arXiv:2303.05472v1 [math.NT] 9 Mar 2023

伴随点处三角化簇上的切空间

SEGINUS MOWLAVI

摘要。Breuil-Hellmann-Schraen 已经取得了许多关于三角化簇几何的结果。其中，他们运用几何方法，计算了支配型晶体一般点处三角化簇切空间维数的公式；这一公式可以推广为关于伴随（即 非支配）点的猜想。在早期的一项工作中，他们运用算术方法，在模性的假设下证明了这一公式的较弱形式。我们证明了 Bellaïche-Chenevier 在 p-进 Hodge 理论中一个结果的推广，并借此将 Breuil-Hellmann-Schraen 的算术方法拓展到一大类伴随点。

目录

1. 引言 1 2. 晶体三角化表示 5 2.1. 晶体表示的精化 V 以及 $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 上的旗 5 2.2. 三角化与精化 9 3. 补丁特征簇上的三角化簇与伴随点 11 3.1. 三角化簇 11 3.2. 补丁特征簇 13 3.3. 强链接与伴随点 15 4. 三角化簇上的切空间 16 4.1. 晶体一般点与排列对 16 4.2. 晶体切方向 17 4.3. 三角化切方向 19 4.4. 定理 4.1.4 的证明 21 参考文献 23

1. 引言

设 p 为一个素数。受 Kisin 对 [27]进超收敛特征形式的研究启发，并以 Colmez[15], 提出的三角化表示概念为基础，Hellmann [22] 继而与 Hellmann-Schraen [23] 引入了一个刚性解析簇，用于参数化某个固定剩余表示 $\bar{r}$的带框变形的三角化，该簇称为三角化簇 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$。Hellmann 利用这一构造推进了 Bellaïche-Chenevier [1]对特征簇的研究。Breuil-Hellmann-Schraen 在一系列论文中 [12], [11], [13], 重点研究了三角化簇的几何，尤其是晶体一般点处的局部几何。他们推导出

一系列推论，其中包括关于超收敛形式经典性的结果、某些称为伴随特征形式的特征形式的存在性，以及伴随构成因子的存在性（本文不关注自守表示，但它们在 p进局部 Langlands 纲领中占有重要地位；例如参见 [10], [2], [16] 和 [17]）。

特别地，Breuil-Hellmann-Schraen 证明了晶体一般点处 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 的切空间维数上界，并猜想该上界是精确的。他们还证明，对于严格占优点（即 “经典”点），这一猜想可由经典模性提升猜想推出。

本文推广了 Bellaïche-Chenevier [1] 关于晶体表示的精化及相关三角化的一项结果。这使我们能够调整 Breuil-Hellmann-Schraen [11] 的方法，在假设模性提升猜想成立的情况下，证明他们关于许多非经典（即 “伴随”）点处 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 的切空间维数的猜想。

为陈述我们的结果，我们简要介绍相关对象。固定一个整数$n > 0$ 以及一个表示 $\bar{r}\colon \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k_L)$，它从$K$ 的绝对伽罗瓦群映到 L的剩余域，其中 K 和 L 是 $\mathbb{Q}_p$的有限扩张。我们假设 $p \nmid 2n$ ，并且 $\Sigma := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K, L)$ 有 $[K : \mathbb{Q}_p]$ 个元素。

令 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$为三角化簇：它是定义在 L 上的刚性解析簇，定义为点集 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$的扎里斯基闭包。该点集由满足以下条件的点$(r, \underline{\delta})$组成： r 是 $\bar{r}$ 的带框变形， $\underline{\delta}$ 是$(K^{\times})^n$ 的局部 $\mathbb{Q}_p$解析特征，并且按照 Colmez 的定义， r 是参数为$\underline{\delta}$ 的三角化表示（例如参见例如 [13, 定义 3.3.8]）。我们固定一个晶体点 $x = (r,\underline{\delta}) \in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$，即一个 r 为晶体表示的点。

我们假设 r 是一般的，也就是说，(i) 对每个 $\tau \in \Sigma$， r 的 τ-霍奇–泰特权重互不相同；(ii) 对线性化弗罗贝尼乌斯 Φ 在 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(r)$ 上的任意两个特征值φ、 φ'（计重数），均有 $\varphi/\varphi' \notin \{1, p^{f(K/\mathbb{Q}_p)}\}$ ，其中 $f(K/\mathbb{Q}_p)$为惯性次数。对每个 $\tau \in \Sigma$，我们将 r 的 τ-霍奇–泰特权重按递增顺序记为$h_{\tau,1} < \ldots < h_{\tau,n}$。那么， $\underline{\delta}$ 由以下数据确定：(i) Φ 的特征值的一个排列$\underline{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$；(ii) 对每个 $\tau \in \Sigma$，对称群 $\mathcal{S}_n$中的一个置换 w_τ 。更准确地说，可以写成 $\underline{\delta} = z^{w(\mathbf{h})}\mathrm{unr}(\underline{\varphi})$，其中特征 $\mathrm{unr}(\underline{\varphi}) = (\mathrm{unr}(\varphi_i))_i$ of $(K^{\times})^n$ 由 $\mathrm{unr}(\varphi_i)|_{\mathcal{O}_K^{\times}} = 1$和 $\mathrm{unr}(\varphi_i)(\varpi) = \varphi_i$ 定义，其中 ϖ 是 K的一个一致化元；并且 $w := (w_\tau) \in (\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$ 以及$w(\mathbf{h}) := \left(h_{\tau,w_\tau^{-1}(i)}\right)_{\tau,i} \in (\mathbb{Z}^n)^{\Sigma}$。此外，存在唯一的 $w_{\mathrm{sat}} \in (\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$，使得点 $x_{\mathrm{sat}} := \left(r, z^{w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi})\right)$ 属于 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$。

记 $G := \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}_p}$，注意 $(\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$ 是 $\prod_{\tau\in\Sigma} G$ 上约化群的魏尔群。令 $B \subseteq G$ 为上三角矩阵的博雷尔子群；它在 $(\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$ 上确定了乘积布鲁哈特序 $\preceq$ 。已知 $w_{\mathrm{sat}} \preceq w$ [13, 定理 1.7]。

本文的主要结果如下：

定理 1 (定理 4.1.4)。 假设猜想 *3.2.2* 成立。设 $x \in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 是晶体一般的，使得在 $(\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$ 中，相关的对 (w_{sat}, w) 按照定义 ***4.1.1*** 的意义是良好的。那么

$$\dim_{k(x)} T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}),x} = \dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) - d_{ww_{\mathrm{sat}}^{-1}} + \sum_{\tau\in\Sigma} \dim_{\mathbb{Q}_p} T_{\overline{(Bw_\tau B/B)},w_{\mathrm{sat},\tau}B} - \lg(w_{\mathrm{sat}}) \tag{1.1}$$

其中 $k(x)$ 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在 x 处的剩余域， $\overline{Bw_\tau B/B}$ 是与旗簇 G/B 中的 w_τ 相关联的舒伯特簇；$d_{ww_{\mathrm{sat}}^{-1}}$ 的定义见定义 ***4.1.1*** 前的段落。

当 $w = w_0$ 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 关于布鲁哈特序的极大元时， [13] 证明了 **(1.1)**（无需假设猜想 3.2.2）。定理 1 的证明基于 [11], 中的一种方法，该文证明了一个较弱的版本（也仅适用于 $w = w_0$ ）。此方法包括在 $T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\,x}$ 中找出两个子空间 T_1 和 T_2 ，并按以下方式计算 $\dim(T_1 + T_2) = \dim T_1 + \dim T_2 - \dim(T_1 \cap T_2)$。

我们首先采用 [11, §2.2] 和 [28] 给出的如下构造。记 $\mathbf{h} = (h_{\tau,1} < \ldots < h_{\tau,n})_\tau \in (\mathbb{Z}^n)^\Sigma$ 为 r 的霍奇–泰特权重，令 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}}$ 为定义在 L 上的约化刚性解析空间，它参数化如下数据： $\bar{r}$ 的一个带框变形 r' ，该变形为具有霍奇–泰特权重 $\mathbf{h}$ 的晶体一般变形，并附带一个精化 $\underline{\varphi'} = (\varphi'_1, \ldots, \varphi'_n)$，它是 r' 的精化（即对 r' 的线性化弗罗贝尼乌斯 Φ' 的特征值进行排序）。存在一个 L-刚性解析空间之间的光滑映射 $h\colon \widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}} \longrightarrow \prod_{\tau\in\Sigma}(G/B)^{\mathrm{rig}}$，它将 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}}$ 中的点 $(r', \underline{\varphi'})$ 映至霍奇滤过；相对于由精化 $\underline{\varphi'}$ 所诱导的基，该霍奇滤过可视为 $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(r')$ 上的一个旗。回顾旗簇 $\prod_{\tau\in\Sigma} G/B = \coprod_{w'\in(\mathcal{S}_n)^\Sigma} \prod_{\tau\in\Sigma} Bw'_\tau B/B$ 的舒伯特分解。对于 $w' \in (\mathcal{S}_n)^\Sigma$，我们考虑 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}}$ 的闭刚性子空间 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}\,w'}$ ，它由 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w'} := h^{-1}\big(\prod_{\tau\in\Sigma}\overline{Bw'_\tau B/B}^{\mathrm{rig}}\big)$ 定义。存在刚性解析空间的闭浸入 $\iota_{\mathbf{h},w'}\colon \widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}\,w'} \longrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$，由 $\iota_{\mathbf{h},w'}(r', \underline{\varphi'}) = \big(r', z^{w'(\mathbf{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi'})\big)$ 定义。我们有 $(r, \underline{\varphi}) \in \widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}\,w}$，且 $\iota_{\mathbf{h},w}(r, \underline{\varphi}) = x$；于是我们将 T_1 定义为由 $\iota_{\mathbf{h},w}$ 诱导的单射 $T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}\,w},(r,\underline{\varphi})} \hookrightarrow T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\,x}$ 的像。

接下来，我们定义一个刚性自同构 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}\colon (r', \underline{\delta'}) \longmapsto \big(r', z^{w(\mathbf{h})-w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\underline{\delta'}\big)$，它将 x_{sat} 映射到 x；我们希望 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$ 将 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 中一个包含 x_{sat} 的局部闭子簇映入 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$。我们使用权态射 $\omega\colon X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) \longrightarrow \mathcal{W}^n_L$，其定义为 $\omega(r', \underline{\delta'}) = \underline{\delta'}|_{(\mathcal{O}_K^\times)^n}$，其中 $\mathcal{W}_L$ 是定义在 L 上的刚性解析空间，用于参数化 $\mathcal{O}_K^\times$ 的连续特征；并利用方程 $\mathrm{wt}_\tau(\eta_{w_{\mathrm{sat}},\tau}(i)\eta^{-1}_{w_\tau}(i)) = h_{\tau,i} - h_{\tau,w^{-1}\mathrm{sat}\,\tau w_\tau(i)}$，切出一个特征闭子空间 $\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}\,L} \subset \mathcal{W}^n_L$。然后，利用 Breuil-Hellmann-Schraen 的补丁特征簇 $X_p(\bar{\rho})$ [12, §3]（其中 $\bar{\rho}$ 是由 Emerton-Gee 的一个结果 [21, 定理 1.2.3]给出的 $\bar{r}$的整体化），并假设猜想 3.2.2，我们证明：若 (w_{sat}, w) 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$的良好对，则存在 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 中包含 x_{sat} 的一个开邻域 $U_{x_{\mathrm{sat}}}$ ，使得 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$ 诱导一个约化刚性 L-解析空间的扎里斯基闭嵌入 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}\colon U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}\,L} \hookrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$。接着，我们令 T_2 为由 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$ 诱导的单射 $T_{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}^n_L}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L,x_{\mathrm{sat}}}} \hookrightarrow T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\,x}$ 的像。

计算 $\dim T_2 = \dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) - d_{ww^{-1}\text{饱和}}$ 相当直接。$\dim T_1$ 和 $\dim(T_1 \cap T_2)$ 的计算则是我们的方法与 [11] 的方法不同之处。我们利用 Robba 环上晶体型 (φ, Γ_K)-模与滤过 φ-模之间的 Berger 对应（[4, 定理 A], [3, 定理 3.6]） ， 证明了 [1,命题 2.4.1] 的以下推广。

命题 2 (命题 2.2.4). 设 A 是一个剩余域为 L的局部阿廷 L-代数。设 $r_A\colon \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(A)$ 是一个秩为$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 、定义在 A上的正则晶体表示，其霍奇–泰特权重为 $\mathbf{h} \in (\mathbb{Z}^n)^\Sigma$。假设存在

$\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^{\Sigma}$ 和 $\underline{\varphi}_A \in (A^{\times})^n$，且 φ_A、i 在 L中的约化两两不同，使得 r_A 是参数为 $z^{\mathbf{k}}\mathrm{unr}(\underline{\varphi}_A)$ 的三角化表示。则存在 $w_A \in (\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$，使得 $\mathbf{k} = w_A(\mathbf{h})$，且 $D^{\mathrm{crys}}(r_A)$上的线性化弗罗贝尼乌斯 Φ_A 以 $\underline{\varphi}_A$ 为特征值集合。此外，相对于由精化$\underline{\varphi}_A$诱导的 $D_{\mathrm{dR}}(r_A)$基，旗 $\mathrm{Fil}^{\bullet}D_{\mathrm{dR}}(r_A)$作为 $\prod_{\tau\in\Sigma}(G/B)(A)$中的一个点，位于胞腔$\prod_{\tau\in\Sigma}(Bw_A, {}_{\tau}B/B)(A)$中。

将其应用于 x 的局部剩余域上的无穷小数代数 $A = k(x)[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$，命题 2 表明该交换图

$$\begin{array}{ccc} T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})} & \xrightarrow{\mathrm{d}\iota_{\mathbf{h},w_{\mathrm{sat}}}} & T_{\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}^n_L}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}},x_{\mathrm{sat}}} \\ \big\downarrow\subseteq & & \big\downarrow\mathrm{d}\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}} \\ T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w},(r,\underline{\varphi})} & \xrightarrow{\mathrm{d}\iota_{\mathbf{h},w}} & T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}),x}\,. \end{array}$$

是一个笛卡尔方块。这意味着 $\dim(T_1 \cap T_2) = \dim T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}\bar{r},\ w_{\mathrm{sat}},(r,\ \underline{\varphi})}$，由此我们最终可轻松得到 (1.1)。

记号。 我们以本文的主要记号结束本引言。

我们固定一个素数 p 和 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张 K，并赋予其 p-进范数 $|\cdot|_K$，使其满足 $|p|_K = p^{-[K:\mathbb{Q}_p]}$。我们用 $\mathcal{G}_K$ 表示 K 的绝对伽罗瓦群，并记 $\Gamma_K \coloneqq \mathrm{Gal}(K(\mu_{p^\infty})/K)$。我们还用 K_0 表示 $\mathbb{Q}_p$ 在 K 中的最大非分歧扩张，并用 φ 表示 K_0 的 Frobenius 自同态，将其规范化为使其在剩余域上诱导出 $x \longmapsto x^p$。若 L 是 $\mathbb{Q}_p$ 的另一个有限扩张，当域同态集合 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,L)$（其为 $\mathbb{Q}_p$ 上的域同态）的基数为 $[K:\mathbb{Q}_p]$时，我们称 L 分裂 K；在这种情况下，我们记 $\Sigma \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,L)$。

我们记 $\mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$ 为局部阿廷 $\mathbb{Q}_p$-代数范畴，其中剩余域是 $\mathbb{Q}_p$ 的有限扩张（即有限维局部 $\mathbb{Q}_p$-代数）。对于 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$，我们用 $\mathfrak{m}_A$ 表示其极大理想。

对于环 R，我们记 $\mathrm{Fil}^{\bullet}_R$ 为滤过 R-模范畴，其对象是配备了按 R-子模递减、穷尽且分离的滤过的 R-模，态射则是每个次数上的 R-线性映射所组成的相容族。对于 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$，我们记 $\mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$为 $\mathcal{G}_K$ 在A上的表示范畴，其对象是配备了 $\mathcal{G}_K$ 的连续线性作用的有限型自由 A-模，态射则是 $\mathcal{G}_K$-等变的 A-线性映射。我们使用 Fontaine 的通常函子 $V \mapsto (\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V), \mathrm{Fil}^{\bullet}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V))$，它从 $\mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$ 映到 $\mathrm{Fil}^{\bullet}_{K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A}$；以及$V \mapsto (\mathrm{D}^{\mathrm{crys}}(V)\ \varphi)$，它从 $\mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$ 映到配备了 φ-半线性自同态的 K_0-向量空间范畴（该自同态称为弗罗贝尼乌斯，仍记作 φ）。对于 $V \in \mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$，我们记 $\Phi \coloneqq \varphi^{[K_0:\mathbb{Q}_p]}$ 为线性化弗罗贝尼乌斯，它是 $\mathrm{D}^{\mathrm{crys}}(V)$ 的线性自同态（注意，视上下文而定，Φ 也可表示根系）。

若 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$ 是其剩余域 $L \coloneqq A/\mathfrak{m}_A A$ 上的代数，且 L 分裂 K，对于既是德拉姆又满足 $\tau \in \Sigma$ 的 $V \in \mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$，我们称满足条件 h_τ 的整数为 τ-霍奇–泰特权重：$\mathrm{rk}_A\left(\mathrm{Fil}^{-h_\tau}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathrm{Fil}^{-h_\tau+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right) \neq 0$。计入重数后，恰有 $\mathrm{rk}_A(V)$ 个 τ-霍奇–泰特权重。若对于每个 $\tau \in \Sigma$，V 的 τ-霍奇–泰特权重互不相同，我们称 V 是正则的；也就是说，所有 τ-霍奇–泰特权重的重数均为 1。

在 A 满足相同假设的情况下，给定 $\mathbf{k} = (k_\tau)_{\tau\in\Sigma} \in \mathbb{Z}^\Sigma$，我们将特征 $K^\times \to A^\times$，$z \mapsto \prod_{\tau\in\Sigma} \tau(z)^{k_\tau}$ 记为 $z^{\mathbf{k}}$。对于 $a \in A^\times$，我们将特征$K^\times \to A^\times, z \mapsto a^{v_K(z)}$ 记为 $\mathrm{unr}(a)$，其中 v_K 是 K 上的赋值，且已归一化为其像为 $\mathbb{Z}$（例如，$\mathrm{unr}(p^{[K_0:\mathbb{Q}_p]})(p) = p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$；注意，$v_K$ 不是范数$|\cdot|_K$ 的赋值）。若 $\delta\colon K^\times \longrightarrow A^\times$ 是任意连续特征，则 δ 是局部 $\mathbb{Q}_p$-解析的，因此它是 p-进李群之间的态射；我们将其微分记为 $\mathrm{d}\delta\colon K \longrightarrow A$，这是 $\mathbb{Q}_p$ 上向量空间之间的态射。注意，$\tau\colon K \hookrightarrow L$ 与 $L \longrightarrow A$ 复合后（其中 $\tau \in \Sigma$），构成 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}$-vect. sp.$(K, A)$ 在 A 上的一组基，由此诱导出 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}$-vect. sp.$(K, A) \simeq A^\Sigma$；在此同构下，对于由 $\mathrm{d}\delta = (\mathrm{wt}_\tau(\delta))_{\tau\in\Sigma}$ 定义的 δ 的权，我们记作 $\mathrm{wt}_\tau(\delta) \in A$。若 δ' 是一个连续特征 $\mathcal{O}_K^\times \longrightarrow A^\times$，我们将 $\mathrm{wt}_\tau(\delta')$ 记为 $:= \mathrm{wt}_\tau(\delta)$，其中 $\delta\colon K^\times \longrightarrow A^\times$ 是任意满足 $\delta|_{\mathcal{O}_K^\times} = \delta'$ 的特征。

对任意 $A \in \mathrm{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$，我们将 $\mathcal{R}_{A,K}$ 记为 K 上的相对 Robba 环 A（参见[26, 定义 2.2.2], ，其中记作 $\mathcal{R}_A(\pi_K)$）。该环带有一个记作 φ 的 Frobenius 自同态以及一个 Γ_K-作用。我们将 $\mathrm{Mod}_A^{\varphi,\Gamma_K}$ 记为 A 上 (φ, Γ_K)-模的范畴；其对象是 D，即有限生成于 $\mathcal{R}_{A、K}$ 上且在 $\mathcal{R}_K$ 上自由的 $\mathcal{R}_{A,K}$-模，并带有彼此交换且连续的 φ 和 Γ_K 的半线性作用（作为自由 $\mathcal{R}_K$-模上的作用），且满足 $\mathcal{R}_K\varphi(D) = D$；其态射是与相应的 φ 和 Γ_K 作用相交换的 $\mathcal{R}_{A,K}$-线性映射。我们使用从 $\mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$ 到 $\mathrm{Mod}_A^{\varphi,\Gamma_K}$ 的通常函子 $\mathbf{D}^{\mathrm{rig}}$（参见 [26, 定理 2.2.17]）。对于一个连续特征 $\delta\colon \mathbb{Q}_p^\times \longrightarrow A^\times$，我们关联一个 $\mathcal{R}_{A,K}$ 上秩为一的 (φ, Γ_K)-模 $\mathcal{R}_{A,K}(\delta)$，其定义见 [26, 构造 6.2.4]。

致谢。本文的结果是作者在奥赛数学实验室攻读博士期间工作的组成部分。作者谨向博士导师 Christophe Breuil 致谢，感谢他富有启发性的指导；向 Ariane Mézard 和 Benjamin Schraen 致谢，感谢他们宝贵的交流；并向 Gabriel Dospinescu 和 Ruochuan Liu 致谢，感谢他们仔细审阅作者的博士论文。最后，读者显然会看出，作者的工作深受 Breuil-Hellmann-Schraen 研究成果的影响。

2. 晶体三角化表示

我们回顾 V over $A \in \mathrm{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$ 上晶体表示的精化概念，以及它与相应 (φ, Γ)-模的三角化概念之间的关系。对于 V 正则的情形，我们将相对于霍奇滤过、由三角化导出的精化刻画为 $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 的旗簇中一个舒伯特胞腔的点。

2.1. 晶体表示的精化 V 与 $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 上的旗。

我们先给出一个关于旗簇中舒伯特胞腔的点函子的引理。

定义 2.1.1。 设 R 是一个环，M 是一个自由的 R-模。M 上的一个完全旗是 M 的 R-子模 $\mathrm{Fil}_\bullet M$ 组成的递增序列

$$\mathrm{Fil}_0 M := \{0\} \subset \ldots \subset \mathrm{Fil}_i M \subset \ldots \subset \mathrm{Fil}_n M := M$$

其中 $n = \mathrm{rk}_R(M)$，使得对于所有 $1 \le i \le$，$\mathrm{Fil}_i M/\mathrm{Fil}_{i-1} M$ 都是 R 上秩为 1 的自由模 n.

固定一个整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$、一个环 R 和一个秩为 n 的自由模 M，其定义在 R上。给 M配备一个完全旗 $\mathrm{Fil}_\bullet M = (\mathrm{Fil}_i(M))_{0\le i\le n}$，并固定 $\mathrm{Fil}_\bullet M$的一组基 basis $(e_i)_{1\le i\le n}$，即 一族属于 M 的元素，使得 $e_i \in \mathrm{Fil}_i M$，且 e_i 模 $\mathrm{Fil}_{i-1} M$生成 $\mathrm{Fil}_i M/\mathrm{Fil}_{i-1} M$，对所有 $1 \le i \le n$均成立。令 $G := \mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}_p}$ 为一般线性

群，其定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上，并令 B 为其上三角矩阵构成的博雷尔子群； G 的魏尔群是由 $\{1,\dots,n\}$ 到自身的双射 $\mathcal{S}_n$ 构成的群。

将矩阵 $(a_{ij})_{1\le i,\ j\le n}\in G(R)$ 映射到旗 $\left(\bigoplus_{j\le k} Rb_j\right)_{1\le k\le n}$（其中 $b_j=\sum_{1\le i\le n} a_{ij}e_j$）的映射 $G(R)\longrightarrow\{\text{完全旗 } M\}$ 可经由 $B(R)$ 分解，并诱导出 $G(R)/B(R)\xrightarrow{\sim}\{\text{完全旗 } M\}$ 之间的双射，因此是单射

$$\{\text{complete flags of } M\}\hookrightarrow (G/B)(R) \tag{2.1}$$

（参见 [25, §5.4、§5.5]）。我们称给定旗在 (2.1) 下的像为相对于 $\mathbf{Fil}_\bullet M$ 的旗的位置。

回顾旗簇 G/B 上的舒伯特分解。我们通过将每个 $w\in\mathcal{S}_n$ 映射到矩阵 $\dot w=(w_{ij})_{1\le i,\ j\le n}$，将 $\mathcal{S}_n$ 嵌入 G，其中该矩阵定义为：若 $i=w(j)$，则为 $w_{ij}=1$；若 $i\neq w(j)$，则为 $w_{ij}=0$。令 $w\in\mathcal{S}_n$。B 通过乘法对 G 的左作用在 G/B 上诱导出一个作用；记 $\dot wB/B$ 在此作用下的轨道为 BwB/B。于是， BwB/B 是 G/B 的一个光滑局部闭子簇，称为舒伯特胞腔，并且有如下分解

$$G/B=\coprod_{w\in W} BwB/B \tag{2.2}$$

（见 [31, 定理 21.73]）。胞腔 BwB/B 在 B的左作用下保持不变，因此其扎里斯基闭包 $\overline{BwB/B}$ 也如此；而且该作用在 BwB/B上传递。因此，闭胞腔 $\overline{BwB/B}$ 与开胞腔 $Bw'B/B$ 相交，当且仅当 $Bw'B\subseteq\overline{BwB/B}$；这又当且仅当对于布鲁哈特序有 $w'\preceq w$ （见 [6, 定理 2.11]）。因此，(2.2) 给出了 G/B的一个良好分层，并且我们有一个更一般的局部闭分层分解

$$\overline{BwB/B}=\coprod_{w'\preceq w} Bw'B/B$$

对所有 $w\in W$均成立。

对于旗，舒伯特胞腔可作如下基本描述：给定 M的一个旗 $\mathcal{F}$，其相对于 $\mathbf{Fil}_\bullet M$ 的位置属于闭胞腔 $(\overline{BwB/B})(R)$，当且仅当 $\mathcal{F}$ 可表示为矩阵 $(a_{ij})_{1\le i,\ j\le n}\in G(R)$，使得对所有 $i>w(j)$都有 $a_{ij}=0$；而其属于开胞腔 $(BwB/B)(R)$，当且仅当我们还可以附加条件 $a_{w(j),\ j}\in R^\times$ 对所有 j成立。（由此可见，舒伯特分解诱导出 R-点的一个划分，当且仅当 R 是一个域。）

引理 2.1.2. 设 R 为一个环，设 M 为一个秩为 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$、配备完全旗 $\mathrm{Fil}_\bullet M$的自由 R-模。设 $x\in(G/B)(R)$ 为对应于 M 在 (2.1)下的旗$(\mathcal{F}_j)_{1\le j\le n}$ 的点。那么，对于某个 $w\in\mathcal{S}_n$，有 $x\in(BwB/B)(R)$ 当且仅当 $(\mathcal{F}_j\cap\mathrm{Fil}^{w(j)})/(\mathcal{F}_j\cap\mathrm{Fil}^{w(j)-1})$ 对所有 $1\le j\le n$都是 R 上的秩为1 的自由模。

证明。 设 $(e_i)_{1\le i\le n}$ 为 $\mathbf{Fil}_\bullet M$的一组基。

若 $x\in(BwB/B)(R)$，则存在 $\mathcal{F}_\bullet$ 的一组基 $(b_j)_{1\le j\le n}$，使得每个 b_j 都可写成 $b_j=\sum_{i\le w(j)} r_{ij}e_i$，其中 $r_{w(j),j}\in R^\times$。那么，对所有 $1\le j\le n$，单射态射

$$(\mathcal{F}_j\cap\mathrm{Fil}_{w(j)})/(\mathcal{F}_j\cap\mathrm{Fil}_{w(j)-1})\hookrightarrow\mathrm{Fil}_{w(j)}/\mathrm{Fil}_{w(j)-1}$$

将 $r^{-1}_{w(j)\,j}b_j$ 模掉 $(\mathcal{F}_j\cap\mathbf{Fil}^{w(j)-1})$ 映到 $e_{w(j)}$ 模掉 $\mathbf{Fil}^{w(j)-1}$，因此它是一个同构。

反过来，假设对所有 $1\le j\le n$，$(\mathcal{F}_j\cap\mathbf{Fil}^{w(j)})/(\mathcal{F}_j\cap\mathbf{Fil}^{w(j)-1})$ 在 R 上是秩为 1 的自由模；它有一个基元素，可提升到某个 $b_j\in\mathcal{F}_j\cap\mathbf{Fil}^{w(j)}$。那么每个 b_j

都可以写成 $b_j = \sum_{i\le w(j)} r_{ij}e_i$ 在 $\mathcal{F}_j$ 中，其中 $r_{w(j),\,j} \in R^\times$。因此，只需证明 $(b_j)_{1\le j\le n}$ 构成 $\mathcal{F}_\bullet$ 的一组基，也就是说，$b_j \bmod \mathcal{F}_{j-1}$ 是对所有 $1 \le j \le n$ 的 $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ 的一组基。我们对 j 使用归纳法。设 $b = \sum_{1\le i\le n} r_i e_i \in \mathcal{F}_j$，使得 $b \bmod \mathcal{F}_{j-1}$ 是 $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ 的一组基。由于 $b_j \in \mathcal{F}_j$，可以写成

$$b_j = \sum_{k<j} \lambda_k b_k + \lambda b \tag{2.3}$$

对于某些 $\lambda_k, \lambda \in R$。令 I 为由 λ 生成的 R 的理想。若对于某个 $k < j$，$\lambda_k \notin I$，则取满足 $w(k)$ 最大的这样的 λ_k。然后取 (2.3) 沿 $e_{w(k)}$ 的坐标，得到

$$r_{w(k),j} = \lambda_k r_{w(k),k} + \sum_{k'<j \text{ s.t. } w(k')>w(k)} \lambda_{k'} r_{w(k),k'} + \lambda r_{w(k)} \notin I$$

因为 $r_{w(k),k} \in R^\times$。特别地，$r_{w(k),j} \neq 0$，所以 $w(k) \le w(j)$。这证明，对于所有满足 $w(k) > w(j)$ 的 $k < j$，都有 $\lambda_k \in I$。然后，(2.3) 沿 $e_{w(j)}$ 给出

$$r_{w(j),j} = \sum_{k<j \text{ s.t. } w(k)>w(j)} \lambda_k r_{w(j),k} + \lambda r_{w(j)} \in I\,.$$

由于 $r_{w(j),j} \in R^\times$，我们推得 $I = R$。因此，$\lambda \in R^\times$，所以 b_j 模 $\mathcal{F}_{j-1}$ 是 $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1}$ 的一组基；证明至此完成。□

我们主要关注 $R = K \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ 和 $M = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 的情形，其中固定一个代数 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$ 和一个德拉姆表示 $V \in \mathbf{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$。更具体地说，我们作出以下两个假设：(i) A 是有限扩张 L 上的代数，其中 L 是 A 的剩余域，且该扩张分裂 K；(ii) V 是正则的。

于是，我们在自由的（$K \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$）模 $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 上定义一个完全旗 $\mathbf{Fil}_\bullet \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$：$\mathbf{Fil}_0\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) := 0$ 并且

$$\mathrm{Fil}_i \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) := \bigoplus_{\tau\in\Sigma} \mathrm{Fil}^{-h_{\tau,i}} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)_\tau, \quad 1 \le i \le n$$

其中 $n = \mathbf{rk}_A(V)$，而 $h_{\tau,\,1} < \ldots < h_{\tau,\,n}$ 是 τ-霍奇–泰特权重。

接下来，我们进一步假设 V 是晶体的。回顾 §2.4] 中的以下定义[1, 。

定义 2.1.3。设 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$，令 $V \in \mathbf{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$ 为任意一个晶体表示。V 的一个精化 是 $\mathbf{D}^{\mathrm{crys}}(V)$ 上一个在 Φ线性化弗罗贝尼乌斯作用下稳定的完全旗。

V 的一个精化 $\mathcal{F}_\bullet$ 在 $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 上诱导出一个完全旗 $K \otimes_{K_0} \mathcal{F}_\bullet$，而 $\mathbf{Fil}_\bullet\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 相对于 $K \otimes_{K_0} \mathcal{F}_\bullet$ 的位置决定了一个 A-点

$$\left(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p}(G/B)_K\right) \times_{\mathbb{Q}_p} L \simeq \prod_{\tau\in\Sigma} (G/B)_L$$

whe关于 $G = \mathbf{GL}_{n,\mathbb{Q}_p}$ 且 B 是上三角矩阵构成的博雷尔子群。

注 2.1.4。V的精化确定了 Φ的一个有序特征值序列，即 一个序列 $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in (K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A)^n$，使得Φ 的特征多项式可写为 $P_\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \varphi_i) \in (K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A)[\lambda]$。以下命题是这一事实的部分逆命题。

命题 2.1.5。 </style}令 , . . . , $\varphi_n \in A$ 满足：$(1\otimes\varphi_i)_{1\le i\le n}$ 是弗罗贝尼乌斯在$\mathbf{D}^{\mathrm{crys}}$ (V) </style}上的特征值序列，其含义见注 2.1.4。假设模的约化两两不同。那么存在唯一一个与$(1\otimes\varphi_i)_{1\le i\le n}$相关联的 V 的精化。

证明使用了以下经典线性代数结果。

引理 2.1.6. 设 R 是一个含幺交换环， M 是一个 R-模，且$f\in$ 自同态环$_R(M)$。

(1) 假设存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in R$，其中某个 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ 满足：对所有 $1\le i<j\le m$，均有 $\lambda_i-\lambda_j\in R^\times$，使得 $(f-\lambda_1)\cdots(f-\lambda_m)=0\in$ 自同态环$_R(M)$。那么M 是特征子空间的直和

$$M=\ker(f-\lambda_1)\oplus\cdots\oplus\ker(f-\lambda_m). \tag{2.4}$$

(2)假设 R 是局部环，极大理想为 $\mathfrak{m}$，且 M 是秩为$n\in\mathbb{Z}_{>0}$的自由模。再假设 f 的特征多项式可写为$P_f(\lambda)=\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)\in R[\lambda]$，其中 λ_i 模 $\mathfrak{m}$约化后两两不同$\overline{\lambda_i}$。那么特征子空间$\ker(f-\lambda_i)$、$1\le i\le n$在 R 上是秩为1的自由模，且这些特征子空间的任意一组生成元构成 M的一组基。

证明。我们先证明 (1)。可以找到多项式 $P_1,\ldots,P_m\in R[\lambda]$，使得

$$\sum_{1\le i\le m}P_i(\lambda)\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j)=1\in R[\lambda]\,; \tag{2.5}$$

我们对 m 使用归纳法来证明这一点。 $m=1$ 的情形由 $P_1=1$ 可知是平凡的；对于 $m>1$，令 $Q_1,\ldots,Q_{m-1}\in R[\lambda]$ 满足

$$\sum_{1\le i\le m-1}Q_i(\lambda)\prod_{j\neq i,m}(\lambda-\lambda_j)=1\in R[\lambda]\,.$$

对于 $l:=\prod_{1\le i<m}(\lambda_m-\lambda_i)\in R^\times$，存在 $Q\in R[\lambda]$ 使得$\prod_{1\le i<m}(\lambda-\lambda_i)=Q(\lambda)(\lambda-\lambda_m)+l$。接着令 $P_i:=-l^{-1}Q_iQ\in R[\lambda]$ 对应于 $1\le i<m$，并令 $P_m:=l^{-1}$，即可得到 (2.5)。

将 (2.5) 应用于 $\lambda=f$，可知任意 $v\in M$ 都可分解为 $v=v_1+\ldots+v_m$，其中 $v_i:=\prod_{j\neq i}(f-\lambda_j)P_i(f)v$ 对于 $1\le i\le m$ 成立，并且根据假设，显然 $v_i\in\ker(f-\lambda_i)$。现在，为了验证和 $M=\ker(f-\lambda_1)+\ldots+\ker(f-\lambda_m)$ 是直和，取 $v_1+\ldots+v_m=0$，其中 $v_i\in\ker(f-\lambda_i)$。我们对非零 v_i 的个数使用归纳法，证明对于所有 i，都有 $v_i=0$。取 i_0 使得 $v_{i_0}\neq0$；应用 $f-\lambda_{i_0}$ 得到$\sum_{i\neq i_0}(\lambda_i-\lambda_{i_0})v_i=0$，因此由归纳假设，$(\lambda_i-\lambda_{i_0})v_i=0$ 对所有 $1\le i\le m$ 成立。由于 $\lambda_i-\lambda_{i_0}$ 是可逆元，对于 $i\neq i_0$ 可得 $v_i=0$，继而 $v_{i_0}=0$。这就证明了 (1)。

现在证明（2）。 $M/\mathfrak{m}M$ 在（$R/\mathfrak{m}$）上的约化具有两两不同的特征值 $\overline{\lambda_i}$；选取相应的对角化基（$\overline{v_i}$）$_{1\le i\le n}$。为每个$\overline{v_i}$选取一个提升 $w_i\in M$。由（1）和凯莱-哈密顿定理，我们可以写成$w_i=v_{i,1}+\ldots+v_{i,n}$，其中$v_{i,j}\in$对所有 $1\le i$、$j\le n$均属于 $\ker(f-\lambda_j)$。于是，在$M/\mathfrak{m}M$中，

$$\sum_{1\le j\le n}(\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_i})\overline{v_{i,j}}=f(\overline{v_i})-\overline{\lambda_i}\overline{v_i}=0$$

对所有 $1\le i\le n$。将 (1) 应用于 $M/\mathfrak{m}M$，可知特征向量 $(\overline{\lambda_j}-\overline{\lambda_i})v_{i,j}$对所有 $1\le i,$ $j\le n$均为零。这意味着，由于$\overline{\lambda_i}$ 两两不同，

$v_{i,\,j} \in \mathfrak{m}$ 对所有 $i \neq j$均成立。因此 $v_i := v_{i,\,i} = w_i - \sum_{j\neq i} v_{i,\,j}$ 提升了 $\overline{v_i}$。由 Nakayama 引理，$v_i, 1 \leq i \leq n$生成 M。由于 M 是秩为 n 的自由模，v_i 实际上构成了 M的一组基。由于对每个 i，$Rv_i \subseteq \ker(f - \lambda_i)$，(2.4) 给出 $Rv_i = \ker(f - \lambda_i)$。这就证明了 (2)。□

命题 2.1.5 的证明。记 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A = \bigoplus_{\tau\in\Sigma_0} Ae_\tau$，其中 $e_\tau^2 = e_\tau$ 对于 $\tau \in \Sigma_0 := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K_0, L)$。于是 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V) = \bigoplus_{\tau\in\Sigma_0} \mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)_\tau$，其中每个 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)_\tau := e_\tau \mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)$ 都是秩为 n 的自由 A-模。每个 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)_\tau$ 都由 Φ 稳定，且诱导的 Φ_τ 是 A-模的一个自同态，其特征值序列为 $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$。应用引理 2.1.6(2)，可得 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)_\tau$ 的一组对角化基 $(b_{\tau,i})_{1\leq i\leq n}$，对应于 $(\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$。令 $b_i := \sum_{\tau\in\Sigma_0} b_{\tau,i}$，则族 $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ 是 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)$ 的一组对角化基，对应于 $(1\otimes\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$。

令 $\mathcal{F}_\bullet$ 为与 $(1\otimes\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$ 相关的任意精化 V。令 $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ 为 $\mathcal{F}_\bullet$的一组基，并将所有 $1 \leq j \leq n$ 记为 $a_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_i$。对矩阵 $(a_{ij})_{1\leq i,\,j\leq n}$ 的各列使用归纳法，可知该矩阵是上三角的，因此其对角项可逆。因此，$(b_i)_{1\leq i\leq n}$ 是 $\mathcal{F}_\bullet$的一组基；这证明了 $\mathcal{F}_\bullet$的唯一性。反过来，由 $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ 得到的旗导出有序特征值序列 $(1\otimes\varphi_i)_{1\leq i\leq n}$；这证明了存在性。□

2.2. 三**角化与精化**。我们在以下定义中回顾三角形 (φ,Γ)-模的概念，该概念见 [1, 定义 2.3.2] 及 [13, 定义 3.3.8]。

定义 2.2.1。设 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$。设 D 是 $\mathcal{R}_{A,K}$ 上的一个 (φ,Γ_K)-模，且作为 $\mathcal{R}_{A,K}$-模是自由的。D 的一个**三角化** 是 (φ,Γ_K)-子模 over $\mathcal{R}_{A,K}$ 的严格递增序列 $\mathbf{Fil}_\bullet D$

$$\mathrm{Fil}_0 D := \{0\} \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Fil}_i D \subsetneq \ldots \subsetneq \mathrm{Fil}_d D := D$$

满足 $d = \mathbf{rk}_{\mathcal{R}_{A,K}}(D)$，且每个 $\mathbf{Fil}_i(D)$ 都是 D 作为 $\mathcal{R}_{A,K}$-模的直和项。若 D 可赋予一个三角化，我们称其为**可三角化的**；带有三角化的 D 的数据称为一个**三角形** (φ,Γ_K)-模。若表示 $V \in \mathbf{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$ 的 $\mathbf{D}_{\mathrm{rig}}(V)$ 可三角化，则称该表示为**三角化的**。

给定 $\mathcal{R}_{A,K}$ 上的一个三角形 (φ,Γ_K)-模 $(D, \mathbf{Fil}_\bullet D)$，其三角化的分次部分

$$\mathrm{gr}_i D := \mathrm{Fil}_i D / \mathrm{Fil}_{i-1} D, \quad 1 \leq i \leq d$$

作为 $\mathcal{R}_{A,K}$-模是秩为 1 的自由模。当 A 是一个 K_0-代数时，根据下文的命题 2.2.2，对每个 $1 \leq i \leq d$ 都存在唯一的连续特征 $\delta_i\colon K^\times \longrightarrow A^\times$，使得 $\mathbf{gr}_i D \simeq \mathcal{R}_{A,K}(\delta_i)$。

命题 2.2.2 (Colmez, Kedlaya-Pottharst-Xiao)。设 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$ 是一个 K_0-代数。给定任意一个 (φ,Γ_K)-模，其定义在 $,_K$ 上，并且作为 $\mathcal{R}_{A,K}$-模是秩为 1 的自由模，则存在唯一的连续特征 $\delta\colon K^\times \longrightarrow A^\times$，使得 $D \simeq \mathcal{R}_{A,K}(\delta)$ 作为 (φ,Γ_K)-模同构。

证明。这是 [26, 引理 6.2.13]；另见 [15, 命题 3.1] 在 $\mathcal{R}_{L,\mathbb{Q}_p}$ 上，以及 [1,命题 2.3.1] 在 $\mathcal{R}_{A,\mathbb{Q}_p}$ 上。□

定义 2.2.3. 设 $A \in \mathbf{Ar}_{\mathbb{Q}_p}$ 是一个 K_0-代数。设 $(D, \mathbf{Fil}_\bullet D)$ 是一个秩为 d、定义在 $\mathcal{R}_{A,K}$ 上的三角 (φ,Γ_K)-模。三角化 $\mathbf{Fil}_\bullet D$的参数 是唯一的连续特征

$$\underline{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_d)\colon (K^\times)^d \longrightarrow A^\times$$

使得对所有 $1 \le i \le d$，$\mathrm{gr}_i D \simeq \mathcal{R}_{A,K}(\delta_i)$。

下面的结果在某种程度上推广了 [1, 命题 2.4.1]。

命题 2.2.4. 设 $A \in \mathbf{Ar}^{\mathbb{Q}_p}$ 是其剩余域 $L := A/\mathfrak{m}_A A$上的一个代数，并且 L 分裂 K。设 $V \in \mathbf{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$ 是一个秩为 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ 且霍奇–泰特权重为$(h_{\tau,1} < \ldots < h_{\tau,n})_{\tau\in\Sigma}$的正则晶体表示。

假设存在$\mathbf{k} = (k_{\tau,i})_{\tau\in\Sigma,1\le i\le n} \in (\mathbb{Z}^n)^\Sigma$ 以及 $\varphi_i \in A^\times$，使得对于 $1 \le i \le n$，它们在 L中的约化两两不同，并且 V 是参数为

$$\underline{\delta} = z^{\mathbf{k}} \operatorname{unr}(\underline{\varphi}) := \left(z^{\mathbf{k}_1} \operatorname{unr}(\varphi_1), \ldots, z^{\mathbf{k}_n} \operatorname{unr}(\varphi_n)\right).$$

那么：

(1) 存在 $w = (w_\tau)_{\tau\in\Sigma_n} \in (\mathcal{S}_n)^\Sigma$，使得对所有 $\tau \in \Sigma$ 和 $1 \le i \le n$，$k_{\tau,i} = h_{\tau,w_\tau^{-1}(i)}$。*(2)* $D_{\mathrm{crys}}(V)$上的线性化弗罗贝尼乌斯 Φ 以 $(1 \otimes \varphi_i)_{1\le i\le n}$ 为特征值，且该排序确定了 V 的一个精化 $\mathcal{F}_\bullet$。*(3)* $\mathrm{Fil}^\bullet D_{\mathrm{dR}}(V)$ 相对于 $\mathcal{F}_{\mathrm{dR},\bullet} := K \otimes_{K_0} \mathcal{F}_\bullet$ 的位置 $x \in \prod_{\tau\in\Sigma}(G/B)(A)$ 位于胞腔 $\prod_{\tau\in\Sigma}(Bw_\tau B/B)(A)$中。

证明。回顾 Berger 的工作，其中有函子 $\mathcal{D}_{\mathrm{crys}}$，它将 $\mathrm{Mod}_A^{\varphi,\Gamma_K}$ 映至由 φ-半线性自同态作用的 K_0-模范畴（见 [3, 定理 3.6]）；还有函子 $\mathcal{D}_{\mathrm{dR}}$，它将 $\mathrm{Mod}_A^{\varphi,\Gamma_K}$ 映至 $\mathrm{Fil}^\bullet_{K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A}$（见 [4, 定理 A]）。它们的特征是，对于所有 $V \in \mathrm{Rep}_A(\mathcal{G}_K)$，均有 $\mathcal{D}_{\mathrm{crys}}(\mathbf{D}^{\mathrm{rig}}(V)) = \mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(V)$，以及 $\mathcal{D}_{\mathrm{dR}}(\mathbf{D}^{\mathrm{rig}}(V)) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$。此外，已知在晶体 (φ,Γ_K)-模的满子范畴上，$\mathcal{D}_{\mathrm{crys}}$ 和 $\mathcal{D}_{\mathrm{dR}}$ 是正合函子；也就是说，在满足 $\dim_{K_0} \mathcal{D}_{\mathrm{crys}}(D) = \mathrm{rk}_{\mathcal{R}_K} D$ 的 (φ,Γ_K)- 模 D 上，它们是正合函子。

设 $(D_i)_{0\le i\le n}$ 是 $\mathbf{D}^{\mathrm{rig}}(V)$ 的一个参数为 $\underline{\delta}$ 的三角化。对于 $0 \le i \le n$，记 $\mathcal{F}_i := \mathcal{D}_{\mathrm{crys}}(D_i)$。这些 D_i 是晶体的（作为 $\mathbf{D}^{\mathrm{rig}}(V)$ 的子对象），因此由 $\mathcal{D}_{\mathrm{crys}}$ 的正合性，每个正合列

$$0 \longrightarrow D_{i-1} \longrightarrow D_i \longrightarrow \mathcal{R}_{A,K}\left(z^{\mathbf{k}_i} \operatorname{unr}(\varphi_i)\right) \longrightarrow 0$$

诱导出一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{i-1} \longrightarrow \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{crys}}\left(\mathcal{R}_{A,K}\left(z^{\mathbf{k}_i} \operatorname{unr}(\varphi_i)\right)\right) \longrightarrow 0$$

的 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A[\varphi]$-模。已知 $\mathcal{D}_{\mathrm{crys}}\left(\mathcal{R}_{A,K}\left(z^{\mathbf{k}_i} \operatorname{unr}(\varphi_i)\right)\right)$ 是 $K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$ 上的秩一自由模，且其线性化弗罗贝尼乌斯的作用为乘以 φ_i[26, 例 6.2.6]。因此，Φ 在 $\mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ 上的作用为乘以 $1 \otimes \varphi_i$，故 $(1\otimes\varphi_i)_{1\le i\le n}$ 是 Φ 的一列特征值，而 $(\mathcal{F}_i)$ 是与 $(1 \otimes \varphi_i)_{1\le i\le n}$ 相关联的 V 的唯一精化（见命题 2.1.5）。这就证明了 (2)。

类似地，正合函子 $\mathcal{D}_{\mathrm{dR}}$ 对每个 $1 \le i \le n$ 诱导出一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{dR},i-1} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mathrm{dR},i} \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathrm{dR}}\left(\mathcal{R}_{A,K}\left(z^{\mathbf{k}_i} \operatorname{unr}(\varphi_i)\right)\right) \longrightarrow 0$$

在 $\mathrm{Fil}^\bullet_{K\otimes_{\mathbb{Q}_p}A}$ 中。它对每个 $1 \le i \le n$、每个 $\tau \in \Sigma$ 和每个 $k \in \mathbb{Z}$ 诱导出一个同构

$$\mathrm{Fil}^k(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau / \mathrm{Fil}^k(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i-1})_\tau \tag{2.6}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathrm{Fil}^k \mathcal{D}_{\mathrm{dR}}\left(\mathcal{R}_{A,K}\left(z^{\mathbf{k}_i} \operatorname{unr}(\varphi_i)\right)\right)_\tau \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } k \ne k_{\tau,i} \\ A & \text{if } k = k_{\tau,i} \end{cases}$$

（最后一个同构见 [26, 例 6.2.6] ）。将 (2.6) 应用于 $k = k_{\tau,i}+1$，得到 $\mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau / \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i-1})_\tau \xrightarrow{\sim} 0$，因此

$$\mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau / \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau = \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau / \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i-1})_\tau \twoheadrightarrow \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau / \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i-1})_\tau \tag{2.7}$$

D_{dR} 的正合性也表明，对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，都有 $\mathrm{Fil}^k \mathcal{F}_{\mathrm{dR},i} = \mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^k \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$，因此 (2.7) 可改写为

$$\left(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right)_\tau / \left(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right)_\tau \twoheadrightarrow \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i})_\tau / \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i-1})_\tau . \tag{2.8}$$

另一方面，存在一个显然的单射态射

$$\left(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right)_\tau / \left(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right)_\tau \hookrightarrow \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)_\tau / \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)_\tau. \tag{2.9}$$

(2.8) 的右端根据 (2.6) 应用于 $k=k_{\tau,i}$ 后，是 A 上秩为 1 的自由模。因此 (2.9) 的右端非零：这意味着 V 的霍奇滤过的跳跃度数为 $(k_{\tau,i})_{\tau\in\Sigma,1\le i\le n}$，从而证明了 (1)。

此外，由于 V 的正则性，(2.9) 的右端实际上是 A 上秩为 1 的自由模。比较关于 L 的维数，我们推得 (2.8) 和 (2.9) 是同构，因此 A-模 $\left(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right)_\tau / \left(\mathcal{F}_{\mathrm{dR},i}\cap \mathrm{Fil}^{k_{\tau,i}+1}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\right)_\tau$ 是秩为 1 的自由模。于是由引理 2.1.2 得到 (3)（注意，我们的计算给出的是 $\mathcal{F}_{\mathrm{dR},\bullet}$ 相对于 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 的位置，它与 $\mathrm{Fil}^\bullet\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ 相对于 $\mathcal{F}_{\mathrm{dR},\bullet}$ 的位置互为逆）。□

3. 补丁特征簇上的三角化簇与伴随点

本节中，我们回顾三角化簇的定义，以及 [12]和 [11]的一些结果。

设 L 是 $\mathbb{Q}_p$ 的一个有限扩张，且分裂 K，其整数环为 $\mathcal{O}_L$，剩余域为 k_L；回顾记号 $\Sigma := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K,L)$。我们固定 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 和一个连续表示

$$\bar{r}\colon \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k_L)$$

（其中 k_L 赋予离散拓扑）。

3.1. 三角化簇。令 $R^\square_{\bar{r}}$ 为 Mazur [30] 和 Kisin [29] 工作中所定义的 $\bar{r}$ 的带标架变形环；它是一个完备局部诺特 $\mathcal{O}_L$-代数，剩余域为 k_L，并且它对如下函子作概形表示：该函子将剩余域为 k_L 的局部阿廷 $\mathcal{O}_L$-代数 A 映至 $\bar{r}$ 在 A 上的带标架变形集合。将 $\bar{r}$ 的带标架变形簇定义为刚性 L-解析空间 $\mathfrak{X}^\square_{\bar{r}} := \mathrm{Spf}(R^\square_{\bar{r}})^{\mathrm{rig}}$，其中 Spf 表示形式谱，而 $(-)^{\mathrm{rig}}$ 是 Berthelot[7, §0.2] 的刚化函子（另见 [18, §7.1]）。利用 [18, 命题 7.1.7] 和 [29, 命题 2.3.5]，可知对于任意剩余域记为 E 的局部阿廷 L-代数 A，A-点 $\mathfrak{X}^\square_{\bar{r}}(A)$ 的集合是表示 $r_A\colon \mathcal{G}_K\longrightarrow \mathrm{GL}_n(A)$，使得 r_A 与 $\mathrm{GL}_n(A)\twoheadrightarrow\mathrm{GL}_n(E)$ 的复合的像包含于 $\mathrm{GL}_n(\mathcal{O}_E)$ 中，且该表示是一个带标架

变形，且是 $\bar{r}$ 与 $\mathrm{GL}_n(k_L) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k_E)$ 的复合的变形（其中 $\mathcal{O}_E$ 和 k_E 分别是 E 的整数环和剩余域）。

令 $\mathcal{W} :=$ $\mathcal{O}_K^\times$ 为定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的刚性解析空间，它参数化了 $\mathcal{O}_K^\times$ 的连续特征，即 使得对于任意定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的刚性解析空间 X， $\mathcal{W}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}\left(\mathcal{O}_K^\times, \Gamma(X,\mathcal{O}_X)^\times\right)$；其存在性与光滑性可通过拓扑群的分解 $\mathcal{O}_K^\times \simeq H \times \mathbb{Z}_p^{[K:\mathbb{Q}_p]}$ 得到，其中 H 是有限挠阿贝尔群（参见 [33, 命题 II.5.7]）。类似地，令 $\mathcal{T} := K^\times$ 为定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上的刚性解析空间，它参数化了 $K^\times$ 的连续特征；它也是光滑的，且任意分解 $K^\times \simeq \mathbb{Z} \times \mathcal{O}_K^\times$ 都会诱导出刚性解析空间之间的同构 $\mathcal{T} \simeq \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rig}} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W}$，它们定义在 $\mathbb{Q}_p$ 上。将一个 $K^\times$-特征限制到 $\mathcal{O}_K^\times$ 上，会诱导出态射 $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{W}$，该态射对应于投影 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rig}} \times_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{W} \twoheadrightarrow \mathcal{W}$。

记 $\mathcal{T}_L := \mathcal{T} \times_{\mathbb{Q}_p} L$。集合

$$\left\{ (\delta_i)_{1\le i\le n} \in \mathcal{T}_L^n(L) \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta_i\delta_j^{-1} = z^{-\mathbf{k}} \text{ or } \delta_i\delta_j^{-1} = N_{K/\mathbb{Q}_p}(z)z^{\mathbf{k}}|z|_K \\ \text{for some } i \neq j, \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}^{\Sigma} \end{array} \right\}$$

是 $\mathcal{T}_L^n$ 的解析子集（依照 [8, §9.5.2] 的定义），因此其补集是 $\mathcal{T}_L^n$ 中的一个扎里斯基开子集，我们将其记为 $\mathcal{T}^n{}_{\mathrm{reg}}$。

定义 3.1.1（Hellmann）。令 $U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 为子集

$$U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r}) := \left\{ (r,\underline{\delta}) \in \mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}_{\mathrm{reg}}^n \;\middle|\; r \text{ is trianguline of parameter } \underline{\delta} \right\}$$

$\mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}^n{}_{\mathrm{reg}}$。三角化簇 是 $U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 在 $\mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}_L^n$ 中的扎里斯基闭包 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$，并赋予其在 L 上的约化刚性解析空间结构。包含映射 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}_L^n$、投影 $\mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}_L^n \twoheadrightarrow \mathcal{T}_L^n$ 和限制态射 $\mathcal{T}_L^n \longrightarrow \mathcal{W}_L^n$ 的复合，是一个在 L 上的刚性解析簇态射，称为权态射，记作 $\omega\colon X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r}) \longrightarrow \mathcal{W}_L^n$。

注意，文献中也将 $U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$（分别将 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$）记作 $U^{\square}{}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})^{\mathrm{reg}}$ or $U_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$（分别记作 $X_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$）。

定理 3.1.2（Breuil-Hellmann-Schraen）. (1) 刚性解析空间 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 是等维的，维数为 $n^2 + [K:\mathbb{Q}_p]\frac{n(n+1)}{2}$. (2) $U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 是 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 的扎里斯基开且扎里斯基稠密子集。(3) 开集 $U_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上光滑，且 ω 在 $U^{\square}{}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 上的限制是光滑态射。

证明。这就是 [12, 定理 2.6]。 □

定义 3.1.3。若点 $x = (r,\underline{\delta}) \in X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 对应的表示 $r\colon \mathcal{G}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k(x))$ 是晶体表示，则称该点为晶体 点（$k(x)$ 是 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 在 x 处的局部剩余域）。

引理 3.1.4 (Breuil-Hellmann-Schraen)。设 $x = (r,\underline{\delta}) \in X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r})$ 是一个晶体点。那么存在 $\mathbf{h} = (h_{\tau,i}) \in (\mathbb{Z}^{\Sigma})^n$ 以及 $\underline{\varphi} = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n) \in (k(x)^\times)^n$ 使得

$$\underline{\delta} = z^{\mathbf{h}}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi}) := \left(z^{\mathbf{h}_1}\,\mathrm{unr}(\varphi_1),\ldots,z^{\mathbf{h}_n}\,\mathrm{unr}(\varphi_n)\right).$$

此外，$1 \otimes \varphi_i \in K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} k(x)$ 是 $\mathbf{D}^{\mathrm{crys}}(r)$ 上线性化弗罗贝尼乌斯 Φ 的特征值，并且对于每个 $\tau \in \Sigma$， r 的 τ-霍奇–泰特权重多重集为 $\{h_{\tau,i} \mid 1 \le i \le n\}$。

若 $\varphi_i\varphi_j^{-1} \notin \{1, p^{[K_0:\mathbb{Q}_p]}\}$ 对于 $i \neq j$成立，则还存在 $\mathbf{h}' \in (\mathbb{Z}^\Sigma)^n$ ，使得$(r, z^{\mathbf{h}'}\operatorname{unr}(\underline{\varphi})) \in U^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$。

证明。这就是 [11, 引理 2.1]；第二部分是其证明的推论。注意，对于所有 $\tau \in \Sigma$, 必有 $\{h_{\tau,i} \mid 1 \leq i \leq n\} = \left\{h'_{\tau,i} \,\middle|\, 1 \leq i \leq n\right\}$。□

3.2. 补丁特征簇。 本文其余部分中，我们作如下假设$p \nmid 2n$ （这尤其蕴含 $p > 2$）。

我们考虑以下全局设定。设 F 是一个 CM 域，即全实数域 F^+ 的二次全虚扩张，并以 S_p 表示整除 p 的 F^+ 的素位集合。我们假设 F/F^+ 在所有有限赋值处均不分歧，且所有赋值 $v \in S_p$ 在 F 中分裂并满足 $F_v^+ \simeq K$。设 G 是 F^+ 上一个具有 n 个变量的酉群，它在 F^+ 的所有有限赋值处准分裂，并且 $G \times_{F^+} F \simeq \mathrm{GL}_{n,F}$ 和 $G(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})$ 是紧的。设 $U^p = \prod_{v \notin S_p} 为有限的 U_v \subset G(\mathbb{A}_{F^+}^{p\infty})$ 驯分层，其中每个 U_v 都是 F_v^+ 的紧子群，并假设当 v 惰性时该子群为超特殊。接着固定 F^+ 的一个有限赋值集合 S，其中包含 S_p 以及所有满足 U_v 不是超特殊的赋值 v；特别地，所有赋值 $v \in S$ 都在 F 中分裂。设 $\bar{\rho}\colon \mathcal{G}_{F^+} \longrightarrow \mathrm{GL}_n(k_L)$ 是一个自守的连续不可约表示（例如参见 [20, 定义 5.3.1]）。由此尤其可知，根据[20, §5.1、§5.2、§5.3] 或 [14, §2.1、§2.3]， $\bar{\rho}$ “来自” $G(\mathbb{A}_{F^+})$ 上驯分层为 U^p 的 p-进自守形式；详细阐述见 [12, §2.4]（另见 [11, §3.1、§3.2] 开头）。此外， $\bar{\rho}\left(\mathrm{Gal}\left(\overline{F}/F(\zeta_p)\right)\right)$ 按照[34, 定义 2.3] 的意义是充分的。最后，我们假设对每个 $v \in S_p$，都存在 F 的一个赋值 $\tilde{v} \mid v$，使得 $\bar{\rho}_{\tilde{v}} := \bar{\rho}|_{\mathcal{G}_{F_{\tilde{v}}}}$ 经由 $F_{\tilde{v}} \simeq F_v^+ \simeq K$ 与 $\bar{r}$ 同构。固定这样一个赋值 $\tilde{v}$。

如有必要，扩大 L 后，Emerton-Gee 已借助 Emerton-Gee 堆栈 [21] 证明了此类整体化的存在性；参见 [21, 定理 1.2.2] 和 [20,推论 A.7]。

对于 $v \in S_p$，令 $R^{\overline{\square}}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}}$ 为 $R^{\square}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}}$ 的不含 p-挠元的最大约化商。由 [18, 引理 7.1.4.a]，，刚性解析空间 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}} := \mathrm{Spf}(R^{\overline{\square}}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}})^{\mathrm{rig}}$ 是约化的，且与 $\mathrm{Spf}(R^{\square}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}})^{\mathrm{rig}}$ 具有相同的底层拓扑空间。我们也记 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p} := \prod_{v \in S \setminus S_p} \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}}$ 和 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}_p} := \prod_{v \in S_p} \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}}$。

设 $T_p := \prod_{v \in S_p} T_v$ where $T_v := (F_{\tilde{v}}^\times)^n$ 是 $F_{\tilde{v}}$ 上的 n 维环面。则对每个 $v \in S_p$（分别为 $T_p \longrightarrow L^\times$），连续特征 $T_v \longrightarrow L^\times$ 由 L 上的刚性解析空间 $T_{v,L}$（分别为 $T_{p,L} := \prod_{v \in S_p} T_{v,L}$）参数化。注意，特征$T_v \longrightarrow L^\times$ 可通过 $F_{\tilde{v}} \simeq K$ 视为一个特征 $(K^\times)^n \longrightarrow L^\times$；这诱导出一个在 L 上的刚性同构 $\widehat{T}_{v,L} \simeq \mathcal{T}_L^n$。对每个 $v \in S_p$, 我们用 $\bar{\rho}_{\tilde{v}}$ 替代 $\bar{r}$，以与定义 $X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 相同的方式定义 $X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$，并令 $X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) := \prod_{v \in S_p} X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$；同样，同构 $F_{\tilde{v}} \simeq K$ 诱导出一个同构 $X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) \simeq (X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{r}))^{|S_p|}$。此外，由于$X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 按定义是约化的，因此存在一个扎里斯基闭嵌入

$$X^\square_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_p} \times_L \widehat{T}_{p,L}$$

定义在 L 上的刚性解析空间。

∽我们固定 $g \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，并令 $R_\infty := R^{\overline{\square}}_{\bar{\rho}_S}[\![t_1, \ldots, t_g]\!]$，其中 $R^{\overline{\square}}_{\bar{\rho}_S} := \bigotimes_{v \in S} R^{\overline{\square}}_{\bar{\rho}_{\tilde{v}}}$，且$\mathfrak{X}_\infty := \mathrm{Spf}(R_\infty)^{\mathrm{rig}}$。那么，根据 [18, 命题 7.2.4.g]，，我们有

$$\mathfrak{X}_\infty = \mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p} \times_L \mathfrak{X}_{\bar{\rho}_p} \times_L \mathbb{U}^g$$

其中 $\mathbb{U} := \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_L[\![t]\!])^{\mathrm{rig}}$ 是 L 上的单位开圆盘。通过调整 Caraiani-Emerton-Gee-Geraghty-Pašk¯unas-Shin [14, §2], 为某个 $g \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 构造的拼接方法，Breuil-Hellmann-Schraen 构造了一个 R_∞-表示 Π_∞，其定义在 $G_p := \prod_{v\in S_p} G(F_{\tilde{v}})$ 上，称为“拼接表示”，并满足若干性质，详情参见 [12, Théorème 3.5]。随后，他们考虑由局部 R_∞-解析向量组成的子空间 $\Pi^{R_\infty-\mathrm{an}_\infty}$（见 [12, Définition 3.2]），并应用与 $B_p := \prod_{v\in S_p} B_{\tilde{v}}$ 相关的 Emerton 的 Jacquet 模函子 J_{B_p}（见 [19, Definition 3.4.5]），其中$B_{\tilde{v}}$ 是 $\mathrm{GL}_n(F_{\tilde{v}})$ 中上三角矩阵构成的博雷尔子群。这给出了一个相干的 $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X}_\infty \times_L \widehat{T}_{p,L}}$-模 $\mathcal{M}_\infty$，其整体截面模 $\Gamma(\mathfrak{X}_\infty \times_L T_{p,L}, \mathcal{M}_\infty)$ 同构于 $J_{B_p}(\Pi^{R_\infty-\mathrm{an}_\infty})'$，其中 $(-)'$ 是连续对偶。

定义 3.2.1 (Breuil-Hellmann-Schraen)。补丁特征簇 $X_p(\bar{\rho})$ 是 $\widehat{\mathcal{M}}_\infty$ 的支撑（依照 [8, §9.5.2] 的定义），它是 $\mathfrak{X}_\infty \times_L T_{p,L}$ 的解析子集（见 同上中的命题 4），并赋予其作为 L 上约化刚性解析空间的结构。关于此构造的更多细节，请参阅 [12, §3.2，推论 3。20] 其中 $X_p(\bar{\rho})$ 称为*Hecke-Taylor-Wiles* 簇。

我们接下来回顾 $X_p(\bar{\rho})$ 与 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 之间的关系。对每个 $v \in S_p$，定义一个特征 $\underline{\delta}_{B_v} = (|\cdot|_{F_{\tilde{v}}}^{n+1-2i})_{1\leq i\leq n} \in \widehat{T}_{v,\,L}$，其中 $|\cdot|_{F_{\tilde{v}}}$ 按惯例由 $|p|_{F_{\tilde{v}}} = p^{-[F_{\tilde{v}}:\,\mathbb{Q}_p]}$ 归一化，并定义一个 $\widehat{T}_{v,L}$ 的自同构 ι_v，如下所示：

$$\iota_v(\underline{\delta}) := \underline{\delta}_{B_v} \cdot (\delta_i \cdot (\chi \circ \theta_{F_{\tilde{v}}}^{-1})^{i-1})_{1\leq i\leq n}$$

其中 χ 是圆分特征，$\theta_{F_{\tilde{v}}}\colon W_{\mathrm{ab}_{F_{\tilde{v}}}} \xrightarrow{\sim} F_{\tilde{v}}^\times$ 是局部互反同构，其规范化方式使得几何 Frobenius 元映至一致化元。该自同构的逆

$$\iota\colon \begin{array}{ccc} \mathfrak{X}_\infty \times_L \widehat{T}_{p,L} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_\infty \times_L \widehat{T}_{p,L} \\ \big(y, (\delta_v)_{v\in S_p}\big) & \longmapsto & \big(y, (\iota_v(\delta_v))_{v\in S_p}\big) \end{array}$$

诱导出一个扎里斯基闭嵌入

$$\iota^{-1}\colon X_p(\bar{\rho}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p} \times_L \left(\mathfrak{X}_{\bar{\rho}_p} \times_L \widehat{T}_{p,L}\right) \times_L \times \mathbb{U}^g\,.$$

根据 [12, 定理 3.21]，ι^{-1} 在 L 上诱导出一个刚性解析空间的同构，将 $X_p(\bar{\rho})$ 映至 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p} \times_L X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) \times_L \mathbb{U}^g$ 的若干不可约分支之并。这些不可约分支具有 $\mathfrak{X}^p \times_L Z \times_L \mathbb{U}^g$ 的形式，其中 $\mathfrak{X}^p$ 是 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p}$ 的一个不可约分支，Z 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 的一个不可约分支。因此，我们有一个同构

$$\iota^{-1}\colon X_p(\bar{\rho}) \xrightarrow{\sim} \bigcup_{\mathfrak{X}^p \text{ irr. comp. of } \mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p}} \left(\mathfrak{X}^p \times_L X^{\mathfrak{X}^p-\mathrm{aut}}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) \times_L \mathbb{U}^g\right) \tag{3.1}$$

其中，对于每个 $\mathfrak{X}^p$, $X^{\mathfrak{X}^p-\mathrm{aut\,tri}}(\bar{\rho}_p)$ 都是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 的不可约分支之并。

下面是 [12,猜想 3.23]。

猜想 3.2.2. 对于 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p}$ 的任意不可约分支 $\mathfrak{X}^p$，其刚性解析子簇 $X^{\mathfrak{X}^p-\mathrm{aut\,tri}}(\bar{\rho}_p) \subseteq X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 等于 $\widetilde{X}^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) := \prod_{v\in S_p} \widetilde{X}^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$，其中 $\widetilde{X}^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$ 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$ 的不可约分支 Z 之并，且这些分支满足 $Z \cap U^{\square}{}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$ 含有一个晶体点。特别地，$X^{\mathfrak{X}^p-\mathrm{aut\ tri}}(\bar{\rho}_p)$ 不依赖于 $\mathfrak{X}^p$。

3.3. 强链接与伴随点。 我们回顾一个来自 [11] 的工具，用于在 $X_p(\bar{\rho})$ 上寻找点（即所谓的伴随点）；这与特征的强链接概念有关，下面我们将对此进行解释。

设 $\mathfrak{g}$ 是特征为 0 的域 k 上的李代数，并带有一个嘉当子代数 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{g}$。设 $\Phi \subseteq \mathfrak{t}^*$:= $\mathrm{Hom}_k(\mathfrak{t}, \overline{k})$ 是 $(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 的根系（其中 $\overline{k}$ 是 k的代数闭包），设 $W := W(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ 是作用于 $\mathfrak{t}^*$ 和Φ上的魏尔群。令 $E \subset \mathfrak{t}^*$ 为 $\mathbb{Q}$生成的 Φ -张成空间，并赋予 E 其非退化双线性形式 $(\cdot \mid \cdot)$，该形式在 W 作用下保持不变（参见 [9, 第 VI 章，§1.1，命题 3]）。选取 I 作为 Φ 的一组基，并称其元素为单根；此选择通过规定当且仅当 $\lambda - \mu$ 是单根的 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-线性组合时，$\mu \leq \lambda$，从而在 $\mathfrak{t}^*$ 上诱导出一个偏序。对每个根 $\alpha \in \Phi$，令 $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ 为与 α对应的余根。于是 $\{\alpha^\vee \mid \alpha \in I\}$ 是 E的一组基；在 $(\cdot \mid \cdot)$ 下，它有一组正交对偶基，其元素称为基本权。我们称基本权之和为特殊权；它是一个元素 $\varpi \in E$，特别满足对任意单根 $\alpha \in I$，都有 $s_\alpha \varpi = \varpi - \alpha$，其中 $s_\alpha \in W$是与 α对应的反射，定义为 $s_\alpha \colon \lambda \mapsto \lambda - (\lambda \mid \alpha^\vee)\alpha$。注意，$\varpi$ 通常记作 ρ，例如 [24], ，但我们希望避免与整体表示混淆。

定义 3.3.1. 点作用 是 W 在 $\mathfrak{t}^*$ 上的作用，定义为

$$w \cdot \lambda := w(\lambda + \varpi) - \varpi$$

对所有 $w \in W$ 和 $\lambda \in \mathfrak{t}^*$均成立。

设 $\lambda, \mu \in \mathfrak{t}^*$。若存在根 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \Phi$，其中某个 $r \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$满足 $\mu = (s_{\alpha_r} \ldots s_{\alpha_1}) \cdot \lambda$，且对所有 $1 \leq i \leq r-1$都有 $(s_{\alpha_{i+1}} \cdots s_{\alpha_1}) \cdot \lambda < (s_{\alpha_i} \ldots s_{\alpha_1}) \cdot \lambda$，则称 μ 与 λ强关联，并记作 $\mu \uparrow \lambda$。

对每个赋值 $v \in S_p$，我们将此应用于分裂约化群$G_{v,L} := \left(\mathrm{Res}_{F_{\tilde{v}}/\mathbb{Q}_p} \mathrm{GL}_n, {}_{F_{\tilde{v}}}\right) \times_{\mathbb{Q}_p} L \simeq \prod_{\tau \in \Sigma_v} \mathrm{GL}_{n,L}$在 L上的情形（其中 $\Sigma_v := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_{\tilde{v}}, L) \simeq \Sigma$），其李代数为 $\mathfrak{g}_{v,L} = \prod_{\tau \in \Sigma} \mathfrak{gl}_{n,L}$，卡当代数为 $\mathfrak{t}_{v,L} = \prod_{\tau \in \Sigma_v} \mathfrak{t}_L$（其中$\mathfrak{t}_L \simeq L^n$）。于是，$\mathfrak{t}^*_{v,L} \simeq (\overline{L}^n)^{\Sigma_v}$ 是 $\overline{L}$上的向量空间，魏尔群$W = (\mathcal{S}_n)^{\Sigma_v}$ 以显然的方式作用于 $\mathfrak{t}^*_{v,L}$。我们选取与上三角矩阵的博雷尔子群对应的基 $I \subset \Phi$；单根为 $\alpha = (\alpha_{\tau', i'})_{\tau' \in \Sigma_v, 1 \leq i' \leq n} \in \mathfrak{t}^*_{v,L}$，使得对某些 $\tau \in \Sigma_v$ 和 $1 \leq i \leq n-1$，有 $\alpha_{\tau,i} = -\alpha_{\tau,i+1} = 1$ 且对所有 $\tau' \neq \tau$和 $i' \notin \{i, i+1\}$均有 $\alpha_{\tau', i'} = 0$。于是特殊权为 $\varpi = \left(\frac{n+1}{2} - i\right)_{\tau \in \Sigma_v, 1 \leq i \leq n} \in \mathfrak{t}^*_{v,L}$，点作用表示为

$$w \cdot \lambda = \left(\lambda_{\tau, w_\tau^{-1}(i)} + i - w_\tau^{-1}(i)\right)_{\tau \in \Sigma_v, 1 \leq i \leq n}$$

对于 $w = (w_\tau)_{\tau \in \Sigma_v} \in W$ 和 $\lambda = (\lambda_{\tau,\ i})_{\tau \in \Sigma_v,\ 1 \leq i \leq n} \in \mathfrak{t}^*_{v,\ L}$。

若 $\underline{\delta}_v = (\delta_{v,\ i})_{1 \leq i \leq n} \colon T_{v,\ L} \longrightarrow L'^\times$ 是连续特征，取某个赋值 $v \in S_p$及 L的某个有限扩张 L'，则可将 $\mathrm{d}\underline{\delta}_v = (\mathrm{wt}_\tau(\delta_{v,\ i}))_{\tau \in \Sigma_v,\ 1 \leq i \leq n}$ 视为$\mathfrak{t}^*_{v,\ L}$的一个元素。

定义 3.3.2。 令 $\underline{\delta} = (\underline{\delta}_v)_{v \in S_p}, \underline{\epsilon} = (\underline{\epsilon}_v)_{v \in S_p} \in T_{p,\ L}$。若对所有 $v \in S_p$，$\underline{\epsilon}$与 $\underline{\delta}$强关联，即 $\mathrm{d}\underline{\epsilon}_v \uparrow \mathrm{d}\underline{\delta}_v$ in $\mathfrak{t}^*_{v,\ L}$，并且 $\underline{\epsilon}\underline{\delta}^{-1}$ 是代数的（也就是说，对所有 $v \in S_p$，存在 $\mathbf{k}_v \in \mathbb{Z}^{\Sigma_v}$ 使得 $\underline{\epsilon}_v \underline{\delta}_v^{-1} = z^{\mathbf{k}_v}$），则称 $\underline{\epsilon}$与 $\underline{\delta}$强关联。在这种情况下，我们记作$\underline{\epsilon} \uparrow \underline{\delta}$。

定理 3.3.3 (Breuil-Hellmann-Schraen)。 令 $x=(y,\ \underline{\delta})\in\mathfrak{X}_\infty\times_L T_{p,\ L}$ 为一个点，位于 $X_p(\bar\rho)$ 中；令 $\underline{\epsilon}\in T_{p,\ L}$ 为满足 $\underline{\epsilon}\uparrow\underline{\delta}$ 的一个特征。则点 $x'=(y,\ \underline{\epsilon})\in\mathfrak{X}_\infty\times_L T_{p,\ L}$ 也位于 $X_p(\bar\rho)$ 中。

证明。 这就是 [11, 定理 5.5]；参见 同上中的 (3.10)。 □

4. 三角化簇上的切空间

本节证明本文的主要结果：定理 4.1.4。该定理计算满足某些技术条件的晶体点处 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)$ 的维数，将 [11, 推论 5.17] 和 [13, 命题 4.1.5] 推广到此情形（后者见 [13, 注 4.1.6(iii)]）。

我们沿用 §3 中的记号。

4.1. 晶体一般点与排列对。 固定一个晶体点 $x=(r,\underline{\delta})\in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)$，并假设 x 按照 [13], 即 r 是正则且 $\varphi_i\varphi_j^{-1}\notin\{1,p^{[K_0:\ \mathbb{Q}_p]}\}$ 对于 $i\neq j$ 是一般 的，其中 $1\otimes\varphi_i\in K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}k(x)$ 是 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(r)$ 上线性化弗罗贝尼乌斯 Φ 的特征值。我们将其霍奇–泰特权重记为 $\mathrm{h}=(h_{\tau,\ i})_{\tau\in\Sigma,\ 1\le i\le n}$，并按如下方式排序：对于所有 $\tau\in\Sigma$，$h_{\tau,\ 1}<\ldots<h_{\tau,\ n}$。

根据引理 3.1.4，我们可以附加两个元素 $w,w_{\mathrm{sat}}\in\mathcal{S}_n^{\Sigma}$，使得 (i) 特征 $\underline{\delta}$ 具有 $\underline{\delta}=z^{w(\mathrm{h})}\mathrm{unr}(\underline{\varphi})$ 的形式，其中 $\underline{\varphi}=(\varphi_i)_{1\le i\le n}$，且 $w(\mathrm{h}):=(h_{\tau,\ w_\tau^{-1}(i)})_{\tau,\ i}\in(\mathbb{Z}^\Sigma)^n$；(ii) 点 $x_{\mathrm{sat}}:=(r,\underline{\delta}_{\mathrm{sat}})\in\mathfrak{X}^{\square}_{\bar r}\times_L\mathcal{T}_L^n$ 由 $\underline{\delta}_{\mathrm{sat}}=z^{w_{\mathrm{sat}}(\mathrm{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi})$ 定义，且属于 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)$。

记住，$(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 是分裂约化群 $\left(\prod_{\tau\in\Sigma}G,\prod_{\tau\in\Sigma}T\right)$ 在 $\mathbb{Q}_p$ 上的根系 $\coprod_{\tau\in\Sigma}\Phi$ 的魏尔群，其中 $G:=\mathrm{GL}_{n,\mathbb{Q}_p}$，而 $T\subseteq G$ 是对角矩阵构成的环面。记 $X(T):=\mathrm{Hom}(T,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$ 为 T 的代数特征所构成的 $\mathbb{Z}$-模，则有 $\Phi\subset X(T)$，且典范同构 $X(T)\simeq\mathbb{Z}^n$ 诱导出 $\Phi\simeq\{e_i-e_j\mid 1\le i,j\le n\ ,\ i\neq j\}$，其中 $(e_i)_{1\le i\le n}$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的标准基。对于 $w'\in(\mathcal{S}_n)^\Sigma$，我们用 $d_{w'}$ 表示由 $\left\{w'(\alpha)-\alpha\ \middle|\ \alpha\in\coprod_{\tau\in\Sigma}\Phi\right\}$ 生成的 $\mathbb{Z}$-子模 $X\left(\prod_{\tau\in\Sigma}T\right)$ 的秩。我们选取 Φ 的标准基 $I:=\{e_i-e_{i+1}\mid 1\le i\le n-1\}$，该基对应于由上三角矩阵构成的博雷尔子群 $B\subseteq G$。它在 $\mathcal{S}_n$ 上诱导出长度函数 lg 和偏布鲁哈特序 $\preceq$；这些自然延拓为 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 上的长度函数和布鲁哈特序，仍记作 lg 和 $\preceq$，也可以通过选取根系 $\coprod_{\tau\in\Sigma}\Phi$ 的相应标准基 $\coprod_{\tau\in\Sigma}I$ 直接定义。根据 [13, 定理 4.2.3], ，我们有 $w_{\mathrm{sat}}\preceq w$。

定义 4.1.1。 设 $(w_1,w_2)\in(\mathcal{S}_n)^2$ 满足 $w_1\preceq w_2$。如果存在一个由形如 e_i-e_j 的根组成的序列 $(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$，其中 $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ 在 $w_1w_2^{-1}$ 的作用下属于同一轨道，并且 $w_2=s_{\alpha_r}s_{\alpha_{r-1}}\ldots s_{\alpha_1}w_1$，且对所有 $1\le i\le r$ 都有 $s_{\alpha_i}\ldots s_{\alpha_1}w_1\succ s_{\alpha_{i-1}}\ldots s_{\alpha_1}w_1$，则称 (w_1,w_2) 为一个 良好对。

对于满足 $w_1\preceq w_2$ 的 $(w_1,w_2)\in\left((\mathcal{S}_n)^\Sigma\right)^2$，当且仅当对所有 $\tau\in\Sigma$，$(w_{1,\tau},w_{2,\tau})\in(\mathcal{S}_n)^2$ 都是一个良好对时，我们称 (w_1,w_2) 为一个 良好对。

例 4.1.2. 对于 $n\le 4$，除由 $(w_1(1)\ w_1(2)\ w_1(3)\ w_1(4))=(1,3,2,4)$ 和 $(w_2(1)\ w_2(2)\ w_2(3)\ w_2(4))=(4,2,3,1)$ 定义的 $(w_1,w_2)\in(\mathcal{S}_4)^2$ 外，所有配对都是良好对。事实上，我们将在后续论文 [32, 定理 2.4.10] 中证明一个将良好对与模式避免联系起来的结果，特别是该结果意味着“多数”配对都是良好对。

从现在起，我们作如下假设：

假设 4.1.3. 沿用 §3 的记号，存在一个不可约分支$\mathfrak{X}^p$属于 $\mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p}$，使得 $(x_{\mathrm{sat},v})_{v\in S_p}\in X^{\mathfrak{X}^p-\mathrm{aut}}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$，其中 $x_{\mathrm{sat},v}\in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\bar{v}})$ 在 $\bar{\rho}_{\bar{v}}\simeq\bar{r}$ 下与$x_{\mathrm{sat}}\in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$对应，对每个 $v\in S_p$ 都成立。

~注意，假设 4.1.3 由猜想 3.2.2 推出，因为根据定义，$x_{\mathrm{sat},v}\in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\bar{v}})$。

定理 4.1.4. 假设假设 *4.1.3* 成立。设 $x\in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 是晶体一般的，使得关联对 (w_{sat},w) 在 $(\mathcal{S}_n)^{\Sigma}$ 中符合定义 *4.1.1* 的良好条件。那么

$$\dim_{k(x)}T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}),x}=\dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})-d_{ww^{-1}_{\mathrm{sat}}}+\sum_{\tau\in\Sigma}\dim_{\mathbb{Q}_p}T_{\overline{(Bw_\tau B/B)},w_{\mathrm{sat},\tau}B}-\lg(w_{\mathrm{sat}})$$

其中 $d_{ww^{-1}\ \mathrm{sat}}$ 的定义见定义 *4.1.1* 前一段。

本节余下部分将用于证明定理 4.1.4。我们采用与 [11,] 类似的策略，具体如下。我们构造$T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\ x}$的两个子空间，一个大致对应于“晶体切方向”，另一个对应于“三角化切方向”，并计算这两个子空间之和的维数：这给出了 $\dim^{k(x)}T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\ x}$ 的下界。上界将在 [13, 定理 4.1.5(ii)] 中证明。

4.2. **晶体切方向**。按照 [11, §2.2] 和[13, §4.2], 的介绍，我们回顾刚性解析空间的构造，该空间定义在 L 上，用于参数化具有给定霍奇–泰特权重的晶体变形，并附带弗罗贝尼乌斯特征值的一个排列。

令 $R^{\square}_{,\bar{r}}{}^{\mathbf{k}-\mathrm{cr}}$ 为 $R^{\square}_{\bar{r}}$ 的商，表示 $\bar{r}$ 的带框变形，这些变形是霍奇–泰特权重为 h 的晶体变形（其存在性由 [28, 推论 2.6.2] 保证；它是约化的，且在 $\mathbb{Z}_p$ 上平坦）。也就是说，对于任意剩余域为 k_L、其上含有 $\mathcal{O}_L$ 的完备局部诺特代数 A，态射 $R^{\square}_{\bar{r}}\longrightarrow A$ 当且仅当相应的变形 $r\colon\mathcal{G}_K\longrightarrow\mathrm{GL}_n(A)$ 是霍奇–泰特权重为 h 的晶体表示时，才通过 $R^{\square}_{,\bar{r}}{}^{\mathbf{k}-\mathrm{cr}}$ 分解。记 $\mathfrak{X}^{\square}_{,\bar{r}}{}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}:=\mathrm{Spf}(R^{\square}_{,\bar{r}}{}^{\mathbf{k}-\mathrm{cr}})^{\mathrm{rig}}$ 为相应的 L 上的刚性解析空间。与 $\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}}$ 的情形（见 §3）类似，按照 [29, 命题 2.3.5] 的论证可知，对于任意 L 上的局部阿廷代数 A，A-点的集合 $x\in\mathfrak{X}^{\square}_{,\bar{r}}{}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}(A)$ 就是那些点 $x\in\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}}(A)$ 的集合，其中相应的表示 $r_x\colon\mathcal{G}_K\longrightarrow\mathrm{GL}_n(A)$ 是霍奇–泰特权重为 h 的晶体表示。

根据 [28, 定理 2.5.5]（另见 [5, 推论 6.3.3]），存在一个 $\mathcal{D}$ 上的相干局部自由模$K_0\otimes_{\mathbb{Q}_p}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\square},\ \bar{r}}{}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}$ 它配备了一个 φ-半线性自同构 φ_{crys}，使得对于所有 $x\in\mathfrak{X}^{\square},\ \bar{r}}{}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}$ 对应于一个变形$r_x\colon\mathcal{G}_K\longrightarrow\mathrm{GL}_n(k(x))$的情形，都存在一个同构

$$\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\square},\mathbf{h}-\mathrm{cr}}}k(x)\simeq\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(r_x)$$

使得 $\varphi_{\mathrm{crys}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\square},\ \bar{r}}{}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}}k(x)$ 在 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(r_x)$ 上诱导 φ-作用。此外，对于每个 $\tau\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(K_0,L)$，线性化弗罗贝尼乌斯 $\Phi_{\mathrm{crys}}:=(\varphi_{\mathrm{crys}})^{[K_0:\ \mathbb{Q}_p]}$ 在 $\mathbf{D}_{\mathrm{crys}}(r_x)\otimes_{K_0,\ \tau}L$ 上诱导一个可逆线性作用，该作用在同构意义下与选择 $\varphi_{\mathrm{crys}}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{\square}}}$ 无关，

因此，取该作用的特征多项式的系数，便得到一个定义在 L 上的刚性解析空间之间的态射

$$\mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}} \longrightarrow \left((\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{rig}})^{n-1} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{rig}}\right) \times_{\mathbb{Q}_p} L \tag{4.1}$$

其中，点 $x \in \mathfrak{X}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{,\bar{r}}$ 的像 $(a_{n-1}, \ldots, a_1, a) \in k(x)^{n-1} \times k(x)^{\times}$ 满足：$\mathbf{D}^{\mathrm{crys}}(r_x)$ 上的弗罗贝尼乌斯的特征值为 $1 \otimes \varphi_i \in K_0 \otimes_{\mathbb{Q}_p} k(x)$，其中 φ_i对于 $1 \leq i \leq n$ 是多项式 $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a$ 的根。另请参见[11, §2.2]。

如定义 2.1.1 后的段落所述，设 $G := \mathbf{GL}_{n,\mathbb{Q}_p}$, $B \subset G$ 为上三角矩阵的博雷尔子群，$T \subset B$ 为 B 内的极大环面；(G,T) 的魏尔群是对称群 $\mathcal{S}_n$。对称多项式基本定理中的同构 $L[e_1, \ldots, e_n, f]/(e_n f - 1) \xrightarrow{\sim} L[t_1, \ldots, t_n, u]^{\mathcal{S}_n}/(u\prod t_i - 1)$ 给出概形的一个同构

$$T_L/\mathcal{S}^n \xrightarrow{\sim} \left(\mathbb{G}_{\mathrm{a}}^{n-1} \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}\right) \times_{\mathbb{Q}_p} L$$

其中，左边通过多项式的根对其进行参数化，右边则通过其系数对其进行参数化。因此，(4.1) 是一个从 $\mathfrak{X}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{,\bar{r}}$ 到 $T_L^{\mathrm{rig}}/\mathcal{S}^n$ 上刚性解析空间的态射，我们用它来定义

$$\widetilde{\mathfrak{X}}_{\bar{r}}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}} := \mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}} \times_{T_L^{\mathrm{rig}}/\mathcal{S}^n} T_L^{\mathrm{rig}}$$

根据 [11, 引理 2.2]，这是一个定义在 L 上的约化刚性解析空间。

由 [13, 定理 4.2.3] 的证明（另见 [11, 引理 2.4]）可知，集合

$$\widetilde{W}_{\bar{r}}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}} := \left\{(r', \underline{\varphi'}) \in \widetilde{\mathfrak{X}}_{\bar{r}}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}} \;\middle|\; \varphi_i'{\varphi_j'}^{-1} \notin \{1, p^{[K_0:\mathbb{Q}_p]}\}\ \forall\, i \neq j\right\}$$

是 $\widetilde{\mathfrak{X}}^{\square,\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{,\bar{r}}$ 的扎里斯基开稠密子集，并且存在一个光滑态射

$$h : \widetilde{W}_{\bar{r}}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}} \longrightarrow \left(\mathrm{Res}_{K/\mathbb{Q}_p}(G/B)_K^{\mathrm{rig}}\right) \times_{\mathbb{Q}_p} L \simeq \prod_{\tau\in\Sigma}(G/B)_L^{\mathrm{rig}} \tag{4.2}$$

这是一个从 L 到 r' 上刚性解析空间的态射，它将点 $(r', \underline{\varphi'}) \in \widetilde{W}_{\bar{r}}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}$ 映到 Hodge 旗 $\mathrm{Fil}^{\bullet}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(r')$ 相对于由排序 $\underline{\varphi'}$ 诱导的 $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}^{\mathrm{crys}}(r')$ 上精化的位置（见定义 2.1.3 后的讨论）。注意，我们使用记号 r' 和 $\underline{\varphi'}$，以免与 §4.1 中定义的 r 和 $\underline{\varphi}$ 混淆。

固定一个置换 $w = (w_\tau) \in \mathcal{S}_n^{\Sigma}$并定义解析子集

$$\widetilde{W}_{\bar{r},w}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}} := h^{-1}\left(\prod_{\tau\in\Sigma}(\overline{Bw_\tau B/B})_L^{\mathrm{rig}}\right) \subseteq \widetilde{W}_{\bar{r}}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}$$

$\widetilde{W}_{\mathbf{h}-\mathrm{cr}_{\bar{r}}}$（注意，在 [13, §4.2] 中记作 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}\,w,}$；为清晰起见，我们省略横线）。

命题 4.2.1（Breuil-Hellmann-Schraen）。该态射

$$\iota_{\mathbf{h},w}: \begin{array}{ccc} \widetilde{W}_{\bar{r},w}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}} & \longrightarrow & \mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}_L^n \\ (r', \underline{\varphi'}) & \longmapsto & \left(r', z^{w(\mathbf{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi'})\right) \end{array}$$

是定义在 L 上的刚性解析空间之间的态射（回顾一下，$w(\mathbf{h}) := (h_{\tau,w_\tau^{-1}(i)})_{\tau,i} \in (\mathbb{Z}^{\Sigma})^n$）是一个闭浸入，并且经由包含映射 $X_{\mathrm{tri}}^{\square}(\bar{r}) \subset \mathfrak{X}_{\bar{r}}^{\square} \times_L \mathcal{T}_L^n$分解。

证明。 参见 [13,定理 4.2.3]的证明。 □

注意，$\iota_{\mathbf{h},\ w}(r,\underline{\varphi}) = x$，因此 $\iota_{\mathbf{h},\ w}$ 诱导出一个态射 $T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}\ w},\ ,\ (r,\ \underline{\varphi})} \longrightarrow T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\ x}$。

4.3. 三角化切方向。 我们将§5中的一个构造推广如下。令 $\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}\ L} \subset \mathcal{W}^n_L$ 表示由下列方程定义的特征 $\underline{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ 的解析子集：

$$\mathrm{wt}_\tau\left(\eta_{w_{\mathrm{sat},\tau}(i)}\eta^{-1}_{w_\tau(i)}\right) = h_{\tau,i} - h_{\tau,w^{-1}_{\mathrm{sat},\tau}w_\tau(i)}\,, \quad 1 \le i \le n\,, \quad \tau \in \Sigma$$

其结构为 L 上的约化刚性解析空间。这样的特征 $\underline{\eta}$ 具有如下形式：$z^{w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\underline{\eta}'$，其中 $\underline{\eta}' = (\eta'_1, \ldots, \eta'_n) \in \mathcal{W}^n_L$ 满足对所有 τ, i，$\mathbf{wt}^\tau\left(\eta'_{w_\tau w^{-1}_{\mathrm{sat},\tau}(i)}\right) = \mathbf{wt}_\tau(\eta'_i)$。特别地，$\underline{\delta}_{\mathrm{sat}}$ 的情形正是如此。

我们定义一个自同构 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$：$\mathcal{T}^n_L \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}^n_L$，如下所示：

$$\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(\underline{\eta}) := z^{w(\mathbf{h})-w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\underline{\eta}$$

并仍将 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$ 记作自同构 $\mathrm{id}_{\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}}} \otimes \jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$：$\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times_L \mathcal{T}^n_L \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times_L \mathcal{T}^n_L$。

根据 [13, 推论 3.7, 10],刚性簇 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 在 x_{sat} 处局部不可约，因此，采用假设 4.1.3 中的记号，我们可以在 $(x_{\mathrm{sat},v})_{v\in S_p}$ 处局部地将 $X^{\mathfrak{X}^p-}_{\mathrm{aut\ tri}}(\bar{\rho}_p)$ 与 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 识别起来。因此，存在一个扎里斯基开邻域

$$U_{x_{\mathrm{sat}}} \subseteq U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$$

使得 x_{sat} 满足 $\prod_{v\in S_p} U_{x_{\mathrm{sat},v}} \subseteq X^{\mathfrak{X}^p-}_{\mathrm{aut\ tri}}(\bar{\rho}_p)$，其中每个 $U_{x_{\mathrm{sat},v}} \subset X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$ 在 $\bar{\rho}_{\tilde{v}} \simeq \bar{r}$ 下对应于 $U_{x_{\mathrm{sat}}} \subset X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$。

由于 $U_{x_{\mathrm{sat}}}$ 是 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 的扎里斯基开子集，根据定理 3.1.2 及基变换，$U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,\ w_{\mathrm{sat}},\ \mathbf{h}\ L}$ 在 $\mathcal{W}^n_{w,\ w_{\mathrm{sat}},\ \mathbf{h}\ L}$ 上光滑，因此是约化的；并且它是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,\ w_{\mathrm{sat}},\ \mathbf{h}\ L}$ 的扎里斯基开子集。考虑其扎里斯基闭包 $\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,\ w_{\mathrm{sat}},\ \mathbf{h}\ L}}$，赋予其 L 上约化刚性解析空间的结构；它包含在以下一串扎里斯基闭嵌入中

$$\begin{aligned}\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}} &\hookrightarrow \left(X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}\right)^{\mathrm{red}} \\ &\hookrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L} \hookrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) \subseteq \mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times_L \mathcal{T}^n_L\end{aligned}$$

而自同构 $\jmath_{w,\ w_{\mathrm{sat}},\ \mathbf{h}}$：$\mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times_L \mathcal{T}^n_L \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times_L \mathcal{T}^n_L$ 诱导出一个扎里斯基闭嵌入

$$\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}} \colon \overline{U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}} \hookrightarrow \mathfrak{X}^{\square}_{\bar{r}} \times_L \mathcal{T}^n_L\,. \tag{4.3}$$

命题 4.3.1。 我们有

$$\dim_{k(x)} T_{U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L},x_{\mathrm{sat}}} = \dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}) - d_{ww^{-1}_{\mathrm{sat}}}$$

（参见定义 *4.1.1* 前的段落，其中给出了 $d_{ww^{-1}_{\mathrm{sat}}}$ 的定义）.

证明。 这与 [11,命题 5.15] 相同。 □

以下结果改编自 [11, 命题 5.9]。

命题 4.3.2. 假设在定义 *4.1.1* 的意义下，(w_{sat}, w) 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 中的良好对。那么 (4.3) 诱导出一个定义在 L 上的约化刚性解析空间之间的扎里斯基闭嵌入

$$\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}} \colon \overline{U_{x_{\mathrm{sat}}} \times_{\mathcal{W}^n_L} \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}} \hookrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})\,. \tag{4.4}$$

证明. 只需证明，任意满足 $\underline{\delta}'|_{(\mathcal{O}_K^\times)^n} \in \mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}\,L}$ 的点 $x'=(r',\underline{\delta}') \in U_{x_{\mathrm{sat}}}$ 都满足 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(x') \in X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$。根据定义，$X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p)$ 中的开子集 $\prod_{v\in S_p} U_{x_{\mathrm{sat},v}}$ 属于该态射的像

$$X_p(\bar{\rho}) \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\bar{\rho}^p} \times_L X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) \times_L \times \mathbb{U}^g \twoheadrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) \tag{4.5}$$

其中第一个箭头是 (3.1)。设 $y'=(s',\underline{\epsilon}') \in \mathfrak{X}_\infty \times T_{p,L}$ 是 $X_p(\bar{\rho})$ 的一个点，其在 (4.5) 下的像为 $(x'_v)_{v\in S_p}$，其中 $x'_v \in U_{x_{\mathrm{sat},v}}$ 在 $U_{x_{\mathrm{sat},v}} \simeq U_{x_{\mathrm{sat}}}$ 下对应于 $x' \in U_{x_{\mathrm{sat}}}$。特别地，我们知道 $\underline{\epsilon}'=(\iota_v(\underline{\delta}'_v))_{v\in S_p}$，其中 $\underline{\delta}'_v$ 是 $(F_{\tilde{v}}^\times)^n \xrightarrow{\sim} (K^\times)^n$ 与 $\underline{\delta}'$ 的复合。考虑点

$$\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(y') := (s', \jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(\underline{\epsilon}')) \in \mathfrak{X}_\infty \times \widehat{T}_{p,L}$$

其中 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(\underline{\epsilon}') := (\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(\iota_v(\underline{\delta}'_v)))_{v\in S_p}$。只需证明 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(y') \in X_p(\bar{\rho})$，因为这样一来，$(\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(x'_v))_{v\in S_p}$ 就是 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(y')$ 在 (4.5) 下的像（因为 $\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}$ 与 ι_v 可交换），因此是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_p) = \prod_{v\in S_p} X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{\rho}_{\tilde{v}})$ 的一个点。

根据定理 3.3.3，我们只需证明 $\underline{\epsilon}' \uparrow \jmath_{w,\,w_{\mathrm{sat}},\,\mathbf{h}}(\underline{\epsilon}')$ 满足定义 3.3.2 的要求。由于根据定义，$\underline{\epsilon}'\jmath_{w,\,w_{\mathrm{sat}},\,\mathbf{h}}(\underline{\epsilon}')^{-1} = z^{w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})-w(\mathbf{h})}$ 是代数的，因此只需检验

$$(\mathrm{wt}_\tau(\epsilon_{v,i}))_{\tau\in\Sigma_v,1\le i\le n} \uparrow \left(h_{\tau,w_v^{-1}(i)} - h_{\tau,w_{\mathrm{sat},v}^{-1}}(i) + \mathrm{wt}_\tau(\epsilon_{v,i})\right)_{\tau\in\Sigma_v,1\le i\le n} \tag{4.6}$$

作为 $\mathfrak{t}^*_{v,\,L}$ 中的元素，对所有 $v\in S_p$ 均成立。将 $\underline{\delta}'$ 视为其在 $(\mathcal{O}_K^\times)^n$ 上的限制，我们可以写成：

$$\underline{\delta}' = (z^{\mathbf{h}_{w_{\mathrm{sat}}^{-1}(1)}}\chi_1, \dots, z^{\mathbf{h}_{w_{\mathrm{sat}}^{-1}(n)}}\chi_n)$$

其中 $\underline{\chi} \in \mathcal{W}_L^n$ 满足：对所有 $1\le i\le n$ 和 $\tau\in\Sigma$，$\mathbf{wt}_\tau(\chi_{w_\tau w^{-1}{}_{\mathrm{sat}\,\tau}(i)}) = \mathbf{wt}_\tau(\chi_i)$。展开定义，并利用 $\chi\circ\theta_K^{-1} = N_{K/\mathbb{Q}_p}|N_{K/\mathbb{Q}_p}|_{\mathbb{Q}_p}$ 在 $\mathcal{O}_K^\times$ 上的限制与 $N_{K/\mathbb{Q}_p} = z^{\mathbf{1}}$ 相同这一事实，可知 (4.6) 可以改写为

$$\left(h_{\tau,w_{\mathrm{sat},\tau}^{-1}(i)} + i - 1 + \mathrm{wt}_\tau(\chi_i)\right)_{\tau\in\Sigma,1\le i\le n} \uparrow \left(h_{\tau,w_\tau^{-1}(i)} + i - 1 + \mathrm{wt}_\tau(\chi_i)\right)_{\tau\in\Sigma,1\le i\le n}.$$

由于对所有 i，$\mathbf{wt}_\tau(\chi_{w_\tau w_{\mathrm{sat},\,\tau}^{-1}(i)}) = \mathbf{wt}_\tau(\chi_i)$，因此这个等式也可以写成 en

$$w_{\mathrm{sat}}\cdot\lambda \uparrow w\cdot\lambda \quad \text{with} \quad \lambda := (h_{\tau,i} + i - 1 + \mathrm{wt}_\tau(\chi_{w_\tau(i)}))_{\tau\in\Sigma,1\le i\le n} \tag{4.7}$$

其中 $\cdot$ 是定义 3.3.1 中的点作用。

由于 (w_{sat}, w) 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 中的一个良好对，因此存在一条链 $w_0 := w_{\mathrm{sat}} \prec w_1 \prec \dots \prec w_r := w$，它属于 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$，其中某个 $r\in\mathbb{N}$ 满足：对每个 $1\le k\le r$ 和 $\tau\in\Sigma$，置换 $w_{k,\,\tau}w_{k-1,\,\tau}^{-1} \in \mathcal{S}_n$ 要么是恒等置换，要么是支撑在 $w_\tau w_{\mathrm{sat},\,\tau}^{-1}$ 的某个轨道中的反射。根据 $\underline{\chi}$ 的权所满足的条件，这尤其意味着对每个 τ、k、i，$\mathbf{wt}_\tau(\chi_{w_{k,\,\tau}w_{k-1,\,\tau}^{-1}(i)}) = \mathbf{wt}_\tau(\chi_i)$。因此，通过对 k 作递降递归，我们得到

$$\mathrm{wt}_\tau\left(\chi_{w_\tau w_{k,\tau}^{-1}(i)}\right) = \mathrm{wt}_\tau(\chi_i) = \mathrm{wt}_\tau\left(\chi_{w_\tau w_{k-1,\tau}^{-1}(i)}\right)$$

对每个 τ、k、i。于是，对于所有 $1\le k\le n$，

$$w_k\cdot\lambda - w_{k-1}\cdot\lambda = \left(h_{\tau,w_{k,\tau}^{-1}(i)} - h_{\tau,w_{k-1,\tau}^{-1}(i)}\right)_{\tau\in\Sigma,1\le i\le n}$$

因此 $w_k\cdot\lambda > w_{k-1}\cdot\lambda$ (请记住，$>$ 是由 $\mathfrak{t}_L^*$ 简单根格诱导的偏序)，因为对每个 $\tau\in\Sigma$，一方面 $w_{k-1,\tau}^{-1} \prec w_{k\,\tau}^{-1}$，

并且 $w_{k-1,\,\tau}w_{k\,\tau}^{-1}$，至多是一次反射；另一方面 $(h_{\tau,\,i})_{1\le i\le n}$ 严格递增。这意味着 $w_{k-1}\cdot\lambda\uparrow w_k\cdot\lambda$ 对每个 $1\le k\le n$ 都成立，因此将这些结论串联起来可得 $w_{\mathrm{sat}}\cdot\lambda\uparrow w\cdot\lambda$。这正是 (4.7)。□

注意，$\jmath_{w,\,w_{\mathrm{sat}},\,\mathbf{h}}(x_{\mathrm{sat}}) = x$，因此 $\jmath_{w,\,w_{\mathrm{sat}},\,\mathbf{h}}$ 诱导一个单射态射 $T_{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,\,w_{\mathrm{sat}},\,\mathbf{h},\,L,\,x_{\mathrm{sat}}}}\hookrightarrow T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)\,x}$。

4.4. 定理 4.1.4 的证明。现在我们证明定理 4.1.4。这等价于证明：在假设 4.1.3 成立，且 (w_{sat}, w) 是 $(\mathcal{S}_n)^\Sigma$ 中的良好对（定义见定义 4.1.1）的条件下，

$$\dim_{k(x)} T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r),x} = \dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r) - d_{ww_{\mathrm{sat}}^{-1}} + \sum_{\tau\in\Sigma}\dim_{k(x)} T^{\mathrm{rig}}_{\overline{(Bw_\tau B/B)}_{k(x)},x_\tau} - \lg(w_{\mathrm{sat}})$$

其中 $(x_\tau)_{\tau\in\Sigma} := h(r,\underline{\varphi})\in\prod_{\tau\in\Sigma}(Bw_{\mathrm{sat},\,\tau}B/B)^{\mathrm{rig}}_L$（$h$ 的定义见 (4.2)）。事实上，当 y_τ 遍历 $Bw_{\mathrm{sat},\,\tau}B/B$ 时，$T^{\mathrm{rig}}_{\overline{Bw_\tau B/B},\,y_\tau B}$ 的维数保持不变。

不等式（左边）$\le$（右边）正是 [13, 定理 4.1.5(ii)]的陈述（其中我们的 w_{sat} 记作 w_x）。我们证明反向不等式。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{W}_{x_{\mathrm{sat}}} & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{h},w_{\mathrm{sat}}}} & \overline{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}} \\ \downarrow\subseteq & & \downarrow\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}} \\ \widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r,w} & \xrightarrow{\iota_{\mathbf{h},w}} & X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r) \end{array} \tag{4.8}$$

其中，$\iota_{\mathbf{h},\,w}$ 和 $\iota_{\mathbf{h},\,w_{\mathrm{sat}}}$ 由命题 4.2.1 给出，$\jmath_{w,\,w_{\mathrm{sat}},\,\mathbf{h}}$ 由命题 4.3.2 给出，而 $\widetilde{W}_{x_{\mathrm{sat}}} := \iota^{-1}_{\mathbf{h},\,w_{\mathrm{sat}}}\left(U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\overline{\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},\,L}}\right)$ 是 $\widetilde{W}_{\mathbf{h}-\mathrm{cr}_{\bar r},w_{\mathrm{sat}}}$ 的一个解析子集，因此也是 $\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r\,w}$ 的一个解析子集。根据定义可知，$\iota_{\mathbf{h},w_{\mathrm{sat}}}\colon \widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r,\,w_{\mathrm{sat}}}\longrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)$ 经由 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},\,L}\longrightarrow X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)$ 分解。由于 $\iota_{\mathbf{h},w_{\mathrm{sat}}}(r,\underline{\varphi}) = x_{\mathrm{sat}}\in U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},\,L}$，且 $U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},\,L}$ 是 $X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},\,L}$ 的一个扎里斯基开子集，因此 $T_{\widetilde{W}_{x_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})} = T_{\widetilde{W}\mathbf{h}-\mathrm{cr}_{\bar r},w\mathrm{sat}\cdot(r,\underline{\varphi})}$。于是，(4.8)诱导出一个切空间的交换图

$$\begin{array}{ccc} T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r,w_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})} & \hookrightarrow & T_{\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}},x_{\mathrm{sat}}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r,w},(r,\underline{\varphi})} & \hookrightarrow & T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r),x}\,. \end{array} \tag{4.9}$$

设 T_1、$T_2\subseteq T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r)\,x}$ 分别是 (4.9) 中底部箭头和右侧箭头的像。那么该图诱导出一串态射

$$T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r,w_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})}\longrightarrow T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar r,w},(r,\underline{\varphi})}\times_{T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar r),x}} T_{\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}_L^n}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}},x_{\mathrm{sat}}}\xrightarrow{\sim} T_1\cap T_2 \tag{4.10}$$

（向量空间之间的）。

（4.10）中的第一个态射是单射，因为 $T_{\widetilde{W}\mathbf{h}-\mathrm{cr}_{\bar r},w\mathrm{sat}\cdot(r,\underline{\varphi})}\longrightarrow T_{\widetilde{W}\mathbf{h}-\mathrm{cr}_{\bar r},w,(r,\underline{\varphi})}$ 是单射；接下来我们要证明它的满射性。设 $A = k(x)[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$ 为 $k(x)$ 上的无穷小数代数。一个元素 $v_{\mathrm{sat}}\in T_{U_{x_{\mathrm{sat}}},x_{\mathrm{sat}}}$ 是一对 $v_{\mathrm{sat}} = (r_A,\underline{\delta}_{\mathrm{sat},A})$，其中 $r_A\colon \mathcal{G}_K\longrightarrow \mathrm{GL}_n(A)$ 是一个表示，它模 (ε) 化约为 r，而 $\underline{\delta}_{\mathrm{sat},A}$ 是一个特征 $(K^\times)^n\longrightarrow A^\times$，它模 (ε) 化约为 $\underline{\delta}_{\mathrm{sat}}$。我们从

[26, 推论 6.3.10] 得知，三角化在 $U^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})$ 中的 x_{sat} 邻域内全局化，因此 r_A 是具有参数 $\underline{\delta}_{\mathrm{sat},\ A}$ 的三角形；参见 [11, 命题 5.16] 的证明中的论证。因此，（4.10）右侧的一个元素 v 是三元组 $v=(r_A,\underline{\varphi}_A,\underline{\delta}_A)$，其中 $r_A\colon \mathcal{G}_K\longrightarrow \mathrm{GL}_n(A)$ 是一个霍奇–泰特权重为 $\mathbf{h}$ 的晶体表示，它模 (ε) 化约为 r；$\underline{\varphi}_A\in(A^\times)^n$ 是 r_A 的特征值的排序，它模 (ε) 化约为 $\underline{\varphi}$；而 $\underline{\delta}_A$ 是 r_A 的三角化参数，满足

$$z^{w(\mathbf{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi}_A)=\jmath_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h}}(\underline{\delta}_A)=z^{w(\mathbf{h})-w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\underline{\delta}_A\,.$$

特别地，$\underline{\delta}=z^{w_{\mathrm{sat}}(\mathbf{h})}\,\mathrm{unr}(\underline{\varphi})$; 因此，命题 2.2.4(3) 蕴含 $(r_A,\underline{\varphi}_A)\in\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r}},\ w_{\mathrm{sat}}$，也就是说，$v$ 属于 (4.10) 的像。这证明 (4.10) 是向量空间的同构链。

因此，

$$\dim_{k(x)}(T_1\cap T_2)=\dim_{k(x)}T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})}$$

thus

$$\begin{aligned}(4.11)\quad \dim_{k(x)}T_{X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r}),x}\geq\dim_{k(x)}(T_1+T_2)&=\dim_{k(x)}T_{\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}^n_L}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}},x_{\mathrm{sat}}}\\&\quad+\dim_{k(x)}T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w},(r,\underline{\varphi})}-\dim_{k(x)}T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})}\,.\end{aligned}$$

根据命题 4.3.1，我们有

$$(4.12)\qquad \dim_{k(x)}T_{\overline{U_{x_{\mathrm{sat}}}\times_{\mathcal{W}^n_L}\mathcal{W}^n_{w,w_{\mathrm{sat}},\mathbf{h},L}},x_{\mathrm{sat}}}=\dim X^{\square}_{\mathrm{tri}}(\bar{r})-d_{ww^{-1}_{\mathrm{sat}}}\,.$$

此外，笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w_{\mathrm{sat}}} & \xrightarrow{\ h\ } & \prod_{\tau\in\Sigma}\overline{(Bw_{\mathrm{sat},\tau}B/B)}^{\mathrm{rig}}_L\\ \big\downarrow\subseteq & & \big\downarrow\subseteq\\ \widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w} & \xrightarrow{\ h\ } & \prod_{\tau\in\Sigma}\overline{(Bw_{\tau}B/B)}^{\mathrm{rig}}_L\end{array}$$

而且，h的光滑性给出

$$\begin{aligned}(4.13)\quad &\dim_{k(x)}T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w},(r,\underline{\varphi})}-\dim_{k(x)}T_{\widetilde{W}^{\mathbf{h}-\mathrm{cr}}_{\bar{r},w_{\mathrm{sat}}},(r,\underline{\varphi})}\\&\qquad=\sum_{\tau\in\Sigma}\dim_{k(x)}T_{\overline{(Bw_{\tau}B/B)}^{\mathrm{rig}}_{k(x)},x_\tau}-\sum_{\tau\in\Sigma}\dim_{k(x)}T_{\overline{(Bw_{\mathrm{sat},\tau}B/B)}^{\mathrm{rig}}_{k(x)},x_\tau}\,.\end{aligned}$$

最后，由于 (x_τ) 位于光滑胞腔 $\prod_{\tau\in\Sigma}(Bw_{\mathrm{sat},\ \tau}B/B)^{\mathrm{rig}}_L$ 中，我们有

$$(4.14)\qquad \sum_{\tau\in\Sigma}\dim_{k(x)}T_{\overline{(Bw_{\mathrm{sat},\tau}B/B)}^{\mathrm{rig}}_{k(x)},x_\tau}=\dim\prod_{\tau\in\Sigma}(Bw_{\mathrm{sat},\tau}B/B)^{\mathrm{rig}}_L=\lg(w_{\mathrm{sat}})\,.$$

将（4.11）、（4.12）、（4.13）和（4.14）合并，即得所需的不等式，证明至此完成。

参考文献

1. Joël Bellaïche 和 Gaëtan Chenevier，《伽罗瓦表示族与塞尔默群》，Astérisque 324（2009），1–314。2. John Bergdall，《特征曲线上的普通模形式与伴随点》，数论杂志 134（2014），226–239。3. Laurent Berger，《 p-进表示与微分方程》，Inventiones mathematicae 148（2002），第 2 期，219–284。4.，《 p-进微分方程与（φ,N）-滤过模》，Astérisque 319（2008），13–38。5. Laurent Berger 和 Pierre Colmez，《德拉姆表示族与p-进单~~值化~~》，Astérisque 319（2008），303–337。6. Iosif N. Bernstein、Israel M. Gel'fand 和 Sergei I. Gel'fand，《 G/P 空间的舒伯特胞腔与上同调》，俄罗斯数学调查 28 （ 1973 ），第 3 期，1。7. Pierre Berthelot，《刚性上同调与带紧支撑的刚性上同调，第一部分》，IRMAR 预印本 96-03（1996）。8. Siegfried Bosch、Ulrich Güntzer 和 Reinhold Remmert，《非阿基米德分析：刚性解析几何系统论》，数学科学基础丛书，第 261 卷，施普林格出版社，1984。9. Nicolas Bourbaki，《李群与李代数：第 4–6 章》，施普林格出版社，2002。10. Christophe Breuil 和 Matthew Emerton，《$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的普通 p-进表示与局部—整体相容性》，Astérisque 331（2010），255–315。11. Christophe Breuil、Eugen Hellmann 和 Benjamin Schraen，《特征簇上的光滑性与经典性》，Inventiones mathematicae 209（2017），第 1 期，197–274。12.，《三角化簇的模解释》，数学年刊 367（2017），第 3–4 期，1587–1645。13.，《三角化簇的局部模型及其应用》，高等科学研究所数学出版物 130（2019），第 1 期，299–412。14. Ana Caraiani、Matthew Emerton、Toby Gee、David Geraghty、Vytautas Paš¯unas 和 Sug Woo Shin，《拼接与 p-进局部朗兰兹对应》，剑桥数学杂志 4（2016），第 2 期，197–~~287。~~15. Pierre Colmez，《维数为 2 的三角表示》，Astérisque 319（2008），第 213–258 篇，83。16. Pierre Colmez 和 Gabriel Dospinescu，《$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 表示的万有完备化》，代数与数论 8（2014），第 6 期，1447–1519。17. Pierre Colmez、Gabriel Dospinescu 和 Vytautas Paš¯unas，《$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 的 p-进局部朗兰兹对应》，剑桥数学杂志 2（2014），第 1 期，1–47。18. Arthur J. de Jong，《通过形式几何与刚性几何研究晶体 Dieudonné 模理论》，高等科学研究所数学出版物 82（1995），5–96。19. Matthew Emerton，《 p-进约化群的局部解析表示的雅各模 I：构造与初步性质》，高等师范学院科学年刊 39（2006），第 5 期，775–839。20. Matthew Emerton 和 Toby Gee，《从几何角度看 Breuil–Mézard 猜想》，Jussieu数学研究所杂志 13（2014），第 1 期，183–223。21.，《étale（φ,Γ）-模的模叠与晶体提升的存在性》，数学年刊研究丛书，第 215 卷，普林斯顿大学出版社，2023。22. Eugen Hellmann，《三角表示族与有限斜率空间》，（2012），arXiv:1202.4408。23. Eugen Hellmann 和 Benjamin Schraen，《固定权潜在晶体表示的稠密性》，Compositio Mathematica 152（2016），第 8 期，1609–1647。24. James E. Humphreys，《BGG 范畴 $\mathcal{O}$ 中半单李代数的表示》，数学研究生教材，第 94 卷，美国数学会，2008。25. Jens C. Jantzen，《代数群的表示》，第二版，数学调查与专著，第 107 卷，美国数学会，2003。

26. Kiran Kedlaya、Jonathan Pottharst 和 Liang Xiao，算术族的（φ，Γ）-模的上同调，《美国数学会杂志》**27** （2014），第 4 期，1043–1115。27. Mark Kisin，超收敛模形式与 *Fontaine-Mazur*猜想，《Inventiones mathematicae》**153** （2003），第 2 期，373–454。28. ，潜在半稳定变形环，《美国数学会杂志》**21** （2008），第 2 期，513–546。29. ，有限平坦群概形模空间与模性，《数学年刊》**170**（2009），第 3 期，1085–1180。30. Barry Mazur，伽罗瓦~~表示的~~变形，载于《 $\mathbb{Q}$上的伽罗瓦群》，数学科学研究所出版物，第 16 卷，施普林格出版社，1989年，第 385–437 页。31. James S. Milne，代数群：域上有限型群概形理论，《剑桥高等数学研究》，第 170 卷，剑桥大学出版社，2017年。32. Seginus Mowlavi，三角化簇、切空间与 *Grothendieck-Springer*解消，（2023），预印本。33. Jürgen Neukirch，代数数论，数学科学基础丛书，第 322 卷，施普林格出版社，1999年。34. Jack Thorne，关于 ℓ-进伽罗瓦表示的小剩余像自守性，《Jussieu数学研究所杂志》**11** （2012），第 4 期，855–920。

巴黎-萨克雷大学、法国国家科学研究中心、奥赛数学实验室，91405，法国奥赛