arXiv:2303.05482v3 [math.PR] 6 Aug 2023

关于《 α-黎卡提方程的随机爆炸与非唯一性》的勘误

Radu Da scaliuc* Tuan N. Pham † Enrique Thomann‡ Edward C. Waymir e§

2023年8月8日

摘要

论文《随机爆炸与 α-黎卡提方程的非唯一性》（《数学分析与应用杂志》，476，(2019)，53-85）中命题 2.2 的陈述和证明有一处错误，现于本勘误中予以更正。修订后的结果揭示了一种新的、出乎意料的临界现象，并对黎卡提型非线性微分方程解的非唯一性有进一步的启示。

1 引言

文中的命题 2.2 [2] 适用于 α-Riccati 模型，但证明仅对 $\alpha \in [0,1] \cup [2,\infty)$成立。错误出现在第 61 页式 (2.12) 后面的第二个展示公式中，见 [2]。此行之前的估计是正确的，并在本勘误中予以使用。

我们先回顾 [2] 中引入的一些记号。在二叉树 $\mathcal{I} = \{\emptyset\} \cup \cup_{n\in\mathbb{N}}\{1,2\}^n$ 上， t的集合 -叶子 定义为

$$V(t) = \left\{ v \in \mathcal{I} : \sum_{j=0}^{|v|-1} \alpha^{-j} T_{v|j} \le t < \sum_{j=0}^{|v|} \alpha^{-j} T_{v|j} \right\},\ t > 0, \quad V(0) = \{\emptyset\}.$$

α-Riccati 级联 $\{\alpha^{-|v|}T_v\}_{v\in\mathcal{I}}$ 的最短路径 S 和最长路径 L 定义为

$$S = \lim_{n\to\infty} \min_{|v|=n} \sum_{j=0}^{n} \alpha^{-j} T_{v|j}, \quad L = \lim_{n\to\infty} \max_{|v|=n} \sum_{j=0}^{n} \alpha^{-j} T_{v|j}.$$

若 $S < \infty$ 几乎必然成立，则称 α-Riccati 级联会爆炸；若 $L < \infty$ 几乎必然成立，则称其会超爆炸。值 $\alpha = 1$ 是非爆炸与爆炸之间发生转变的位置 [2]。具体而言，若 $\alpha \in (0,1]$，则 $S = \infty$ 几乎必然成立；若 $\alpha > 1$，则 $S \le L < \infty$ 几乎必然成立。下文给出的修正揭示了分枝率 α 的一个临界区域 $(1,2)$，可进一步对爆炸现象进行分类。具体而言，对于 $\alpha \in (1,2)$，超爆炸较弱，因此对于每个 $t > 0$，t-叶子集合以正概率为无限集。对于 $\alpha \ge 2$，超爆炸较强，因此对于每个 $t > 0$，t-叶子集合几乎必然为有限集。由此，在 $\alpha \in (1,2)$ 的情况下，我们得到具有初始数据 $u_0 = 1$ 的 α-Riccati 方程解的非唯一性。

*俄勒冈州立大学数学系，俄勒冈州科瓦利斯，OR 97331。dascalir@math.oregonstate.edu
†东俄勒冈大学数学系，俄勒冈州拉格兰德，OR 97850。tnpham@eou.edu
‡俄勒冈州立大学数学系，俄勒冈州科瓦利斯市，邮编 97331。thomann@math.oregonstate.edu§俄勒冈州立大学数学系，俄勒冈州科瓦利斯市，邮编 97331。waymire@math.oregonstate.edu。

为确认理论结果，我们在第 3 节给出了一些数值模拟[1]，采用不同的 α 值来描绘分布中 t-叶子数量的尾部行为，以及具有有限多个 t-叶子的概率。

2 命题 2.2 的更正陈述与证明

修改后的证明需要注意，对于所有的 $\alpha > 1$，$\mathbb{P}(L > t)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积，因此$\mathbb{E}L < \infty$。此前，[1] 已证明了在 $\alpha \geq 2$情形下这一可积性性质。

第4节中引用原命题 2.2 的结果证明，可通过修订命题 4.1 的陈述来处理。这一修订不影响 [2] 中定理4.2和4.3的主要结论，其陈述与证明均保持不变。

命题2.1(修订后的命题 2.2**).** 令 $\alpha \geq 0$ 并考虑事件

$$G_t = \{\textit{zero or finitely many branches of the } \alpha\textit{-Riccati cascade crossed } t\}.$$

那么，对于任意 $t > 0$,

$$\mathbb{P}(G_t) \quad \begin{cases} = 1 & \textit{if} \quad \alpha \in [0,1] \cup [2,\infty) \\ < 1 & \textit{if} \quad \alpha \in (1,2). \end{cases}$$

证明。$P(G_t) = 1$ 对于 $\alpha \in [0,1] \cup [2,\infty)$ 这一结论在 [2] 中得到了正确的陈述与证明。特别地，对于 $0 \leq \alpha \leq 1$，该结论可由 [2]中定理2.1的第1部分推出。对于 $\alpha \geq 2$，$q(t) = \mathbb{P}(G_t^c) \leq \mathbb{P}(L > t)$ 可积，并且由 [1]可得 $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$。在 [2], 的（2.12）式中令 $t \to \infty$，即可得到

$$\int_0^\infty q^2(t)dt = (2-\alpha)\int_0^\infty q(t)dt,$$

由此可得 $\int_0^\infty q^2(t)dt = 0$，对 $\alpha \geq 2$ 成立。因此，由连续性可得 $q = 0$。

为证明 $\mathbb{P}(G_t) < 1$ 对 $\alpha \in (1,2)$ 成立，我们按如下步骤进行。可得 $q(t) = P(G_t^c) = P(|V(t)| = \infty)$, 并且

$$[|V(t)| = \infty] = \cap_{n=0}^\infty C_n(t),$$

其中 $C_n(t)$ 表示存在一条路径在第 n 代或更高代穿过时间范围 t 的事件。特别地，$C_0(t) = [L > t]$。还需注意，事件序列 $\{C_n(t)\}$ 递减至 $\cap_{n=0}^\infty C_n(t) = [|V(t)| = \infty]$。令

$$q_n(t) = \mathbb{P}(C_n(t)), \quad t > 0.$$

则 $q_0(t) = \mathbb{P}(C_0(t)) = \mathbb{P}(L > t)$。序列 $\{q_n(t)\}$ 是递减序列，且 $q(t) = \lim_{n\to\infty} q_n(t)$。对于 $n \geq 1$，通过对 $T_\emptyset$ 条件化，可得

$$q_n(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}(2q_{n-1}(\alpha s) - q_{n-1}^2(\alpha s))ds\,. \tag{2.1}$$

现在我们证明，q_0 在 $(0,\infty)$ 上可积。由事件 $[L \leq t]$ 的继承性质，$q_0(t)$ 满足 [2], 中的 (2.10)，因此经过积分和变量替换，

$$\begin{aligned} \alpha q_0(t) - \alpha &= \int_0^t ((2-\alpha)q_0(s) - q_0^2(s))ds + \int_t^{\alpha t} (2q_0(s) - q_0^2(s))ds \\ &\geq \int_0^t ((2-\alpha)q_0(s) - q_0^2(s))ds. \end{aligned} \tag{2.2}$$

[1]计算利用了俄勒冈州立大学的高性能计算集群。

反设 $\int_0^\infty q_0(s)ds = \infty$。由于 $q_0(t) < \frac{2-\alpha}{2}$ 对所有充分大的 t，例如 $t > t_0$，不等式（2.2）右端记作 RHS(2.2)，满足

$$\text{RHS(2.2)} \geq \int_0^{t_0} \left((2-\alpha)q_0(s) - q_0^2(s)\right) ds + \frac{2-\alpha}{2} \int_{t_0}^t q_0(s)ds \to \infty \text{ as } t \to \infty.$$

这与 (2.2) 左端满足 $\alpha q(t) - \alpha \to -\alpha$ as $t \to \infty$ 的事实矛盾。因此，$\int_0^\infty q_0(s)ds < \infty$。接下来，为了导出矛盾，假设对所有 $t > 0$，$q(t) = 0$。那么，对每个 $t > 0$，$q_n(t) \downarrow 0$as $n \to \infty$。由于 $q_n \leq q_0 \in L^1(0,\infty)$，由勒贝格控制收敛定理可得 $\|q_n\|_1 \downarrow 0$。由 (2.1) 可得

$$q_n(t) \leq \int_0^t e^{-(t-s)} 2q_{n-1}(\alpha s)ds \leq \int_0^t 2q_{n-1}(\alpha s)ds \leq \frac{2}{\alpha}\|q_{n-1}\|_1, \ \forall n \geq 1.$$

因此，$\|q_n\|_\infty \leq \frac{2}{\alpha}\|q_{n-1}\|_1 \to 0$. 存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|q_n\|_\infty < 2 - \alpha \quad \forall n \geq N.$$

特别地，对于任意 $n > N$,

$$q_n(t) = \int_0^t e^{-(t-s)} q_{n-1}(\alpha s)(2 - q_{n-1}(\alpha s))ds > \int_0^t e^{-(t-s)} \alpha q_{n-1}(\alpha s)ds.$$

对两边取 L^1-范数，得到

$$\|q_n\|_1 > \|q_{n-1}\|_1, \ n \geq 1. \tag{2.3}$$

因此，对于 $n > N$，$\|q_n\|_1$ 是一个递增序列，这与 $\|q_n\|_1 \downarrow 0$ 的事实矛盾。因此，q 不恒为零。为证明对所有 t 都有 $q(t) > 0$，反设存在某个 $t_0 > 0$，使得 $q(t_0) = 0$。那么

$$0 = q(t_0) = \int_0^{t_0} e^{-(t_0-s)}(2q(\alpha s) - q^2(\alpha s))ds.$$

由 q 的连续性可得，对于 $s \in [0, \alpha t_0]$，$q(s) = 0$。特别地，$q(\alpha t_0) = 0$。将 t_0 替换为 αt_0，重复此论证，可得对于 $s \in [0, \alpha^2 t_0]$，$q(s) = 0$，依此类推。因此，在 $[0,\infty)$ 上 $q = 0$，这就产生了矛盾。□

鉴于修订后的命题 2.2，[2] 中的命题 4.1 对于 $\alpha \in [0,1] \cup [2,\infty)$ 按照原文表述仍然成立。定理 4.2 仅涉及 $\alpha > \frac{5}{2} > 2$，因此其原有表述及证明仍然有效。鉴于以下修订后的命题 4.1，定理 4.1 按照原文表述也仍然成立。

命题 2.2(修订后的命题 4.1)。设 $\alpha > 0$。

(i) 若 $\alpha \in [0,1] \cup [2,\infty)$，则命题 *4.1* 按照原文所述成立。

(ii) 若 $\alpha \in (1, 2)$，则有以下结论。

- *(a) If $X_0 = 0$ in iteration (4.1), then $X_n(t) \to \underline{X}(t) < \infty$.*
- *(b) If $X_0 = 1$ in iteration (4.1), then $X_n(t) \to \overline{X}(t) \leq \infty$. Moreover, $\mathbb{E}\overline{X}(t) = \infty$ if $u_0 > 1$, while $\overline{u}(t) = \mathbb{E}\overline{X}(t) < \infty$ is a solution of (2.2) if $u_0 \in [0,1]$.*

这一修订后的命题 4.1 之所以成立，是因为它不需要注 4.1 后评论中提到的极限 $M_n \to \infty$。

注 2.1. 如开篇所述，修订后的命题 4.1，即命题 2.2，意味着在 $\alpha \in$ (1,2) 的情况下，概率 $v(t) = \mathbb{P}(G_t)$ 定义了一个解，该解满足初始数据 $u_0 = 1$，对应于 α-Riccati 方程，且不同于 $u(t) = \mathbb{P}(S > t)$ 和 $\bar{u}(t) \equiv 1$；对所有 $t > 0$，均有 $u(t) < v(t) < \bar{u}(t)$。

3 数值结果

本节提供两组图形示意，以展示与新揭示现象一致的行为。

对于 $\alpha \in (1, 2)$，叶子的总数 $W(t) = |V(t)|$ 以正概率为无穷大。因此，对于每个 $t > 0$, $\mathbb{E}W(t) = \infty$。可以设想， $W(t)$ 的直方图也应具有重尾。该树的超爆炸性使得直接模拟 $W(t)$ 面临挑战。为缓解这一问题，对 $W(t)$ 进行截断 模拟。令 $V_n(t) \subset V(t)$ 表示高度小于或等于 n 的顶点子集，并令 $W_n(t) = |V_n(t)|$。那么，通过对 T 进行条件化，很容易看出

$$W_n(t) \stackrel{d}{=} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad T > t \\ W_{n-1}^{(1)}(\alpha(t-T)) + W_{n-1}^{(2)}(\alpha(t-T)) & \text{if} \quad T \le t \end{cases}$$

且当 $n \to \infty$ 时， $W_n(t) \uparrow W(t)$。这里， T 是均值为 1 的指数随机变量，而 $W_{n-1}^{(1)}$ 和$W_{n-1}^{(2)}$ 是 W_{n-1} 的两个独立同分布副本。图 1a、2a、3a 分别展示了在 $\alpha = 0.66$、 $\alpha = 1.5$ 和 $\alpha = 3$ 情况下，进行 10000 次实验得到的 $W_{n=10}(t = 2)$ 直方图。 $\alpha = 1.5$ 情况下的重尾与随机树的“弱”超爆炸行为一致，即 $\mathbb{P}(G_t^c) > 0$。

在第二组图中，我们模拟函数 $v(t) = 1 - q(t) = \mathbb{P}(G_t)$，它表示得到有限多个 t-叶子的概率。该函数满足 α-Riccati 方程 $v' + v = v^2(\alpha t)$，初始数据为 $v(0) = 1$。根据 (2.1)， $v(t)$ 是 $v_n(t) = 1 - q_n(t)$ 的逐点极限，并且

$$v_n(t) = e^{-t} + \int_0^t e^{-s} v_{n-1}^2(\alpha(t-s))ds, \quad v_0(t) = \mathbb{P}(L < t).$$

可以从概率角度将该递推解释为 $v_n = \mathbb{E}X_n$ 其中

$$X_n(t) \stackrel{d}{=} \begin{cases} 1 & \text{if} \quad T > t \\ X_{n-1}^{(1)}(\alpha(t-T)) X_{n-1}^{(2)}(\alpha(t-T)) & \text{if} \quad T \le t \end{cases} \tag{3.1}$$

并且 $X_0(t) = v_0(t) = \mathbb{P}(L < t)$。为了近似求得 $v_0(t)$，注意到它是方程的最大解

$$v_0(t) = \int_0^t e^{-s} v_0^2(\alpha(t-s))ds$$

因此它是序列 $U_k(t)$ 的极限，其中

$$U_k(t) = \int_0^t e^{-s} U_{k-1}^2(\alpha(t-s))ds \tag{3.2}$$

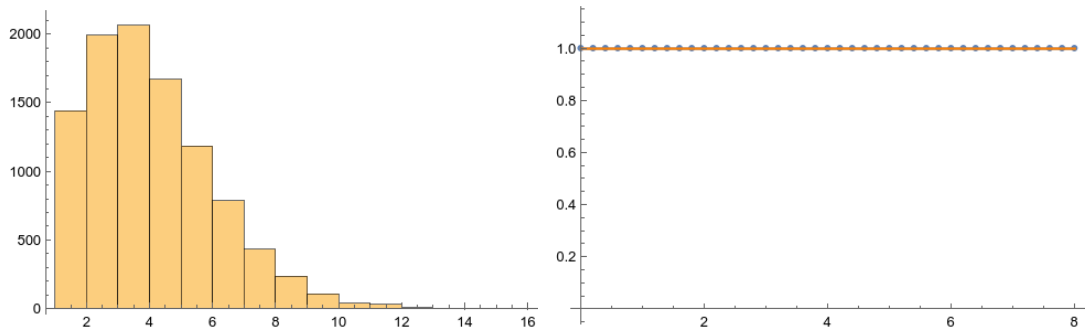
并且 $U_0(t) = 1$。现在，为了模拟 $v(t)$，我们将时间区间 $[0, 8]$ 离散化，并在每个网格点处利用 (3.1) 通过蒙特卡罗算法模拟近似值 $v_{n=10}(t)$。其中，初始过程 $X_0(t) = v_0(t)$ 通过由 (3.2) 解析求得的 $U_{k=5}(t)$ 进行近似。图 1b、2b、3b 分别展示了在 $\alpha = 0.66$、 $\alpha = 1.5$ 和 $\alpha = 3$ 情形下的 $v(t)$。圆点是通过蒙特卡罗模拟得到的数值结果。橙色曲线是对数据进行拟合的 B´ézier 曲线。

该方程的多种数值解由 Nick Hale 和 Andr´e Weideman 使用不同于本文所述的方法，在南非斯泰伦博斯大学计算得到（私人通信）。在 $1 < \alpha < 2$的范围内，他们绘制的一条曲线与图 $\mathbb{P}(G_t)$ 中的 2b 曲线形状相似。这些数值解并非都能由当前理论解释。

参考文献

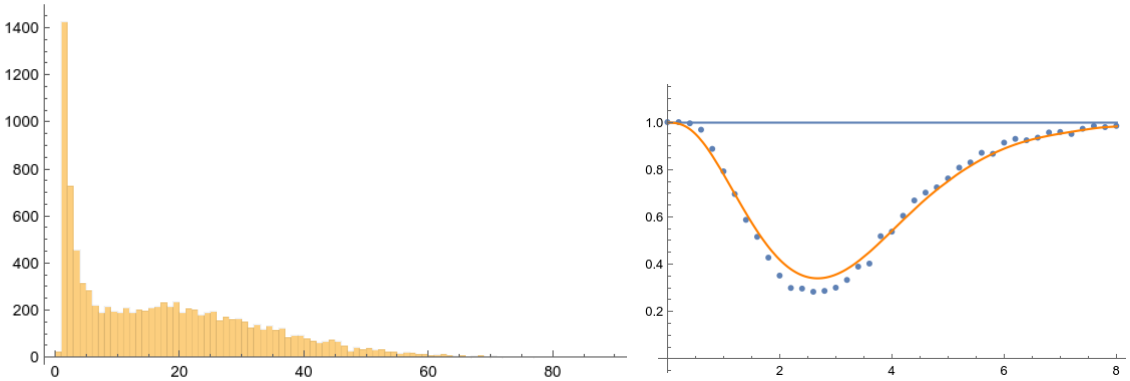
[1] K. B. Athreya，折扣分枝随机游走，应用概率进展**17** (1985)，第 1 期，53–66 页。

[2] Radu Dascaliuc、Enrique A. Thomann 和 Edward C. Waymire，关于 *α-Riccati* 方程的随机爆炸与非唯一性，数学分析与应用杂志 **476** (2019)，第 1 期，53–85。



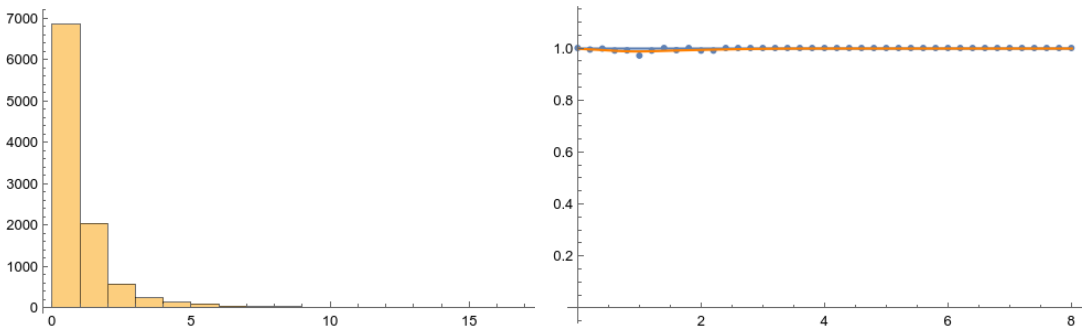
(a) (b)

图 1：情形 $\alpha = 0.66$



(a) (b)

图 2：情形 $\alpha = 1.5$



(a) (b)

图3：该情形 $\alpha = 3$