\partial f}{\partial x_1}$。然而， f 和 $\partial f/\partial x_1$ 是关于 $\mathbb{C}\{x_{r+1}、\ldots\ldots、x_n\}[x_1、\ldots\ldots、x_r]$ 的拟齐次多项式。比较齐次部分可得， f 也在 $\mathbb{C}\{x_{r+1}、\ldots\ldots、x_n\}[x_1、\ldots\ldots、x_r]$ 中整除 $\alpha_{r+1,\ldots,r+p}\partial f/\partial x_1$。由于 $\mathsf{wt}(\partial f/\partial x_1)$ $=\mathsf{wt}(f)-\mathsf{wt}(x_1)$，这是不可能的。证毕。

一个自然的问题是刻画满足对数比较定理的自由除子。对于平面曲线，这已在 [14] 中完成；更一般地，对于 Koszul 自由除子，见 [64, 推论 18] 和 [56, 定理 (4.7)]。对于一般的自由除子，以下猜想仍未解决 [14, 猜想 14]:

(3.16) 猜想。设 $D\subset X$ 是一个自由除子。若 D 满足对数比较定理，则 D 是强欧拉齐次的；也就是说，对每个 $p\in D$，在 p 处都有 D 的一个局部约化方程，以及在 p 处的一个向量场芽 χ，它在 p 处是奇异的，并且满足 $\chi(f)=f$。

在 [18, §3, 4] 中，作者给出了一个无穷族的自由除子，对于这些除子，对数比较定理不成立。该族中的任一除子都由一个多项式定义

$$f_{p,q}=(x_1^p-x_2^q)\prod_{i=3}^{n}(x_1x_i+x_2)$$

对于 $n\geqslant 3$ 和 $3\leqslant p<q$。

3.4 重新审视对数 Spencer 复形

回忆一下，见 (3.2)，对于复流形 X 上的自由除子 D，对数 Spencer 复形 $\mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$ 是左 $\mathscr{V}_X^D$-模 $\mathscr{O}_X$ [9, Th. 3.1.2] 的局部自由分解。我们将用自由 $\mathscr{O}_X$–模 $\mathscr{D}\mathrm{er}(-\log\ D)$ 的一个（局部）基 $\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$ 来描述复形 $\mathscr{D}_X\otimes_{\mathscr{V}_X^D}\mathrm{Sp}^\bullet(\log\ D)$。我们可以写成

$$[\delta_i,\delta_j]=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{ij}\delta_k$$

对于 $1 \leqslant i < j \leqslant n$，其中 $\alpha_k^{ij} \in \mathscr{O}_X$ 对于 $k = 1, \ldots, n$。我们还有

$$\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathrm{Sp}^p(\log D) = \mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{V}_X^D} \mathscr{V}_X^D \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(-\log D) \simeq \mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}er(-\log D)$$

对于 $p = 0, \ldots, n$，我们还将 ϵ_{-p} 记为这个左 $\mathscr{D}_X$–模复形的微分。我们将此复形记为 $\mathbf{Sp}^\bullet{}_{\mathscr{D}_X}(\log\ D)$。

对于 $p \in \mathbb{N}$，我们记 $\Lambda_p := \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n\}$。自由左 $\mathscr{D}_X$–模 $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}\mathbf{er}(-\log D) \simeq \bigoplus_{\underline{\mathbf{i}} \in \underline{\Lambda}_p} \mathscr{D}_X\, e_{\underline{\mathbf{i}}}$ 的秩为 $\binom{n}{p}$，其基为 $\{e_{\underline{\mathbf{i}}} \mid \underline{\mathbf{i}} \in \underline{\Lambda}_p\}$，其中 $p = 0, \ldots, n$。从 $\mathscr{D}_X \otimes_{\mathscr{O}_X} \bigwedge^p \mathscr{D}\mathbf{er}(-\log\ D)$ 到 $\bigoplus_{\underline{\mathbf{i}} \in \Lambda_p} \mathscr{D}_X\, e_{\underline{\mathbf{i}}}$ 的一个同构映射为

$$1 \otimes \delta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \delta_{i_p} \mapsto e_{\underline{\mathbf{i}}}.$$

对于 $p \in \mathbb{N}$ 和 $\underline{\mathbf{i}} \in \Lambda_p$，我们采用以下记号：

- $\underline{\mathbf{i}}$ 的支撑为 $\mathrm{supp}(\underline{\mathbf{i}}) = \{i_1, \ldots, i_p\}$。
- $\overline{\text{支撑}(\underline{\mathbf{i}})} = \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \text{支撑}(\underline{\mathbf{i}})$。
- $\underline{\mathbf{i}}(k) := (i_1, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_p) \in \Lambda_{p-1}$，对于 $1 \leqslant k \leqslant p$.
- $\widehat{\mathbf{i}(k, \ell)} := \widehat{\mathbf{i}(k)}(\ell - 1) \in \Lambda_{p-2}$, $1 \leqslant k < \ell \leqslant p$.
- $\sigma(q; \underline{\mathbf{i}}) := \max\{j \in \{1, \ldots, p\} \mid i_j < q\}$ 和 $\sigma(q; \mathbf{i}) = 0$，如果 $q < i_1$。
- $\underline{\mathbf{i}}(\widetilde{q}) = (i_1, \ldots, i_{k-1}, q, i_{k+1}, \ldots, i_p) \in \Lambda_{p+1}$ 对于 $k = \sigma(q; \underline{\mathbf{i}})$ 和 $q \in \{1, \ldots, n\} \smallsetminus \{i_1, \ldots, i_p\}$。

复形 $(\mathbf{Sp}^\bullet{}_{\mathscr{D}_X}(\log\ D), \epsilon_{-\bullet})$ 可写成复形 $(\bigoplus_{\underline{\mathbf{i}} \in \Lambda_\bullet} \mathscr{D}_X\, e_{\underline{\mathbf{i}}}, \widetilde{\epsilon_{-\bullet}})$ 其中

$$\widetilde{\epsilon_{-p}} : \bigoplus_{\underline{\mathbf{i}} \in \Lambda_p} \mathscr{D}_X\, e_{\underline{\mathbf{i}}} \longrightarrow \bigoplus_{\underline{\mathbf{j}} \in \Lambda_{p-1}} \mathscr{D}_X\, e_{\underline{\mathbf{j}}}$$

是由下式定义的左 $\mathscr{D}_X$–模之间的态射：

$$\widetilde{\epsilon_{-p}}(e_{\underline{\mathbf{i}}}) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \delta_{i_k} e_{\underline{\mathbf{i}}(\widehat{k})} + \sum_{1 \leqslant \ell < m \leqslant p} (-1)^{\ell+m} \sum_{q \in \overline{\mathrm{supp}(\underline{\mathbf{i}}(\widehat{\ell,m}))}} (-1)^{\sigma(q; \underline{\mathbf{i}}(\widehat{\ell,m}))} \alpha_q^{i_\ell i_m} e_{\underline{\mathbf{i}}(\widehat{\ell,m})(\widetilde{q})}.$$

注意，复形 $(\bigoplus_{\underline{\mathbf{i}} \in \Lambda_\bullet} \mathscr{D}_X\, e_{\underline{\mathbf{i}}}, \widetilde{\epsilon_{-\bullet}})$ 可以视为 Koszul 复形的一个非交换版本。

让我们写出一个关于 $n = 3$ 的例子。

有：

$$\begin{aligned}
\epsilon_{-1}(e_i) &= \delta_i \text{ for } i = 1, 2, 3, \\
\epsilon_{-2}(e_{ij}) &= \delta_i e_j - \delta_j e_i - \sum_{q=1}^{3} \alpha_q^{ij} e_q \text{ for } 1 \leqslant i < j \leqslant 3, \\
\epsilon_{-3}(e_{123}) &= \delta_1 e_{23} - \delta_2 e_{13} + \delta_3 e_{12} + (\alpha_1^{13} + \alpha_2^{23}) e_{12} + (-\alpha_1^{12} + \alpha_3^{23}) e_{13} + (-\alpha_2^{12} - \alpha_3^{13}) e_{23} \\
&= (\delta_3 + \alpha_1^{13} + \alpha_2^{23}) e_{12} + (-\delta_2 - \alpha_1^{12} + \alpha_3^{23}) e_{13} + (\delta_1 - \alpha_2^{12} - \alpha_3^{13}) e_{23}.
\end{aligned}$$

3.5 正规交叉除子在 $\mathbb{C}^n$中的约化方程 f 的 $1/f$ 湮灭理想

记 $\mathscr{D} = \mathscr{D}_{\mathbb{C}^n,0}$ 以及 $f = x_1 \cdots x_r$，其中 $1 \leqslant r \leqslant n$。有如下等式

$$Ann_{\mathscr{D}}(1/f) = \mathscr{D}(\partial_{r+1}, \ldots, \partial_n, x_1\partial_1 + 1, \ldots, x_r\partial_r + 1).$$

由于包含映射 $A_n := A_n(\mathbb{C}) \subset \mathscr{D}$ 是平坦的，只需证明魏尔代数 A_n 中的类似等式，而不必在$\mathscr{D}$中证明。包含映射

$$A_n(\partial_{r+1}, \ldots, \partial_n, x_1\partial_1 + 1, \ldots, x_r\partial_r + 1) \subset \mathrm{Ann}_{A_n}\left(\frac{1}{f}\right)$$

显然成立，因为第一个理想的每个生成元都湮灭 $1/f$。为证明反向包含，先假设 $1 = r = n$，并写成 $x = x_1$和 $\partial = \partial_x$。首先，任意 $P = P(x, \partial) \in A_1$都可写为

$$P = Q(x\partial + 1) + R + S$$

其中 $Q \in A_1$, R唯一，且$= R(x) \in \mathbb{C}[x]$和 S。若$P(\frac{1}{x}) = 0$且 $S(\partial)$非零，阶为 $s \geqslant 1$，则 $\frac{R}{x} + S(\partial)(\frac{1}{x}) = 0$，这与有理函数 $\frac{R}{x} + S(\partial)(\frac{1}{x})$的极点阶为 $s + 1$矛盾。于是 $S = 0$，进而 $R = 0$和 $P \in A_1(x\partial + 1)$。一般情形$1 \leqslant r \leqslant n$可通过如下方式化归为 $r = n$：对于任意湮灭 $\frac{1}{x_1 \cdots x_r}$的算子 P，取 P除以 ∂_{r+1}所得的余数，……，∂_n。最后，对于 $r = n$ 的情形，我们将湮灭$\frac{1}{x_1 \cdots x_n}$的算子 P对 $\partial_1 x_1$，……，$\partial_n x_n$进行带余除法。

对数比较定理的$\mathscr{D}$–模判据给出了另一个证明，说明正规交叉除子满足对数比较定理。事实上，任意这样的除子 $D \equiv (x_1 \cdots x_r = 0) \subset \mathbb{C}^n$ 都是 Koszul 自由的，因此复形$\mathscr{D} \otimes_{\mathscr{V}} \mathrm{Sp}^\bullet(\log D)$ 集中于上同调次数0，而$\mathscr{D} \otimes_{\mathscr{V}} \mathscr{O}$ 局部上可表示为商$\mathscr{D}/\mathscr{D}(\partial_{r+1}, \ldots, \partial_n, x_1\partial_1 + 1, \ldots, x_r\partial_r + 1)$，因为 $\{x_1\partial_1, \ldots, x_r\partial_r, \partial_{r+1}, \ldots, \partial_n\}$ 是导子 $\mathrm{Der}(-\log D)$ 的一组基。最后，有

$$\frac{\mathscr{D}}{\mathscr{D}(\partial_{r+1}, \ldots, \partial_n, x_1\partial_1 + 1, \ldots, x_r\partial_r + 1)} \simeq \mathscr{D}f^{-1} = \mathscr{O}(\star D).$$

最后一个等式源自一个众所周知的事实：$f = x_1 \cdots x_r$的（整体）Bernstein-Sato 多项式是 $(s + 1)^r$。

致谢

作者感谢《奇点几何与拓扑手册》的编辑邀请他们撰写这篇综述，并感谢审稿人和 Alberto Castaño 提出的非常有建设性的意见。

FCJ 感谢 PID2020-117843GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 的支撑。LNM 感谢 PID2020-114613GB-I00/AEI/10.13039/501100011033 的支撑

参考文献

[1] V. I. Arnol'd. 着色辫群的上同调环。苏联科学院数学札记5（1969年），138—140。（译自数学札记5（1969年），227–231）。

[2] D . Bath. 超平面配置满足（扭曲或非扭曲）对数比较定理 ，应用于 D_X-模。（arXiv:2202.01462）。[3] I. N. Bernšteĭn. 关于参数的广义函数的解析延拓。*Functional Anal. Appl.* 6 (1972), 273–285.（译自*Funkcional Anal. i Prilož*en6 (1972), 26–40）。[4] J.-E. Björk. 解析$\mathscr{D}$-模及其应用。Mathematics and its Applications, 2417. Kluwer Academic Publishers Group, 多德雷雷赫特, （1993年）。[5] N. Bourbaki. 代数 I. 第1–3章，Elements of Mathematics。英译自法文。1989年英文译本重印，Springer-Verlag，柏林。[6] E. Brieskorn. 关于辫群（据 V.I. Arnol'd）。*Bourbaki*研讨班 1971/72，报告第401号，第21–44页。Lecture Notes in Math.，第317卷，Springer，柏林，1973年。[7]R.-O. Buchweitz、W. Ebeling 和 H.-C. G. von Bothmer. 以自由除子为判别式的低维奇点。*J. Algebraic Geom.* 18, （2009年），371–406。[8] R.-O. Buchweitz 和 D. Mond. 线性自由除子与箭图表示。Singularities and computer algebra，London Math. Soc. Lecture Note Ser. 324（剑桥大学出版社，剑桥），（2006年）41–77。[9] F. J. Calderón-Moreno. 对数微分算子与对数 de Rham 复形相关

自由

Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 32(5) (1999), 701–714.[10] F. J. Calderón Moreno 和 L. Narváez Macarro。局部准齐次自由除子是 Koszul

自由的。

Proc. Steklov Inst. Math., 238 (2002), 72–77.[11] F. J. Calderón Moreno 和 L. Narváez Macarro。局部拟齐次自由除子的模 $\mathscr{D}f^s$

除子

《组合数学》，134(1)(2002)，59–74。[12] F. J. Calderón Moreno 和 L. Narváez Macarro。《对数

arithm

《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》，55(1) (2005)，47–75。（arXiv:math/0411045）。[13] F. J. Calderón Moreno 和 L. Narváez Macarro。关于张量积的混合结合公式，适用于

ove

《费拉拉大学数学科学年刊》第七辑 第 LI 卷（2005），105–118。[14]F. J. Calderón-Moreno、D. Mond、L. Narváez-Macarro 和 F. J. Castro-Jiménez。《平面曲线补集的对数上同调》。《赫尔维蒂数学评论》，77（2002），第 1 期，24–38。[15]F. J. Castro-Jiménez、L. Narváez-Macarro 和 D. Mond。《自由除子补集的上同调》。《美国数学会汇刊》，348(8)（1996年），3037–3049。[16] F. J. Castro-Jiménez 和 J. M. Ucha-Enríquez。《自由除子与导子-模的对偶》。*Proc.Steklov Inst. Math.*，238（2002），88–96。（arXiv:math/0103085）。

[17] F. J. Castro-Jiménez 和 J. M. Ucha-Enríquez。检验自由除子的对数比较定理
实验数学13（2004年），第4期，441–449。[18] F. J. Castro-Jiménez 和 J. M. Ucha-Enríquez。对数比较定理与某些欧拉齐次自由除子。
美国数学会会刊，第3辑，133（2005），1417–1422。[19] F. J. Castro-Jiménez、J. Gago-Vargas、M. I. Hartillo-Hermoso 和 J. M. Ucha-Enríquez。关于一类对数$\mathscr{D}$-模的消失定理，载于第十六届拉丁美洲代数学术讨论会论文集（西班牙语），171–184，《伊比利亚美洲数学评论丛书》，《伊比利亚美洲数学评论》，马德里，（2007）。[20] S. Chemla。复李代数丛的对偶性质。《数学杂志》，232(2)（1999），367–388。[21] P. Deligne。《正则奇点微分方程》。Lecture Notes in Math. 163，Springer-Verlag，柏林—纽约，（1970），第 iii+133 页。[22] P. Deligne 和 A. Dimca。超曲面的 Hodge 滤过与极点阶数滤过
Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 23, (1990年), 第4期，645–656.[23] H. Esnault 和 E. Viehweg。对数 de Rham 复形与消失定理。《数学创刊》，第86卷，(1986年)，161–194.[24] J. Frisch。复解析几何导论。比萨高等师范学校，(1971).[25] O. Gabber。特征簇的可积性。《美国数学杂志》103，(1981)，445–468.[26] R. Godement。代数拓扑与层论。斯特拉斯堡大学数学研究所出版物，XIII。Hermann，巴黎，1973.[27] M. Granger 和 Ph. Maisonobe。微分模基础课程。载于 [40], 第 I 卷，103–168.[28]M. Granger、D. Mond、A. Nieto-Reyes 和 M. Schulze。线性自由除子与整体对数比较定理。《傅里叶研究所年刊（格勒诺布尔）》，59(2) (2009)，811–850.[29] M. Granger、D. Mond 和 M. Schulze。预齐次向量空间中的自由除子。《伦敦数学会会刊》(3) 102，(2011)，923–950.[30] M. Granger 和 M. Schulze。关于对数向量场的形式结构。《组合数学》(2006)，142，3，765–778.[31] A. Grothendieck。关于同调代数的若干问题。《东北数学杂志》(2)，9 (1957)，119–221.[32] A. Grothendieck。代数簇的德拉姆上同调。《高等科学研究所数学出版物》，第29卷 (1966)，95–103.[33] R. Hartshorne。局部上同调。A. Groethendieck 主讲的研讨班，哈佛大学。F
Lecture Notes in Math. 41，施普林格出版社，柏林，1967。

[34] W. V. D. Hodge 和 M. F. Atiyah. 代数簇上的第二类积分。数学年刊 (2) 62 (1955年)，56–91。[35] M. P. Holland 和 D. Mond. 对数微分形式与补集的上同调

斯堪的纳维亚数学杂志83 (1998), 第2期，235–254.[36] B. Iversen. 层的上同调。Universitext。Springer-Verlag，柏林，1986年。xii+464 页。ISBN：3-540-16389-1.[37] M. Kashiwara。 B函数与全纯系统。 B函数根的有理性。《数学创刊》，38 (1) (1976/77年)，33–53.[38] M. Lejeune 和 B. Malgrange。“微分与伪微分算子研讨班（I-IV）”。格勒诺布尔科学与医学大学。1975–76年。[39] E. J. N. Looijenga。完全交上的孤立奇点。London Math. Soc. Lec- ture Note Ser. 77（剑桥大学出版社，剑桥），（1984年）。[40] Ph. Maisonobe 和 C. Sabbah（编）。微分系统理论要素（第*I*、*II*卷）。1990年在尼斯举办的CIMPA暑期学校。进行中的研究，45、46。Hermann，巴黎，1993年。[41] Ph. Maisonobe 和 L. Narváez Macarro（编）。几何微分系统理论要素

CIMPA课程，塞维利亚暑期学校（1996年）。研讨班与会议，第8卷。法国数学会，巴黎，2004年。[42] Malatian。解析层；研究 p 全纯函数之间的关系层。*Henri Cartan*研讨班，第*4*卷（1951–1952年），第15号报告，第1–10页。[43] B. Malgrange。微分与微微分系统特征的 involutivité。载于*Bourbaki*研讨班，第30年（1977/78年），第522号报告，第277–289页，数学讲义710，Springer，柏林，1979年。[44] B. Malgrange。德拉姆复形与$\mathscr{D}$–模的直接像。载于 [40], 第II卷，103–168页。[45] W. S. Massey。代数拓扑基础课程。数学研究生教材127，（1991年）。Springer-Verlag，纽约。[46] Z. Mebkhout。论希尔伯特–黎曼问题。复分析、微局部演算与相对论量子理论（国际学术讨论会论文集，莱乌什物理中心，1979年）。物理学讲义，第126卷，Springer-Verlag，柏林—纽约，（1980年），第90–110页。[47] Z. Mebkhout。*Grothendieck*六种运算形式体系，适用于$\mathscr{D}_X$相干模，进行中的研究，35。Hermann，巴黎，（1989年）。[48] Z. Mebkhout。代数簇的德拉姆上同调之间的比较定理 com

《高等科学研究所数学出版物》69（1989年），47–89。[49] Z. Mebkhout。不规则性的正性定理：关于$\mathscr{D}_X$-模。格罗滕迪克纪念文集，第 III 卷。数学进展丛书，第 88 卷，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州（1990年），第 83–132 页。

[50] Z. Mebkhout。正性定理、比较定理与黎曼存在定理。载于 [41], 165–310。[51] D. Mond。自由除子和几乎自由除子上的微分形式。伦敦数学会会刊（3）81（2000年），587–617。[52] D. Mond 和 J. J. Nuño-Ballesteros。映射的奇点。数学基础丛书第 357 卷（2020年）。Springer。[53] J. R. Munkres。代数拓扑基础。Addison-Wesley Publishing Company，门洛帕克，加利福尼亚州（1984年）。[54] L. Narváez Macarro。D-模理论中的局部对偶定理。载于 [41], 59–87。[55] L. Narváez Macarro。自由除子的雅可比理想的线性条件及其对数—亚纯比较。奇点 I：代数与解析方面，纪念 Lê D˜ung Tráng 60 岁生日国际会议，2007年1月8–26日，墨西哥库埃纳瓦卡。当代数学，第 474 卷，AMS，2008年，第 245–269 页。[56] L. Narváez Macarro。以对偶方法研究自由除子的 Bernstein-Sato 多项式的对称性

rs.

《数学进展》281 (2015), 1242–1273. (arXiv:1201.3594).[57] K. Oka. 多变量解析函数论。VII. 关于若干算术概念。《法国数学会通报》, 78, (1950), 1–27.[58] S. Ramanan. 整体微积分。数学研究生丛书，第65卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2005年。[59] G. S. Rinehart. 一般交换代数上的微分形式。《美国数学会汇刊》, 108 (1963), 195–222.[60] K. Saito. 对数微分形式与对数向量场理论。东京大学理学部纪要 *IA* 数学27 (1980年), 256–291.[61] M. Sato and T. Kimura. 不可约预齐次向量空间及其相对不变量的分类

不

《名古屋数学杂志》65, 1–155.[62] M. Schlessinger. 商奇点的刚性。《数学创刊》14, (1971), 17–26.[63] H. Terao. 具有对数极点的形式及按极点阶数的滤过。国际代数几何研讨会论文集（京都大学）, (1977), 673–685.[64] T. Torrelli. 关于由一阶微分系统定义的亚纯函数。《法国数学会通报》, 132 (2004), 591–612.[65] D. van Straten, 关于空间曲线判别式的短札。《数学手稿》87, no. 2, (1995) 167–177.[66] U. Walther. 雅可比模、Milnor 纤维以及由 f^s 生成的 D-模。《数学创刊》207, (2017), 1239–1287.

[67] Ch. Weibel. 同调代数导论。剑桥高等数学研究丛书，第38卷。剑桥大学出版社，剑桥，1994年。xiv+450 页。ISBN：0-521-43500-5；0-521-55987-1。

[68] J. Wiens 和 S. Yuzvinsky. 超平面配置上对数形式的德拉姆上同调。《美国数学会汇刊》，349 (4) (1997)，1653–1662。