arXiv:2303.05493v1 [math.AG] 9 Mar 2023

$\widetilde{\ }$（几乎）整系数 Chow 环 $\mathcal{M}_3^7$

Michele Pernice

Abstract

本文是四篇系列论文中的第三篇，旨在描述 $\mathcal{M}_3$（亏格 3 稳定曲线的模叠）的（几乎）整系数 Chow 环。本文计算了带有 $\mathbb{Z}[1/6]$系数的 $\widetilde{\mathcal{M}}_3^7$ 的 Chow 环。

引言

曲线模空间的几何一直是深入研究的对象，因为它有诸多应用，例如研究曲线族。此类研究的一个主要方面是这些空间的交理论，它可用于解决有关曲线族的几何、计数或算术问题。在其开创性论文中， [Mum83], Mumford 为稳定曲线模空间引入了有理系数的交理论。近二十年后，Edidin 和 Graham 在 [EG98] 中为全局商叠（因此也特别适用于稳定曲线模叠）引入了整数系数的交理论。

迄今为止，人们已完成多项计算。虽然 $\mathcal{M}_g$（光滑曲线模空间）的有理乔环已在 $2 \leqslant g \leqslant 9$ ([Mum83], [Fab90], [Iza95], [PV13], [CL21]) 中得到确定，但 $\mathcal{M}_g$（稳定曲线模空间）的有理周环的完整描述，目前仅在亏格 2 的情形下由 Mumford 给出，在亏格 3 的情形下由 Faber 于 [Fab90] 给出。正如预期，整周环的计算更为困难：关于稳定曲线模叠的整周环，目前唯一完整的描述是 $\mathcal{M}_2$ 的情形，由 Larson 在[Lar19] 中给出，随后 Di Lorenzo 和 Vistoli 又在 [DLV 21] 中采用不同策略给出了该描述。还值得一提的是 Di Lorenzo、Pernice 和 Vistoli 关于 $\mathcal{M}_{2,1}$ 的整周环的结果，见 [DLPV21]。

这四篇论文组成的系列旨在描述模叠 $\mathbb{Z}[1/6]$的 Chow 周环。该模叠参数化稳定的亏格 3 曲线。本文采用完全独立的方法，对 Faber 的结果作了进一步细化；这种方法有望提供一种更具算法性的方式来计算这些 Chow 环。我们的方法是对 [DLPV21]中所用方法的推广：我们引入一个 Artin 叠，称为 A_r-稳定曲线叠，在其中允许出现带有 A_r奇点的曲线。我们的思路是在亏格 3 的情形下计算这个新引入的叠的 Chow 环，然后利用局部化列，找出$\widetilde{\ }$的 Chow $\mathcal{M}_3$环的描述。叠$\mathcal{M}_{g,\ n}$ 在 [DLPV21] 中引入，且作为开子叠包含在我们的叠中。

2020 Mathematics Subject Classification 14H10（主要），14H20（次要）
Keywords: 曲线模空间的交理论， A_r-稳定曲线

论文提纲

这是该系列的第三篇论文，重点是计算亏格 3 的 A_7-稳定曲线模叠的 Chow 环。

具体而言，第1 节回顾 A_r-稳定曲线的理论，详见[Per23a] ，以及 A_r-稳定曲线的双曲理论，详见 [Per23b]。特别地，我们再次陈述本文所需的主要结果，例如收缩态射的存在性和超椭圆轨迹的描述。本节最后一部分讨论计算所采用的策略。具体而言，我们引入 $\widetilde{\mathcal{M}}_3^7$ 按光滑子叠划分的分层，并陈述粘合引理（见引理1.11），该引理用于将各层的 Chow 环拼接起来，从而得到整个叠的周环。

在第2节中，我们利用将双曲 A_r-稳定曲线的模叠描述为亏格 0 扭曲曲线的循环覆盖这一结果，来描述双曲层的周环。我们还计算了相对于该层的法丛，这是粘合引理中的关键要素。

在第 3 节中，我们证明了没有分离节点的非双曲 A_r-稳定亏格 3 曲线可典范地嵌入 $\mathbb{P}^2$ 中。这使我们能够将分层的开层描述为 $\mathbb{P}^2$ 中四次曲线的商栈在 GL_3 作用下的一个开子集。受 [DLFV21]，中计算的启发，我们成功计算出开层的 Chow 环。

在第 4 节、第5 节和第6 节中，我们描述其余各层，并利用这些描述计算它们的 Chow 环。我们还计算了每一层对应的法丛，以及一些对最终计算至关重要的循环。

最后，第 7 节说明如何应用粘合引理，利用来自各层 Chow 环的生成元和关系，描述整个栈 $\widetilde{\mathcal{M}}_3^7$ 的 Chow 环。定理 7.3 的内容即为这一描述，而明确的关系则列于注记 7.4。

1. 预备知识与策略

在本节中，我们回顾模叠 $\widetilde{\mathcal{M}}_g^r$ 的定义，n 它参数化 n-标记的 A_r-稳定的亏格为 g 的曲线，并介绍有关该模叠的一些结果。关于这一主题更详尽的讨论，参见 [Per23a]。此外，我们回顾模叠 $\sim\mathcal{H}_g^r$ 的定义，它参数化双曲的 A_r-稳定的亏格为 g 的曲线，并利用循环覆盖理论给出另一种描述。关于这一主题更详尽的讨论，参见 [Per23b]。最后，我们说明用于计算的策略。

A_r-稳定曲线的模叠

固定一个非负整数 r。设 g 为满足 $g \geqslant 2$ 的整数，且 n 为非负整数。

Definition 1.1. 设 k 为一个代数闭域，C/k 为其上的一个适当、既约、连通的一维概形。若 C 是一个-预稳定曲线，且其至多有 A_r-奇点，也就是说，对每个 $p \in C(k)$，都有一个同构

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq k[[x,y]]/(y^2 - x^{h+1})$$

带有 $0 \leqslant h \leqslant r$。此外，如果 C 是 A_r-稳定的，我们称其为 A_r-稳定曲线，当且仅当它是 A_r-预稳定的，且对偶化层 ω_C 丰沛。一个定义在 k 上的 n-标记 A_r-稳定曲线，是一个 A_r-预稳定曲线，连同 n

光滑互异闭点 p_1、……、 p_n，使得 $\omega_C(p_1+\cdots+p_n)$ 丰沛。

REMARK 1.2. 注意，根据定义， A_r-预稳定曲线是局部完全交，因此对偶化复形实际上是一个线丛。

我们固定一个基域 κ，其中所有小于 $r+1$ 的素数都是可逆的。除非另有说明，每当我们提到亏格时，均指算术亏格。我们回顾一个有用的事实。

REMARK 1.3. 设 C 是代数闭域上的连通、既约、一维固有概形。设 p 是一个有理点，且为 A_r-型奇点。我们用 $b : C \to C$ 表示在点 p 处的部分正规化，并用 J_b 表示 b 的导子理想。于是，直接计算可得

(i) 若 $r = 2h$，则 $g(C) = g(C) + h$; (ii) 若 $r = 2h+1$ 且 C 连通，则 $g(C) = g(C) + h + 1$, (iii) 若 $r = 2h+1$ 且 C 不连通，则 $g(C) = g(C) + h$。

如果 C 不连通，我们就称 p 为分离点。此外，由诺特公式可得 $b^*\omega_C \simeq \omega_{\widetilde{C}}(J_b^\vee)$。

我们可以将 $\mathcal{M}^r_{g,\,n}$ 定义为关于 κ-概形的纤维范畴，其对象是 S 上的A_r-稳定曲线以及 n 个互异截面 p_1，……，p_n 这一数据，并且其在S 上的每个几何纤维都是一个 n标记的 A_r-稳定曲线。这些族称为 S上的 n标记 A_r稳定曲线 。态射就是 n标记曲线之间的态射。

我们回顾 $\mathcal{M}^r_{g,\,n}$的以下描述。结果的证明见 [Per23a] 中的定理2.2。

THEOREM 1.4. $\mathcal{M}^r_{g,\,n}$ 是一个在 κ 上有限型的光滑连通代数栈。此外，它是一个商栈：也就是说，存在一个光滑拟射影概形 X，其上有 GL_N的作用，其中 N 为某个正整数，使得 $\mathcal{M}^r_{g,\,n} \simeq [X/\mathrm{GL}_N]$。

REMARK 1.5. 回顾一下，对每个 $r \leqslant s$，我们都有一个开浸入 $\mathcal{M}^r_{g,\,n} \subset \mathcal{M}^s_{g,\,n}$。注意，对每个 $r \geqslant 2g+1$，$\widetilde{\mathcal{M}}^r_{g,\,n} = \widetilde{\mathcal{M}}^{2g+1}_{g\,n}$。

霍奇丛的通常定义可以推广到我们的情形。证明见 [Per23a] 中的命题 2.4。因此，我们得到 $\mathcal{M}^r_{g,\,n}$上的一个秩为 g 的局部自由层 $\mathbb{H}_g$，称为霍奇丛。

此外，我们回顾一下（极小）收缩态射的存在性。这是 [Per23a].中的定理 2.5。

THEOREM 1.6. 我们有一个代数栈之间的态射

$$\gamma : \widetilde{\mathcal{M}}^r_{g,n+1} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}^r_{g,n}$$

其中 $\mathcal{C}^r_{g,\,n}$ 是 $\mathcal{M}^r_{g,\,n}$的通用曲线。此外，它是一个开浸入，其像是 $\widetilde{\mathcal{C}}^r_{g,\,n}$ 中的开子轨迹 $\widetilde{\mathcal{C}}^r_{,\,g\,n}{}^{\leqslant 2}_{,}$，参数化亏格为 g、带有一个（不一定光滑的）截面 q 的 n 点标记 A_r- 稳定曲线 $(C, p_1, \ldots, p_n)$，其中该截面满足 q 对于 $h \leqslant 2$ 是一个 A_h- 奇点。

超椭圆轨迹

我们回顾双曲 A_r-稳定曲线的定义。

DEFINITION 1.7. 设 C 是代数闭域上亏格为 g 的 A_r-稳定曲线。若存在 C 的一个对合 σ，使得 σ 的不动点轨迹有限，且其几何范畴商（记为 Z）是亏格 0 的既约连通结点曲线，则称 C 为双曲的。称配对 (C,σ) 为一条双曲 A_r-稳定曲线，这样的 σ 称为双曲对合。

~我们将 $\mathcal{H}_g^r$ 定义为如下纤维范畴：其对象由一对数据（C/S，σ）组成，其中C/S 是定义在 S 上的 A_r-稳定曲线，而 σ 是 C 在 S 上的一个对合，并且对于每个几何点 $s\in S$，$(C_s,\ \sigma_s)$ 都是亏格为 g 的 A_r-稳定超椭圆曲线。这些称为定义在 S上的双曲的A_r-稳定曲线。态射是与对合相容的 A_r-稳定曲线之间的态射。

~现在我们介绍对 $\mathcal{H}_g^r$的另一种描述，这有助于理解它与光滑情形之间的联系；这种描述使用扭曲曲线的循环覆盖。关于扭曲结点曲线的理论，我们参考 [AOV11]，不过我们只考虑以 μ_2 为稳定子且没有标记点的扭曲曲线。

DEFINITION 1.8. 设 $\mathcal{Z}$ 是定义在代数闭域上的亏格 0 扭曲结点曲线。我们用 n_Γ 表示 Γ 的叠点数，并用 m_Γ 表示对于 $\mathcal{Z}$的每个不可约分支 Γ 与曲线其余部分的交数。设 $\mathcal{Z}$ 上的一个线丛为 $\mathcal{L}$，并设 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$-模之间的一个态射为$i\colon \mathcal{L}^{\otimes 2}\to\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$。我们用 g_Γ 表示量 $n_\Gamma/2-1-\deg\ \mathcal{L}|_\Gamma$。

(a) 若以下条件成立，我们称 $(\mathcal{L},i)$ 为双曲的：(a1) 由 $\mathcal{L}$ 诱导的态射 $\mathcal{Z}\to B\mathbb{G}_m$ 是可表示的；(a2) $i^\vee$ 在任何堆叠点上的限制都不为零。

(b) 若 $(\mathcal{L},i)$ 是双曲的，$\chi(\mathcal{L})=-g$，且满足以下条件，我们称 $(\mathcal{L},i)$ 是 A_r-预稳定的，且亏格为 g 的双曲曲线：

(b1) $i^\vee$ 在 $\mathcal{Z}$ 的任何不可约分支上的限制都不为零，或者等价地，态射 $i:\mathcal{L}^{\otimes 2}\to\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ 是单射；(b2) 若 p 是非堆叠结点，且 $i^\vee$ 在 p 处消失，则 $r\geqslant 3$ 以及在 p 处局部化的 $i^\vee$ 的消失轨迹 $\mathbb{V}(i^\vee)_p$ 是长度为 2 的 Cartier 除子；(b3) 若 p 是光滑点，且 $i^\vee$ 在 p 处消失，则在 p 处局部化的 $i^\vee$ 的消失轨迹 $\mathbb{V}(i^\vee)_p$ 的长度至多为 $r+1$。

(c) 我们称 $(\mathcal{L},i)$ 是 A_r-稳定的、亏格为 g 的双曲曲线，当且仅当它是 A_r-预稳定的、亏格为 g 的双曲曲线，并且对于 $\mathcal{Z}$ 中的每个不可约分支 Γ，以下条件均成立：

(c1) 若 $g_\Gamma=0$，则有 $2m_\Gamma-n_\Gamma\geqslant 3$；(c2) 若 $g_\Gamma=-1$，则有 $m_\Gamma\geqslant 3$ $(n_\Gamma=0)$。

现在我们来定义用于分类这些数据的栈。我们用 $\mathcal{C}(2,g,r)$ 表示如下定义的纤维范畴：其对象是三元组 $(\mathcal{Z}\to S,\mathcal{L},i)$，其中 $\mathcal{Z}\to S$是一个亏格 0 的扭曲曲线族，$\mathcal{L}$ 是一个 $\mathcal{Z}$ 的线丛，且 $i:\ \mathcal{L}^{\otimes 2}\to\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$ 是一个 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}}$- 模的态射，并满足限制 $(\mathcal{L}_s,i_s)$ 在 S 上的几何纤维上是 A_r- 稳定的、亏格为 g的双曲曲线。态射的定义与 [AV04] 中相同。

~我们回顾以下结果，它为我们提供了 $\mathcal{H}_g^r$的一种替代表述。证明见 [Per23b] 中的命题 2.14 和命题 2.21。

~PROPOSITION 1.9。 纤维范畴 $\mathcal{C}(2,g,r)$ 与 $\mathcal{H}_g^r$ 同构。

最后，我们回顾以下定理，它是 [Per23b]第 3 节的命题 2.23的推论。

PROPOSITION 1.10. 亏格为 g 的 A_r-稳定超椭圆曲线的模叠 $\mathcal{H}_g^r$ 是光滑的，参数化光滑超椭圆曲线的开子叠 $\mathcal{H}_g$ 在 $\mathcal{H}_g^r$ 中稠密。特别地，$\mathcal{H}_g^r$ 是连通的。此外，自然态射

$$\widetilde{\mathcal{H}}_g^r \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}}_g^r$$

由 *th* 定义 关联 $(C, \sigma) \mapsto C$ 是光滑代数栈之间的闭嵌入 *s.*

计算策略

在本节余下部分，我们将说明用于计算$\widetilde{\mathcal{M}}_3^7$的周环的策略。其思路是使用粘合引理，而该引理的证明是同调代数中的一道练习。

设 $i : \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 是 κ 上余维为 d 的光滑全局商叠之间的闭浸入，设 $\mathcal{U} := \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ 为开补集，且 $j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 为开浸入。显然，拉回态射 $i^* : \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}) \to \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})$ 诱导出态射 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{U}) \to \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})/(c_d(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}))$，其中 $N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}$ 是该闭浸入的法丛。滥用记号，将此态射记作 i^*。

因此，我们得到以下环的交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\quad i^* \quad} & \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z}) \\ \downarrow{\scriptstyle j^*} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathrm{CH}^*(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\quad i^* \quad} & \dfrac{\mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})}{(c_d(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}))} \end{array}$$

其中 q 只是商态射。

LEMMA 1.11. 在上述情形下，诱导映射

$$\zeta : \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z}) \times_{\frac{\mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})}{(c_d(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}))}} \mathrm{CH}^*(\mathcal{U})$$

是满射，且 核 $\zeta = i_*\mathrm{Ann}(c_d(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}))$。特别地，如果 $c_d(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}})$ 是$\mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})$中的非零因子，那么 ζ 是一个同构。

从现在起，我们将条件 $c_d(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}})$ 不是零因子 称为粘合条件。

REMARK 1.12. 注意，如果 $\mathcal{Z}$ 是一个 Deligne-Mumford 分离叠，那么粘合条件永远不会成立，因为 $\mathcal{Z}$ 的有理乔环与其模空间的有理乔环同构（参见 [Vis89] 和 [EG98]）。

然而，我们希望 $\mathcal{M}_g^r$ 中的正维稳定子能够使粘合条件成立。例如，考虑 $\widetilde{\mathcal{M}}_{1,\,1}^2$，即亏格为 1、带标记且至多具有 A_2奇点的曲线的模叠。我们知道

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}^2 \simeq [\mathbb{A}^2/\mathbb{G}_{\mathrm{m}}]$$

因此，它的周环是一个多项式环，其中有大量非零因子。参见 [DLPV21]，了解将$\mathcal{M}_{1,\,1}$ 描述为商栈的内容。

这就是我们引入 $\mathcal{M}_g^r$的原因，它是一个非分离栈。我们将的周环 $\mathcal{M}_3^r$ 计算 $r = 7$，并使用一种分层，使我们能够迭代应用引理1.11。

在本文余下部分，我们用 $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ 表示栈 $\widetilde{\mathcal{M}}_g^{2g+1,}$它是我们所能考虑的最大的模空间栈，参数化 n-标记的 A_r-稳定亏格为 g 的曲线（见注 1.5）。相同的

记号也将用于 $\widetilde{\mathcal{H}}_g^r$。我们用 $\widetilde{\mathcal{C}}_{g,n}$ 表示 $\widetilde{\mathcal{M}}_{g,n}$ 的通用曲线。因此 $\widetilde{\mathcal{M}}_3^7$ 将记为 $\mathcal{M}_3$。回想一下，我们的基域 κ 的特征不为 2,3,5,7。

除非另有说明，所有周环均取 $\mathbb{Z}[1/6]$ 系数。对于某些结论而言，这一假设并非必要，但它能简化我们的计算。我们不知道粘合条件在整数系数下是否仍然成立。

我们想要构造 $\mathcal{M}_3$ 的一个分层，以便对其应用引理1.11 ，从而得到整个周环的描述。

首先，我们回顾 $\mathcal{M}_3$的一些子叠的定义：

– $\overline{\Delta}_1$ 是 $\mathcal{M}_3$ 的余维 1 闭子叠，它将带有一个分离节点的稳定曲线分类，– $\Delta_{1,1}$ 是 $\mathcal{M}_3$ 的余维 2 闭子叠，它将带有两个分离节点的稳定曲线分类，– $\Delta_{1,1,1}$ 是 $\mathcal{M}_3$ 的余维 3 闭子叠，它将带有三个分离节点的稳定曲线分类。

一个简单的组合计算表明，亏格 3 的稳定曲线最多有 3 个分离节点。对于任意 $\mathcal{M}_3^r$ ，都可以定义相同的子叠（特别是 r ）对于 $r = 7$也如此），但我们需要证明它们在 $\mathcal{M}_3^r$中仍然是闭的。这是 [Per23a]中的引理 4.7 的推论。

我们用 $\Delta_{1,1,1} \subset \Delta_{1,1} \subset \Delta_1$ 表示 $\Delta_{1,1,1} \subset \Delta_{1,1} \subset \Delta_1$ 在 $\mathcal{M}_3$中的自然推广。

我们也将 $\widetilde{\mathcal{H}}_3^7$ 视为该分层的一个层。下面的图

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \widetilde{\mathcal{H}}_3^7 & & \\ & & & & & \searrow & \\ \widetilde{\Delta}_{1,1,1} & \longrightarrow & \widetilde{\Delta}_{1,1} & \longrightarrow & \widetilde{\Delta}_1 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{M}}_3^7 \end{array}$$

表示 与该分层相关联的偏序集。和之前一样，我们用 $\widetilde{\mathcal{H}}_3$ 代替 $\widetilde{\mathcal{H}}_3^7$.

现在，我们描述计算 $\mathcal{M}_3$的周环所采用的策略。我们的方法首先着重于计算 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_1$的周环。这是计算中最困难的部分。我们先计算 $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$的周环，这一步无需使用粘合引理。然后，我们将粘合引理应用于 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus (\mathcal{H}_3 \cup \Delta_1)$ 和 $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$ ，从而得到 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_1$的周环的描述。

请注意， Δ_1 和 $\Delta_{1,1}$ 并非光滑栈，因此我们无法使用引理 1.11 来计算它们的 Chow 环。不过，$\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,1}$ 和 $\Delta_{1,1} \smallsetminus \Delta_{1,1,1}$ 都是光滑的，因此我们将引理 1.11 应用于 $\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,1}$ 和 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_1$ ，以描述 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_{1,1}$ 的周环；然后再次将其应用于 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_{1,1}$ 和 $\Delta_{1,1} \smallsetminus \Delta_{1,1,1}$。最后，通过相同的步骤，我们还可以将 $\Delta_{1,1,1}$ 拼接起来，从而得到 $\mathcal{M}_3$的周环描述。

在本文其余部分，我们将介绍以下分层及其周环：

– $\widetilde{\mathcal{H}}_3 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_1$,
– $\widetilde{\mathcal{M}}_3 \smallsetminus (\widetilde{\mathcal{H}}_3 \cup \widetilde{\Delta}_1)$,
– $\widetilde{\Delta}_1 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_{1,1}$,
– $\widetilde{\Delta}_{1,1} \smallsetminus \widetilde{\Delta}_{1,1,1}$,

– $\widetilde{\Delta}_{1,1,1}$,

最后一节将完整描述 $\mathcal{M}_3$ 的周环，并解释粘合过程中涉及的计算。

2. $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$的周环

本节将描述 $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$ 并计算其周环

回顾一下，我们有一个同构（见命题 1.9），介于 $\widetilde{\mathcal{H}}_3^7$ 与 $\widetilde{\mathcal{C}}_3^7$之间。我们将通过上述引用的同构，将 $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$ 描述为 $\mathcal{C}$（2，3，7）的一个子范畴。

考虑自然态射（见命题 1.10 的证明）

$$\pi_3 : \widetilde{\mathcal{H}}_3 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_1 \to \mathcal{P}_3$$

其中 $\mathcal{P}_3$ 是参数化对（Z/S，$\mathcal{L}$）的模叠，其中 Z 是一个亏格 0 的扭曲曲线，而 $\mathcal{L}$ 是 Z上的线丛。我们的思路是求出该态射的像。首先，我们可以将范围限制在 $\mathcal{P}_3$ 中参数化满足以下条件的对（Z/S，$\mathcal{L}$）：Z/S 是代数空间，因为我们去掉了 Δ_1。事实上，如果没有分离点，Z 就与对合的几何商重合（见 [Per23b]中命题 2.14 的证明）。此外，我们证明了 Z的不可约分支数目的上界。

LEMMA 2.1。 设 (C, σ) 是代数闭域上的一条亏格为 g 的双曲 A_r-稳定曲线，且 $Z := C/\sigma$ 是其几何商。若记 Z 的不可约分支数为 v，则有 $v \leqslant 2g-2$。此外，若 C 没有分离节点，则有 $v \leqslant g-1$。

证明。 设 Γ是 Z 的一个不可约分支。我们用 g_Γ 表示经商态射 C_Γ 对 Γ 的原像的亏格，用 e_Γ 表示位于 Γ 上的节点数，并用 s_Γ 表示 Γ 上满足其原像为两个节点或一个尖点的节点数（见[Per23b] 的命题 3.2）。我们断言，C 上的稳定性条件蕴含

$$2g_\Gamma - 2 + e_\Gamma + s_\Gamma > 0$$

对每个 Γ Z的不可约分支都成立。若 C_Γ 是整的，则结论显然。否则，C_Γ 是两条射影直线的并，它们交于一个长度为 n 的子概形。在这种情况下，$s_\Gamma = e_\Gamma := m$，且该不等式等价于 $n+m \geqslant 3$，这正是这两条射影直线的稳定性条件。恒等式

$$g = \sum_\Gamma (g_\Gamma + \frac{s_\Gamma}{2})$$

并且该断言推出结论。

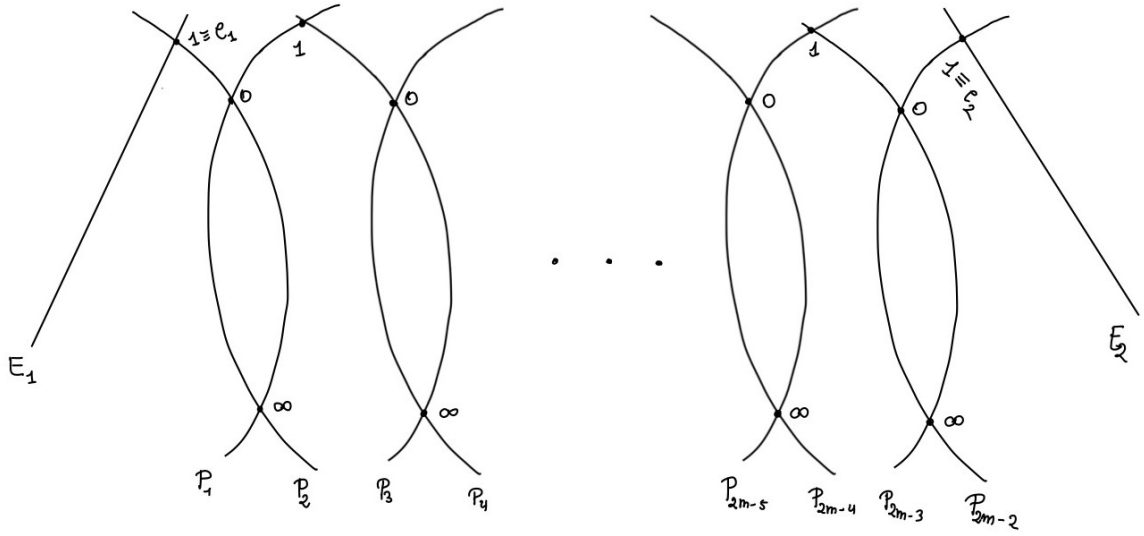
假设 (C, σ) 不属于 Δ_1。注意，对合 σ 与典范态射交换（由于 [Per23b] 的命题 3.36，该态射在全局上有定义），因为它在参数化光滑曲线的开稠密子栈 $\mathcal{H}_g$ 上作用。若我们考虑典范态射的分解

$$C \to Z \to \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(C, \omega_C)) = \mathbb{P}^{g-1}$$

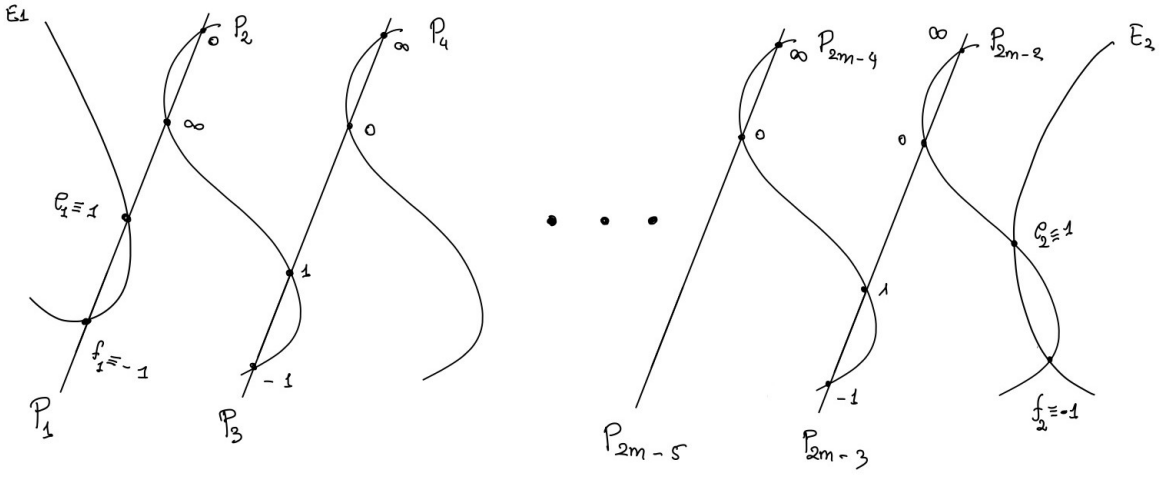
我们知道 $\mathcal{O}_Z(1)$ 的次数为 $g-1$，因为商态射 $C \to Z$ 的次数为 2，且$Z \to \mathbb{P}^{g-1}$ 是有限的。由此可得 $v \leqslant g-1$。 □

REMARK 2.2. 即使对于（A_1-）稳定双曲曲线，第一个不等式也是紧的。设 $v := 2m$为偶数，设（E_1，e_1）和（E_2，e_2）为两条光滑椭圆曲线，并令 P_1，……，P_{2m-2} 为

$2m-2$ 条射影直线。我们将 0 中的 P_{2i-1} 与 P_{2i} 粘合，并对每个 $i=1,\ldots\ldots,m-1$ 将 ∞ 与其粘合；对每个 $i=1,\ldots\ldots,m-2$，我们将 1 中的 P_{2i} 与 P_{2i+1} 粘合。最后，将 $(E_1,\ e_1)$ 与 $(P_1,\ 1)$ 粘合，并将 $(E_2,\ e_2)$ 与 $(P_{2m-2},\ 1)$ 粘合。显然，该曲线是亏格为 $m+1$ 的 A_1-稳定双曲曲线，其几何商有 $2m$ 个分支。奇数情形也可类似处理。



第二个不等式也同样成立。设 $v:=2m$ 是偶正整数。令 (E_1,e_1,f_1)、(E_2,e_2,f_2) 为两条带两个标记点的光滑亏格 1 曲线，$P_1,\ldots,P_{2m-2}$ 为 $2m-2$条射影直线。现在，对每个 $i=1,\ldots,m-1$，我们将 P_{2i-1} 与 P_{2i} 在 0 处粘合，并将 ∞ 粘合；对每个 $i=1,\ldots,v-2$，我们将 P_{2i} 与 P_{2i+1} 在 1 处粘合，并将 -1 粘合。最后，我们将 (E_1,e_1,f_1) 与 $(P_1,1,-1)$ 粘合，并将 (E_2,e_2,f_2) 与 $(P_{2m-2},1,-1)$ 粘合。显然，该曲线是 A_1-稳定的亏格 $2m+1$ 双曲曲线，其几何商有 $2m$ 个分支。奇数情形也可类似处理。



引理 2.1 保证几何商 Z 至多有两个不可约分支，若 C的亏格为 3 且没有分离节点。因此，数据 $(Z/S,\mathcal{L},i)$ 属于

像 π_3 当且仅当对每个几何点，纤维 Z_s 至多有 2 个不可约分支$s \in S$。此外，我们知道，并非所有的对 $(\mathcal{L}, i)$ 都能给出一条 A_r-稳定的亏格 3 双曲曲线。我们需要将定义 1.8 中的条件转化到我们的情形中。由于 Z中没有叠点，条件 (a) 是空的。此外，如果 Z 是整的，则我们有$\mathcal{L}$ 与 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-4)$ 非典范同构，因为 $\chi(L) = -3$，而对截面 i 的唯一要求是它不等于 0，因为 $r = 7$。

假设 Z 是两个不可约分支 Γ_1 和 Γ_2 的并，它们交于一个节点。我们将 n_1 和 n_2 分别称为 $\mathcal{L}$ 在 Γ_1 和 Γ_2 上的限制的次数。因此，(b1)+(c1) 蕴含 $n_1 \leqslant -2$ 和 $n_2 \leqslant -2$。最后，条件 $\chi(\mathcal{L}) = -3$ 给出 $n_1 = n_2 = -2$。

我们将 $\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 记作以参数化族为对象的模叠，族 Z/S 由亏格 0、至多有 1 个节点的结点曲线组成，且 $\mathcal{M}_0^1$ 记作 $\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 中参数化族 Z/S 的闭子叠，其中的曲线恰有 1 个节点。我们沿用 [EF06]中的记号。

最后，我们将 $\mathcal{P}_3'$ 记作参数化对 $(Z/S,\ \mathcal{L})$ 的模叠，其中 Z/S 是由亏格 0、至多有 1 个节点的结点曲线组成的族，而 $\mathcal{L}$ 是一个线丛；对每个点 $s \in S$ 上方的几何纤维，若 Z_s 是整的，则其限制的次数为 -4；若 Z_s 可约，则其双次数为 $(-2,\ -2)$。

因此，$\widetilde{\mathcal{H}}_3 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_1$ 可以看作是 $\mathcal{P}_3'$的向量丛 $\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -2}$ 的一个开子叠，其中（$\pi :\ \mathcal{Z} \to \mathcal{P}_3',\ \mathcal{L}$）是泛对象。我们可以明确描述 $\mathbb{V}(\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -2})$ 中$\widetilde{\mathcal{H}}_3 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_1$ 的补集。在这个特定情形下，截面 i 只需满足定义 1.8 中的 (b1) 和 (b2)。参数化不满足 (b1) 或 (b2) 的截面的 $\mathbb{V}(\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -2})$ 的闭子叠可以描述为两个分支的并。第一个分支是该向量丛本身的零截面。第二个分支 D 参数化支撑在可约亏格 0 曲线的轨迹 $\mathcal{M}_0^{\geqslant 1}$ 上、在节点 n 处消失的截面 h，且消失轨迹 $\mathbb{V}(h)_n$ 在节点处的局部化要么是正维的，要么长度不等于 2。

REMARK 2.3. $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$-带的 $\mathcal{P}_3' \to \mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 是平凡的，因为存在一个由对应关系 $Z/S \mapsto \omega_{Z/S}^{\otimes 2}$定义的截面。因此，$\mathcal{P}_3' \simeq \mathcal{M}_0^{\leqslant 1} \times \mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$。

我们刚刚证明了以下描述。

PROPOSITION 2.4. 栈 $\widetilde{\mathcal{H}}_3 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_1$ 与栈 $\mathbb{V}(\pi_*\omega_{\mathcal{Z}/\mathcal{P}_3'}^{\otimes -4}) \smallsetminus (D \cup 0)$同构，其中 0是该向量丛的零截面，且 D 参数化了支撑在 $\mathcal{M}_0^1 \times \mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$上的截面 h，使得在节点处局部化的消失轨迹 $\mathbb{V}(h)$ 的长度不为2。

最后，我们陈述一个专家们熟知的事实，它对我们的计算非常有帮助。这也是我们选择在 Chow 环中对 2 和 3 求逆来进行计算的原因之一。考虑一个态射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$，它是可表示、有限且平坦的，次数为 d，其定义在商栈之间；再考虑它与自身构成的笛卡尔图 f：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} & \xrightarrow{p_1} & \mathcal{X} \\ \downarrow{\scriptstyle p_2} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y}. \end{array}$$

LEMMA 2.5. 在上述情形中，群范畴中的图

$$\mathrm{CH}^*(\mathcal{Y})[1/d] \xrightarrow{f^*} \mathrm{CH}^*(\mathcal{X})[1/d] \underset{p_1^*}{\overset{p_2^*}{\rightrightarrows}} \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}\times_{\mathcal{Y}}\mathcal{X})[1/d]$$

是一个等化子。

证明。 这只是对次数为 d 的有限平坦可表态射应用公式 $g_*g^*(-) = d(-)$。

□

REMARK 2.6. 我们关注以下应用：若 $f\colon \mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是一个 G-挠子，其中 G 是一个常群，则我们在 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X})$ 上有一个真正的 G 作用，并且引理告诉我们，拉回 f^* 是 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{Y})$ 与 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{X})^{G-\mathrm{inv}}$ 之间的同构，只要我们在周群中将 G 的阶取逆。

来自零截面的关系

根据交理论中的标准论证，我们知道

$$\mathrm{CH}^*(\mathbb{V}\smallsetminus 0) = \mathrm{CH}^*(\mathcal{X})/(c_{\mathrm{top}}(\mathbb{V}))$$

对于栈 $\mathcal{X}$ 上的向量丛 $\mathbb{V}$，其中 $c_{\mathrm{top}}(-)$ 是顶陈类。

要计算陈类，首先需要描述 $\mathcal{P}_3'$ 的周环。在 [EF06], 中，他们计算了 $\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 的整数系数周环，其结果表明

$$\mathrm{CH}^*(\mathcal{P}_3') = \mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}\times\mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) = \mathbb{Z}[1/6, c_1, c_2, s]$$

其中 $c_i := c_i\Big(\pi_*\omega^{\vee}_{\mathcal{Z}/\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}}\Big)$ 对于 $i=1,\ 2$，且 $s := c_1\Big(\pi_*(\mathcal{L}\otimes\omega^{\otimes -2}_{\mathcal{Z}/\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}})\Big)$。我们回顾一下，$(\mathcal{Z},\mathcal{L})$ 是 $\mathcal{P}_3'$ 上的泛对象。

REMARK 2.7。 我们使用了这样一个事实：对于光滑商栈 $^*(\mathcal{X}\times\mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}),\ \simeq \mathrm{CH}^*(\mathcal{X})\otimes\mathrm{CH}^*(\mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$。这由 $\mathcal{X}$ 的引理 2.12 得出 [Tot14]。

我们需要计算 $c_9(\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -4})$。若记 $\mathcal{S}$ 为 $\mathcal{P}_3'$ 上满足 $\pi^*(\mathcal{S}) := \mathcal{L}\otimes\omega^{\otimes -2}_{\mathcal{Z}/\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}}$ 的线丛，则有

$$\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -4} = \pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^{\otimes -4}\otimes\mathcal{S}^{\otimes -2}.$$

PROPOSITION 2.8. 我们在 $\mathcal{P}_3'$ 上有一个向量丛的正合列

$$0\to\det(\pi_*\omega^{\vee}_{\mathcal{Z}})\otimes\mathrm{Sym}^2\pi_*\omega^{\vee}_{\mathcal{Z}}\to\mathrm{Sym}^4\pi_*\omega^{\vee}_{\mathcal{Z}}\to\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^{\otimes -4}\to 0.$$

证明。令 S 为 一个 κ-概形，并令 $(Z/S, L)$ 为 $\mathcal{P}_3'(S)$ 的一个对象。考虑 S-态射

$$\begin{array}{ccc} Z & \xhookrightarrow{\ i\ } & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ & {\scriptstyle\pi}\searrow & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & S \end{array}$$

由线丛 $\omega^{\vee}_{Z/S}$ 的完全线性系诱导，即 $\mathcal{E} := (\pi_*\omega^{\vee}_{Z/S})^{\vee}$。那么 i 是闭浸入，并且我们有以下事实：

- $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) = \omega^{\vee}_{Z/S}$,

– $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-Z) \simeq \omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/S}(1)$;

详细讨论请参见 [EF06]的命题 6 的证明。因为

$$\pi_*\omega_{Z/S}^{\otimes -4} = p_*i_*(\omega_{Z/S}^{\otimes -4}) = p_*i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(4)$$

我们可以考虑正合列

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(4-Z) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(4) \to i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(4) \to 0.$$

如果我们沿 p 进行推前，那么对于 S 上的每个几何纤维，该正合列仍然正合，因为 Z 嵌入为一条圆锥曲线。因此我们得到

$$0 \to p_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(5) \otimes \omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})/S}) \to p_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(4) \to \pi_*\omega_Z^{\otimes -4} \to 0$$

并利用公式 $\omega_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-2) \otimes p^* \det \mathcal{E}^\vee$，得到所需结论。 □

我们在分层中找到了第一个关系，即

$$c_9 := \frac{c_{15}(\mathcal{S}^{\otimes -2} \otimes \mathrm{Sym}^4 \pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^\vee)}{c_6(\mathcal{S}^{\otimes -2} \otimes \det(\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^\vee) \otimes \mathrm{Sym}^2 \pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^\vee)}$$

并且可以完全用 $\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^\vee$ 和 $s = c_1(\mathcal{S})$ 的陈类 c_1, c_2 来描述。

来自轨迹 D 的关系

现在我们将重点放在轨迹 D 上。首先请注意， D 包含在$\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -4}$ 对 $\mathcal{M}_0^1 \times \mathcal{B}\mathbb{G}_\mathrm{m}$ 的限制中。

REMARK 2.9。 在 [EF06],作者将栈 $\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 描述为商栈 $[S/\mathrm{GL}_3]$，其中S 是六维 GL_3-表示中齐次形式的一个开子概形，这些形式由三个变量构成，即 x, y, z，次数为 2。其作用可描述为

$$A.f(x) := \det(A) f(A^{-1}(x,y,z))$$

对于每个 $A \in \mathrm{GL}_3$ 和 $f \in S$，开子概形 S 是闭不变子概形的补集，该闭不变子概形参数化非约化形式。

证明利用线丛 $\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^\vee$（它是非常丰的）来将 $\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 描述为 $\mathbb{P}^2$ 中约化圆锥曲线的轨迹，其上 GL_3 有作用。更详细的讨论见 [EF06]。

在这种情况下， $\mathcal{M}_0^1$ 对应于 $\mathbb{P}^2$中由可约约化圆锥曲线参数化的闭轨迹 S^1 。容易看出，GL_3 在 S^1 上的作用是传递的，因此 $\mathcal{M}_0^1 \simeq \mathcal{B}H$，其中$H$ 是GL_3 的子群，由任意一个元素（例如 $xy \in S^1$）的稳定子构成。直接计算可得 $H \simeq (\mathbb{G}_\mathrm{m} \ltimes \mathbb{G}_\mathrm{a})^2 \ltimes C_2$，其中 C_2 是由两个元素构成的常群。

由于我们在 Chow 环中将 2 取逆，可以使用引理2.5 将$\mathcal{M}_0^1$ 的 Chow 环描述为$^*(\mathcal{B}\mathbb{G}_\mathrm{m}^2)$ 在 C_2 的某个特定作用下的不变子环。根据 $\mathbb{G}_\mathrm{a}$的命题 2.3，计算 Chow 环时无需考虑这些 [MRV06]。我们可以看到，t_1、 t_2、1) 形式的元素 $\mathbb{G}_\mathrm{m}^2 \ltimes C_2$ 对应于 GL 中形如$_3$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 \\ 0 & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

形如 $(t_1、\ t_2、\ -1)$ 的元素对应于这些矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & t_1 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

显然，C_2 在 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$ 上的作用可描述为（-1）.（t_1，t_2）$=$（t_2，t_1）。因此，若分别用 t_1 和 t_2 表示两份 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$的周环生成元，则有

$$\mathrm{CH}^*(\mathcal{B}(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \ltimes C_2)) \simeq \mathbb{Z}[1/6, t_1+t_2, t_1t_2].$$

标准的计算可得以下结果。

LEMMA 2.10. 若用 $i:\ \mathcal{M}_0^1 \hookrightarrow \mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 表示该（正则）闭浸入，则有$i^*(c_1) = t_1+t_2$ 且 $i^*(c_2) = t_1t_2$，因此 i^* 是满射。此外，在 $\mathcal{M}_0^{\leqslant 1}$ 的周环中有等式$[\mathcal{M}_0^1] = -c_1$ 。

证明。 $i = 1,2$时 $i^*(c_i)$的描述可由包含映射的显式描述得到

$$\mathcal{M}_0^1 = [\{xy\}/H] \hookrightarrow [S/\mathrm{GL}_3] = \mathcal{M}_0^{\leqslant 1}.$$

关于陈述的第二部分，只需注意到 $\mathcal{M}_0^1 = [S^1/\mathrm{GL}_3] \hookrightarrow [S/\mathrm{GL}_3]$，其中 S^1 是 S 中的超曲面，由一般圆锥曲线的行列式为零定义。对行列式公式所对应的GL_3-特征作直接计算即可得出结果。

□

最后，我们聚焦于 D。现在可以将向量丛 $\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -4}$（或等价地，$\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^{\otimes -4} \otimes \mathcal{S}^{\otimes -2}$）视为一个 9 维的 H-表示。具体而言，我们考察曲线 $xy=0$ 上的 $\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^{\otimes -4} \otimes \mathcal{S}^{\otimes -2}$ 的截面，它们构成一个 9 维向量空间 $\mathbb{A}(4,4)$，用于参数化一对次数为 4 的二元形式，它们必须在点 $x=y=0$ 处相等。记两个分支的公共点 $x=y=0$ 为 ∞。采用这一记号，D参数化满足 $f(\infty) = g(\infty) = 0$，且 xz^3 的系数或 yz^3 的系数为零的对 $(f(x,z)\ g(y,z))$。

REMARK 2.11. 这可由 2 : 1 覆盖的局部描述得到。事实上，若 ∞ 是两个分支的交，则我们有：在 étale 局部，双覆盖具有如下形式

$$k[[x,y]]/(xy) \hookrightarrow k[[x,y,t]](t^2 - h(x,y))$$

其中 h 恰好是 $\pi_*\omega_{\mathcal{Z}}^{\otimes -4} \otimes \mathcal{S}^{\otimes -2}$的截面。根据 [Per23b], 的命题 3.2，商态射中位于一个节点上方的纤维只能是节点或尖点，因此我们得到 h 要么是单位（商态射是 ´étale），要么 h 具有如下形式 $xp(x) + yq(y)$，且满足 $p(0) \neq 0$和 $q(0) \neq 0$。

$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2 \times \mathbb{G}_{\mathrm{m}}$（其中乘积中的第二个群是其生成元为 s 的群）对 x^iz^{4-i}（分别为 y^iz^{4-i}）的系数的作用，可由特征 $t_1^is^{-2}$（分别为 $t_2^is^{-2}$）描述。

LEMMA 2.12. 由 D 在 $\mathbb{V}(\pi_*\mathcal{L}^{\otimes -2})|_{\mathcal{M}_0^1 \times \mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}}$ 中得到的关系理想由两个类 $2s(4s-(t_1+t_2))$ 和 $2s(4s^2 - 2s(t_1+t_2) + t_1t_2))$生成。因此，我们有：由 D 在 $\mathcal{P}_3'$ 中得到的关系理想由两个关系 $D_1 := 2sc_1(c_1 - 4s)$ 和 $D_2 := 2sc_1(4s^2 - 2sc_1 + c_2)$ 生成。

证明。 根据引理 2.5，我们可以先计算 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$- 等变情形下的关系理想（即忽略 C_2 的作用），然后再考虑不变元（在 C_2 的作用下）。显然， I 在 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$-等变情形下的关系理想具有（$2s(2s-t_1)$ $2s(2s-t_2)$) 的形式。因此，理想 I^{inv} 由以下元素生成： $2s(4s-(t_1+t_2))$ 以及$2s(2s-t_1)($ $2s-t_2)$. □

~ ~作为推论，我们得到 $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$ 的周环。在描述它之前，我们想要更换生成元。我们可以用类 λ_1、 λ_2 和 ξ_1 表示 c_1、 c_2 和 s ，其中 λ_i 如常是霍奇丛 $\mathbb{H}$ 的第 i 个陈类，而 ξ_1 是 Ξ_1 的基本类，其定义为拉回

$$\begin{array}{ccc} \Xi_1 & \hookrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}}_3 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_0^1 \times \mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} & \hookrightarrow & \mathcal{P}_3' = \mathcal{M}_0^{\leqslant 1} \times \mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}} \end{array}$$

并且它参数化不含分离节点的超椭圆曲线，使得几何商有两个不可约分支。

LEMMA 2.13. 在上述情形下，我们有 $s=(-\xi_1-\lambda_1)/3$、 $c_1=-\xi_1$ 和 $c_2=\lambda_2-(\lambda_1^2-\xi_1^2)/3$。此外，我们有以下关系

$$\lambda_3=\frac{(\xi_1+\lambda_1)(9\lambda_2+(\xi_1+\lambda_1)(\xi_1-2\lambda_1))}{27}.$$

证明。 首先，关系 $\xi_1=-c_1$ 由 ξ_1 的构造显然成立，因为我们已经在 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_0^{\leqslant 1})$ 中计算出基本类 $\mathcal{M}_0^1$。

~ ~设 $f\colon C\to Z$ 是 $\mathcal{H}_3 \smallsetminus \Delta_1$ 中一个对象的商态射， $\pi_C\colon C\to S$ 和 $\pi_Z\colon Z\to S$ 是两个结构态射。Grothendieck 对偶意味着

$$f_*\omega_{C/S}=\mathcal{H}om_Z(f_*\mathcal{O}_C,\omega_{Z/S})$$

但由于 f 是有限平坦的，我们知道 $f_*\mathcal{O}_C=\mathcal{O}_Z\oplus L$，即 $f_*\omega_C=\omega_Z\oplus(\omega_Z\otimes L^\vee)$。回顾一下，对于基底上的线丛 $\mathcal{S}$，有 $L\simeq\omega_{Z/S}^{\otimes 2}\otimes\pi_Z^*\mathcal{S}$。因此，若考虑经由 π_Z 的推前，我们得到

$$\pi_{C,*}\omega_{C/S}=\pi_{Z,*}(\omega_{Z/S}^\vee)\otimes\mathcal{S}^\vee$$

以及 陈类公式中的结论可由简单计算得出 . □

COROLLARY 2.14. 我们有如下环同构：

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\mathcal{H}}_3)=\mathbb{Z}[1/6,\lambda_1,\lambda_2,\xi_1]/(c_9,D_1,D_2)$$

其中 $D_1=2\xi_1(\lambda_1+\xi_1)(4\lambda_1+\xi_1)/9$， $D_2:=2\xi_1(\xi_1+\lambda_1)(9\lambda_2+(\xi_1+\lambda_1)^2)/27$ ，且 c_9 是一个次数为 9 的齐次多项式。

REMARK 2.15. 多项式 c_9 具有以下形式：

$$
\begin{aligned}
c_9 = &-\frac{16192}{19683}\lambda_1^9 - \frac{23200}{6561}\lambda_1^8\xi_1 - \frac{31040}{6561}\lambda_1^7\xi_1^2 + \frac{1376}{729}\lambda_1^7\lambda_2 - \frac{320}{6561}\lambda_1^6\xi_1^3 + \\
&+ \frac{4576}{243}\lambda_1^6\xi_1\lambda_2 + \frac{30784}{6561}\lambda_1^5\xi_1^4 + \frac{10144}{243}\lambda_1^5\xi_1^2\lambda_2 + \frac{3968}{81}\lambda_1^5\lambda_2^2 + \frac{16256}{6561}\lambda_1^4\xi_1^5 + \\
&+ \frac{15136}{729}\lambda_1^4\xi_1^3\lambda_2 + \frac{992}{27}\lambda_1^4\xi_1\lambda_2^2 - \frac{320}{243}\lambda_1^3\xi_1^6 - \frac{5792}{243}\lambda_1^3\xi_1^4\lambda_2 - \frac{11072}{81}\lambda_1^3\xi_1^2\lambda_2^2 - \\
&- \frac{7264}{27}\lambda_1^3\lambda_2^3 - \frac{7360}{6561}\lambda_1^2\xi_1^7 - \frac{5216}{243}\lambda_1^2\xi_1^5\lambda_2 - \frac{11392}{81}\lambda_1^2\xi_1^3\lambda_2^2 - \frac{2848}{9}\lambda_1^2\xi_1\lambda_2^3 + \\
&+ \frac{640}{6561}\lambda_1\xi_1^8 + \frac{1952}{729}\lambda_1\xi_1^6\lambda_2 + \frac{832}{27}\lambda_1\xi_1^4\lambda_2^2 + \frac{1568}{9}\lambda_1\xi_1^2\lambda_2^3 + 384\lambda_1\lambda_2^4 + \\
&+ \frac{2912}{19683}\xi_1^9 + \frac{352}{81}\xi_1^7\lambda_2 + \frac{3808}{81}\xi_1^5\lambda_2^2 + \frac{5984}{27}\xi_1^3\lambda_2^3 + 384\xi_1\lambda_2^4.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$ 在 $\mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$ 中的法丛

本节最后计算 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta$ 闭浸入 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta \hookrightarrow \mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$ 的法丛的第一陈类。为方便记号，我们将该法丛记为 $N_{\mathcal{H}|\mathcal{M}}$。

PROPOSITION 2.16. $\mathcal{H}_3$ 在 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{M}_3)$ 中的基本类等于 $9\lambda_1 - \delta_0 - 3\delta_1$。

证明。这是 [Est13] 的定理 1。需要注意的是，在计算中，作者只需在皮卡群中将 2 取逆，就能得到该结果。 □

REMARK 2.17. 与（A_1-）稳定情形一样，我们将 Δ_0 定义为 $\mathcal{M}_3$ 中参数化具有非分离节点的曲线的子叠的闭包。或者，我们也可以考虑 $\mathcal{M}_3$ 的通用曲线 $\mathcal{C}_3$ 中的栈 Δ，它定义为 $\Omega^{\mathcal{C}_3|\mathcal{M}_3}$ 的第一 Fitting 理想的消失轨迹。我们将 Δ 称为带有其自然的栈结构的像，并将 Δ_0 称为 Δ 的补集。记包含映射为 $\Delta_1 \subset \Delta$。根据 [Per23a], 中的引理 4.7，我们知道 $\Delta_1 \hookrightarrow \Delta$ 也是开集，因此可知 Δ_0 是 $\mathcal{M}_3$ 的闭子叠。记 δ_0 其在 $\mathcal{M}_3$ 中的基本类为 $\mathcal{M}_3$。

由于 $\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{M}_3$ 的余维为 2，因此同一公式在我们的情形下也成立。由于 δ_1 定义为 Δ_1 的基本类，我们只需计算 δ_0 在 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$ 上的限制，即可得到所需的描述。为此，我们计算 δ_0 在 $\mathcal{H}_3 \setminus (\Delta_1 \cup \Xi_1)$ 以及在 $\Xi_1 \setminus \Delta_1$ 上的限制，然后将这些信息拼合起来。

首先请注意，$\mathcal{H}_3 \setminus (\Delta_1 \cup \Xi_1)$ 是 $\mathrm{PGL}_2 \times \mathbb{G}_\mathrm{m}$ 的一个 9维表示 V 中的开子集，因为我们有 $\mathbb{P}^1$ 的 2:1 覆盖。展开定义后，我们得到以下结果。

LEMMA 2.18. 上述表示 V 的 $\mathrm{PGL}_2 \times \mathbb{G}_\mathrm{m}$ 与 *Arsie* 和 *Vistoli* 在 [AV04] 的推论*4.6*中给出的表示一致。

这意味着我们可以将其视为 $[\mathbb{A}(8)/(\mathrm{GL}_2/\mu_4)]$,中的一个开子集，其中 $\mathbb{A}(8)$是次数为8的二元形式所构成的向量空间，而GL_2/μ_4按照方程 $A.f(x) = f(A^{-1}x)$作用。根据 [AV04] 中发展的理论（在我们的情形下，见命题1.9 ），显然，截面$f \in \mathbb{A}(8)$描述了商态射的分歧轨迹。特别地，射影直线的二重覆盖上的比节点更严重的奇点，对应于 $\mathbb{P}^1$ 上分歧除子不 ´étale 的点，或者等价地，对应于 f 重数大于1的点。因此， δ_0 由 $\mathbb{A}(8)$中奇异形式所构成的闭不变子概形表示。这

已由 Di Lorenzo 计算得出（见 [DL19]中的定理6的第一个关系式），因此我们有 $\delta_0 = 28\tau$，其中

$$\tau = c_1(\pi_*(\omega_C(-W)^{\otimes 2}))$$

其中，W 是 C中的分歧除子。注意，若 $f : C \to \mathbb{P}^1$ 是射影直线的循环覆盖，则有 $W \simeq f^*\mathcal{L}^{\otimes\vee}$。利用 Grothendieck 对偶进行计算可得 $\tau = -s$。

~ ~我们有 $\delta_0 := as + bc_1 \in \mathrm{CH}^*(\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1)$，其中某些元素属于 $\mathbb{Z}[1/6]$。

~上述计算表明，将其限制到 $\Xi_1 \setminus \Delta_1$的开补集上，可得 $a = -28$。

~ ~限制到 $\Xi_1 \setminus \Delta_1$ 上稍微复杂一些，因为我们有 $\Xi_1 \subset \Delta_0$。回顾其描述

$$\Xi_1 \setminus \widetilde{\Delta}_1 = [\mathbb{A}(4,4) \setminus D/H]$$

其中，$\mathbb{A}(4,4)$ 是由满足 $f(0,1) = g(0,1)$的次数为 4 的二元形式对 $(f(x,z)\ g(y,z))$构成的向量空间。我们定义一个开 Ξ_1^0，它由满足$f(0,1) = g(0,1) \neq 0$的 $\Xi_1 \setminus \widetilde{\Delta}_1$中的各对 (f,g)组成。显然，D与 Ξ_1^0不相交。

我们在 Ξ_1^0 上进行计算，并验证这些计算足以确定描述 $\delta_0 = -28s + bc_1$ 中的系数 b。

REMARK 2.19. $\mathrm{CH}^*(\Xi_1)$ 中的类 $[\Xi_1 \setminus \Xi_1^0]$ 等于 $-2s$。事实上，它可以描述为对于一对 $(f,\ g) \in \mathbb{A}(4,\ 4)$，$z^4$ 的系数的消失轨迹。因此，Ξ_1^0 的皮卡群（除去 2 的影响后）由 c_1 自由生成。

我们在 Ξ_1^0 内定义一个闭子叠：将 Δ' 定义为参数化满足以下条件的对 $(f,\ g)$ 的轨迹：f 或 g 是奇异形式。

LEMMA 2.20. 在上述情形下，我们有如下等式

$$\Delta' = 12c_1$$

Ξ_1^0 的皮卡群中。

证明。由引理 2.5，我们可以进行 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$-等变计算，以求得 Δ'的等变类。我们有 $\Delta' = \Delta_1' \cup \Delta_2'$，其中 Δ_1'（分别为 Δ_2'）是参数化满足条件的对（f，g）的子叠，其中 f（分别为 g）是奇异形式。

我们将问题化简为计算 $\mathbb{A}(4)$ 中奇异形式轨迹的类。结果随后可通过直接计算得出。

□

现在我们可以计算 δ_0 的限制了。

LEMMA 2.21. 在上述情形中，我们有

$$\delta_0|_{\Xi_1^0} = -2c_1 + [\Delta']$$

在 Ξ_1^0 的周环中。

证明。由于我们计算的是线丛的陈类，只需考虑到余维二；特别地，我们可以去掉由具有 A_r-奇点的曲线所参数化的轨迹，对于$r \geqslant 2$ 而言（该轨迹与 Ξ_1^0 横截相交）。因此，只需在稳定情形下证明该命题。为方便记号，令 $\mathcal{M}$ 为 $\mathcal{M}_3 \setminus \Delta_{1,}$ $\mathcal{H}$ 为 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$，并令 $\mathcal{C}$（分别为$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$）表示 $\mathcal{M}$（分别为 $\mathcal{H}$）上的通用曲线。我们用 Ξ 表示 Ξ_0^1中分类 A_1-稳定曲线的开子叠。

考虑 $\mathcal{C}$ 中由态射 $\pi : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ 的奇点构成的闭子叠 Δ，它可以定义为 $\Omega^{\mathcal{C}/\mathcal{M}}$ 的第一 Fitting 理想的零点集。同理，可以在 $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ 内定义$\sim\Delta_{\mathcal{H}}$。注意，Δ_0 与 $\mathcal{M}$ 的交恰好是 Δ 经态射 π 的像，并且 $\pi|_{\Delta} : \Delta \to \mathcal{M}$ 是到其像上的双有理映射。在下面的图表中

$$\begin{array}{ccccc} & & \Delta_{\mathcal{H}} & \xhookrightarrow{\iota} & \Delta \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow \\ \Xi & \xrightarrow{j} & \mathcal{H} & \xhookrightarrow{i} & \mathcal{M} \end{array}$$

我们有该方块是笛卡尔图，且这两个闭浸入都是余维 1 的正则浸入。这意味着

$$\delta_0|_{\Xi} = j^* p_*(1).$$

我们需要描述纤维积 $\Delta_{\mathcal{H}} \times_{\mathcal{H}} \Xi$。模叠 Ξ 参数化三元组 $(C,\ \sigma,\ E)$，其中 $(C,\ \sigma)$ 是亏格 3 的稳定双曲曲线，且 E 是 C 的一个次数为 2 的有限无分歧除子（支撑在奇异轨迹上），其满足：C 在 E 中的部分正规化得到两条不交的亏格 1 曲线，并且 σ 在 E 上的作用非平凡。因此，纤维积 $\Delta_{\mathcal{H}} \times_{\mathcal{H}} \Xi$ 参数化 $(C,\ \sigma,\ E,\ p)$，其中 $(C,\ \sigma,\ E)$ 是 Ξ 的一个对象，且 p 是 C 的一个节点。我们将纤维积中 p 不包含于 E 的支撑内的（开）子叠记作 D'。容易看出，这同时也是一个闭子叠。若将纤维积中 D' 的补集记作 D''，则有如下笛卡尔图：

$$\begin{array}{ccc} D' \sqcup D'' & \xrightarrow{j' \sqcup j''} & \Delta_{\mathcal{H}} \\ {\scriptstyle q' \sqcup q''}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \Xi & \xrightarrow{j} & \mathcal{H} \end{array}$$

其中 $j' : D' \hookrightarrow \Delta_{\mathcal{H}}$ 是余维 1 的正则嵌入，而 $j'' : D'' \hookrightarrow \Delta_{\mathcal{H}}$ 是余维 0 的正则嵌入，即开闭嵌入。因此

$$\delta_0|_{\Xi} = q''_* c_1(q''^* N_j) + q'_*(1)$$

其中 N_j 是与闭嵌入 $j : \Xi \hookrightarrow \mathcal{H}$相关联的法丛。注意到 q'' 是有限的，且一般次数为 2，因此引理2.10 推出

$$q''_* c_1(q''^* N_j) = 2c_1(N_j) = -2c_1$$

作为 Ξ 的皮卡群中的一个元素（该群与 Ξ_0^1 的皮卡群相同）。注意到 q' 的像恰为 Δ'，且 q' 双有理映到其像，即可得出结论。

□

前一个引理推出 $\delta_0|_{\Xi_1^0} = 10c_1$，由此可得 $b = 10$，即 $\delta_0 = -28s + 10c_1^{\sim}$ $^{\sim}$是 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$ 的皮卡群中的元素。引理2.13 给出了以下另一种描述。

COROLLARY 2.22. $N_{\mathcal{H}|\mathcal{M}}$ 的第一陈类等于 $(2\xi_1 - \lambda_1)/3$。

$\sim\ \ \sim\ \ ^{\sim}$3. $\mathcal{M}_3 \setminus (\Delta_1 \cup \mathcal{H}_3)$的描述

现在我们聚焦于开分层。回顾一下，亏格为g 的光滑曲线的典范线丛要么非常丰，要么是双曲曲线，且商态射经由$^{\sim}$典范态射分解。对于 Δ_1 中的 A_r-稳定曲线，这不可能成立，因为我们有

对偶化线丛并非整体生成的，参见命题 3.36，见 [Per23b]。不过，如果~我们去掉 Δ_1，对于亏格 3 曲线也有相同的结果。

LEMMA 3.1. 设 C 是一个亏格为3 的代数闭域上的 A_r-稳定曲线，它没有分离节点，且不是双曲的。那么典范态射（由对偶化层的完全线性系诱导）是一个闭浸入。

证明。 证明中运用了 [Cat82]所发展的理论来处理大多数情形，并对其余情形逐一分析。

~ ~首先，我们证明：若 C 是一个 2-连通的 A_r亏格为 3 的稳定曲线（即它属于 $\mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$），则 C 是双曲的，当且仅当存在两个光滑点 x， y 使得 $\dim \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}(x+y)) = 2$（注意，这是 [Cat82]中的双曲曲线定义）。

一个方向显然成立。设存在两个光滑点 x， y 位于 C 中，且 $\dim \mathrm{H}^0(C, \mathcal{O}(x+y)) = 2$。Cat 中的命题 3.14 [Cat82] 保证我们处于以下两种可能情形之一：

(a) x， y属于两个不同的不可约分支 Y_1， Y_2，它们的亏格为 0，且每个连通分支 Z 都与 $C - Y_1 - Y_2$ 在一个节点处相交，并与 Y_1 在另一个（不同的）节点处相交；(b) x， y 属于一条不可约超椭圆曲线 Y，使得对于每个连通分支Z，它都与 $C - Y$在一个同构于 $\mathcal{O}(x+y)$ 的 Cartier 除子处相交。

关于 (a)，稳定性条件意味着唯一的可能性是：要么 $C - Y_1 - Y_2$没有其他连通分支，这意味着 C 是超椭圆曲线；要么只有一个连通分支 Z，它是 $C - Y_1 - Y_2$ 的亏格 1 分支。由于 Z 的亏格为 1，且它与 $Y_1 \cup Y_2$ 在两点相交，因此存在唯一的双曲对合，将这两点互换，见 Z 中引理 3.6， [Per23b]。因此， C 同样是超椭圆曲线。在情形 (b) 中，稳定性条件意味着唯一的可能性是 C 不可约，因此是超椭圆曲线；或者 C 是两条在一个长度为 2 的除子处相交的亏格 1 曲线的并。同样，由 [Per23b]中的引理 3.6 可知， C 是超椭圆曲线。

现在，我们关注 [Cat82] 中给出的另一个定义。作者将 C 定义为强连通，当且仅当不存在一对节点 x， y 使得 $C \setminus \{x, y\}$ 是不连通的。此外，作者将 C 定义为极强连通，当且仅当它是强连通的，且不存在一个点$p \in C$ 使得 $C \setminus \{p\}$ 是不连通的。

在我们的情形中，曲线 C 不是极强连通的，当且仅当

(1) C 是两条亏格 1 曲线的并，它们在一个长度为 2 的除子处相交；(2) C 是两条亏格 0 曲线的并，它们在一个 A_7 型奇点处相交；(3) C 是一条亏格 0 曲线和一条亏格 1 曲线的并，它们在一个 A_5 型奇点处相交。

情形 (1) 总是双曲的。简单的计算表明，情形 (3) 绝非双曲的，且典范态射是一个闭嵌入，它将 C 映为 $\mathbb{P}^2$ 中一条三次曲线与一条拐点切线的并。最后，可以证明，在情形 (2) 中，典范态射限制在两个分支上都是闭嵌入，因此显然它要么是一个到其像上的次数为 2 的有限平坦态射（C 双曲的），要么在整体上是 C 上的闭浸入。

还需证明以下情形下的结论： C 极强连通。这是 [Cat82]中的定理 G。

□

REMARK 3.2. 注意，这个引理确实只适用于亏格 3 曲线，在亏格 4 的情形下并不成立。

考虑一条亏格 2 光滑曲线 C 与一条属1光滑曲线 E 在两点相交，这两点对于 C 而言并非 g_1^2。那么，典范态射限制在 E 上是 2:1 的，但在 C 上是双有理的。

前一个引理意味着， $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \mathcal{H}_3$ Di Lorenzo 在 [DL20] 的命题 3.1.3 中证明的描述可以推广到我们的情形。具体而言，我们有以下同构：

$$\widetilde{\mathcal{M}}_3 \smallsetminus (\widetilde{\Delta}_1 \cup \widetilde{\mathcal{H}}_3) \simeq [U/\mathrm{GL}_3]$$

其中， U 是位于空间 $\mathbb{A}(3, 4)$中的一个不变开子概形；该空间由三个坐标中的（齐次）4 次形式构成，是 GL_3 的一个表示，其作用由公式 $A.f(x) := \det(A) f(A^{-1}x)$描述。补集参数化了这样的形式 f：其诱导的射影曲线 $\mathbb{V}(f)$在 $\mathbb{P}^2$ 中不是 A_r-预稳定的。

我们将商栈的描述用于计算其 Chow 环。我们的策略与 [DLFV21] 中采用的策略相似，但加入了一个简化计算的新思路。

像往常一样，我们转而考虑 $\mathbb{A}(3, 4)$的射影化，并将其记为 $\mathbb{P}^{14}$。我们在 $\mathbb{P}^{14}$ 上诱导出 GL_3 的作用，令 $A.[f] = [f(A^{-1}x)],$；若将 U的射影化记为 U，则有

$$\mathrm{CH}^*_{\mathrm{GL}_3}(U) = \mathrm{CH}^*_{\mathrm{GL}_3}(\overline{U})/(c_1 - h)$$

其中， c_i 是 GL_3 标准表示的第 i 陈类，而 $h = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{14}}(1)$ 是三元形式射影空间的超平面截面。我们的思路是计算由 U 的闭补集所产生的关系，然后令 $h = c_1$ ，从而得到 $\sim \quad \sim \quad \sim$ $\mathcal{M}_3 \smallsetminus (\mathcal{H}_3 \cup \Delta_1)$ 的周环，即 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{B}\mathrm{GL}_3)$ 对这些关系取商。

REMARK 3.3. 注意， $\lambda_i := c_i(\mathbb{H})$（其中 $\mathbb{H}$ 是霍奇丛）可以与标准表示对偶的陈类相对应。

我们考虑 $\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2$ 关于以下 GL_3 作用的商（栈）：

$$A.([f], [p]) := ([f(A^{-1}x), Ap]),$$

我们将 Q_4 记作 $[\mathbb{P}^{14}/\mathrm{GL}_3]$，上的万有四次曲线，或者等价地，记作 $[\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2/\mathrm{GL}_3]$ 的子叠，它参数化满足 $f(p) = 0$ 的对 $([f], [p])$。

现在，我们引入一个稍微一般化的 A_n-奇点定义。

DEFINITION 3.4. 如果存在一个同构，我们就称曲线 C 上的点 p 是一个 A_∞-奇点：

$$\widehat{\mathcal{O}}_{C,p} \simeq k[[x, y]]/(y^2).$$

此外，如果 p 是一个 A-奇点，且它是一个 A_n-奇点，其中 n 是正整数或 ∞，我们就称它为 A-奇点。

我们描述平面曲线上何时会出现 A_∞-奇点。

LEMMA 3.5. 平面曲线 f 上的点 p 是一个 A_∞-奇点，当且仅当 p 位于 f 的唯一不可约分支 g 上，其中 g 是一条光滑平面曲线的平方。

证明。 记 $k[x, y]/(f)$ 在点 p 处的局部化为 A，我们可以设该点对应的极大理想为 (x, y)。由于 A 是优良环，且完备化是非既约的，因此 A 也是非既约的。令 h 为 A 中的一个幂零元。由于完备化中的幂零理想的平方为零，我们得到 $h^2 = 0$。由于 $k[x, y]$ 是唯一分解整环，结论得证。 □

我们引入 A-奇点的原因是，它们可以通过平面曲线定义方程的导数得到明确描述。

LEMMA 3.6. 由 f 定义的平面曲线上的点 p 不是 A-奇点，当且仅当 f 的梯度和海森矩阵在该点 p 均不为零。

证明。如果 f 是一个 A-奇点，可以通过考察完备局部环来计算其海森矩阵和梯度（经过坐标变换），因此这只是一个简单的计算。

相反，如果梯度不为零，显然 p 是 $f=0$ 的光滑点。否则，若梯度为零但存在一个非零的二阶导数，我们可以使用魏尔斯特拉斯预备定理和配方过程（$\mathrm{char}(\kappa)\neq 2$）得到结论。

□

现在，我们引入周包络的一个较弱定义，该定义取决于我们为周群考虑的系数。

DEFINITION 3.7. 设 R 为一个环。若一个可表示真态射 $f\colon X\to Y$ 是 Y 的代数 Chow 包络，且系数取自 R，则称之为代数 Chow 包络，当态射 $f_*:\mathrm{CH}^*(X)\otimes_{\mathbb{Z}} R\to \mathrm{CH}^*(Y)\otimes_{\mathbb{Z}} R$ 是满射时成立。

REMARK 3.8. 回顾定义 3.4 中代数栈之间的 Chow 包络的定义，见 [DLPV21]。由于他们使用整数系数，[DLPV21]中的命题 3.5 表明，对于任意系数的选择，代数 Chow 包络都是代数 Chow 包络。

从现在起，系数取为 $\mathbb{Z}[1/6]$ 的代数 Chow 包络简称代数 Chow 包络。

现在考虑参数化满足以下条件的对 (f,p) 的子叠 $X\subset Q_4$：p 是奇异的，但并非 f 的 A-奇点。根据前一个引理，我们可以将 X 描述为 p 中 f 的二阶导数的消失轨迹。根据构造，X 不可能是 U 的整个补集的代数 Chow 包络，因为存在一些四次曲线 f，它们是光滑圆锥曲线的平方，却不出现在 X 中。因此，我们还将加入来自参数化圆锥曲线平方的轨迹的关系。

首先，我们想要研究适当态射 $X\to\mathbb{P}^{14}$ to 的纤维，以证明它是其像的代数 Chow 包络。我们需要弄清楚 $\mathbb{P}^2$ 中的约化四次曲线上会出现多少个奇点，以及它们是什么类型。

LEMMA 3.9. $\mathbb{P}^2$ 中的约化四次曲线上至多有 6 个奇点。如果恰有 5 个奇点，那么它是一个光滑圆锥曲线与一个可约约化圆锥曲线的并。如果恰有6个奇点，那么它是两个不含公共分支的可约约化圆锥曲线的并。

证明。假设四次曲线 $F:=\mathbb{V}(f)$ 不可约。那么它至多有 3 个奇点。事实上，假设 $p_1,\dots,p_4$ 是四个奇点。那么存在一条经过这四个点及 f 上另一个光滑点的圆锥曲线 Q。因此，$Q\cap F$ 的长度至少为 9，这与贝祖定理矛盾。

如果 F 是两条相交于四个点的光滑圆锥曲线之并，那么上述推理就不适用；这种情况确实可能发生。不过，若假设 F 至少有 5 个不同的奇点，则可知存在一条圆锥曲线 Q 位于 F内，因此 $F=Q\cup Q'$ 与 Q'中的另一条圆锥曲线相交，因为 F 是一条四次曲线。由此显然可知，奇点至多有 6 个；其余部分可通过逐一讨论各种情况来证明。

□

我们用 $Z^{[2]}_{\{2\}}$ 表示由光滑圆锥曲线的平方构成的四次曲线的子叠，并用 $Z^{[2]}_{\{2\}}$表示它在 $\mathbb{P}^{14}$中的闭包。我们沿用 [DLFV21]中的相同记号。

我们用 z_2 表示 $Z^{[2]}_{\{2\}}$ 在 $\mathsf{CH}^*_{\mathrm{GL}_3}(\mathbb{P}^{14})$ 中的基本类。我们还用 ρ 表示态射 $X \to \mathbb{P}^{14}$，并用 $i_T\colon T \hookrightarrow \mathbb{P}^{14}$ 表示 U 在 $\mathbb{P}^{14}$中的闭补集。现在可以陈述主要命题了。

PROPOSITION 3.10。 由$\mathrm{im}(i_{T,*})$ 生成的理想等于由$\mathrm{im}(\rho_*)$ 和 z_2生成的理想。

证明。 考虑 $\mathbb{P}^5$ 中圆锥曲线的空间，其上有由公式$A.f(x) := f(A^{-1}x)$定义的 GL_3 作用，以及等变态射 $\beta\colon \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^{14}$，该态射由对应关系 $f \mapsto f^2$定义。我们将证明

$$\rho \sqcup \beta : X \sqcup \mathbb{P}^5 \longrightarrow \mathbb{P}^{14}$$

是 T 的代数 Chow 包络，并且 β_* 的像的唯一生成元是基本类 $\beta_*(1)$，它与 z_2一致。

令 L/κ 为一个域扩张。首先，引理 3.9 告诉我们， $\mathbb{P}^2$ 中的约化四次曲线至多有 6 个奇点。因此，若 f 是 L的一个点，且属于 $\mathbb{P}^{14}$ 并表示一条约化四次曲线，那么纤维 $\rho^{-1}(f) \to$谱 L 是次数至多为 6 的有限平坦态射。由于我们在 Chow 环中将 2 和 3 取逆，只需考虑态射次数为 5 的情形，即f 是一个奇异圆锥曲线与一个光滑圆锥曲线的并。不过在这种情况下，我们有一个有理点，即映到构成该奇异圆锥曲线的两条直线交点的截面。这证明 ρ 是 T中约化曲线开子集的代数 Chow 包络。

考虑一个表示非约化四次曲线的 L-点 f of $\mathbb{P}^{14}$ 。那么 f 是以下情形之一：

(1) f 是二重直线与一条不包含该直线的约化圆锥曲线的乘积，(2) f 是三重直线与另一条直线的乘积，(3) f 是两条不同的二重直线的乘积，(4) f 是一条直线的四次幂，(5) f 是二重光滑圆锥曲线。

更详细的讨论请参见 [DLFV21] 的第 1 节。

我们将证明，在情形 (1) 至 (4) 中，纤维 $\rho^{-1}(f)$ 是 Spec L 的代数 Chow 包络。在情形 (1) 和 (3) 中，纤维分别是次数为 2 和 1 的有限纤维，因此是代数 Chow 包络。在情形 (2) 和 (4) 中，纤维是一条直线，它是一个射影丛，因此是代数 Chow 包络（我们无需担心非约化结构）。

显然，在情形 (5) 中，纤维 $\rho^{-1}(f)$ 为空，因为 f 的闭点只有 A_∞-奇点。因此，我们确实需要态射 β ，它是情形 (5) 的代数 Chow 包络。

还需证明 β_* 的像由 $\beta_*(1)$ 生成。这由以下事实可知：$\beta^*(h_{14}) = 2h_5$，其中 h_{14} （分别为 h_5）是 $\mathbb{P}^{14}$ （分别为 $\mathbb{P}^5$）的超平面截面。

□

我们通过显式计算所需的关系来结束本节，并最终得到 $\mathcal{M}_3 \setminus (\Delta_1 \cup \mathcal{H}_3)$ 的 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$周环。

类 z_2 的计算可以使用显式的局部化公式完成。事实上， [DLFV21], 的命题 4.6 中已经完成了精确计算，只是当时并未展示，因为这与他们的计算无关。

REMARK 3.11. 在作出识别 $h = -\lambda_1$ 后，局部化公式给出

$$z_2 = -1152\lambda_1^3\lambda_3^2 + 256\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3 + 5824\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 - 1152\lambda_2^3\lambda_3 - 10976\lambda_3^3.$$

为了计算由 $\mathrm{im}(\rho_*)$ 生成的理想，我们引入对Q_4 和 X的简化描述。

LEMMA 3.12. 万有四次曲线 Q_4 自然同构于商栈 $[\mathbb{P}^{13}/H]$，其中 H 是 GL_3 的一个抛物子群。

证明。 GL_3 的作用在 $\mathbb{P}^2$ 上是传递的，因此我们可以考虑 $\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2$ 中的子概形 $\mathbb{P}^{14} \times \{[0:0:1]\}$。若将 $\mathbb{P}^2$ 中点 $[0:0:1]$ 的稳定子记为 H，则有

$$[\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2/\mathrm{GL}_3] \simeq [\mathbb{P}^{14}/H].$$

注意到方程 $f([0:0:1]) = 0$ 在 $\mathbb{P}^{14}$ 中确定一个超平面，即可得出该结论。

□

REMARK 3.13. 群 H 可描述为 GL_3 中由如下形式矩阵组成的子群

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ f & g & h \end{pmatrix}.$$

注意到子矩阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

属于 GL_2,，事实上我们可以将 H 描述为 $(\mathrm{GL}_2 \times \mathbb{G}_\mathrm{m}) \ltimes \mathbb{G}_\mathrm{a}^2$。

这一描述实质上使我们的关注点集中在点 $[0:0:1]$。这意味着空间 $\mathbb{P}^{14}$ 的坐标可以与 f 在$[0:0:1]$ 处的泰勒展开系数对应起来，这对计算非常有用。引理 3.6 表明 X 可以在 $[\mathbb{P}^{14}/H]$ 中描述为余维为 6 的射影子丛。也就是说， X 是由以下方程描述的完全交

$$a_{00} = a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{11} = a_{02} = 0$$

其中，a_{ij} 是单项式 $x^i y^j z^{4-i-j}$的系数。容易验证，这组方程在 H的作用下保持不变。这为我们计算 X 在 $\mathrm{CH}^*_{\mathrm{GL}_3}(\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2) \simeq \mathrm{CH}^*_H(\mathbb{P}^{14})$ 中的基本类提供了一种简便方法。

由于 X 是一个射影子丛，因此很容易计算由 $\mathrm{im}(\rho_*)$ 生成的理想，其中 $\rho\colon X \to \mathbb{P}^{14}$ 是此前定义的 GL_3-等变射。我们可以重复 [FV16] 第5节中采用的完全相同的策略，来证明我们版本的定理5.5，如 [FV16] 所示。为方便记号，我们将 h_2 (分别将 h_{14}) 记为 $\mathbb{P}^2$(分别为 $\mathbb{P}^{14}$ 的超平面截面。

PROPOSITION 3.14. 存在唯一的多项式 $p(h_{14}, h_2)$，其系数属于 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{B}\mathrm{GL}_3)$，使得

– $p(h_{14}, h_2)$ 表示 X 在 $\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2$ 的 GL_3-等变周环中的基本类，– p 关于变量 h_{14} 的次数严格小于 15，– p 关于变量 h_2 的次数严格小于 3。

此外，如果 p 的形式为

$$p_2(h_{14})h_2^2 + p_1(h_{14})h_2 + p_0(h_{14})$$

对于 $p_0, p_1, p_2 \in$ 周$^*_{\mathrm{GL}_3}(\mathbb{P}^{14})$ 和次数 $p_i \leqslant 14$，我们有像(ρ_*) 等于由 p_0, p_1 和 p_2 在周$^*_{\mathrm{GL}_3}(\mathbb{P}^{14})$中生成的理想。

证明。命题的详细证明见 [FV16]的第5节。 □

在 $\mathbb{P}^{14} \times \mathbb{P}^2$ 的 GL_3-等变周环中， X 的基本类可通过简单计算得到，由此可得 $\widetilde{\mathcal{M}}_3 \setminus (\widetilde{\Delta}_1 \cup \widetilde{\mathcal{H}}_3)$ 的周环的描述。

Corollary 3.15. 我们有一个环同构

$$\mathrm{CH}^*\left(\widetilde{\mathcal{M}}_3 \setminus (\widetilde{\Delta}_1 \cup \widetilde{\mathcal{H}}_3)\right) \simeq \mathbb{Z}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]/(z_2, p_0, p_1, p_2)$$

其中，理想的生成元可描述如下：

- $p_2 = 12\lambda_1^4 - 44\lambda_1^2\lambda_2 + 92\lambda_1\lambda_3$,
- $p_1 = -14\lambda_1^3\lambda_2 + 2\lambda_1^2\lambda_3 + 48\lambda_1\lambda_2^2 - 96\lambda_2\lambda_3$,
- $p_0 = 15\lambda_1^3\lambda_3 - 52\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + 112\lambda_3^2$,
- $z_2 = -1152\lambda_1^3\lambda_3^2 + 256\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3 + 5824\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 - 1152\lambda_2^3\lambda_3 - 10976\lambda_3^3$.

Remark 3.16. 我们注意到， z_2 不属于由其他关系生成的理想，这意味着在计算中确实有必要引入非约化曲线的附加层。

4. Description of $\widetilde{\Delta}_1 \setminus \widetilde{\Delta}_{1,1}$

~ ~为描述 $\Delta_1 \setminus \Delta_{1,\ 1}$，我们回顾稳定曲线情形下的粘合态射：

$$\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{2,1} \longrightarrow \overline{\Delta}_1,$$

它在 $\Delta_{1,\ 1}$ 之外是一个同构。同一态射也可以在 A_r-稳定情形下定义，即

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{2,1} \longrightarrow \widetilde{\Delta}_1$$

~并且它在 $\Delta_{1,\ 1}$ 之外是一个同构。w

~ ~ ~因此，我们需要描述 $\Delta_{1,\ 1}$ 在该态射下的原像。记 $\Theta_1 \subset \mathcal{M}_{2,\ 1}$~ ~ ~为 $\Delta_1 \subset \mathcal{M}_2$ 在忘却截面的态射 $\mathcal{M}_{2,\ 1} \to \mathcal{M}_2$ 下的拉回。因此~可以轻易证明，$\Delta_{1,\ 1}$ 在映射

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{2,1} \longrightarrow \widetilde{\Delta}_1$$

~等于 $\mathcal{M}_{1,\ 1} \times \Theta_1$ 因此

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \times (\widetilde{\mathcal{M}}_{2,1} \setminus \widetilde{\Theta}_1) \simeq \widetilde{\Delta}_1 \setminus \widetilde{\Delta}_{1,1}.$$

~ ~ ~ ~要计算 $\Delta_1 \setminus \Delta_{1,\ 1}$ 的周环，还需描述栈 $\mathcal{M}_{2,\ 1} \setminus \Theta_1$。我们首先~ ~ ~ ~描述 $\mathcal{C}_2 \setminus \Theta_1$，即 $\mathcal{M}_2 \setminus \Delta_1$ 上的通用曲线。

Proposition 4.1. 我们有如下同构

$$\widetilde{\mathcal{C}}_2 \setminus \widetilde{\Theta}_1 \simeq [\widetilde{\mathbb{A}}(6) \setminus 0/B_2],$$

其中， B_2 是GL_2 中的下三角矩阵博雷尔子群，而 $\mathbb{A}(6)$ 是一个7维B_2-表示。

证明。 这是对 [DLPV21]中命题 3.1 的直接推广。我们去掉 0- 截面，因为我们不允许出现非约化曲线（定义1.8）中的条件 (b1)）。 □

表示 $\mathbb{A}(6)$ 可如下描述：考虑由坐标 (x_0, x_1) 表示的次数为 6 的二元形式所构成的 GL_2-表示 $\mathbb{A}(6)$，其作用由以下公式描述

$$A.f(x_0, x_1) := \det(A)^2 f(A^{-1}x),$$

并且还考虑一维 B_2-表示 $\mathbb{A}^1$，其作用由以下公式描述

$$A.s := \det(A)a_{22}^{-3}s$$

其中

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}.$$

我们将 $\widetilde{\mathbb{A}}(6)$ 定义为 $\mathbb{A}(6) \times \mathbb{A}^1$ 的不变子概形，它由满足方程 $f(0,1) = s^2$ 的对 (f, s) 确定。如果我们用 s 代替 x_1^6 在 f 中的系数作为坐标，显然， $\mathbb{A}(6)$ 同构于一个 7 维 B_2-表示。

前一个命题给出了 $\mathcal{M}_{2,1} \smallsetminus \Theta_1$ 的周环的如下描述。

COROLLARY 4.2. $\mathcal{M}_{2,1} \smallsetminus \Theta_1$ 是 B_2 对 $\widetilde{\mathbb{A}}(6)$ 的子表示之补集取商所得，其中该子表示由方程 $s = a_5 = a_4 = a_3 = 0$ 描述； a_i 是 $x_0^{6-i}x_1^i$ 的系数。

证明。 文献 [Per23a] 中的定理 2.5 给出，$\mathcal{M}_{2,1} \smallsetminus \Theta_1$ 同构于 $\mathcal{C}_2 \smallsetminus \Theta_1$ 的开子概形，它参数化满足以下条件的对 $(C/S, p)$： C 是一条亏格 2 的 A_5-稳定曲线，且 p 是一个截面，其在 S 上的几何纤维对 $n \leqslant 2$ 是 A_n-奇点。特别地，我们需要描述 $\mathbb{A}(6)$ 中参数化满足以下条件的对 (C, p) 的闭不变子概形 D_3： p 是带有 $n \geqslant 3$ 的 A_n-奇点。

为此，我们需要明确这个同构

$$\widetilde{\mathcal{C}}_2 \smallsetminus \widetilde{\Theta}_1 \simeq [\widetilde{\mathbb{A}}(6) \smallsetminus 0/B_2]$$

如 [DLPV21] 中的命题 3.1 所述。给定一对 $(f, s) \in \mathbb{A}(6) \smallsetminus 0$，我们构造曲线 C，令其为 $\mathrm{Spec}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{A})$，其中 $\mathcal{A}$ 是定义在 $\mathbb{P}^1$ 上的秩为二的有限局部自由代数，其定义为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)$。乘法由截面 $f\colon \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-6) \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ 诱导。通过将 s 视为 $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-3)|_\infty)$ 的一个截面，可以定义 C 的截面 p，其中 $\infty \in \mathbb{P}^1$。这意味着，当且仅当 ∞ 是截面 f 的一个重数至少为 4 的根时，点 p 对于 $n \geqslant 3$ 是一个 A_n-奇点。结论得证。 □

推论 4.2 给出了 $\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,1}$ 的周环描述。我们将 t 称为由 $t := c_1(p^*\mathcal{O}(p))$ 定义的 $\mathcal{M}_{1,1}$ 周环的 生成元，其中 $(C, p) \in \mathcal{M}_{1,1}$ 是任意对象。这是 $\mathcal{M}_{1,1}$ 的 ψ-类。

PROPOSITION 4.3. 我们有以下同构

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\Delta}_1 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_{1,1}) \simeq \mathbb{Z}[1/6, t_0, t_1, t]/(f)$$

其中 $f \in \mathbb{Z}[1/6, t_0, t_1]$ 是多项式：

$$f = 2t_1(t_0 + t_1)(t_0 - 2t_1)(t_0 - 3t_1).$$

证明。 由于 $\mathcal{M}_{1,\ 1}$ 是 $\mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$上的向量丛，该态射

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_{2,1} \smallsetminus \widetilde{\Theta}_1) \otimes \mathrm{CH}^*(\mathcal{B}\mathbb{G}_{\mathrm{m}}) \to \mathrm{CH}^*(\widetilde{\Delta}_1 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_{1,1})$$

是一个同构。因此，只需描述 $\mathcal{M}_{2,\ 1} \smallsetminus \Theta_1$ 的周环。根据前面的推论，若 T_2 是 B_2 的极大环面，且 t_0，t_1 是 T_2 的特征群的两个生成元，则有

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_{2,1} \smallsetminus \widetilde{\Theta}_1) \simeq \mathbb{Z}[1/6, t_0, t_1]/(f)$$

其中 f 是由坐标 s，a_5，a_4，a_3 在$\widetilde{\mathbb{A}}$(6) 中消失所对应的基本类。再次使用了 [MRV06]的命题 2.3。在 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}^2$-等变情形下，这一计算很直接，并得出所需结果。

□

现在，我们利用 [DLV21] 附录 A 中的结果，描述 $\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1}$ 在 $\mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1}$ 中正规丛的第一陈类。

PROPOSITION 4.4. 闭浸入 $\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1} \hookrightarrow \mathcal{M}_3 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1}$ 是正则的，其法丛的第一陈类等于 $t + t_1$。此外，在 $\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1}$ 的周环中，我们有以下等式：

(1) $\lambda_1 = -t - t_0 - t_1$,
(2) $\lambda_2 = t_0 t_1 + t(t_0 + t_1)$,
(3) $\lambda_3 = -t_0 t_1 t$, *(4)* $[H]|_{\widetilde{\Delta}_1 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_{1,\ 1}} = t_0 - 2t_1$。

证明。 该闭浸入是正则的，因为这两个叠都是光滑的。根据 [DLV21]，的附录 A，我们知道法丛是一个秩为 2 的向量丛 N 的行列式，与一个 2-扭线丛张量积而成；在周环中将 2 求逆后，该线丛的第一陈类为零。此外，我们可以如下描述 N。设 $(C/S,\ p)$ 是$(\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1})(S)$ 的一个对象，其中 p 是截面，其在 S 上的几何纤维是分离节点。那么，N 是 C 中 p 的法丛，其秩为 2。若将 C 分解为一条椭圆曲线 $(E,\ e) \in \mathcal{M}_{1,\ 1}$与一条带 1 个标记点的亏格 2 曲线 $(C_0,\ p_0) \in \mathcal{M}_{2,\ 1} \smallsetminus ThTilde_1$ 的并，显然有 $N = N_{e/E} \oplus N_{p_0/C_0}$。因此，只需分别计算这两个线丛。

线丛 $N_{e/E}$ 的第一陈类恰好是 ψ的类 $\mathcal{M}_{1,\ 1}$，这是根据定义得出的。 t 由类似地，线丛 N_{p_0/C_0} 是 ψ的类 $\mathcal{M}_{2,\ 1}$。利用 $\mathcal{C}_2$ 作为商栈的描述（见推论 4.2的证明），可以证明

– $N_{p_0/C_0} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^\vee|_{p_\infty} = E_1$，其中 E_1 是 B_2 的特征，其陈类为 t_1；– $\pi_* \omega_{C_0} = E_0^\vee \oplus E_1^\vee$，其中 E_0 是 B_2 的特征，其陈类为 t_0。

现在我们证明超椭圆轨迹的基本类的描述。我们有，

$\mathcal{H}_3$ 与 $\Delta_1 \smallsetminus \Delta_{1,\ 1}$ 在这样的轨迹中横截相交：$\mathcal{M}_{2,\ 1}$ 的截面是亏格 2 曲线在（唯一）对合下的魏尔斯特拉斯点。将 $\mathcal{C}_2 \smallsetminus \Theta_1$ 描述为商栈（见推论 4.2的证明），可知$[H]|_{\widetilde{\Delta}_1 \smallsetminus \widetilde{\Delta}_{1,\ 1}}$等于消失轨迹$s = 0$ 在 $\mathbb{A}$(6)中的类；由于我们明确知道 B_2的作用，因此很容易计算。剩下要做的只有描述 λ-类。它们可由以下引理得出。

□

LEMMA 4.5. 设 C/S 是基概形 S 上的一条 A_r-稳定曲线，且 p 是一个分离节点（即一个截面，其在 S 上的几何纤维均为分离节点）。考虑 $b\colon\ C \to C$ 对 C 的爆破

在 p 中，并将复合映射 $\pi \circ b$ 记为 $\widetilde{\pi}$。于是我们有

$$\pi_* \omega_{C/S} \simeq \widetilde{\pi}_* \omega_{\widetilde{C}/S}.$$

证明。记 D 为导子理想的对偶。由诺特公式可知 $b^* \omega_{C/S} = \omega_{\widetilde{C}/S}(D)$，因此若将正合列

$$0 \to \mathcal{O}_C \to f_* \mathcal{O}_{\widetilde{C}} \to Q \to 0$$

与 $\omega_{C/S}$ 张量相乘，我们得到以下单射态射

$$\omega_{C/S} \hookrightarrow f_* \omega_{\widetilde{C}/S}(D).$$

照例，$\mathcal{M}_g^r$ 的光滑性意味着我们可以应用格劳尔特定理，证明线丛 $\omega_{\widetilde{C}}$ 和 $\omega_{\widetilde{C}}(D)$ 在 S 上满足基变换。现在考虑整体截面上的态射

$$\pi_* \omega_{C/S} \hookrightarrow \widetilde{\pi}_* \omega_{\widetilde{C}/S}(D),$$

由于它们都满足基变换，我们可以通过限制到 S的几何点来证明满射性。代数闭域上的陈述已在 [Per23b]的引理 3.38 中得到证明。

最后，给定态射

$$\omega_{\widetilde{C}} \hookrightarrow \omega_{\widetilde{C}}(D)$$

我们考虑整体截面

$$\widetilde{\pi}_* \omega_{\widetilde{C}/S} \hookrightarrow \widetilde{\pi}_* \omega_{\widetilde{C}/S}(D)$$

再次，通过限制到 S 上的几何纤维，可以推出满射性。 □

5. Description of $\widetilde{\Delta}_{1,1} \setminus \widetilde{\Delta}_{1,1,1}$

考虑以下态射

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,2} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \longrightarrow \widetilde{\Delta}_{1,1}$$

由如下对应关系定义

$$(C, p_1, p_2), (E_1, e_1), (E_2, e_2) \mapsto E_1 \cup_{e_1 \equiv p_1} C \cup_{p_2 \equiv e_2} E_2$$

其中，杯积符号表示利用指定的两个点将两条曲线粘合起来。该运算显然不满足交换律。

经由该态射的 $\Delta_{1,1,1}$ 的原像是乘积 $\mathcal{M}_{1,1} \times \mathcal{M}_{1,1} \times \mathcal{M}_{1,1}$，其中 $\mathcal{M}_{1,1} \subset \mathcal{M}_{1,2}$ 是自然函子 $\mathcal{M}_{1,2} \to \mathcal{M}_{1,1}$的万有截面。

LEMMA 5.1. 该态射

$$\pi_2 : (\widetilde{\mathcal{M}}_{1,2} \setminus \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}) \times \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \times \widetilde{\mathcal{M}}_{1,1} \longrightarrow \widetilde{\Delta}_{1,1} \setminus \widetilde{\Delta}_{1,1,1}$$

如上所述，这是一个 C_2-挠子。

证明。栈 $\Delta_{1,1} \setminus \Delta_{1,1,1}$ 参数化了对 (C, E)，其中 C 是一个亏格 3 的 A_7-稳定曲线，而 E 是 C 上的一个次数 2 的有限 étale 除子，其支撑是两个分离节点的不交并。 [Per23a] 中的命题 3.13 和命题 3.16 告诉我们，(C, E)完全由 C 在 E 中的部分正规化 $b\colon \widetilde{C} \to C$ 以及纤维 $b^{-1}(E)$确定。由此

很容易得出，由对合诱导的 C_2 在 $(\mathcal{M}_{1,\,2}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,\,1})\times\mathcal{M}_{1,\,1}\times\mathcal{M}_{1,\,1}$ 上的作用

$$\Big((C,p_1,p_2),(E_1,e_1),(E_2,e_2)\Big)\mapsto\Big((C,p_2,p_1),(E_2,e_2),(E_1,e_1)\Big)$$

在态射 π_2 上诱导出一个 C_2-扭子结构。 □

记 $\mathcal{C}_{1,\,1}$ 为 $\mathcal{M}_{1,\,1}$ 上的通用曲线。它自然带有一个万有截面 $\mathcal{M}_{1,\,1}\hookrightarrow\mathcal{C}_{1,\,1}$。

LEMMA 5.2. 我们有如下同构

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{1,2}\smallsetminus\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}\simeq\widetilde{\mathcal{C}}_{1,1}\smallsetminus\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}$$

因此我们得到如下环同构

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_{1,2}\smallsetminus\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1})\simeq\mathbb{Z}[1/6,t].$$

证明。 该同构是 [Per23a] 中定理 2.5 的推论。Chow 环的计算见 $\mathcal{C}_{1,\,1}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,\,1}$ 中的引理 3.2 [DLPV21]。 □

REMARK 5.3. 需要注意的是，$\mathcal{M}_{1,\,2}$ 至多有 A_3 个奇点，而 $\mathcal{C}_{1,\,1}$ 至多有个尖点，因为它是 $\mathcal{M}_{1,\,1}$ 的通用曲线。

COROLLARY 5.4. 代数栈 $\Delta_{1,1}\smallsetminus\Delta_{1,1,1}$ 是光滑的。

引理2.5 蕴含

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\Delta}_{1,1}\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,1,1})\simeq\mathbb{Z}[1/6,t,t_1,t_2]^{\mathrm{inv}},$$

其中， C_2 在对象上的作用由以下对应关系定义

$$\Big((C,p_1,p_2),(E_1,e_1),(E_2,e_2)\Big)\mapsto\Big((C,p_2,p_1),(E_2,e_2),(E_1,e_1)\Big).$$

计算表明，对合在乘积的周环上的作用如下

$$(t,t_1,t_2)\mapsto(t,t_2,t_1)$$

因此，我们得到了所需的描述。

PROPOSITION 5.5. 在上述情形下，我们有如下同构 :

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\Delta}_{1,1}\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,1,1})\simeq\mathbb{Z}[1/6,t,c_1,c_2]$$

其中 $c_1:=t_1+t_2$ 以及 $c_2:=t_1t_2$。

接下来要描述闭浸入 $\Delta_{1,1}\smallsetminus\Delta_{1,1,1}\hookrightarrow\mathcal{M}_3\smallsetminus\Delta_{1,1,1}$ 的法丛以及其他类。与往常一样，我们用 δ_1 表示 Δ_1 在 $\mathcal{M}_3$中的基本类。

PROPOSITION 5.6. 我们在 $\Delta_{1,1}\smallsetminus\Delta_{1,1}$ 的周环中有以下等式 ,1:

(1) $\lambda_1=-t-c_1$, *(2)* $\lambda_2=c_2+tc_1$, *(3)* $\lambda_3=-tc_2$, *(4)* $[H]|_{\widetilde{\Delta}_{1,\,1\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,\,1,\,1}}}=-3t$, *(5)* $\delta_1|_{\widetilde{\Delta}_{1,\,1\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,\,1,\,1}}}=2t+c_1$。

此外，闭浸入 $\widetilde{\Delta}_{1,\ 1}\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,\ 1,\ 1}\hookrightarrow\widetilde{\mathcal{M}}_3\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,\ 1,\ 1}$ 的法丛的第二陈类等于 $c_2+tc_1+t^2$。

证明。 对 λ类的限制可利用引理 4.5 计算。公式(5)的证明与计算 $\Delta_1\smallsetminus\Delta_{1,\ 1}$ 在 $\mathcal{M}_3\smallsetminus\Delta_{1,1}$ 中的法丛完全相同。唯一需要指出的是，$\mathcal{M}_{1,2}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,1}$ 的两个 ψ类与 $\widetilde{\mathrm{CH}}^*(\mathcal{M}_{1,2}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,1})$ 的生成元 t 相同。

至于超椭圆轨迹的基本类，显然它与 $\mathcal{M}_{1,2}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,1}$ 中相应轨迹的基本类相同；该轨迹参数化的是亏格 1 的带两个标记点的稳定曲线，其中两个截面都是某个对合的不动点。这个计算可利用对 $\mathcal{M}_{1,2}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,1}$ 作为 $\mathcal{C}_{1,1}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,1}$的描述来完成，特别是参照 DLPV 的引理 3.2 [。21]事实上，他们证明了 $\mathcal{C}_{1,1}\smallsetminus\mathcal{M}_{1,1}$ 是一个 W 维数为 4 的$\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$表示的 V 不变子概形，其作用可描述为

$$t.(x,y,\alpha,\beta)=(t^{-2}x,t^{-3}y,t^{-4}\alpha,t^{-6}\beta)$$

对于每个 $t\in\mathbb{G}_{\mathrm{m}}$ 和 $(x.y.\alpha,\ \beta)\in V$。具体而言， W 是 V 中由方程 $y^2=x^3+\alpha x+\beta$ 定义的超曲面，这恰好是一个在无穷远处有拐点的椭圆曲线的魏尔斯特拉斯形式的非齐次化。直接计算可得，超椭圆轨迹由方程 $y=0$ 定义。

最后，根据 [DLV21] 附录 A 中建立的理论，闭浸入的法丛可表示为以下直和

$$(N_{p_1|C}\otimes N_{e_1|E_1})\oplus(N_{p_2|C}\otimes N_{e_2|E_2})$$

对于 $\widetilde{\Delta}_{1,\ 1}\smallsetminus\widetilde{\Delta}_{1,\ 1,\ 1}$ 中的每个元素 $[(C,\ p_1,\ p_2)、(E_1,\ e_1)、(E_2,\ e_2)]$，利用陈类进行直接计算即可得出该结果。 □

6. $\widetilde{\Delta}_{1,\ 1,\ 1}$ 的描述

最后，为了描述最后的分层，我们使用上一段中引入的态射来定义

$$c_6:\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}\times\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}\times\widetilde{\mathcal{M}}_{1,1}\to\widetilde{\Delta}_{1,1,1}$$

其描述如下：取三条椭圆曲线（可能是奇异的）$(E_1,\ e_1)、(E_2,\ e_2)、(E_3,\ e_3)$，并按顺序 $e_1\equiv 0、e_2\equiv 1、e_3\equiv\infty$ 将它们与一条带有三个互异点 $(\mathbb{P}^1,\ 0,\ 1,\ \infty)$ 的射影直线粘接。我们用 S_3 表示一个三元素集合的置换群。

LEMMA 6.1. 态射 c_6 是一个 S_3-主齐性空间。

证明。 引理5.1 的证明可以直接改编为这一命题的证明。 □

前一个引理意味着我们有 $\widetilde{\mathrm{CH}}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_{1\ 1,}^{\times 3}\ )$ 上的 S_3 作用。因此显然

$$\widetilde{\mathrm{CH}}^*(\widetilde{\Delta}_{1,1,1})=\mathbb{Z}[1/6,c_1,c_2,c_3]$$

其中 c_i 是变量 $t_1,\ t_2,\ t_3$ 的第 i 个对称多项式，它们是各因子 Chow 环的生成元。。

PROPOSITION 6.2. 我们有如下关于 $\Delta_{1,1,1}$ 的周环中的等式：

(1) $\lambda_1=-c_1$,

(2) $\lambda_2 = c_2$, *(3)* $\lambda_3 = -c_3$, *(4)* $[H]|_{\widetilde{\Delta}_{1,\,1,\,1}} = 0$, *(5)* $\delta_1|_{\widetilde{\Delta}_{1,\,1,\,1}} = c_1$, *(6)* $\delta_{1,\,1}|_{\widetilde{\Delta}_{1,\,1,\,1}} = c_2$。

此外，闭浸入 $\Delta_{1,1,1} \hookrightarrow \mathcal{M}_3$ 的法丛的第三陈类等于 c_3。

证明。 我们可以利用引理4.5 来得到 λ-类的描述。为了计算 δ_1 和 $\delta_{1,1}$以及法丛的第三陈类，可以再次利用[DLV21] 附录 A 中的结果，并调整命题 5.6的证明。注意，在这种情况下

$$N_{\widetilde{\Delta}_{1,1,1}|\widetilde{\mathcal{M}}_3} = N_{e_1|E_1} \oplus N_{e_2|E_2} \oplus N_{e_3|E_3}.$$

最后，我们知道不存在具有三个分离节点的亏格 3 双曲曲线。事实上，任何对合在射影直线上都限制为恒等映射，因为它固定三个点。但这样一来，其不动点轨迹就不是有限的，因此它不是双曲的。 □

7. 粘合过程与 $\mathcal{M}_3$的周环

在本章的最后一节中，我们将说明如何显式计算 $\mathcal{M}_3$的周环。如何描述引理1.11中出现的纤维积，事先并不明显。

令 $\mathcal{U}$， $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{X}$ 如引理1.11 中所述，并记 $i\colon \mathcal{Z} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 为闭浸入，记$j : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{Z}$ 为开浸入。下面引入一些记号。

- $\mathsf{CH}^*(\mathcal{U})$由元素 $x'_1, \dots, x'_r$ 生成，令 $x_1, \dots, x_r$ 为 $x'_1, \dots, x'_r$在$\mathsf{CH}^*(\mathcal{X})$中的一些提升；我们将态射记为 η

  $$\mathbb{Z}[1/6, X_1, \dots, X_r, Z] \longrightarrow \mathrm{CH}^*(\mathcal{X})$$

  其中，对于 $h = 1, \dots, r$， X_h映射到 x_h；而 Z映射到 $[\mathcal{Z}]$，即 $\mathcal{Z}$的基本类；我们将复合映射记为 $\eta_{\mathcal{U}}$

  $$\mathbb{Z}[1/6, X_1, \dots, X_r] \hookrightarrow \mathbb{Z}[1/6, X_1, \dots, X_r, Z] \longrightarrow \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}) \to \mathrm{CH}^*(\mathcal{U}).$$

  此外，我们记 $p'_1(X) \dots, p'_n(X)$为$\ker(\eta_{\mathcal{U}})$的一组生成元，其中$X := (X_1, \dots, X_r)$。

- $\mathsf{CH}^*(\mathcal{Z})$ 由元素 $y_1, \dots, y_s \in \mathsf{CH}^*(\mathcal{Z})$ 生成；我们将态射记为 a

  $$\mathbb{Z}[1/6, Y_1, \dots, Y_s] \longrightarrow \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})$$

  其中，对 $h = 1, \dots, s$， Y_h 映射到 y_h。此外，我们用 $q'_1(Y) \dots, q'_m(Y)$ 表示 $\ker(a)$ 的一组生成元，其中 $Y := (Y_1, \dots, Y_s)$。

由于 a 是满射，存在一个态射

$$\eta_{\mathcal{Z}} : \mathbb{Z}[1/6, X_1, \dots, X_r, Z] \longrightarrow \mathbb{Z}[1/6, Y_1, \dots, Y_r]$$

它是态射 i^* 的一个提升，也就是说，它使下图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[1/6, X_1, \ldots, X_r, Z] & \overset{\eta_{\mathcal{Z}}}{\dashrightarrow} & \mathbb{Z}[1/6, Y_1, \ldots, Y_s] \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\quad i^* \quad} & \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z}) \end{array}$$

可交换。

引理1.11 中的图表具有笛卡尔性，由此得到以下引理。

LEMMA 7.1. 在上述情形下，假设态射 $\eta_{\mathcal{Z}}$ 是满射。那么 η 也是满射。

证明。 这是因为 $j^* \circ \eta$ 总是满射，而假设还意味着 $i^* \circ \eta$也是满射。

□

在该引理的假设下，我们还可以明确描述关系，即 η的核。首先，记 $q_h(X, Z)$ 为 $q'_h(Y)$ 经由态射 $\eta_{\mathcal{Z}}$（对 $h = 1, \ldots, m$）的某些提升。直接计算可得，对 $h = 1, \ldots, m$，有 $Zq_h(X, Z) \in \ker \eta$。由此得到第一组关系。我们将这类关系称为闭分层关系的提升。

另一组重要的关系来自 $\eta_{\mathcal{Z}}$的核。事实上，若 $v \in \ker \eta_{\mathcal{Z}}$，则简单计算可得 $\eta(Zv) = 0$。因此，若 $v_1, \ldots, v_l$ 是 $\ker \eta_{\mathcal{Z}}$的生成元，则对 $h = 1, \ldots, l$，有 $Zv_h \in \ker \eta$。

最后一组关系是来自 $\mathcal{U}$（即开分层）的关系。一般来说，元素 $p_h(X)$ 并不是一个关系，因为它在 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})$ 上的限制可能不为零。不过，我们可以采用以下步骤，找到 p_h 的一个修正，使其限制到开分层上仍为零，且属于 η 的核。回想一下，我们有一个良定义态射

$$i^* : \mathrm{CH}^*(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})/(c_{\mathrm{top}}(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}))$$

这意味着 $\eta_{\mathcal{Z}}(p_h) \in (q'_1, \ldots\ldots, q'_m, c_{\mathrm{top}}(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}))$。我们选取一个元素 $g'_h \in \mathbb{Z}[1/6, Y_1, \ldots, Y_s]$，使得

$$\eta_{\mathcal{Z}}(p_h) + g'_h c_{\mathrm{top}}(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}) \in (q'_1, \ldots, q'_m)$$

并考虑通过态射 $\eta_{\mathcal{Z}}$ 将 g'_h 提升得到的 g_h。直接计算可得，对于每个 $h = 1, \ldots\ldots, n$，都有 $p_h + Zg_h \in \ker \eta$。

PROPOSITION 7.2. 在上述情形中，$\ker \eta$ 由元素 Zq_1、……、Zq_m、Zv_1、……、Zv_l、$p_1 + Zg_1$、……、$p_n + Zg_n$生成。

证明。 考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}[1/6, X_1, \ldots, X_r, Z] & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{CH}^*(\mathcal{X}) & \xrightarrow{\quad j^* \quad} & \mathrm{CH}^*(\mathcal{U}) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_{\mathcal{Z}}} & & \downarrow{\scriptstyle i^*} & & \downarrow{\scriptstyle i^*} \\ \mathbb{Z}[1/6, Y_1, \ldots, Y_s] & \xrightarrow{a} & \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z}) & \xrightarrow{b} & \mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})/(c_{\mathrm{top}}(N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}})) \end{array}$$

其中 b 是商态射。回想一下，右侧的方块是笛卡尔的。注意，由于 $\eta_{\mathcal{Z}}$ 是满射，所有其他态射也都是满射。

我们用 c表示法丛 $N_{\mathcal{Z}|\mathcal{X}}$的顶陈类。令 $p(X) + Zg(X, Z)$ 为 $\ker \eta$ 中的一个元素。因为我们有

$$(j^* \circ \eta)(p(X) + Zg(X, Z)) = 0,$$

因此 $p \in (p'_1, \ldots, p'_n)$，这意味着存在 $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}[1/6, X_1, \ldots, X_r]$ 使得

$$p = \sum_{h=1}^{n} b_h p_h.$$

现在，我们将该元素拉回到 $\mathcal{Z}$，于是得到

$$(i^* \circ \eta)(p + Zg) = a\Big(\sum_{h=1}^{n} \eta_{\mathcal{Z}}(b_h)\eta_{\mathcal{Z}}(p_h) + c\eta_{\mathcal{Z}}(g)\Big)$$

或者等价地

$$\sum_{h=1}^{n} \eta_{\mathcal{Z}}(b_h)\eta_{\mathcal{Z}}(p_h) + c\eta_{\mathcal{Z}}(g) \in (q'_1, \ldots, q'_m).$$

根据构造，$\eta_{\mathcal{Z}}(p_h) = -g'_h c + (q'_1, \ldots, q'_m)$，且 $\eta_{\mathcal{Z}}(g_h) = g'_h$，因此我们得到 t

$$c\eta_{\mathcal{Z}}\Big(g - \sum_{h=1}^{n} b_h g_h\Big) \in (q'_1, \ldots, q'_m).$$

由于 c 是 $\mathrm{CH}^*(\mathcal{Z})$ 中的非零因子，我们有

$$\eta_{\mathcal{Z}}\Big(g - \sum_{h=1}^{n} b_h g_h\Big) \in (q'_1, \ldots, q'_m)$$

或者等价地

$$g = \sum_{h=1}^{n} b_h g_h + t$$

其中 $t \in \ker(a \circ \eta_{\mathcal{Z}})$。因此我们有

$$p + Zg = \sum_{h=1}^{n} b_h(p_h + Zg_h) + Zt$$

与 $t \in \ker(a \circ \eta_{\mathcal{Z}})$。容易验证，$\ker(a \circ \eta_{\mathcal{Z}})$ 由 $(v_1, \ldots, v_l, q_1, \ldots, q_m)$ 生成。 □

现在，我们概述如何将这一过程应用于前两个分层，即 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$ 和 $\mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{H}_3 \cup \Delta_1)$，从而得到 $\mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$ 的周环。就计算而言，这是最复杂的部分。其余的粘合过程留给感兴趣的读者，因为它们遵循完全相同的思路。

在我们的情形中，有 $\mathcal{U} := \mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{H}_3 \cup \Delta_1)$ 和 $\mathcal{Z} := \mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$。根据推论 2.14 和推论 3.15，我们已知它们的周环的描述。下面来看所需的生成元。$\mathcal{U}$ 的周环由以下元素生成：λ_1、λ_2 和 λ_3。$\mathcal{Z}$ 的周环由以下元素生成：λ_1、λ_2 和 ξ_1。因此，态射

$$\eta_{\mathcal{Z}} : \mathbb{Z}[1/6, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, H] \longrightarrow \mathbb{Z}[1/6, \lambda_1, \lambda_2, \xi_1]$$

是满射，因为 $\eta_{\mathcal{Z}}(H) = (2\xi_1 - \lambda_1)/3$。我们还可以描述 $\ker \eta_{\mathcal{Z}}$，它由对 λ_3 在 $\mathcal{Z}$ 中的描述的任意提升生成（见引理 2.13）。这给出了我们的第一个关系（将其乘以 H，即超椭圆轨迹的基本类）。此外，我们可以考虑 $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$ 中的关系理想，它由关系 c_9、D_1 以及 D_2 我们在推论 2.14中描述的关系生成。因此，我们还有另外三个关系。

最后，我们考虑推论3.15中的四个关系，并计算它们在$\eta_{\mathcal{Z}}$下的像。最困难的部分是用的生成元来描述这些元素

~ ~的关系理想以及闭浸入的法丛的顶陈类。我们不详细讨论这些计算，但主要思路是注意到，我们需要描述的多项式中的每个单项式都可以用这些关系和顶陈类来表示。

~我们陈述定理，以此给出 $\mathcal{M}_3$ 的周环描述。我们在备注7.4中写出明确的关系。

Theorem 7.3. 我们有如下同构

$$\mathrm{CH}^*(\widetilde{\mathcal{M}}_3) \simeq \mathbb{Z}[1/6, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, H, \delta_1, \delta_{1,1}, \delta_{1,1,1}]/I$$

其中 I 由以下关系生成：

~ ~ ~ ~– k_h，它来自 *ker* i_H^* 的生成元，其中 i_H*:* $\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1 \hookrightarrow \mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$*;* ~ ~– k_1*(1)* 和 k_1*(2)*，它们来自 *ker* i_1^* 的两个生成元，其中 i_1 *:* $\Delta_1 \setminus \Delta_{1,1} \hookrightarrow$ ~ ~ $\mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$*,1; –* k_1*,1(1),* k_1*,1(2)* 和 k_1*,1(3)*，它们来自 *ker* $i_{1,1}^*$*,1* 的三个生成元，其中 $i_{1,1}$ *:* ~ ~ ~ ~$\Delta_{1,1} \setminus \Delta_{1,1}$*,1,*$_1 \hookrightarrow \mathcal{M}_3 \setminus \Delta_1$*,1,1; –* k_1*,1,1(1),* k_1*,1,1(2),* k_1*,1,1(3)* 和 k_1*,1,1(4)*，它们来自 *ker* $i_{1,1}^*$*,1,1* ~ ~ 的四个生成元，其中 $i_{1,1,1}$ *:* $\Delta_{1,1,1} \hookrightarrow \mathcal{M}_3$*;* – m*(1),* m*(2),* m*(3)* 和 r，它们是开~ ~ ~层 $\mathcal{M}_3 \setminus (\mathcal{H}_3 \cup \Delta_1)$ 上关系生成元的提升；– h*(1),* h*(2)* 和 h*(3)*，它们是层 ~ ~$\mathcal{H}_3 \setminus \Delta_1$ 上关系生成元的提升；~ ~– d_1*(1)*，它是层 $\Delta_1 \setminus \Delta_{1,1}$*,1* 上关系生成元的提升。

此外，$h(2)$、$h(3)$ 和 $d_1(1)$ 都属于由其他关系生成的理想 *ions.*

Remark 7.4. 我们明确写出生成该理想所需的关系。

$$\begin{aligned} k_h = &\frac{1}{8}\lambda_1^3 H + \frac{1}{8}\lambda_1^2 H^2 + \frac{1}{4}\lambda_1^2 H\delta_1 - \frac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 H - \frac{1}{8}\lambda_1 H^3 + \frac{7}{8}\lambda_1 H\delta_1^2 + \\ &+ \frac{3}{2}\lambda_1\delta_1\delta_{1,1} - \frac{1}{2}\lambda_2 H^2 + \lambda_3 H - \frac{1}{8}H^4 - \frac{1}{4}H^3\delta_1 + \frac{1}{8}H^2\delta_1^2 + \frac{3}{4}H\delta_1^3 + \\ &+ \frac{3}{2}\delta_1^2\delta_{1,1} \end{aligned}$$

$$k_1(1) = \frac{1}{4}\lambda_1^2\delta_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 H\delta_1 + 2\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_1 + \frac{1}{4}H^2\delta_1 + H\delta_1^2 + \frac{7}{4}\delta_1^3 - \delta_1\delta_{1,1}$$

$$\begin{aligned} k_1(2) = &\frac{1}{4}\lambda_1^3\delta_1 + \frac{1}{2}\lambda_1^2 H\delta_1 + \frac{5}{4}\lambda_1^2\delta_1^2 + \frac{1}{4}\lambda_1 H^2\delta_1 + \frac{3}{2}\lambda_1 H\delta_1^2 + \frac{7}{4}\lambda_1\delta_1^3 + \\ &+ \lambda_1\delta_1\delta_{1,1} - \lambda_1\delta_{1,1,1} + \lambda_3\delta_1 + \frac{1}{4}H^2\delta_1^2 + H\delta_1^3 + \frac{3}{4}\delta_1^4 + \delta_1^2\delta_{1,1} \end{aligned}$$

$$k_{1,1}(1) = -\lambda_1^2\delta_{1,1} - 2\lambda_1\delta_1\delta_{1,1} - \lambda_2\delta_{1,1} - \delta_1^2\delta_{1,1} + \delta_{1,1}^2$$

$$k_{1,1}(2) = 3\lambda_1\delta_{1,1} + H\delta_{1,1} + 3\delta_1\delta_{1,1}$$

$$k_{1,1}(3) = 2\lambda_1^3\delta_{1,1} + 5\lambda_1^2\delta_1\delta_{1,1} + \lambda_1\lambda_2\delta_{1,1} + 4\lambda_1\delta_1^2\delta_{1,1} + \lambda_2\delta_1\delta_{1,1} + \\ + \lambda_2\delta_{1,1,1} + \lambda_3\delta_{1,1} + \delta_1^3\delta_{1,1}$$

$$k_{1,1,1}(1) = \lambda_1\delta_{1,1,1} + \delta_1\delta_{1,1,1}$$

$$k_{1,1,1}(2) = \lambda_2\delta_{1,1,1} - \delta_{1,1}\delta_{1,1,1}$$

$$k_{1,1,1}(3) = \lambda_3\delta_{1,1,1} + \delta_{1,1,1}^2$$

$$k_{1,1,1}(4) = H\delta_{1,1,1}$$

$$m(1) = 12\lambda_1^4 - \frac{7}{3}\lambda_1^3 H + 27\lambda_1^3\delta_1 - 44\lambda_1^2\lambda_2 - \frac{706}{9}\lambda_1^2 H^2 - \frac{65}{2}\lambda_1^2 H\delta_1 + \\ + 84\lambda_1^2\delta_1^2 - 32\lambda_1^2\delta_{1,1} - 38\lambda_1\lambda_2 H + 92\lambda_1\lambda_3 - \frac{715}{9}\lambda_1 H^3 - \\ - \frac{1340}{9}\lambda_1 H^2\delta_1 - 25\lambda_1 H\delta_1^2 + 69\lambda_1\delta_1^3 - 130\lambda_1\delta_1\delta_{1,1} + 92\lambda_1\delta_{1,1,1} + \\ + 6\lambda_2 H^2 - \frac{46}{3}H^4 - \frac{1205}{18}H^3\delta_1 - \frac{562}{9}H^2\delta_1^2 - \frac{101}{6}H\delta_1^3 - 54\delta_1^2\delta_{1,1}$$

$$m(2) = -\frac{55}{18}\lambda_1^4 H + \frac{9}{2}\lambda_1^4\delta_1 - 14\lambda_1^3\lambda_2 - \frac{31}{3}\lambda_1^3 H^2 - \frac{58}{9}\lambda_1^3 H\delta_1 + 69\lambda_1^3\delta_1^2 - \\ - \frac{272}{3}\lambda_1^3\delta_{1,1} - \frac{173}{9}\lambda_1^2\lambda_2 H + 2\lambda_1^2\lambda_3 - \frac{137}{18}\lambda_1^2 H^3 - \frac{167}{4}\lambda_1^2 H^2\delta_1 + \\ + \frac{1831}{36}\lambda_1^2 H\delta_1^2 + \frac{459}{2}\lambda_1^2\delta_1^3 - \frac{461}{3}\lambda_1^2\delta_1\delta_{1,1} + 2\lambda_1^2\delta_{1,1,1} + 48\lambda_1\lambda_2^2 + \\ + \frac{1}{9}\lambda_1\lambda_2 H^2 - \frac{1}{3}\lambda_1 H^4 - \frac{605}{18}\lambda_1 H^3\delta_1 - \frac{955}{18}\lambda_1 H^2\delta_1^2 + 139\lambda_1 H\delta_1^3 + \\ + 291\lambda_1\delta_1^4 - 49\lambda_1\delta_1^2\delta_{1,1} + 48\lambda_2^2 H - 96\lambda_2\lambda_3 + \frac{16}{3}\lambda_2 H^3 + 48\lambda_2\delta_1\delta_{1,1} - \\ - 96\lambda_2\delta_{1,1,1} - \frac{241}{36}H^4\delta_1 - \frac{1111}{36}H^3\delta_1^2 - \frac{63}{4}H^2\delta_1^3 + \frac{367}{4}H\delta_1^4 + 126\delta_1^5$$

$$
\begin{aligned}
m(3) = {} & \frac{419}{648}\lambda_1^5 H - 9\lambda_1^5\delta_1 + \frac{17903}{972}\lambda_1^4 H^2 - \frac{19763}{648}\lambda_1^4 H\delta_1 - \frac{285}{4}\lambda_1^4\delta_1^2 + \\
& + \frac{57344}{27}\lambda_1^4\delta_{1,1} - \frac{401}{162}\lambda_1^3\lambda_2 H + 15\lambda_1^3\lambda_3 + \frac{100795}{1944}\lambda_1^3 H^3 - \\
& - \frac{16057}{972}\lambda_1^3 H^2\delta_1 - \frac{100555}{648}\lambda_1^3 H\delta_1^2 - \frac{861}{4}\lambda_1^3\delta_1^3 + \frac{614635}{54}\lambda_1^3\delta_1\delta_{1,1} + \\
& + 15\lambda_1^3\delta_{1,1,1} - \frac{6433}{81}\lambda_1^2\lambda_2 H^2 - 32\lambda_1^2\lambda_2\delta_{1,1} + \frac{11561}{216}\lambda_1^2 H^4 + \\
& + \frac{12349}{324}\lambda_1^2 H^3\delta_1 + \frac{559}{12}\lambda_1^2 H^2\delta_1^2 - \frac{120883}{324}\lambda_1^2 H\delta_1^3 - \frac{1263}{4}\lambda_1^2\delta_1^4 + \\
& + \frac{198799}{9}\lambda_1^2\delta_1^2\delta_{1,1} - 22\lambda_1\lambda_2^2 H - 52\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 151\lambda_1\lambda_2 H^3 + \\
& + 54\lambda_1\lambda_2\delta_1\delta_{1,1} - 52\lambda_1\lambda_2\delta_{1,1,1} + \frac{2845}{162}\lambda_1 H^5 + \frac{19415}{324}\lambda_1 H^4\delta_1 + \\
& + \frac{59303}{324}\lambda_1 H^3\delta_1^2 + \frac{10946}{243}\lambda_1 H^2\delta_1^3 - \frac{66367}{162}\lambda_1 H\delta_1^4 - \frac{903}{4}\lambda_1\delta_1^5 + \\
& + 18519\lambda_1\delta_1^3\delta_{1,1} - 22\lambda_2^2 H^2 - \frac{1333}{18}\lambda_2 H^4 + 86\lambda_2\delta_1^2\delta_{1,1} + 112\lambda_3^2 + \\
& + 112\lambda_3\delta_{1,1,1} - \frac{407}{216}H^6 + \frac{14521}{648}H^5\delta_1 + \frac{40205}{648}H^4\delta_1^2 + \frac{147917}{972}H^3\delta_1^3 - \\
& - \frac{8563}{243}H^2\delta_1^4 - \frac{104075}{648}H\delta_1^5 - 63\delta_1^6 + \frac{11377}{2}\delta_1^4\delta_{1,1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h(1) = {} & \frac{3}{4}\lambda_1^3 H + \frac{13}{4}\lambda_1^2 H^2 + \frac{9}{4}\lambda_1^2 H\delta_1 + \frac{13}{4}\lambda_1 H^3 + \frac{13}{2}\lambda_1 H^2\delta_1 + \frac{9}{4}\lambda_1 H\delta_1^2 + \\
& + \frac{3}{4}H^4 + \frac{13}{4}H^3\delta_1 + \frac{13}{4}H^2\delta_1^2 + \frac{3}{4}H\delta_1^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r = &-\frac{7}{81}\lambda_1^8 H + \frac{247145}{2916}\lambda_1^7 H^2 - \frac{39125}{81}\lambda_1^7 H\delta_1 - 20800\lambda_1^7\delta_{1,1} - \\
&- \frac{1286}{243}\lambda_1^6\lambda_2 H + \frac{1573727}{8748}\lambda_1^6 H^3 - \frac{400579}{162}\lambda_1^6 H^2\delta_1 - \frac{618187}{162}\lambda_1^6 H\delta_1^2 + \\
&+ \frac{31710800}{81}\lambda_1^6\delta_1\delta_{1,1} - \frac{736943}{729}\lambda_1^5\lambda_2 H^2 - 24288\lambda_1^5\lambda_2\delta_{1,1} - \frac{2193853}{8748}\lambda_1^5 H^4 - \\
&- \frac{4516739}{729}\lambda_1^5 H^3\delta_1 - \frac{35110427}{2916}\lambda_1^5 H^2\delta_1^2 - \frac{3448919}{243}\lambda_1^5 H\delta_1^3 + \\
&+ \frac{253855904}{81}\lambda_1^5\delta_1^2\delta_{1,1} - \frac{136}{3}\lambda_1^4\lambda_2^2 H - \frac{2054561}{729}\lambda_1^4\lambda_2 H^3 + \\
&+ 133280\lambda_1^4\lambda_2\delta_1\delta_{1,1} - \frac{2986483}{2916}\lambda_1^4 H^5 - \frac{40469125}{4374}\lambda_1^4 H^4\delta_1 - \\
&- \frac{52534855}{2916}\lambda_1^4 H^3\delta_1^2 - \frac{33507299}{1458}\lambda_1^4 H^2\delta_1^3 - \frac{17079953}{486}\lambda_1^4 H\delta_1^4 + \\
&+ \frac{246525952}{27}\lambda_1^4\delta_1^3\delta_{1,1} + \frac{26584}{9}\lambda_1^3\lambda_2^2 H^2 - 9248\lambda_1^3\lambda_2^2\delta_{1,1} - \frac{364370}{243}\lambda_1^3\lambda_2 H^4 + \\
&+ 911024\lambda_1^3\lambda_2\delta_1^2\delta_{1,1} - 1152\lambda_1^3\lambda_3^2 - 1152\lambda_1^3\lambda_3\delta_{1,1,1} - \frac{315269}{324}\lambda_1^3 H^6 - \\
&- \frac{6063527}{729}\lambda_1^3 H^5\delta_1 - \frac{80352425}{4374}\lambda_1^3 H^4\delta_1^2 - \frac{8710724}{2187}\lambda_1^3 H^3\delta_1^3 - \\
&- \frac{26273782}{729}\lambda_1^3 H^2\delta_1^4 - \frac{13515761}{243}\lambda_1^3 H\delta_1^5 + \frac{41134658}{3}\lambda_1^3\delta_1^4\delta_{1,1} + 896\lambda_1^2\lambda_2^3 H + \\
&+ 256\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3 + \frac{225704}{27}\lambda_1^2\lambda_2^2 H^3 - 11680\lambda_1^2\lambda_2^2\delta_1\delta_{1,1} + 256\lambda_1^2\lambda_2^2\delta_{1,1,1} + \\
&+ \frac{19484}{9}\lambda_1^2\lambda_2 H^5 + 1716232\lambda_1^2\lambda_2\delta_1^3\delta_{1,1} - \frac{70385}{324}\lambda_1^2 H^7 - \frac{716609}{162}\lambda_1^2 H^6\delta_1 - \\
&- \frac{3175405}{243}\lambda_1^2 H^5\delta_1^2 + \frac{14917697}{2187}\lambda_1^2 H^4\delta_1^3 + \frac{27927485}{1458}\lambda_1^2 H^3\delta_1^4 - \\
&- \frac{24157867}{486}\lambda_1^2 H^2\delta_1^5 - \frac{12315655}{243}\lambda_1^2 H\delta_1^6 + 11373175\lambda_1^2\delta_1^5\delta_{1,1} + \\
&+ 1664\lambda_1\lambda_2^3 H^2 - 1152\lambda_1\lambda_2^3\delta_{1,1} + 192920/27\lambda_1\lambda_2^2 H^4 + 7328\lambda_1\lambda_2^2\delta_1^2\delta_{1,1} + \\
&+ 5824\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2 + 5824\lambda_1\lambda_2\lambda_3\delta_{1,1,1} + \frac{66191}{27}\lambda_1\lambda_2 H^6 + 1353816\lambda_1\lambda_2\delta_1^4\delta_{1,1} + \\
&+ \frac{12985}{108}\lambda_1 H^8 - \frac{104593}{81}\lambda_1 H^7\delta_1 - \frac{1752295}{324}\lambda_1 H^6\delta_1^2 + \frac{906349}{729}\lambda_1 H^5\delta_1^3 + \\
&+ \frac{57919459}{2187}\lambda_1 H^4\delta_1^4 + \frac{6920350}{729}\lambda_1 H^3\delta_1^5 - \frac{53724649}{1458}\lambda_1 H^2\delta_1^6 - \\
&- \frac{5743493}{243}\lambda_1 H\delta_1^7 + 4958470\lambda_1\delta_1^6\delta_{1,1} - 1152\lambda_2^3\lambda_3 + 768\lambda_2^3 H^3 - \\
&- 1152\lambda_2^3\delta_1\delta_{1,1} - 1152\lambda_2^3\delta_{1,1,1} + \frac{16064}{9}\lambda_2^2 H^5 + 9760\lambda_2^2\delta_1^3\delta_{1,1} + \frac{5399}{9}\lambda_2 H^7 + \\
&+ 391040\lambda_2\delta_1^5\delta_{1,1} - 10976\lambda_3^3 - 10976\lambda_3^2\delta_{1,1,1} + \frac{171}{4}H^9 - \frac{7903}{54}H^8\delta_1 - \\
&- \frac{304223}{324}H^7\delta_1^2 - \frac{365225}{486}H^6\delta_1^3 + \frac{4136302}{729}H^5\delta_1^4 + \frac{43734445}{4374}H^4\delta_1^5 - \\
&- \frac{3256102}{2187}H^3\delta_1^6 - \frac{14121601}{1458}H^2\delta_1^7 - \frac{1042615}{243}H\delta_1^8 + 887989\delta_1^7\delta_{1,1}
\end{aligned}
$$

参考文献

[AOV11] D. Abramovich、M. Olsson 和 A. Vistoli, *Twisted stable maps to tame Artin stacks*, 《代数几何杂志》20 (2011), 399–477。[AV04] A. Arsie 和 A. Vistoli, *Stacks of cyclic covers of projective spaces*, 《Compos. Math.》140, 第3期, 647-666 (2004)。[Cat82] F. Catanese, *Pluricanonical Gorenstein Curves*, 《枚举几何与经典代数几何》(1982), 51–95。[CL21] S. Canning 和 H. Larson, *The Chow rings of the moduli spaces of curves of genus 7, 8, and 9* (2021)。[DL19] A. Di Lorenzo, *The Chow ring of the stack of hyperelliptic curves of odd genus*, 《Int. Math. Res. Not. IMRN》rnz 101, https://doi.org/10.1093/irmn/rnz 101 (2019)。[DL20] , *Picard group of moduli of curves of low genus in positive characteristic*, 《Manuscripta Mathematica》(2020年6月)。[DLFV21] A. Di Lorenzo、D. Fulghesu 和 A. Vistoli, *The integral Chow ring of the stack of smooth non-hyperelliptic curves of genus three*, 《美国数学会汇刊》374 (2021), 第08期, 5583–5622。[DLPV21] A. Di Lorenzo、M. Pernice 和 A. Vistoli, *Stable cuspidal curves and the integral Chow ring of $\mathscr{M}_2$*, 1, arXiv, 2021。[DLV21] A. Di Lorenzo 和 A. Vistoli, *Polarized twisted conics and moduli of stable curves of genus two* (2021)。[EF06] D. Edidin 和 D. — Fulghesu, *The integral Chow ring of the stack of at most 1-nodal rational curves* (2006)。[EG98] D. Edidin 和 W. Graham, *Equivariant intersection theory*, 《Inv. math.》131, 595-634 (1998)。[Est13] E. Esteves, *The stable hyperelliptic locus in genus 3: an application of Porteous Formula*, 《纯粹与应用代数杂志》220 (2013), 845–856。[Fab90] C. Faber, *Chow Rings of Moduli Spaces of Curves I: The Chow Ring of $\mathcal{M}_3$*, 《数学年刊》132 (1990), 331–419。[FV16] D. Fulghesu 和 A. Vistoli, *The Chow Ring of the Stack of Smooth Plane Cubics*, 《密歇根数学杂志》67 (2016)。[Iza95] E. Izadi, *The Chow Ring of the Moduli Space of Curves of Genus 5* (1995), 267–303。[Lar19] E. Larson, *The integral Chow ring of $\mathscr{M}_2$*, arXiv:1904.08081 (2019)。[MRV06] L. A. Molina Rojas 和 A Vistoli, *On the Chow rings of classifying spaces for classical groups*, 《帕多瓦大学数学研讨会论文集》116 (2006), 271–298。[Mum83] D. Mumford, *Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves*, 载于 Artin M.、Tate J. (编), 《算术与几何》。数学进展, 第36卷。Birkh¨auser, 波士顿, 马萨诸塞州 (1983)。[Per23a] M. Pernice, *The moduli stack of A_r-stable curves*, arXiv (2023)。[Per23b] , *Hyperelliptic A_r-stable curves (and their moduli stack)*, arXiv (2023)。[PV13] N. Penev 和 R. Vakil, *The Chow ring of the moduli space of curves of genus 6*, 《代数几何》2 (2013)。[Rom05] M. Romagny, *Group actions on stacks and applications*, 《Michigan Math. J.》, 第53卷, 第1期, 209-236 (2005)。[Tot14] B. Totaro, *Group Cohomology and Algebraic Cycles*, 剑桥数学专著, 剑桥大学出版社, 2014。[Vis89] A. Vistoli, *Intersection theory of Algebraic Stacks and on their moduli spaces*, 《Inventationes Mathematicae》, 施普林格出版社 (1989)。

MichelePernice m.pernice(at)kth.se皇家理工学院,
Room1642, Lindstedtsv¨agen25, 114 28, 斯德哥尔摩