arXiv:2303.05494v1 [math.QA] 9 Mar 2023

# 变形量子化与（高阶群胚的）几何量子化及非微扰σ模型的形式等价

Joshua Lackman*

摘要

基于 Bonechi、Cattaneo、Felder 和 Zabzine 关于泊松σ模型的研究，我们从形式上证明，Kontsevich 星乘积可以由李2-群胚的几何量子化所对应的扭曲卷积代数得到，该李2-群胚对泊松结构进行积分。我们证明，存在一种类似于泊松σ模型的模型，其取值于李1-群胚，并且通常可以非微扰地定义；通过对李2-群胚进行量子化后再作辛约化，可以得到该模型。我们称这类模型为群胚值σ模型，并指出，在它们存在时，可用来计算规范不变可观测量的关联函数。这会在泊松流形上的函数空间上诱导出一种乘积（可能并不结合）；在若干例子中，我们证明可以得到 Rieffel 意义下的严格变形量子化。即使在我们的构造产生非结合乘积的情形下，仍可得到一个 $C^*$-代数以及一个“量子化”映射。特别地，我们构造了带有 $SU(2)$-作用的非交换$C^*$-代数，并配有一个从 $C^\infty(S^2)$ 出发的等变“量子化”映射。构造这些代数时没有使用任何极化。

## 目录

0 引言 **2**

0.1 变形量子化与泊松σ模型.2 0.2 李代数丛态射上的等价路径积分.3 0.3 核心思想.3 0.4 定义：切向量子化、规范等价与 C*-代数 . . . . . 6

1 本文说明与基本概念 **8**

1.0.1 利用李群胚对泊松流形进行几何量子化 . . . . . 9 1.0.2 $(M,\Pi)$ 高阶积分的扭曲卷积代数.10 1.0.3 乘积.11 1.0.4 群胚值σ模型.11

2 关键示例 **14**

3 $(M,\Pi)$ 的高阶积分 19

4 几何量子化 20

4.1 典范余循环.20 4.2 单纯集合 $\mathbf{\Pi}_\infty(T^*M \oplus_{\mathbf{\Pi}} \mathbb{C})$.22 4.3 乘法线丛 $\mathcal{L} \to \mathbf{\Pi}_\infty(T^*M)$.23 4.4 扭曲卷积代数.23

5 乘积 **24**

*jlackman@math.toronto.edu

6 有限维　　维相空间 2 **4**

7 泊松流形的 C* 代数 **25**
7.1 余循环.26 7.2 测度.26 7.3 乘积.27 7.4 处理无穷大.29 7.5 C* 范数与对合.30 7.6 关于乘积的结合性.30

8 群胚与泊松σ模型之间的关系 **31**

9 示例 **33**
9.1 严格变形量子化.33 9.2 指数李群和半单李群的李-泊松结构.38 9.2.1 结合性.40

10 总结 **40**

11 附录 **41**
11.1 单纯空间的上同调.41 11.2 李代数丛的上同调.42 11.3 van Est 映射.43

参考文献 **44**

# 0 引言

## 0.1 变形量子化与泊松σ模型

在其开创性论文 [30], 中，Kontsevich 证明了每个泊松流形（$M,\Pi$）都允许一种（形式）变形量子化，即存在一个结合乘积（称为星乘积） $\star$，定义在 $C^\infty(M)[[\hbar]]$[1] 上，它以形式方式变形 $C^\infty(M)$ 上的乘积，使得

$$f*g-g*f=i\hbar\{f,g\}+\mathcal{O}(\hbar^2)\,.$$

在 [11], 中，Cattaneo 和 Felder 提出了一种通过泊松σ模型定义星乘积的方法。泊松σ模型尤其是一种拓扑玻色开弦理论，作者展示了通过计算边界场的三点关联函数可以得到星乘积。

更确切地说，泊松σ模型的目标空间是一个泊松流形（$M,\Pi$），并且有两个玻色场，由一个向量丛态射给出

$$(X,\eta):TD\to T^*M$$

覆盖 $X:\ D\to M$，其中 $D$ 是一个圆盘，其边界上有三个按循环顺序排列的标记点，记为 0、1、$\infty$.。第一类场由 $X$ 给出，第二类场由取值于 $X^*(T^*M)$ 的一形式 $\eta$给出，并满足边界条件：$\eta$ 到 $\partial D$ 的拉回取值于零截面。星乘积于是定义为

[1]星乘积中的“星”指的是这种结合乘积由一系列双微分算子诱导而成，见 [30]。

$$(f \star g)(m) = \int_{X(\infty)=m} f(X(1))g(X(0))\, e^{\frac{i}{\hbar}S[X,\eta]}\, dX\, d\eta\,. \tag{0.1.1}$$

这里 $m \in M$、$f$、$g \in C^\infty(M)$，积分遍历所有满足 $X(\infty) = m$ 的场 $X$、$\eta$，作用量定义为

$$S[X,\eta] = \int_D \eta \wedge dX + \frac{1}{2}\Pi|_X(\eta\,,\eta)\,. \tag{0.1.2}$$

上述作者证明，该乘积围绕经典解 $(X,\eta) = (m,0_m)$ 的半经典展开等价于 Kontsevich 星乘积。

## 0.2 李代数丛态射上的等价路径积分

随后，在 [6], 对圆盘使用极坐标并形式地积去 $\eta_\theta$之后，Bonechi、Catta- neo 和 Zabzine（形式地）证明，0.1.1 等价于一个积分域不同的路径积分，该积分着重体现与 $(M,\Pi)$ 相关的李代数丛 $T^*M$。我们不必考虑所有此类向量丛态射 $(X,\eta)$，而只需考虑那些作为李代数丛态射的态射。现在，用 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{LA}}(TD, T^*M)$ 表示李代数丛态射。乘积 0.1.1 也可以等价地写成

$$(f \star g)(m) = \int_{\pi(X(\infty))=m} f(\pi(X(1)))\, g(\pi(X(0)))\, e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\, dX\,, \tag{0.2.1}$$

其中 $\pi:\ T^*M \to M$ 是投影，并且

$$S[X] = \int_D X^*\Pi\,. \tag{0.2.2}$$

0.2.1 的一个优点是，定义 $(f \star g)(m)$ 的路径积分只涉及包含 $m$ 的辛叶上 $f$ 和 $g$ 的取值，这与 0.1.1 不同。这意味着，形式上，0.2.1 是切向的，这基本上意味着它可以限制在辛叶上。对于 [30], 中的星乘积，这基本上意味着每个双微分算子都与叶相切（见 [20]）。

## 0.3 主要思想

本文讨论一种泊松流形的可能量子化方案，它并不本质上依赖极化。我们通过采用路径积分的视角来实现这一点。下面概述这一思想:

1. 设 $(M,\Pi)$ 是一个泊松流形。考虑单纯空间 $V^\bullet$，其在次数 $n$ 上定义为

   $$V^n := \mathrm{Hom}_{\mathrm{VB}}(\,T|\Delta^n|,\, T^*M),$$

   即向量丛态射 $T|\Delta^n| \to T^*M$，其中 $|\Delta^n|$ 是标准 n-单形（这里指空间，而非单纯集合）。我们有 $V^1 \cong P(T^*M)$，其中对于空间 $A$，$PA$ 表示路径 $[0,1] \to A$. 所成的空间。我们有 $P(T^*M) \cong T^*(PM)$，因此 $V^1$ 具有典范辛形式。到目前为止，我们还没有用到 $\Pi$.

2. 与 $\Pi$ 相关联的是在 $V^1$上的哈密顿作用；若 $\mu$ 是动量映射，则 $\mu^{-1}(0)$ 是由李代数丛路径构成的余各向同性子流形（其中李代数丛与 $\Pi$相关联，其底层向量丛为 $T^*M$）。参见 [12]。

3. 李代数丛路径空间包含在一个单纯空间中，记作 $\Pi_\infty(T^*M)$，其次数为 $n$ 时由下式给出

$$\Pi_\infty^{(n)}(T^*M) = \{f \in \mathrm{Hom}(\, T|\Delta^n|,\, T^*M\,) : f|_{\mathrm{vertices}} = 0\}\,,$$

参见 [49]。

4. $V^1$ 的约化相空间是积分 $\Pi$ 的源单连通辛群胚的箭头空间，记作 $\Pi_1(T^*M)$。换言之，我们可以将 $\Pi_1(T^*M)$ 视为 $V^\bullet$. 的辛约化。参见 [12]

5. 现在，由于 $V^1$ 带有典范辛形式 $\omega$，我们可以对 $V^\bullet$ 进行几何量子化（即，我们可以构造一个带联络的乘法线丛，对 $\omega$进行预量子化）。当我们将这一几何量子化拉回到 $\Pi_\infty(T^M)$ 时，便得到 $\Pi_\infty(T^*M)$ 的"几何量子化"，其中预辛形式（即闭二形式）由拉回 $\omega$.得到

6. 完成这一步后，我们可以构造 $\Pi_\infty(T^*M)$ 的扭曲卷积代数。对于函数 $s_1$、 $s_2 \in C^\infty(\Pi_\infty^{(1)}(T^*M))$，该代数记作 $s_1 * s_2$，其定义如下：

$$(s_1 * s_2)(\gamma) = \int_{\substack{X\in\Pi_\infty^{(2)}(T^*M)\\ d_1(X)=\gamma}} s_1(d_0(X))s_2(d_2(X))e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,dX\,, \tag{0.3.1}$$

其中 $d_0$、 $d_1$、 $d_2$ 是面映射 $\Pi_\infty^{(2)}(T^*M) \to \Pi_\infty^{(1)}(T^*M)$。

7. 存在一个规范的"量子化"映射

$$C^\infty(M) \to C^\infty(\Pi_\infty^{(1)}(T^*M))\,,$$
$$f \mapsto \hat{f}\,,\ \hat{f}(\gamma) = f(\pi(\gamma(1/2)))\,,$$

ˆ 其中 $\pi\colon T^*M \to M$ 是投影。因此，$(f * \hat{}\, g)(m)$ 与 0.2.1 一致，由此（形式上）便得到泊松σ模型。

8. 现在有一个李2-群胚，它由 $\Pi_\infty(T^*M)$ 的商给出，记作 $\Pi_2(T^*M)$，见 [49]。 $\Pi_2(T^*M)$ 的对象和箭头与 $\Pi_\infty(T^*M)$ 中的相同，我们可以进行部分约化，从而得到 $\Pi_2(T^*M)$ 的"几何量子化"。因此，$\Pi_2(T^*M)$ 的扭曲卷积代数也与 0.2.1 一致。

9. 利用 $\Pi_2(T^*M)$，我们可以将泊松σ模型视为一个取值于李2-群胚的高阶σ模型。为此，我们需要使用由米田引理给出的以下识别：

$$\Pi_2^{(2)}(T^*M) \cong \mathrm{Hom}(\Delta^2, \Pi_2(T^*M))\,.$$

这里 $\Delta^2$ 是标准2-单形（这次它是单纯集合）。我们以下列方式将其视为一个σ模型：源和靶分别为 $\Delta^2$、 $\Pi_2(T^*M)$，而作用量由 0.2.1 中的作用量给出。于是，我们可以将 0.2.1 写成如下形式：

$$(f \star g)(m) = \int_{\substack{F\in\mathrm{Hom}(\Delta^2,\Pi_2(T^*M)),\\ F(1,1)=m}} dF_m\, e^{\frac{i}{\hbar}S(F(2,1),F(0,1))}\, f(F(2,2))g(F(0,0))\,. \tag{0.3.2}$$

这里， $dF_m$ 是空间 $\{F \in \mathrm{Hom}(\Delta^2, \Pi_2(T^*M))$上的一个测度： $F(1,1) = m\}$ .我们将 $m$ 视为映射到 $m$ . 的常值代数丛路径

10. 现在假设

$$\int_{S^2} X^*\Pi = 0, \tag{0.3.3}$$

对于所有李代数丛态射 $X$： $TS^2 \to T^*M$. 那么，在辛约化下， $V^\bullet$ 的几何量子化可约化为 $\Pi_1(T^*M)$ 的几何量子化，而高阶σ模型可约化为取值于 $\Pi_1(T^*M)$ 的σ模型，其中乘积与 0.3.2 类似。其定义为

$$(f \star g)(m) = \int_{\substack{F\in \mathrm{Hom}(\Delta^2,\Pi_1(T^*M)),\\ F(1,1)=m}} dF_m \, e^{\frac{i}{\hbar}S(F(2,1),F(0,1))} \, f(F(2,2))g(F(0,0)) \,. \tag{0.3.4}$$

源空间和目标空间分别为 $\Delta^2$, $\Pi_1(T^*M)$； $S$ 是作用量的类比，它由 $\Pi_1(T^*M)$ 上的一个 2-余循环给出，该余循环经 van Est 映射映到 $\Pi$，见 11（回想一下，$\Pi$ 本身在李代数丛 $T^*M$ 上定义了一个 2-余循环）。注意，

$$\mathrm{Hom}(\Delta^2, \Pi_1(T^*M)) \cong \Pi_1^{(2)}(T^*M),$$

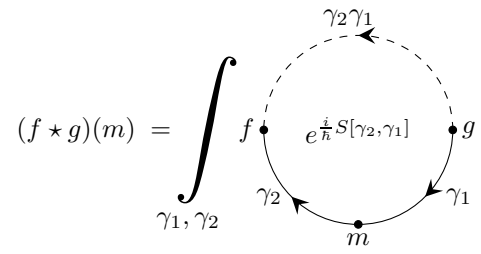
因此，我们是在一个有限维空间上积分。

11. 然后，我们可以利用每个辛叶上的自然体积形式，并使用 $C_c^\infty(M)$ 通过 0.3.4 中的方式作用于其自身时的算子范数，得到一个 $C^*$-代数。特别地，这个 $C^*$-代数自带一个自然表示，我们将其视为我们的态空间（尽管并非所有这些态都是纯态，即它们并非都属于不可约表示）。然而，在此之前，我们需要处理任何可能出现的发散；在我们的例子中，这些发散仅仅源于 $\Pi$. 的各向同性。由于我们是在一个有限维空间上积分，这通常可以非微扰地完成，正如莫亚尔乘积的情形；我们将在第 2 节讨论这一点。

12. 我们并未声称这个乘积是结合的，不过我们将看到它确实结合的几个例子。然而，即使这个乘积不具结合性，我们仍然得到一个 $C^*$-代数，因此它仍可能按照 Rieffel 的意义给出 $\Pi$ 的严格量子化，见 [40]。与此相关的是，Kontsevich 在 [30] 中对星乘积结合性的证明，只表明在常数临界点附近展开时，0.1.1 是微扰结合的。[2]

13. 有一点值得注意：乘积 0.3.4、0.2.1 显然是切向的，也就是说，它们拉回后会给出每个辛叶的“量子化”。

14. 从图形上看，乘积 0.3.4（以及 0.2.1）可以用以下方式表示：




这里， $S$ 是作用量，而 $f$和 $g$ 分别取值于 $\gamma_2$ 的目标端和 $\gamma_1$的源端。因此，依照费曼的思路，这些乘积是对所有路径求和得到的；不过，这些路径位于一个（高阶）群胚中。

[2]我们并未声称 0.1.1 在非微扰意义下不具结合性。

接下来，本文将逐步更详细地阐述这一想法。需要指出的是，单纯空间 $V^\bullet$ 是作为背景存在的；不过，我们讨论它更多是出于概念上的考虑，实际并不会经常用到它。

## 0.4 定义 s：切向量子化、规范等价与 C*-代数

我们主要关注严格量子化／变形量子化（即非形式乘积），现在给出一些定义：[3]

定义 1.（见 *[38]*）设 $(M,\Pi)$ 为一个泊松流形。$(M,\Pi)$ 的严格变形量子化是指，对每个 $\hbar\in\mathbb{R}$，都有一个 $C^*$-代数，其中包含 $C_c^\infty(M)$ 作为稠密的 $*_\hbar$-子代数，记作

$$(C_c^\infty(M),\star_\hbar,{}^{*_\hbar},||\cdot||_\hbar),$$

使得

1. 对每个 $f\in C_c^\infty(M)$，映射 $\hbar\to||f||_\hbar$ 是连续的。
2. 对于 $\hbar=0$，$C^*$-代数取其自然形式，即 $(C_c^\infty(M)\ ,^*,||\cdot||_{L^\infty(M)})$，其中乘积为乘法，$^*$ 表示复共轭。
3. $||(f\star_\hbar g-g\star_\hbar f)/\hbar-i\{f,g\}||_\hbar\xrightarrow{\hbar\to0}0$.

严格变形量子化是理想的，但一种称为严格量子化的较弱概念也很有意思。主要区别在于，严格量子化为每个 $f\in C_c^\infty(M)$ 指定一个 $C^*$-代数中的元素，但其像不必在 $C^*$-代数的乘积运算下封闭：

定义 2.（参见 *[40]*）设 $(M,\Pi)$ 是一个泊松流形。对于每个 $\hbar\in\mathbb{R}$，$(M,\Pi)$ 的严格量子化是指一个 $C^*$-代数 $\mathcal{A}_\hbar$，以及一个线性映射 $\mathcal{T}_\hbar$：$C_c^\infty(M)\to\mathcal{A}_\hbar$（称为量子化映射，通常保持对合），满足 $\mathcal{A}_\hbar$ 由 $C_c^\infty(M)$ 的像生成，并且

1. *For each $f\in C_c^\infty(M)$, the map $\hbar\to||\mathcal{T}_\hbar(f)||_\hbar$ is continuous.*
2. $\mathcal{A}_0=C_c^\infty(M)$ 具有其自然的 $C^*$-代数结构，并且 $\mathcal{T}_0$ 是单位元。
3. $||(\mathcal{T}_\hbar(f)\star_\hbar\mathcal{T}_\hbar(g)-\mathcal{T}_\hbar(g)\star_\hbar\mathcal{T}_\hbar(f))/\hbar-iT_\hbar(\{f,g\})||_\hbar\xrightarrow{\hbar\to0}0$.

现在我们将定义切向量量子化的含义：

定义 3。（参见 *[40]* 泊松流形 $(M,\Pi)$ 的严格变形量子化称为切向的，若对于每个辛叶 $\mathcal{L}$，理想

$$I_\mathcal{L}=\{f\in C_c^\infty(M):f|_\mathcal{L}=0\}$$

$C_c^\infty(M)$ 的理想同时也是 $C^*$-代数的理想，对所有 $\hbar$. 均如此。若 $\mathcal{L}$ 不是闭的，我们还要求 $\mathcal{L}$ 的闭包恰由 $I_\mathcal{L}$ 中所有函数均为零的点组成。

类似地，如果由 $\mathcal{T}_\hbar(I_\mathcal{L})$ 生成的 $C^*$-子代数是理想（对所有 $\hbar$. 均如此），我们就称严格量子化是切向的。

[3]这里给出的定义并非最一般的定义，但它们是我们将要使用的定义。

本质上，切向的（严格）量子化使我们能够分别量子化每个辛叶。在经典情形下，泊松流形上的粒子被限制在某个辛叶上，因此从这个意义上说，切向的（严格）量子化恰好是不表现出量子隧穿的量子化。与切向变形量子化相关的是 Weinstein 的一个猜想：

猜想 1.（见 [44]）李代数 $\mathfrak{g}^*$ 的对偶存在切向星乘积，当且仅当在 $G$ 中单位元的某个邻域上存在平坦无挠仿射联络，且其在向量丛 $T^*G$ 上诱导的联络与余伴随轨道的左（或右）平移分解相容。

我们将在本文末尾讨论这一猜想的相关性，但它对结合性有影响。

规范等价

接下来， [6] 的作者以这样的方式定义规范等价：泊松σ模型的约化相空间就是辛群胚（如果它存在）。此外，两个阿尔戈布罗德态射 $X$、 $X'$：$TD \to T^*M$ 若在边界上相同，则称它们规范等价。利用这一规范等价概念，为了使 0.2.1 有意义，一个必要条件是

$$\int_{S^2} X^*\Pi \in 2\pi\hbar\mathbb{Z}\,, \tag{0.4.1}$$

对于任意代数丛态射 $X$：$TS^2 \to T^*M$.，作者进一步推测，在这种情况下，应该存在 0.2.1 的非微扰定义；并且如果 $\Pi_1(T^*M) \rightrightarrows M$ 是辛群胚，那么路径积分应定义在映射空间上

$$[0,1] \to \Pi_1^{(1)}(T^*M)\,,$$

其中 $\Pi_1^{(1)}(T^*M)$ 是 $\Pi_1(T^*M) \rightrightarrows M$.的箭头空间

本文的做法不同于上一段中的推测——我们本质上将对泊松σ模型进行辛约化。我们不再将两个态射 $X$, $X'$：$TD \to T^*M$ 定义为只要它们在边界上相同便规范等价，而是定义为它们在边界上相同（相差一个李代数丛同伦）时规范等价。为使这一做法可行，我们要求一个比 0.4.1 稍强的条件：对于任意代数丛态射$X$：$TS^2 \to T^*M$,

$$\int_{S^2} X^*\Pi = 0 \tag{0.4.2}$$

（我们将在论文末尾对更一般的情形进行推测）。因此，我们不再对映射 $[0,1] \to \Pi_1^{(1)}(T^*M)$ 的无穷维空间积分，而是对 $\Pi_1(T^*M)$ 中可复合箭头对构成的有限维空间积分。为说明这一点，我们在此指出，可以将场，即 $X \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{LA}}(TD, T^*M)$，解释为 $(M,\Pi)$ 的高阶积分中的可复合箭头对（即一个 2-单形）。我们利用这一点，非微扰地计算泊松σ模型关于规范不变可观测量的关联函数。

C*代数

假设我们有一个合理的、非微扰的 0.2.1 定义。那么，利用其切向性质，通过取 $L^2(\mathcal{L})$ 在自身上的作用（该作用由 0.2.1 给出）相对于每个辛叶上的典范体积形式的算子范数 $||\cdot||_\hbar^{\mathcal{L}}$，我们就能得到一族与每个辛叶 $\mathcal{L}$相关联的 $C^*$-代数（每个 $\hbar$ 对应一个）。其中，对合为复共轭。于是，我们感兴趣的 $\hbar$ 族 $C^*$-代数可如下得到：

定义 4. 对于 $f \in C_c^\infty(M)$，令 $||f||_\hbar := \sup_{\mathcal{L}} || f|_{\mathcal{L}} ||_\hbar^{\mathcal{L}}$ 。对合由复共轭给出，乘积则由算子的乘积给出。

从本质上说，我们所做的就是取所有希尔伯特空间（分别对应每个辛叶）的直和，并将 $C^*$-代数取为与算子范数相对应的代数。特别地，我们得到了该 $C^*$-代数在与每个辛叶相对应的希尔伯特空间上的一个表示。

在深入讨论所有细节之前，我们将在下一节进一步阐释我们的思路。特别是，我们将在那里说明，我们的量子化过程如何还原辛向量空间通常的严格变形量子化，即莫亚尔乘积的积分形式。这里要强调的是，我们的推导不同于文献中的其他推导；尤其是，我们不会使用极化或傅里叶变换。

# 1 本文说明及基本概念

本文将证明，0.2.1 可以通过使用 $(M, \Pi)$ 的高阶积分所得到的扭曲卷积代数来构造；只需使用 [49], 中的李2-群胚，我们将其记为 $\Pi_2(T^*M)$。为得到扭曲项，我们将在$\Pi_2(T^*M)$ 上执行几何量子化的类比过程，其中包括在 $\Pi_2(T^*M)$ 上构造一个取值于 $\mathbb{R}$ 的 2-余循环。这与 Weinstein、Xu、Hawkins 所发展的几何量子化方案十分一致；该方案同样涉及对泊松流形进行积分，并构造扭曲卷积代数（定义在约化群胚上）；参见[45], [46], [27]。本文内容概要见第 0.3 节。

几何量子化通常的实施方式与本文的做法之间有一个主要区别：我们不需要极化。这是一项优势，因为在这种情形下，非奇异极化向来很难找到。因此，重点将放在 2-余循环和 van Est 映射上，而 2-形式则退居次要位置。我们对“几何量子化”一词的使用稍显宽泛，因为（除不需要极化之外） $\Pi_2(T^*M)$ 上的 2-形式是预辛的（即闭的），而非辛的——不过，它确实嵌入在一个辛流形中，作为一个余等方流形。

完成这一步后，我们将解释 $\Pi_1(T^*M)$（源单连通群胚）上与 0.2.1 类似的构造，我们称之为群胚值σ模型；并通过几个例子说明，这会导出一个真正的结合乘积，从而给出严格变形量子化。我们详加阐述、也认为最具启发性的例子，是第 2 节中的例子。基本上，这种关系如下：在辛约化下，

$$\begin{aligned}&\text{Geometric quantization of } \Pi_2(T^*M) \rightsquigarrow \text{Geometric quantization of } \Pi_1(T^*M)\,,\\ &f \star g \text{ with respect to } \Pi_2(T^*M) \rightsquigarrow f \star g \text{ with respect to } \Pi_1(T^*M)\,,\end{aligned}$$

附录涵盖了一些正文未涉及的主题，主要是与李群胚、李代数丛的上同调以及 van Est 映射相关的内容。

除本文中提及的作者外，许多作者也研究过相关主题，例如收敛乘积，参见 [1], [9], [20], [29] [39], [43]。此外， [40] 列出了一些关于本文所讨论主题的未解决问题[4]。

[4]其中一些问题现在可能已经解决了。

### 1.0.1 泊松流形的几何量子化：使用李群胚 s

扭曲卷积代数

为了进一步说明前几段的内容，我们先回顾李群胚上的扭曲卷积代数（本文所说的李群胚均指李1-群胚）。

设 $G \rightrightarrows M$ 是一个李群胚。令 $G^{(0)} = M$，并令 $G^{(n)}$ 为可复合的 $n$-元箭头组构成的空间；它们共同构成一个单纯集合。存在一个微分 $\delta^*$：$C^\infty(G^{(n)}) \to C^\infty(G^{(n+1)})$，其定义为

$$\delta^* f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^* f\,, \tag{1.0.1}$$

其中 $d_i$：$G^{(n+1)} \to G^{(n)}$, $i = 0, \ldots, n$ 是相应的面映射。

现在设 $S \in C^\infty(G^{(2)})$ 是一个余循环，即 $\delta^* S = 0$，并设 $d\mu$ 为 $G$ 上的哈尔测度。对于 $f, g \in C_c^\infty(G^{(1)})$，它们的扭曲卷积记作 $f * g \in C_c^\infty(G^{(1)})$，定义如下：

$$(f * g)(\gamma) = \int_{t(\gamma')=t(\gamma)} f(\gamma') g(\gamma'^{-1}\gamma) e^{S[\gamma', \gamma'^{-1}\gamma]}\, d\mu(\gamma')\,. \tag{1.0.2}$$

注意到

$$\{\gamma' \in G^{(1)} : t(\gamma') = t(\gamma)\} \cong \{(\gamma', \gamma'') \in G^{(2)} : \gamma'\gamma'' = \gamma\}\,. \tag{1.0.3}$$

因此，利用面映射 $d_0(\gamma', \gamma'') = \gamma''$, $d_1(\gamma', \gamma'') = \gamma'\gamma''$, $d_2(\gamma', \gamma'') = \gamma'$，我们可以将 1.0.2 改写如下：

$$(f * g)(\gamma) = \int_{\substack{(\gamma', \gamma'') \in G^{(2)} \\ d_1(\gamma', \gamma'') = g}} f(d_2(\gamma', \gamma'')) g(d_0(\gamma', \gamma'')) e^{S[\gamma', \gamma'']}\, d\mu(\gamma', \gamma'')\,. \tag{1.0.4}$$

以这种方式改写扭曲卷积的好处是，上述公式在高阶群胚上也有意义。

需要强调的是，按照对扭曲卷积代数的通常理解，我们实际上只是在取一个非平凡乘法线丛的两个截面的卷积（即箭头空间上的一个线丛，带有相容的乘法）。其全空间为 $G^{(1)} \times \mathbb{C}$，对于可复合对 $(g_2, g_1)$，乘法定义为

$$(g_2, \lambda) \cdot (g_1, \beta) = (g_2 g_1,\, \lambda\beta\, e^{S[g_2, g_1]})\,. \tag{1.0.5}$$

平凡乘法线丛对应于零余循环，其扭曲卷积代数恰好就是通常的卷积代数。请注意，我们的构造只能得到底层线丛本身平凡的乘法线丛——非平凡的是乘法。不过，一般而言，底层线丛不一定平凡，但我们不会用到这类线丛；更多内容见 11。

几何量子化

现在我们来回顾泊松流形的几何量子化是什么，它用于构造一个 $C^*$-代数。本质上，它是通过对辛群胚进行几何量子化得到的。完整

详情见 [27]（另见 [45]）：

定义 5. 泊松流形 $(M,\Pi)$ 的几何量子化由以下数据给出：

1. 一个辛群胚（$G$、$\omega$），其积分对象为 $T^*M$（李代数丛结构由 $\Pi$ 诱导）。2. 一个带联络的厄米线丛（$L$、$\nabla$）$\to G^{(1)}$，它预量子化 $\omega$，并且其上具有与之相容的乘法 $L_\circ$。3. $G^{(1)}$ 的拉格朗日极化由纤维化 $f:\ G\to H$ 的纤维给出，其中 $H$ 是某个李群胚，且存在一个乘法线丛 $L_H\to H$，使得 $L\cong f^*L_H$.[5]。4. $C^*$-代数是 $L_H\to H$ .的扭曲卷积代数

这一过程的一个缺点是，它并未说明如何构造量子化映射，甚至无法判断这种映射是否存在。另一个问题是，极化往往难以找到，有时甚至根本不存在。然而，使用高阶群胚进行几何量子化时，我们不需要极化。此外，这种几何量子化完全是典范的，并且自带一个量子化映射。

### 1.0.2 $(M,\Pi)$ 的高阶积分的扭曲卷积代数

在开始本节之前，我们先说明，在路径积分的语境下，我们将采用物理学层面的严谨性。现在，给定一个泊松流形 $(M,\Pi)$，本文主要关注的单纯空间记为

$$\Pi_1(T^*M)\,,\Pi_2(T^*M)\,,\Pi_\infty(T^*M)\,. \tag{1.0.6}$$

前两个分别是李1-群胚（$\Pi$ 的源单连通积分）和李2-群胚，而第三个是单纯集合，但目前尚不清楚它是否为 $\infty$-群胚（尽管在某些情况下确实如此，见 [21], [28]）。尽管如此，它们可以通过取商联系起来，即 $\Pi_1(T^*M)$ 是 $\Pi_2(T^*M)$ 的商，而后者又是 $\Pi_\infty(T^*M)$ 的商（见 [49]）。

定义 6。（见 *[49]*） $\Pi_\infty(T^*M)$ 是由下式定义的单纯集合

$$\Pi_\infty^{(n)}(T^*M)=\{f\in Hom(\,T|\Delta^n|,\,T^*M\,):f|_{vertices}=0\}\,, \tag{1.0.7}$$

其中 $|\Delta^n|$ 是标准的 $n$-单纯形（即该空间——单纯集合将记为 $\Delta^n$）。我们将 $\Pi_\infty^{(1)}(T^*M)$ 中的点记为 $\gamma$，将 $\Pi_\infty^{(2)}(T^*M)$ 中的点记为 $X$ .

$\Pi_\infty(T^*M)$ 上有一个典范的 2-余循环，对于 $X\in\Pi_\infty^{(2)}(T^*M)$，它由下式给出

$$S[X]:=\frac{i}{\hbar}\int_{|\Delta^2|}X^*\Pi\,. \tag{1.0.8}$$

现在考虑两个映射

$$s_1\,,s_2:\Pi_\infty^{(1)}(T^*M)\to\mathbb{C}\,.$$

它们的扭曲卷积记为

$$s_1*s_2:\Pi_\infty^{(1)}(T^*M)\to\mathbb{C}\,,$$

[5]这里我们假设不存在玻尔-索末菲条件，但这一处理可以推广到更一般的情形，见 [27]。

由下式给出

$$(s_1 * s_2)(\gamma) = \int_{\substack{X \in \Pi_\infty^{(2)}(T^*M) \\ d_1(X)=\gamma}} s_1(d_2(X)) s_2(d_0(X)) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} \, d\mu(X) \,. \tag{1.0.9}$$

这里， $d\mu$ 是一个不变（或 Haar）测度，不过我们在此不深入讨论细节。再强调一下，我们实际上是将 $s_1$、 $s_2$ 视为取值于与余循环$S$相关联的乘法线丛中，稍后我们会对此作更详细的讨论。

### 1.0.3 乘积

现在，给定 $f \in C^\infty(M)$，我们可以将其提升为映射 $\hat{} f\colon \Pi_\infty^{(1)}(T^*M) \to \mathbb{C}$，定义如下：

$$\hat{f}(\gamma) = (f \circ \pi)(\gamma(1/2)) \,, \tag{1.0.10}$$

$\hat{}$ 其中 $\pi\colon T^*M \to M$ 是投影。我们将 $f$ 视为与 $f$ . 相关联的可观测量。于是，我们在 $C^\infty(M)$上得到一个由扭曲卷积代数诱导的乘积；对于 $m \in M$，它定义为

$$(f \star g)(m) = \int_{\substack{X \in \Pi_\infty^{(2)}(T^*M) \\ d_1(X)=m}} \hat{f}(d_2(X)) \hat{g}(d_0(X)) e^{\frac{i}{\hbar} S[X]} \, d\mu(X) \,. \tag{1.0.11}$$

在上式右侧，我们将 $m$ 视为映射到 $m$ . 的常值代数丛路径。这个乘积与 0.2.1 一致。

目前，由于缺乏规范不变性，1.0.11 不能被理解为对 $\Pi_1(T^*M)$的积分。特别是，可观测量 $f$、$\hat{} g$ 依赖于 $\gamma(1/2)$，因此它们完全不具备（我们所要求的意义上的）规范不变性。不过，我们可以改写 1.0.11，使可观测量仅依赖于 $\gamma(0)$ $\gamma(1)$，从而得到一个可对 $\Pi_1(T^*M)$ [6]进行的合理积分。显然，我们会猜测对 $\Pi_1(T^*M)$的积分会涉及其卷积，但出乎意料的是，并非如此。

这里我们指出，使用 $\Pi_2(T^*M)$ 时，我们所做的一切都有意义，而且所有公式完全不变。唯一的区别是相空间会被约化，即 $\Pi_2^{(2)}(T^*M)$ 是 $\Pi_\infty^{(2)}(T^*M)$ 的一个商；若 $X, X' \in \Pi_\infty^{(2)}(T^*M)$ 在边界上的取值相同，且相对于边界李代数丛同伦等价，那么它们在 $\Pi_2^{(2)}(T^*M)$ 中映射到同一点。因此，我们将交替使用 $\Pi_2$ 和 $\Pi_\infty$ 。

### 1.0.4 群胚值σ模型

这里我们将简要讨论泊松σ模型以及决定星乘积 $\star$ . 的高阶泊松σ模型。

#### 泊松σ模型

[11] 中研究的泊松σ模型具有以下要素：

1. 参数（或世界面）和目标空间分别为 $D, M$，其中 $D$ 是一个带有三个标记点的圆盘，而 $(M, \Pi)$ 是一个泊松流形。2. 场是向量丛态射 $(X, \eta)$： $TD \to T^*M$，其覆盖 $X$： $D \to M$，并且 $\eta$ 到 $\partial D$ 的拉回取值于零截面。3. 场的作用量由 $S[X, \eta] = \int_D \eta \wedge dX + \frac{1}{2}\Pi|_X(\eta, \eta)$ 给出。

[6]关于规范不变性有一些微妙之处，我们稍后会讨论。

4. 对于 $f, g \in C^\infty(M)$，我们定义 $(f \star g)(m) = \int_{X(\infty)=m} f(X(1))g(X(0))\ e^{\frac{i}{\hbar}S[X,\eta]}\, dX\, d\eta$.

李代数丛的"σ模型"

与泊松σ模型密切相关的是另一种强调 $\pi$ 的李代数丛结构的"σ模型"：$T^*M \to M$. 它的构成要素如下：

1. 参数空间和目标空间分别为 $|\Delta^2|$、$T^*M$。
2. 场是李代数丛态射 $X$：$T|\Delta^2| \to T^*M$.
3. 场的作用量由 $S[X] = \int_{|\Delta^2|} X^*\Pi$ 给出
4. 对于 $f$、$g \in C^\infty(M)$，我们使用扭曲卷积代数来定义

$$(f \star g)(m) = \int_{\pi(X(\infty))=m} f(\pi(X(1)))\, g(\pi(X(0)))\, e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\, dX\,, \tag{1.0.12}$$

其中我们将 $|\Delta^2|$ 与带有三个标记点的圆盘 $D$ 等同。

**$\Pi_2(T^*M)$ 的 σ模型**

考察李代数丛的"σ模型"，可见场是 $\Pi_2^{(2)}(T^*M)$ 中的点，并且根据米田引理，

$$\Pi_2^{(2)}(T^*M) \cong \mathrm{Hom}(\Delta^2, \Pi_2(T^*M))\,. \tag{1.0.13}$$

这里，$\Delta^n$ 是标准的 $n$-单纯形（即单纯集合）。我们将其视为以下范畴的神经：

- 对象是 $\{0, 1, \ldots, n\}$ 中的点，
- 对于每一对对象 $j$、$i$，若 $j \geq i$，则恰有一个态射 $j \leftarrow i$；若 $j < i$，则不存在态射 $j \leftarrow i$. 对于 $j \geq i$，我们将唯一的态射记为 $(j, i)$。

现在我们将讨论 $\Pi_2(T^*M)$ 的一个σ模型（或类似的东西）。它的组成要素如下：

1. 参数空间和目标空间分别为 $\Delta^2$, $\Pi_2(T^*M)$。
2. 场是单纯空间之间的态射 $F$: $\Delta^2 \to \Pi_2(T^*M)$，在次数 $n$ 时记作 $F^{(n)}$.
3. 对于 $X \in \Pi_2^{(2)}(T^*M)$，拉格朗日密度为 $S[X] = \int_{|\Delta^2|} X^*\Pi$.
4. 场 $F$ 的作用量为

$$\sum_{(b,a)\in\Delta^2 \text{ are a composable pair}} S[F^{(2)}(b, a)] = S[F^{(2)}((2, 1), (1, 0))]\,. \tag{1.0.14}$$

5. 对于 $f, g \in C^\infty(M)$，我们定义

$$(f \star g)(m) = \int_{\substack{F \in \mathrm{Hom}(\Delta^2, \Pi_2(T^*M)), \\ F(1,1)=m}} dF_m \, e^{\frac{i}{\hbar} S(F(2,1), F(0,1))} \, f(F(2,2)) g(F(0,0)) \,. \tag{1.0.15}$$

这里 $dF_m$ 是空间 $\{F \in \mathrm{Hom}(\Delta^2, \Pi_2(T^*M)) \text{ 上的一个测度：} \; F(1,1) = m\}$. 同样，我们将 $m$ 视为映射到 $m$ 的常值代数丛路径

一个关键点是，由 1.0.12 和 1.0.15 定义的乘积相同。本文稍后将解释其中的原因。

### $\Pi_1(T^*M)$ 的 σ模型

虽然目前还不清楚如何将前两种 σ模型构造推广到群胚，但第三种构造可以推广，前提是满足某些下降条件。目前，我们假设该余循环

$$S[X] = \int_{|\Delta^2|} X^* \Pi$$

下降为 $\Pi_1(T^*M)$ 上的一个余循环；稍后我们会准确解释这意味着什么，但只需知道，对于所有李代数丛态射 $X \colon TS^2 \to T^*M$，

$$\int_{S^2} X^* \Pi = 0 \,. \tag{1.0.16}$$

例如，当泊松结构在泊松上同调中是恰当的，或者每个源纤维（或辛叶）的第二同伦群有限时，就会出现这种情况；前者的例子包括李-泊松结构，后者的例子包括辛环面。尽管辛二球面并非如此，但我们将看到，这种构造仍然可以应用于它。

现在我们将讨论群胚值σ模型（所谓群胚值，是指目标空间是一个群胚）。它的组成部分如下：

1. 参数空间和目标空间分别为 $\Delta^2$, $\Pi_1(T^*M)$。
2. 场是单纯空间之间的态射 $F \colon \Delta^2 \to \Pi_1(T^*M)$，其在次数 $n$ 时记为 $F^{(n)}$.

3. 拉格朗日密度由定义在 $\Pi_1(T^*M)$ 上的实值二余循环 $S$ 给出，满足：
   - $VE(S) = \Pi$ （即，将 van Est 映射应用于 $S$ 后，得到的等于与泊松结构相关联的 2-余循环），
   - $S$ 是反对称的，具体来说：

$$S(g_2, g_1) = -S(g_1^{-1}, g_2^{-1}) \,. \tag{1.0.17}$$

4. 场的作用量为

$$\sum_{(b,a) \in \Delta^2 \text{ are a composable pair}} S[F^{(2)}(b,a)] = S[F^{(2)}((2,1),(1,0))] \,. \tag{1.0.18}$$

5. 对于 $f, g \in C_c^\infty(M)$，我们定义一个（可能非结合的）乘积：

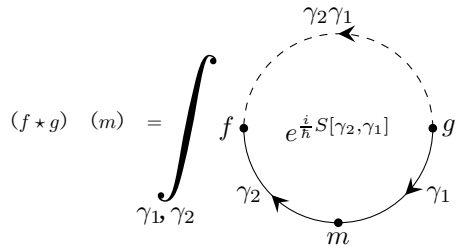
$$(f \star g)(m) = \int_{\substack{F \in \mathrm{Hom}(\Delta^2, G), \\ F(1,1)=m}} dF_m \, e^{\frac{i}{\hbar} S(F(2,1), F(0,1))} \, f(F(2,2)) g(F(0,0)) \,. \tag{1.0.19}$$

这里， $dF_m$ 是空间 $\{F \in \mathrm{Hom}(\Delta^2, G)$ 上的测度： $F(1,1) = m\}$ . 在右侧，我们将 $m$ 视为 $m$ . 处的单位态射

6. 此外，为了计算所有关联函数，人们可能希望为泊松流形配备一个体积形式。当然，辛叶本身已经带有一个（哈密顿不变的）体积形式。

本文后文将说明如何找到测度 $dF_m$，而它确实是一个测度。请注意，如果想避免使用并非群胚的单纯集合，可以用 $\mathrm{Pair}\{0,1,2\} \rightrightarrows \{0,1,2\}$ 替换 $\Delta^2$ ，而基本上其他一切都保持不变。

从图示上看，利用可复合对与态射 $\Delta^2 \to \Pi_1(T^*M)$ 的对应关系，1.0.19 可以表示如下：




秉承费曼的思想，我们可以将 $f \star g$ 解释为对所有路径求和，其中路径由李群胚中的箭头给出。采用 [6], 中给出的星乘积表述时，这些路径则是相应李2-群胚中的箭头。尽管这个σ模型是有限维的（也就是说，场空间是有限维的），但由于规范不变性，有时仍会遇到无穷大。不过，正如我们将要看到的，这些无穷大往往可以通过非微扰方法克服。

一种解释 $(f \star g)(m)$ 的方式，是将其视为乘积的群胚版本：由箭头连接的任意两个对象都是同构的，因此 $(f \star g)(m)$ 会对所有与 $m$ . 同构的对象 $fg$ “取平均”。

从上述定义可以清楚地看出，我们通过含有复指数核的积分来定义“乘积”，这在严格变形量子化／收敛乘积的公式中相当常见。若干示例见 [38] ，另见 [4]；关于收敛乘积的综述，请参见 [43]。

注 1. 我们在此强调，我们并未声称这些乘积是结合的，但我们将看到若干确实如此的例子。不过，即便乘积不满足结合律，我们仍然得到一个 $C^*$-代数，并希望它能构成严格量子化（如 0.4 节所述，在处理完所有无穷大之后）。

# 2 关键示例

现在我们来详细展开一个群胚值σ模型的例子。我们将从最基本的非平凡例子入手；从辛 $\mathbb{R}^2$ 的泊松σ模型出发，推导量子力学的各种表述。

关键在于以一种能将这些构造推广到其他泊松流形的方式来处理这个例子。第1至7点涉及从σ模型出发构造莫亚尔乘积（另见 [38]，其中给出了另一种推导）；第8至14点涉及构造 $C^*$-代数的不可约表示。这需要一些 $C^*$-代数理论（我们会加以说明）；相关参考资料见 [23], [36]。第15至16点涉及量子力学的相空间表述，其渊源可追溯至 Moyal、Weyl 和 Wigner，见 [17], [35], [47]。我们会在例6中进一步详述；但现在先来看：

例 1. 考虑常值辛结构 $(\mathbb{R}^2, \omega^{-1} = \partial_p \wedge \partial_q)$。

1. 参数空间和目标空间分别为 $\Delta^2$, $\Pi_1(T\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$（我们使用由辛形式给出的识别 $T\mathbb{R}^2 \cong T^*\mathbb{R}^2$）。也就是说，目标空间是 $\mathbb{R}^2$ 在自身上通过加法作用的作用群胚。我们可以将这个群胚简单记作 $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$.

2. 场是单纯空间的态射 $F\colon \Delta^2 \to \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$，其在次数 $n$ 时记作 $F^{(n)}$.。这些场可通过映射与 $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$ 中的可复合对对应起来：

$$F \mapsto F^{(2)}((2,1),(1,0))\,.$$

3. 余循环由下式给出：

$$S[(a',b',a+p,b+q),(a,b,p,q)] = \frac{a'b - b'a}{2}\,. \tag{2.0.1}$$

这是 平面上顶点为 $(p,q)$、$(a+p,b+q)$、$(a'+a+p,b'+b+q)$ 的三角形的面积 .

这个余循环可以通过对泊松σ模型进行规范固定得到，具体如下：首先，这个泊松σ模型中的场等价于映射 $X:\ |\Delta^2| \to \mathbb{R}^2$. 现在，给定 $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$ 中的任意可复合对，我们可以通过用直线连接顶点，正则地构造出一个 2-单形 $\partial X$ 的边界。无论我们如何填充这个 2-单形，都有

$$\int_{|\Delta^2|} X^*\omega = \text{symplectic area of the corresponding triangle in } \mathbb{R}^2\,,$$

这正是我们的余循环。

4. 利用场与可复合对之间的对应关系，我们得到如下对应关系：

$$\{F \in \mathrm{Hom}(\Delta^2, \mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2) : F(1,1) = (p,q)\} \cong \{\big((a',b',p,q),(a,b,p-a,q-b)\big)\} \subset (\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2)^{(2)}\,.$$

因此，前一个空间可识别为 $\mathbb{R}^4$，其坐标为 $(a',b',a,b)$。

5. 源纤维和目标纤维上有一个自然的哈尔测度，分别由 $t^*(dp \wedge dq) = da' \wedge db'$, $s^*(dp \wedge dq) = da \wedge db$ 给出。利用前面的对应关系，该测度为

$$dF_{(p,q)} = da' \wedge db' \wedge da \wedge db\,.$$

6. 对于 $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$，我们有

$$(f \star g)(p,q) = \frac{1}{(4\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^4} f(a'+p, b'+q) g(p-a, q-b) e^{\frac{i}{2\hbar}(a'b - b'a)}\, da'\, db'\, da\, db\,.$$

这里，$1/(4\pi\hbar)^2$ 是一个归一化常数，由 $1 \star 1 = 1$（$1 \star 1$ 应视为反常积分）确定。因此，我们真正感兴趣的测度是

$$\frac{1}{(4\pi\hbar)^2} da' \wedge db' \wedge da \wedge db\,.$$

通过变量替换，我们可以将其改写为：

$$(f \star g)(p,q) = \boxed{\frac{1}{(4\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^4} f(p'',q'')g(p',q')e^{\frac{i}{2\hbar}[(p''-p)(q-q')-(q''-q)(p-p')]}\,dp''\,dq''\,dp'\,dq'}. \tag{2.0.2}$$

这定义了一个结合乘积（见 [50]）。

7. 这是莫亚尔乘积的积分形式（见 [2]，），该乘积最初在此处提出）。它关于 $\hbar = 0$ 对 $\hbar$ 的渐近展开，给出了通常的莫亚尔乘积微扰形式（见 [30]）：

$$f \star g \sim m \circ e^{i\frac{\hbar}{2}\partial_p \wedge \partial_q}(f \otimes g) \quad (\hbar \to 0)\,,$$

这里 $m$ 表示乘法。通过使用驻相近似，对 $\hbar$ 求导并分部积分即可得到这一结果（见例 10）。

8. 如 0.4 节所述，与 $\star$ 相关联的自然 $C^*$-代数及其表示由以下对象的完备化给出： $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^2, dp \wedge dq)$ 上的左 $\star$-作用，其中完备化是相对于算子范数而言的。我们有 $\overline{f \star g} = \bar{g} \star \bar{f}$；事实上，复共轭给出了这个 $C^*$-代数内部 $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ 的对合。

9. 现在，要进行量子力学，只需选取一个态，它由希尔伯特空间中的归一化函数给出。不过，量子力学通常关注的是存在于不可约表示中的态，而这个态并非如此。不过， $C^*$-代数带有纯态的概念，纯态就是存在于不可约表示中的态。[7]

**De定义 7.** 单位元 $C^*$-代数 $\mathcal{A}$ 上的态是一个线性泛函 $\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$，满足 $t$

- $\rho(a^*a) \geq 0$ 对所有 $a \in \mathcal{A}$均成立，
- $\rho(1) = 1$.

态在凸组合运算下封闭。若一个态不能表示为不同态的凸组合，则称其为纯态；否则称其为混态。

现在，与希尔伯特空间上 $C^*$-代数的一个表示相关联的是向量态，这是量子力学中最常见的态的理解方式：

定义 8. 设 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是 $C^*$-代数在 $\mathcal{H}$. 上的一个表示。向量态是形如 $a \mapsto \langle \psi, a\psi \rangle$ 的态，其中 $\psi \in \mathcal{H}$.

根据 GNS 构造，每个态都可以在某个表示中表示为向量态。现在，对于每个 $\psi \in \mathcal{H}$，都关联着 $\mathcal{A}$ 的一个表示（包含 $\psi$ 的所有子表示的交集）。下面给出纯态与不可约性之间关系的定理：

定理 1.（见 *[23], [36]*）与 $\psi$ 关联的向量态是纯态，当且仅当关联的表示是不可约表示。

上述定理表明，不可约表示中的所有态都是纯态。

现在，在我们的表示中有许多向量态，其中一些定义了相同的态。因此，我们的态空间实际上是 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中归一化函数的一个商，其中 $\psi \sim \psi'$ 当它们定义相同的态时。此外，这个空间包含一个纯态子空间。定理 1 告诉我们，要在希尔伯特空间中找到纯态，只需寻找不可约表示即可（事实上，根据 Stone-von Neumann 定理，由于我们的希尔伯特空间确实包含一个不可约表示，它包含所有纯态）。

[7]见 [23], [36]。

10. 一个这样的不可约表示如下：由 2.0.2 给出的左作用保持如下形式的函数

$$\psi(p+iq)e^{-\frac{(p^2+q^2)}{2\hbar}}\,, \tag{2.0.3}$$

其中 $\psi(p+iq)$ 在 $z=p+iq$. 中是全纯的。因此，我们应考虑由形如 2.0.3 的函数生成的希尔伯特空间的闭子空间。函数 $z$、 $\bar{z}$ 的作用如下：

$$z\star\psi(z)e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}=z\psi(z)e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}\,,\qquad\qquad \bar{z}\star\psi(z)e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}=\Big[\hbar\frac{\partial}{\partial z}\psi(z)\Big]e^{-\frac{|z|^2}{2\hbar}}\,. \tag{2.0.4}$$

这就是塞格尔-巴格曼空间，是量子力学中常用的表示之一，参见 [26]。

11. 我们可以按以下方式为该代数生成子模（及子表示）：设 $a$、 $b$、 $c$、 $d\in\mathbb{C}$ 满足 $ad-bc=1$.。考虑 $A=aq+bp$、 $C=cq+dp$（于是 {A、C}=1）。[8]形如以下形式的函数

$$\psi(p,q)=e^{\frac{i}{2\hbar}(aq+bp)(cq+dp)}\psi(cq+qp) \tag{2.0.5}$$

构成该代数的一个子模。这里 $\psi(cq+dp)$ 应解释为满足 [9] 的函数

$$\frac{1}{2}\Big(d\frac{\partial}{\partial q}-c\frac{\partial}{\partial p}\Big)\psi=0\,, \tag{2.0.6}$$

而 $aq+bp$、 $cq+dp$ 的作用方式为

$$(aq+bp)\star\Big[e^{\frac{i}{2\hbar}(aq+bp)(cq+dp)}\psi(cq+qp)\Big]=e^{\frac{i}{2\hbar}(aq+bp)(cq+dp)}\Big[\frac{2\hbar}{i}\psi'(cq+dp)\Big]\,, \tag{2.0.7}$$

$$(cq+dp)\star\Big[e^{\frac{i}{2\hbar}(aq+bp)(cq+dp)}\psi(cq+qp)\Big]=e^{\frac{i}{2\hbar}(aq+bp)(cq+dp)}\big[2(cq+bp)\psi(cq+qp)\big]\,. \tag{2.0.8}$$

当然，这些子模是成对出现的，因为形如以下形式的函数

$$\psi(p,q)=e^{-\frac{i}{2\hbar}(aq+bp)(cq+dp)}\psi(aq+bp) \tag{2.0.9}$$

也必须构成一个子模（因为如果 $ad-bc=1$，那么 $c(-b)-d(-a)=1$）。因此，这族子模（本质上）包含通常的位置表象和动量表象，以及 Segal-Bargmann 表示。在 $a,b\in\mathbb{R}$, $|\psi(aq+bp)|^2$ 的情况下，它是进行相应测量时获得 $aq+bp$ 的概率密度。

12. 现在 $(f\star g)(p,q)$ 应该是一个三点函数（见 [11]）。一般来说，场 $\Phi$ 的函数的期望值由下式给出

$$\langle\Phi\rangle=\frac{1}{(4\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^6}\Phi(p'',q'',p',q',\mathfrak{p},\mathfrak{q})e^{\frac{i}{2\hbar}[(p''-p)(q-q')-(q''-q)(p-p')]}\,dp''\,dq''\,dp'\,dq'\,d\mathfrak{p}\,d\mathfrak{q}\,. \tag{2.0.10}$$

那么我们得到的是

$$(f\star g)(p,q)=\\ \frac{1}{(4\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^6}f(p'',q'')g(p',q')\delta_{(p,q)}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})e^{\frac{i}{2\hbar}[(p''-p)(q-q')-(q''-q)(p-p')]}\,dp''\,dq''\,dp'\,dq'\,d\mathfrak{p}\,d\mathfrak{q}\,. \tag{2.0.11}$$

这里， $\delta_{(p,q)}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ 对应于可观测量 $F\mapsto\delta_{(p,q)}(F(1,1))$。因此，我们确实有以下等式：

$$(f\star g)(p,q)=\langle\, f(F(2,2))g(F(0,0))\delta_{(p,q)}(F(1,1))\,\rangle\,. \tag{2.0.12}$$

[8]这些是经典力学意义上的正则坐标 [9]从某种意义上说，这是我们使用极化的唯一一处。

13. 给定函数 $f(p,q)$，我们可以通过两种不同的方式计算期望值：一种是通过 2.0.10 计算 $f$ 的期望值（对于任意固定的 $j=0$，1、2，我们可以定义 $f$ 为 $f(F)=f(F(j,j))$，它们的期望值都相同）；另一种是将期望值作为量子系统中的算符来计算。我们有以下关系：

$$\langle \hat{f} \rangle = \langle 1, f \star 1 \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} f(p,q)\, dp\, dq\,. \tag{2.0.13}$$

因此，计算结果一致——请注意，我们是在不可归一化的态 $h(p,q)=1$ 中计算期望值，不过我们总可以使用一个可归一化的态。事实上，我们使用的态是极大混合态，[10] 它本质上是一种假想的物理学家对波函数一无所知的态。

14. 我们来指出一个有趣（且众所周知）的性质：

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \star g\, dp\, dq = \int_{\mathbb{R}^2} fg\, dp\, dq\,. \tag{2.0.14}$$

这只是因为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 构成了一个 $C^*$-代数表示，也就是说，

$$\langle f \star g \rangle = \langle 1, f \star g \star 1 \rangle = \langle \overline{f} \star 1, g \star 1 \rangle = \langle \overline{f}, g \rangle\,. \tag{2.0.15}$$

15. 本质上，我们构造了量子力学的一种相空间算符表述。当然，还有一种可追溯至 Moyal、Weyl、Wigner 等人的量子力学相空间准概率分布表述。[11] 这些表述通过 Riesz表示定理彼此关联，如下所示：设 $\rho$ 是我们这个 $C^*$-代数上的一个态。根据 Riesz表示定理，存在一个 $P \in L^2(\mathbb{R}^2)$，使得对任意可观测量 $h(p,q)$，

$$\rho(h) = \langle W, h \rangle\,. \tag{2.0.16}$$

由此可知，$P$ 是实值函数，且

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(p,q)\, dp\, dq = 1\,, \tag{2.0.17}$$

因此我们称 $W$ 为准概率分布。随后，将这一构造应用于通常量子力学中的向量态，即可得到 Wigner 分布。也就是说，给定波函数 $\psi(q)$，Wigner 分布是一个实值函数 $W(p,q)$，其积分为 1，并且对于任意可观测量 $h(p,q)$，

$$\langle h, W \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \langle \psi, h \star \psi \rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,. \tag{2.0.18}$$

给定哈密顿量 $H(p,q)$，可观测量 $f$的时间演化与海森堡绘景中的情形相同，[12] 即由哈密顿方程给出：

$$\frac{df}{dt} = [f, H] := f \star H - H \star f\,. \tag{2.0.19}$$

$f_t(p,q)$的期望值就是 $\langle f_t,\ W \rangle$.

现在我们已经概述了本文，接下来将深入探讨细节，并给出更多示例。

[10] 极大混态是指密度矩阵与单位元成正比的态。可以证明，形式上，密度矩阵由 $\rho\ p\ q\ = \dfrac{}{}$ $\langle f \rangle =$ $\rho \star f$ $f\,.(\,,\,)\,(\ \frac{2\pi\hbar^{\ 2}}{\int_{\mathbb{R}^2} dp\, dq}\ )$ 给出，即 tr( )，适用于任意

[11] See [17], [35], [47]. [12] 不过，也可以使用薛定谔绘景来完成。

# 3 $(M,\Pi)$ 的高阶积分

本节将讨论 $\Pi_2(T^*M)$，它是一个积分泊松结构 $\Pi$ 的李2-群胚（参见 [49]）。第一步是定义单纯集合 $\Pi_\infty(T^*M)$。理想情况下，$\Pi_\infty(T^*M)$ 最终会成为一个 $\infty$-群胚，但一般而言尚无定论（尽管在某些情况下确实如此，参见 [21], [28]）。

提醒　　读者，在路径积分的语境下，我们将采用物理学层面的严谨性。

回忆一下，$|\Delta^n|$ 表示标准的 $n$-单纯形（即空间），我们用 $\Delta^n$ 表示单纯集合。

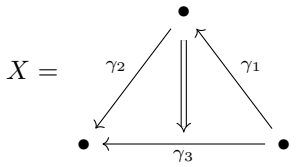
定义 9。（见 *[49]*）$\Pi_\infty(T^*M)$ 是由以下方式定义的单纯集合

$$\Pi_\infty^{(n)}(T^*M) = \{f \in Hom(\, T|\Delta^n|,\, T^*M\,) : f|_{vertices} = 0\}\,. \tag{3.0.1}$$

注意，这些是李代数丛的态射。因此，

1. $\Pi_\infty(T^*M)$ 的对象是 $M$ 中的点，记为 $m$.2. $\Pi_\infty(T^*M)$ 中的箭头是 $A$-路径，记为 $\gamma$（一般而言，我们可以用这种记法表示群胚中的箭头）。3. $\Pi_\infty(T^*M)$ 中的可复合对 [13] 由 $\mathrm{Hom}(T|\Delta^2|, T^*M)$ 给出，记为 $X$.4. $\Pi_\infty(T^*M)$ 中的可复合 $n$- 元组由 $\mathrm{Hom}(T|\Delta^n|, T^*M)$ 给出，记为 $X^{(n)}$（大多数时候，我们会对对象、箭头和可复合箭头使用前面的记法）。

对于一个可复合对 $X$，我们将三个边界分量（记为 $\gamma_1$、$\gamma_2$、$\gamma_3$）视为箭头。我们认为 $\gamma_3$ 是 $\gamma_2$ 与 $\gamma_1$ 的复合，并称 $X$ 复合为 $\gamma_3$。图示如下：




就本文而言，$\Pi_\infty(T^*M)$ 和 $\Pi_2(T^*M)$ 基本可以互换使用；不过，为了完整起见，能将其视为李2-群胚是件好事（而且它为泊松σ模型提供了一个部分约化相空间）。请注意，$\Pi_1(T^*M)$ 指的是源单连通辛群胚。

定义 10。（详情见 *[49]*）$\Pi_2(T^*M)$ 是一个李2-群胚，其对象空间和箭头空间与 $\Pi_\infty(T^*M)$ 相同，其可复合对由 $\Pi_\infty^{(2)}(T^*M)$ /$\Pi_\infty^{(3)}(T^*M)$ 给出，

[13] 严格来说，这些并非单纯的可复合箭头对，不过我们会使用这一术语。

# 4 几何量子化

这里我们将描述 $(M,\Pi)$ 在 $\Pi_\infty(T^*M)$ 上的几何量子化。我们对"几何量子化"一词的使用稍显宽泛：我们所用的并非辛形式，而是预辛形式——它是将辛形式拉回到余各向同性子流形上得到的闭二形式。

构造辛群胚之后，泊松流形几何量子化的第一步通常是选取一个带联络的乘法线丛，其曲率为辛形式；这也可以等价地描述为一个 2 次余循环。在 $\Pi_\infty(T^*M)$ 上有一个自然的预辛形式、联络和乘法线丛，不过我们大多只需要乘法线丛。

本文中有几处会用到李代数丛态射的同伦，这是一种对拓扑学中同伦概念的推广。相关参考文献（以及更广泛地说，关于构造群胚的参考文献）见 [5], [14], [15]。下面给出定义：

定义 11.（见 *[5]*）设 $A_1 \to M_1, A_2 \to M_2$ 是李代数丛。若存在一个态射 $F\colon A_1 \oplus TI \to A_2$，使得限制 $F|A_1\times\{0\}, F|A_1\times\{1\}$ 分别与 $f, f'$ 一致，则称两个态射$f, f'\colon A_1 \to A_2$同伦等价。这里，$I=[0,1]$和 $A_1\oplus TI$是 $A_1\times I$ .上的直积李代数丛

## 4.1 典范余循环

在定义典范余循环之前，我们先观察到，给定一个可复合的 $n$ 元组 $X^{(n)}\colon\ T\Delta^n \to T^*M$，我们可以拉回 $\Pi$，从而在 $\Delta^n$ 上得到一个二形式，其表达式为

$$(v,w)\mapsto \big(X^{(n)*}\Pi\big)(v,w) := \Pi(X^{(n)}(v), X^{(n)}(w))\,. \tag{4.1.1}$$

其中 $v$、$w\in T\Delta^n$ 是同一点处的向量。由于 $X^{(n)}$ 是李代数丛态射，我们有

$$dX^{(n)*}\Pi = X^{(n)*}d_\Pi\Pi = 0\,, \tag{4.1.2}$$

其中 $d_\Pi$ 是切瓦利-埃伦伯格微分[14]（注意 $d_\Pi(\Pi) = [\Pi,\Pi]=0$）。接下来我们可以定义一个映射

$$\Pi^{(2)}_\infty(T^*M)\to\mathbb{R}\,,\ X\mapsto S[X] := \int_{|\Delta^2|} X^*\Pi\,, \tag{4.1.3}$$

其中 $S$ 可称为"作用量"。该映射是 $\Pi_\infty(T^*M)$ 上的一个 2-余循环，这可由以下事实得出：对于一个可复合的三元组 $X^{(3)}\colon\ T\Delta^3\to T^*M$，

$$(\delta^*S)(X^{(3)}) = \int_{\partial\Delta^3} X^{(3)*}\Pi = \int_{\Delta^3} dX^{(3)*}\Pi = 0\,, \tag{4.1.4}$$

这里我们用到了斯托克斯定理和式（4.1.2）。现在我们可以将作用量取指数，从而得到一个取值于 $S^1$ 的余循环：

定义 12. $\Pi_\infty(T^*M)$（或 $\Pi_2(T^*M)$）上的典范余循环由 $X\mapsto e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}$ .给出

[14]参见 11。

这个余循环与层复形[15]上的另一个余循环相吻合

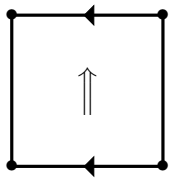
$$\mathcal{O}^* \xrightarrow{\mathrm{dlog}} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \cdots , \tag{4.1.5}$$

由三元组 $(e^{\frac{i}{\hbar}S}, \theta, \omega)$ 给出 .[16] 这意味着

$$d\omega = 0,\ \delta^*\omega = 0,\ d\theta = \omega,\ \delta^*\theta = i\hbar\,\mathrm{dlog}\, e^{\frac{i}{\hbar}S[X]},\ \delta^* e^{\frac{i}{\hbar}S[X]} = 1\,. \tag{4.1.6}$$

这里， $\theta, \omega$ 是定义在 $\Pi^{(1)}_\infty(T^*M)$ 上的 1-形式和 2-形式，可以用如下方式描述：对于一个空间 $A$，令 $PA$ 表示其路径空间，即映射 $[0,1] \to A$. 所构成的空间。现在， $\Pi^{(1)}_\infty(T^*M)$ 是 $P(T^*M)$ 的一个（无限维）余各向同性子流形；后者带有一个（Liouville）1-形式和一个 $\tilde{}$（辛）2-形式，分别记为 $\theta, \tilde{\omega}$, 这是利用如下识别 $P(T^*M) \cong T^*(PM)$ 得到的。接着，我们可以将这些形式拉回到 $\Pi^{(1)}_\infty(T^*M)$ 上，从而得到 $\theta, \omega.$。这使得 $\Pi_2(T^*M)$ 成为一个预辛 2-群胚[17]。当辛群胚 $\Pi_1(T^*M)$ 存在时，其辛形式通过约化得到；在我们将要讨论的某些条件下， $\Pi_2(T^*M)$ 的几何量子化会下降为 $\Pi_1(T^*M)$ 的几何量子化（形式的详细信息及明确描述见 [6], [15]）。

这由 [6] 中命题 2 的第一段得出。也就是说，考虑一个态射$X$： $T\square \to T^*M$ （$\square$ 是平面上的一个正方形），其图示如下：

$X =$ 

我们可以将这个态射视为定义了一条从底部箭头 $\gamma_0$ 到顶部箭头 $\gamma_1$的路径 $\gamma_s$，如图所示。我们有

$$\int_\square X^*\Pi = \int_{[0,1]} \gamma^*\theta \tag{4.1.7}$$

这个 1-形式 $\theta$ 在相应的乘法线丛上定义了一个联络，我们稍后将讨论这一点。

注2。实际上，考虑如下单纯空间或许能做得更好：它在次数 $n$ 上的部分由所有向量丛态射 $(X_n, \eta_n)$ : $T|\Delta|^n \to T^*M$ 构成；将此空间记为 $V^n$。根据上述讨论， $V^1$ 带有一个 1-形式和一个（弱）辛形式，[18] 而 0.1.2 的第一部分在 $V^2$ 上定义了一个实值函数，即 $(X_2, \eta_2) \to \int_{|\Delta|^2} \eta_2 \wedge dX_2.$。因此，我们得到 $V^\bullet$ 上一个次数为 2 的上链，其在 $\Pi_\infty(T^*M)$ 上的拉回就是我们的余循环／几何量子化。因此， $V^\bullet$ 上的这个上链定义了一种“通用”的几何量子化。这应与“量子化与约化可交换”相比较，参见 *[22]*。关于如何进行辛约化的细节，另见 *[12]*。

注 3. 将映射 $X \mapsto \int_\Delta X^*\Pi$ 指派给 $\Pi$，应被视为高阶群胚上 van Est 映射的逆的一种体现。也就是说，给定任意李代数丛 $A \to M$ 和任意次数 $n$

[15]严格来说，我们只应在次数高于 0 时于单纯空间上使用这个层复形；而在次数 0 时，也就是在 $M$ 上，应放入平凡的层复形 $\{e\} \to \{e\} \to \cdots$.。这在 [31] 中以“截断”一词作了讨论。[16]我们不需要了解所有细节。[17]关于预辛流形的更多内容，请参见 [42]。弱的意思是，诱导映射 $TV^1 \to T^*V^1$ 是单射，但不是满射。

在 $A$ 上的代数丛形式 $\alpha$，我们得到一个定义在可复合的 $\Pi_\infty$ 的 $n$-元组（$A$）上的映射，其定义如下：

$$X^{(n)} \mapsto \int_{\Delta^n} X^{(n)*}\alpha\,, \tag{4.1.8}$$

我们将把 $\alpha$ 映射到上述函数的映射记为

$$\int : \alpha \mapsto \int \alpha\,, \tag{4.1.9}$$

$\int \alpha$ 是余循环这一点可由斯托克斯定理以及以下事实推出：由于 $X^{(n)}$ 是李代数丛态射，

$$dX^{(n)*}\alpha = X^{(n)*} d_{CE}\,\alpha\,, \tag{4.1.10}$$

其中 $d_{CE}$ 是切瓦利-埃伦伯格微分。映射 4.1.9 应当定义 $A$ 的上同调与 $\Pi_\infty(A)$ 的上同调之间的一个同构；对于良好的余循环，还可以在上链层面描述其逆映射。从这个角度来看，德拉姆定理应当是适用于高阶群胚的 van Est 同构定理的一个特例。也就是说，令 $A = TX$，其中 $X$ 是某个流形，我们知道 4.1.9 确实是一个同构，因为这恰恰是德拉姆定理所述的内容。

## 4.2 单纯集合 $\mathbf{\Pi_\infty(T^*M \oplus_\Pi \mathbb{C})}$

既然我们已经描述了余循环，接下来便可以描述与之关联的乘法线丛 $\mathcal{L} \to \Pi_\infty(T^*M)$。在此之前，我们将描述一个单纯集合，并将其视为由 2-余循环 $\Pi$[19] 所确定的典范中心扩张的“$\infty$-群胚”（或 2-群胚）的积分：

$$0 \to M \times \mathbb{C} \to T^*M \oplus_\Pi \mathbb{C} \to T^*M \to 0\,. \tag{4.2.1}$$

我们将这个单纯集合记作 $\Pi_\infty(T^*M) \oplus_\Pi \mathbb{C}^*$.我们将描述低次数时的单纯集合；更高次数时的情况类似：在次数 $n$，该集合由下式给出

$$\Pi_\infty^{(n)}(T^*M) \times \mathbb{C}^{*n}\,. \tag{4.2.2}$$

箭头上的目标映射和源映射由下式给出

$$d_0(\gamma,\lambda) = d_0(\gamma)\,,\ d_1(\gamma,\lambda) = d_1(\gamma)\,. \tag{4.2.3}$$

在可复合对上，面映射由下式给出

$$d_0(X,\lambda_1,\lambda_2) = (d_0(X),\lambda_2)\,,\ d_1(X,\lambda_1,\lambda_2) = (d_1(X),\lambda_1\lambda_2 e^{iS[X]})\,, \tag{4.2.4}$$

$$d_2(X,\lambda_1,\lambda_2) = (d_2(X),\lambda_1)\,. \tag{4.2.5}$$

面映射在次数为一和二时最为重要。对于可复合的三元组，面映射为

[19]参见 11。

$$d_0(X^{(3)},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(d_0(X^{(3)}),\lambda_2,\lambda_3)\,, \tag{4.2.6}$$
$$d_1(X^{(3)},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(d_1(X^{(3)}),\lambda_1\lambda_2 e^{iS[d_3(X^{(3)})]},\lambda_3)\,, \tag{4.2.7}$$
$$d_2(X^{(3)},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(d_2(X^{(3)}),\lambda_1,\lambda_2\lambda_3 e^{iS[d_0(X^{(3)})]})\,, \tag{4.2.8}$$
$$d_3(X^{(3)},\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(d_3(X^{(3)}),\lambda_1,\lambda_2) \tag{4.2.9}$$

## 4.3 乘法线丛 $\mathcal{L}\to\Pi_\infty(T^*M)$

现在，我们将 4.2.2 中的 $\mathbb{C}^*$ 替换为 $\mathbb{C}.$，从而得到一个新的单纯集合。也就是说，在次数 $n$ 时，该集合为

$$\Pi_\infty^{(n)}(T^*M)\times\mathbb{C}^n\,. \tag{4.3.1}$$

并且单纯映射其余部分与上一节相同。存在一个自然映射

$$\Pi_\infty^{(n)}(T^*M)\times\mathbb{C}^n\to\Pi_\infty^{(n)}(T^*M) \tag{4.3.2}$$

在每个次数上。我们将其视为乘法线丛，并记作 $\mathcal{L}\to\Pi_\infty(T^*M)$ .

## 4.4 扭曲卷积代数

现在我们已经定义了乘法线丛，可以开始定义扭曲卷积代数了。首先给出定义：

定义 13. 将 $\mathcal{L}\to\Pi_\infty(T^*M)$ 的截面定义为 $\mathcal{L}^{(1)}\to\Pi_\infty^{(1)}(T^*M)$ 的截面。为简便起见，我们可以称它们为 $\mathcal{L}$ 的截面。这些截面可以视为映射

$$Hom(T\Delta^1,T^*M)\to\mathbb{C}\,. \tag{4.4.1}$$

现在，我们将仿照李群胚上的做法来定义扭曲卷积代数。

定义 14. 设 $s_1$、$s_2$ 是 $\mathcal{L}.$ 的截面。它们的卷积是 $\mathcal{L}$ 的另一个截面，定义为

$$(s_1*s_2)(\gamma)=\int_{d_1(X)=\gamma}s_1(d_0(X))s_2(d_2(X))\,e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,dX\,, \tag{4.4.2}$$

其中 测度归一化为 $1\star 1=1$ （其中 1 是常值截面 $\gamma\mapsto(\gamma,1)$ ）.

注4. 若取 $s_1=\lambda_1\delta_{\gamma_1}$ , $s_2=\lambda_2\delta_{\gamma_2}$ ，则可以形式地计算

$$(\lambda_1\delta_{\gamma_1}*\lambda_2\delta_{\gamma_2})(\gamma)=\lambda_1\lambda_2\int_{\substack{d_0(X)=\gamma_2,\\ d_1(X)=\gamma,d_2(X)=\gamma_1}}e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,dX\,. \tag{4.4.3}$$

如果 $(M,\Pi)$ 是辛的，且 $\gamma_1$、$\gamma_2$、$\gamma$ 是拉格朗日子流形，那么这在形式上类似于 Fukaya范畴中的乘积（见 *[37]*）。

# 5 乘积

现在我们已经定义了扭曲卷积代数，可以用它在 $C^\infty(M)$ 上的函数之间定义一个乘积。为此，我们需要将 $\mathcal{L}$ 的截面与 $C^\infty(M)$ 中的函数关联起来。我们选择 $|\Delta^1|$（区间）上的一个一般点来完成此事，即任意一个非端点。我们取 $t = 1/2$ . 为这个一般点

ˆ 令 $\pi\colon T^*M \to M$ 表示投影。给定 $f \in C^\infty(M)$，我们通过定义得到一个 $\mathcal{L}$ 的截面 $\hat{f}$

$$\hat{f}(\gamma) := f(\pi(\gamma(1/2)))\,, \tag{5.0.1}$$

由此可将 $C^\infty(M)$ 与 $\mathcal{L} \to \Pi_\infty(T^*M)$ 的截面视为空间中的一个子空间。注意，对于 $m \in M$，将 ˆ 视为常值路径时，$\hat{f}(m) = f(m)$。现在我们可以在 $C^\infty(M)$ 上定义一个新的乘积。

定义 15。我们在 $C^\infty(M)$ 上定义一个乘积：

$$(f \star g)(m) := (\hat{f} * \hat{g})(m)\,, \tag{5.0.2}$$

其中 $m \in M$，并且在上述等式右侧，我们使用了将 $C^\infty$ 与 $\mathcal{L}$ 的截面相识别的方式

具体而言，我们有：

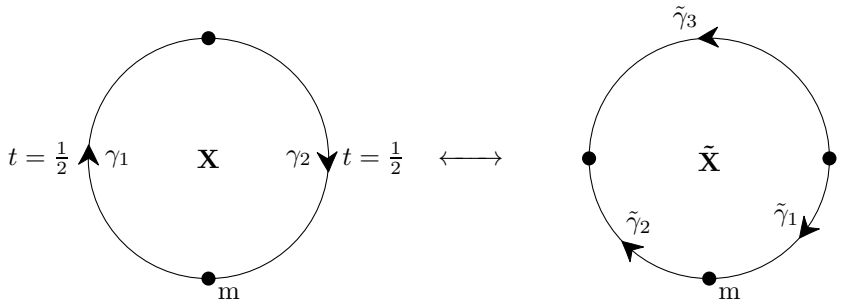
$$(f \star g)(m) = \int_{X \text{ composes to } m} \hat{f}(\gamma_2)\,\hat{g}(\gamma_1)\,e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,dX \tag{5.0.3}$$

$$= \int_{X \text{ composes to } m} f(\pi(\gamma_2(1/2)))\,g(\pi(\gamma_1(1/2)))\,e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,dX\,, \tag{5.0.4}$$

其中测 度归一化，使得 $1 \star 1 = 1$ . 这与 [6] 中方程 3.45 的乘积相同 .

# 6 有限维相空间

很快我们将讨论一种将乘积 $\star$ 化简为有限维积分的方法（针对规范不变可观测量，我们稍后会讨论）。在此之前，我们先重写这个积分。在下图中，考虑左侧的可复合对 $X$，其中 $\gamma_2 \circ \gamma_1 \Rightarrow \mathrm{Id}_m$，且每个箭头的标记点位于 $t = 1/2$ . 我们可以选取圆盘 $h$ 的一个微分同胚 $D^2 \to \tilde{D^2}$，使其固定标记点，并令复合 $X \circ h$ 得到右侧的可复合对 $X$，其中 $\tilde{\gamma_2} \circ \tilde{\gamma_1} \Rightarrow \tilde{\gamma}_3$ .




本质上，我们只是以另一种方式将 $X$ 视为可复合对；这类似于李群胚 $G.$ 的微分同胚 $G^{(2)}$，由 $(g_2, g_1) \mapsto (g_2^{-1}, g_2 g_1)$ 给出。因此，我们无需在左侧对所有可复合对积分，而可以在右侧 $\tilde{}$ 对所有可复合对积分，也就是说，我们对所有满足 $\pi(\tilde{\gamma}_1(1)) = \pi(\tilde{\gamma}_2(0)) = m.$ 的可复合对 $X$ 积分。令$s(\gamma) = \pi(\gamma(0))$ $t(\gamma) = \pi(\gamma(1))$。这样，我们就可以将乘积重写为

$$(f \star g)(m) = \int_{\tilde{X}} t^* f(\tilde{\gamma}_2)\, s^* g(\tilde{\gamma}_1)\, e^{\frac{i}{\hbar} S[\tilde{X}]}\, d\tilde{X}\,. \tag{6.0.1}$$

这样做的好处是，如果

$$\int_{S^2} \tilde{X}^* \Pi = 0\,, \tag{6.0.2}$$

对于所有代数丛态射 $\tilde{X}\colon TS^2 \to T^*M$，那么现在 $f \star g$ 的被积函数可以写成源单连通积分 $\Pi_1(T^*M)$ 上有意义的量。

$\tilde{X} \mapsto e^{\frac{i}{\hbar} S[\tilde{X}]}$ 下降到群胚的含义如下：虽然余循环本身不会作为一个取值于 $S^1$ 的映射下降到可复合对上，但它确实会作为一个乘法线丛下降（我们稍后将对此作更详细的讨论）。这个线丛有一个平凡化，它在 $G.$ 中的可合成箭头上诱导出一个取值于 $S^1$ 的余循环 $e^{\frac{i}{\hbar} S_0[\cdot,\cdot]}$。这个余循环总可以选取为满足以下性质：

1. $VE(S_0) = \Pi\,,$
2. $S_0[g_2, g_1] = -S_0[g_1^{-1}, g_2^{-1}]\,.$

第一个条件表明，将 van Est 映射（见 11）应用于 $S_0$ 会得到代数丛余循环 $\Pi$；第二个条件则是一个反对称条件，这类似于 $X \mapsto \int_{|\Delta|^2} X^*\Pi$ 在反转 $|\Delta^2|.$ 的定向时改变符号这一事实。应当将其理解为通过辛约化得到的结果，见注2。

# 7 泊松流形的 C*-代数

这里我们将介绍一种为泊松流形赋予 $C^*$-代数的方法，具体做法是将 6.0.1 解释为对 $\Pi_1(T^*M)$（源单连通积分）的积分。目前我们假设 $(M, \Pi)$ 是可积的，并且

$$\int_{S^2} X^* \Pi = 0 \tag{7.0.1}$$

对于所有代数丛态射 $X\colon TS^2 \to T^*M$ .我们稍后会讨论更一般的情形。目前我们需要一个余循环和一个测度。要查看完整的实例，请参见 2。

## 7.1 余循环

根据 van Est 同构定理（见 3），条件 7.0.1 是存在次数为 2 的余循环 $S$ on $\Pi_1(T^*M)$ 的充要条件，使得

$$VE(S) = \Pi\,, \tag{7.1.1}$$

其中 $VE$ 是 van Est 映射，作用于上链层面。现在给定这样一个余循环，我们通过如下定义得到一个新的˜余循环 $S$

$$\tilde{S}(g_2, g_1) = \frac{S(g_2, g_1) - S(g_1^{-1}, g_2^{-1})}{2}\,. \tag{7.1.2}$$

˜我们仍有 $VE(S) = \Pi$，并且还满足反对称性

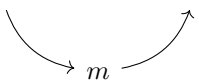
$$\tilde{S}(g_2, g_1) = -\tilde{S}(g_1^{-1}, g_2^{-1})\,, \tag{7.1.3}$$

因此我们总可以假设该余循环是反对称的。这与 Kontsevich 在 [30]第 3 页所作的评论类似：星乘积中一阶微分算子的对称部分总能通过规范变换消去；至少，当我们的群胚是源单连通时，任何对称二余循环都是上同调平凡的，这是 van Est 同构定理所致。我们将在例 10 中回到这一点。

采用反对称余循环的好处在于，我们将要构造的 $C^*$-代数的对合就是复共轭。随后，通过构造 $e^{\frac{i}{\hbar}S}$，我们得到一个 $S^1$ 值余循环，这与 $e^{\frac{i}{\hbar}\int_\Delta X^*\Pi}$ .类似

## 7.2 测度

˜现在我们有了余循环，接下来需要讨论 6.0.1 中测度 $dX$ 的对应物。给定一个 $m \in M$，这将是一个定义在以 $m$ 为终点和起点的可合成箭头空间上的测度，即




要找到这个测度，取 $T^*M$ . 上的一个顶次形式。通过左、右平移，它分别在 $\Pi_1(T^*M)$ 上诱导出左、右哈尔测度 $d\mu$ [20]。这就在每个源纤维和目标纤维上给出一个测度，并由此在每个 $m \in M$ . 上诱导出测度 $s^{-1}(m) \times t^{-1}(m)$。我们将这个测度记为 $d\mu_m \otimes d\mu_m$ .

需要指出的是，若每个各向同性群都是幺模的，那么哈尔测度在相差一个卡西米尔函数的意义下是唯一可选的，也就是说，相差一个在辛叶上为常数的函数。为此，取一个 $m \in M$ . 。给定 $g \in s^{-1}(m)$，位于 $t(g)$ 的各向同性群在

[20]正如我们很快将看到的，有时存在更好的不变测度选取方法。

$$t|_{s^{-1}(m)} : s^{-1}(m) \to M \tag{7.2.1}$$

之上 $t(g)$，因此，位于 $t(g$之上的各向同性群的哈尔测度会诱导出该纤维上的测度。因此，在包含 $m$ 的 $\mathcal{L}_m$ 辛叶上，为每个各向同性群平滑地选取哈尔测度，会在 $t|_{s^{-1}(m)}$ ·的纤维上诱导出测度

此外，辛叶还具有一个与其辛形式相联系的自然体积形式，记作$\omega^n$，其中 $n =$(维数 $\mathcal{L}_m$)/2 .。沿辛叶的测度与沿纤维的测度共同在全空间上诱导出一个测度，即 $s^{-1}(m)$ 上的测度。对每个 $m \in M$ 都这样做，便确定了 $G$ . 上的一个右哈尔测度。同理，我们也得到一个左哈尔测度。

现在，上一段所述的哈尔测度只在相差一个定义于 $M$ .上的函数的意义下确定。然而，给定辛叶上的任意两点及它们之间的一个箭头，我们就得到各向同性群之间的一个同构，而任意两个这样的同构相差一个内自同构。由于假设各向同性群是幺模的，它们的哈尔测度是双不变的，因此在内自同构下不变。所以我们得到以下结论：

引理 1. 设 $(G \rightrightarrows M, \omega)$ 是定义在 $(M, \Pi)$ 上的辛群胚，且所有各向同性群都是幺模的。那么，除相差一个卡西米尔函数外，哈尔测度有一个规范的选取。

当然，紧李群具有典范的哈尔测度，并且由于紧李群是幺模的，我们得到：

引理 2. 设 $(G \rightrightarrows M, \omega)$ 是定义在 $(M, \Pi)$ 上的辛群胚，且所有各向同性群都是紧致的。那么，存在一种典范的哈尔测度选取。

例 2. 设 $(M, \omega)$ 是一个辛流形。其各向同性群为 $\{e\}$，因此它们是紧致的，并且带有唯一的归一化测度。我们有，$s^*\omega$、$t^*\omega$ 分别是 $\Pi_1(M)$ 上的左、右哈尔测度。

In t在下一小节中，我们将（特别）讨论测度 $d\mu_m$ .的归一化

## 7.3 乘积

设 $(M, \Pi)$ 是一个泊松流形，$G \rightrightarrows M$ 是对其进行积分的李群胚。那么，给定一个满足 6.0.2 的余循环 $S$，以及如上一小节所讨论的、对每个 $m \in M$ 定义在 $s^{-1}(m) \times t^{-1}(m)$ 上的测度 $d\mu_m$，我们形式化地定义乘积为[21]

$$\boxed{(f \star g)(m) = \frac{1}{C_m} \int_{s^{-1}(m) \times t^{-1}(m)} d\mu_m \otimes d\mu_m \, (t^* f)(s^* g) e^{\frac{i}{\hbar} S}}, \tag{7.3.1}$$

其中 $C_m$ 是归一化参数，其定义满足 $1 \star 1 = 1$（其中 $1 \star 1$ 被视为反常积分）。它由下式给出：

[21]从形式上看，这与 6.0.1 相同。

$$C_m = \int_{s^{-1}(m)\times t^{-1}(m)} d\mu_m \otimes d\mu_m \, e^{\frac{i}{\hbar}S} \,. \tag{7.3.2}$$

我们使用"形式上"这个术语，是因为可能存在导致 7.3.1 出现某些发散问题的对称性。在我们看到的所有例子中，余循环在各向同性群的恒等连通分支的作用下保持不变——$\Pi$. 也是如此。处理这一问题有两种方法：一种是令各向同性群上的不变测度仅具有限可加性，以便使用（有限可加的）概率测度，[22]；另一种是用对称性对积分域（即相空间）取商，并在商空间上积分。我们将在下面的例子中进一步讨论这一问题：

例 3。最简单的泊松流形是流形 $M$. 上的 0-泊松结构。群胚是向量丛 $T^*M \rightrightarrows M$，余循环为零。在这种情况下，辛叶是点，各向同性为 $\mathbb{R}^n$，其中 $n = \dim \mathrm{M}$。对于哈尔测度，一种选择是勒贝格测度 $d^n x$ . 。方程 7.3.1 化为

$$(f \star g)(m) = \frac{1}{C_m} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d^n x \, d^n y \, f(m) g(m) \tag{7.3.3}$$

$$= \frac{f(m)g(m)}{C_m} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d^n x \, d^n y \,, \tag{7.3.4}$$

并且由于形式上 $C_m = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d^n x \, d^n y$，这就得到 $f(m)g(m)$。然而，由于归一化参数 $C_m = \infty$，这说明我们不应使用勒贝格测度。

方法 1：

请注意，如果我们改为在有界域上积分并取极限，一切都会顺利进行。因此，我们将这些方程理解为说明应在 $\mathbb{R}^n$ 上使用不变概率测度，而不是勒贝格测度。由于 $\mathbb{R}^n \rightrightarrows *$ 是可和的，它具有有限可加的不变概率测度（或不变均值） $d\mu$；用此测度重新进行计算可得 $C_m = 1$，并且

$$(f \star g)(m) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} d\mu(x) \, d\mu(y) \, f(m) g(m) = f(m) g(m) \,. \tag{7.3.5}$$

方法 2：

处理无穷大的第二种方法是进一步缩减积分的相空间。在这种情况下，由于可观测量和余循环在各向同性上保持不变，我们可以对整个各向同性群取商，因此只需在点 $\{m\}$ 上积分，而该点有唯一的概率测度 $\mu$ . 。这样做可得

$$(f \star g)(m) = \int_{\{m\}} d\mu \, f(m) g(m) = f(m) g(m) \,. \tag{7.3.6}$$

因此，这两种方法都给出了预期的 $f \star g = fg$ .

[22]参见 [41]。

## 7.4 处理无穷大

下面详细阐述上一小节讨论的两种处理无穷大的方法；当余循环在各向同性的某个子群作用下保持不变时，可能会出现无穷大。

方法 1：有限可加概率测度

李群上存在唯一的左（且右）不变测度，差一个常数因子[23]；这称为哈尔测度。然而，若将可数可加性放宽为有限可加性，这种唯一性便不再必然成立。可和群是指存在相对于哈尔测度所关联的 σ-代数的有限可加左（或右）不变概率测度的群，例如阿贝尔群、紧群、幂零群（见 [41]）。如例 3 所示，有时可以使用这些有限可加的左（或右）不变概率测度，而非哈尔测度来处理无穷大。

方法 2：对规范对称性取商

设 $m \in M$ .，$(f \star g)(m)$ 的被积函数为

$$t^* f(\gamma_2) s^* g(\gamma_1)\ e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_2, \gamma_1]} .$$

现在，由于 $G \rightrightarrows M$ 在 $m$ 上的各向同性 $G_m$ 同时作用于 $t^{-1}(m)$ $s^{-1}(m)$ $G_m \times G_m$ 作用于 $t^{-1}(m) \times s^{-1}(m)$，因此它通过 [24] 作用于被积函数

$$\left[(k_2, k_1) \cdot [t^* f][s^* g]\ e^{\frac{i}{\hbar} S}\right](\gamma_2, \gamma_1) = t^* f(\gamma_2 \cdot k_2) s^* g(k_1 \cdot \gamma_1)\ e^{\frac{i}{\hbar} S[\gamma_2 \cdot k_2, k_1 \cdot \gamma_1]} . \tag{7.4.1}$$

当然，$G_m \times G_m$固定了 $t^* f\, s^* g$，但一般而言它不会固定 $e^{\frac{i}{\hbar} S}$ .。不过，假设存在一个子群$H_m \subset G_m$，使得 $H_m \times H_m$固定了 $e^{\frac{i}{\hbar} S}$ .。那么，我们可以尝试对

$$t^{-1}(m) \times s^{-1}(m) / (H_m \times H_m) \cong t^{-1}(m)/H_m \times s^{-1}(m)/H_m \tag{7.4.2}$$

改为积分。注意，取闭包后，我们可以假设 $H_m \subset G_m$ 是闭的。回顾映射

$$t|_{s^{-1}(m)} : s^{-1}(m) \to \mathcal{L}_m \tag{7.4.3}$$

是一个主 $G_m$丛，其中 $\mathcal{L}_m$ 是经过 $m \in M$ . 的辛叶。沿纤维对 $H_m$取商后，我们得到一个纤维为 $G_m/H_m$ 的纤维丛：

$$t|_{s^{-1}(m)/H_m} : s^{-1}(m)/H_m \to \mathcal{L}_m . \tag{7.4.4}$$

当然，$\mathcal{L}_m$ 仍然具有与辛形式相关联的自然测度。因此，为了在 $s^{-1}(m)/H_m$ 上获得测度，我们只需要在 $G_m/H_m$ . 上有一个测度。我们有以下定理：

[23]通常将其表述为不变均值。[24]这里，$(k_1, k_2) \in G_m \times G_m$，而$(\gamma_2, \gamma_1) \in t^{-1}(m) \times s^{-1}(m)$。

定理 2。（见 *[24],* 第 1 章）设 $G$ 是一个李群， $H \subset G$ 是一个闭子群。当且仅当 $\Delta_G|_H = \Delta_H$ 时， $G/H$ 上存在一个 $G$-不变测度 $\mu_{G/H}$，其中 $\Delta_G$、 $\Delta_H$ 分别是相应的模函数。在这种情况下，$\mu_{G/H}$ 具有如下性质：对于任意的 $f \in L^1(G)$，有

$$\int_{G/H} \Big( \int_H f(gh) d\mu_H \Big) d\mu_{G/H} = \int_G f(g)\, d\mu_G \,, \tag{7.4.5}$$

即沿纤维 $H$ 积分，再沿底空间 $G/H$ 积分，与对 $G$ .积分相同

上述定理特别说明，如果 $H$、 $G$ 都是幺模的，那么在 $G/H$ . 上存在这样的测度。举例来说，只要 $G$ 是紧致、阿贝尔或幂零的，情况总是如此。

在例 3 中，余循环在整个各向同性群作用下保持不变，因此

$$t^{-1}(m) \times s^{-1}(m)/(H_m \times H_m) \cong \{m\} \,. \tag{7.4.6}$$

## 7.5 C*-范数与对合

最后，假设我们成功处理了无穷大，使积分收敛，那么对合由复共轭给出（这是由于余循环满足反对称条件），而 $C^*$-范数由算子范数给出（这与群胚上的约化 $C^*$-代数范数非常相似，见 [8], [27]）。

## 7.6 关于乘积的结合性

乘积 7.3.1 当且仅当它在 δ 函数上是结合的时才是结合的，也就是说，结合性等价于

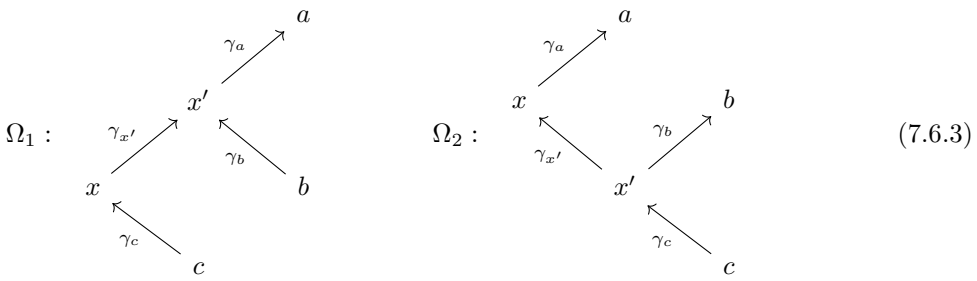
$$(\delta_a \star \delta_b) \star \delta_c = \delta_a \star (\delta_b \star \delta_c) \,, \tag{7.6.1}$$

对所有 $a$、 $b$、 $c \in M.$，我们可以这样理解：对所有 $x \in M$，[25] 是必要且充分的

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_1} e^{\frac{i}{\hbar}[S(\gamma_a,\gamma_b)+S(\gamma_{x'},\gamma_c)]}\, d\gamma_a\, d\gamma_b\, d\gamma_c\, d\gamma_{x'}\, \omega_{x'}^n \\ &= \int_{\Omega_2} e^{\frac{i}{\hbar}[S(\gamma_a,\gamma_{x'})+S(\gamma_b,\gamma_c)]}\, d\gamma_a\, d\gamma_b\, d\gamma_c\, d\gamma_{x'}\, \omega_{x'}^n \,, \end{aligned} \tag{7.6.2}$$

其中 $n$ 是经过 $x$ .的辛叶的维数的一半。明确地说， $a$、 $b$、 $c$、 $x$ 是固定的。积分域 $\Omega_1, \Omega_2$ 由所有如下形式的图表给出，其中 $\gamma$是群胚中的箭头，而 $d\gamma$是由 7.3.1 得到的诱导测度：

[25]这是假设我们已经处理了任何无穷大。




(7.6.3)

在例6中，我们将用此来证明莫亚尔乘积的结合性。

# 8 关　　系：群胚与泊松σ模型

到目前为止，我们还没有详细讨论群胚值σ模型以何种意义计算规范不变可观测量的关联函数。在 [11] 中，作者认为两个态射$X_1$、$X_2$：$T|\Delta^2| \to T^*M$是规范等价的，当且仅当 $\partial X_1 = \partial X_2$：$T\partial|\Delta^2| \to M$，也就是说，如果两个态射在边界上相同，它们就等价。关于与泊松σ模型相关的一些规范群的深入讨论，见 [5], [12], [7], [11]。这里我们将概述规范等价的基本思想。基本上，这种关系如下：在辛约化下，

$$\text{Geometric quantization of } \Pi_2(T^*M) \rightsquigarrow \text{Geometric quantization of } \Pi_1(T^*M)\,, \tag{8.0.1}$$
$$f \star g \text{ with respect to } \Pi_2(T^*M) \rightsquigarrow f \star g \text{ with respect to } \Pi_1(T^*M)\,, \tag{8.0.2}$$

回顾一下，$\Pi_\infty^{(1)}(T^*M)$的约化相空间是 $\Pi_1^{(1)}(T^*M)$（见 [12]），因此我们实质上是在我们于 $\Pi_2(T^*M)$上构造的量子化上进行约化。参见第0.3节和注2。

我们希望采用稍粗略一些的规范等价。我们不再要求两个态射$X_1$、$X_2$：$T|\Delta^2| \to T^*M$仅在边界上相同才等价，而是认为：若三个边界分量在固定端点的条件下李代数丛同伦等价，则它们等价。也就是说，$d_iX_1 \sim d_iX_2$作为映射 $Td_i|\Delta^2| \to T^*M$、$i = 0$、1、2，其中$d_i|\Delta^2|$、$i = 0$的端点在整个同伦过程中保持固定。等价地，若 $X_1$、$X_2$：$T|\Delta^2| \to T^*M$在映射 $\Pi_\infty(T^*M) \to \Pi_1(T^*M)$下于 $\Pi_1^{(2)}(T^*M)$中的像相同，则认为它们等价。

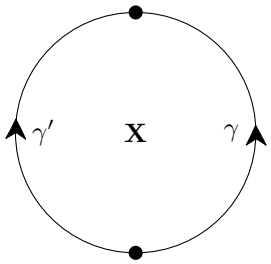
现在考虑由余循环 $e^{\frac{i}{\hbar}S[\tilde{X}]}$. 在 $\Pi_\infty(T^*M)$ 上诱导的乘法线丛，如 [11], 所示，假设

$$\int_{S^2} X^*\Pi = 2\pi\hbar\mathbb{Z}, \tag{8.0.3}$$

对于所有态射 $X$：$TS^2 \to T^*M$，这个乘法线丛都下降到 $\Pi_1(T^*M)$。这可以通过以下构造看出（类似的构造见 [11] ）：考虑空间 $(\Pi_\infty^{(1)}(T^*M) \times \mathbb{C})/\sim$，其中

$$(\lambda, \gamma) \sim (\lambda e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}, \gamma') \tag{8.0.4}$$

如果 $X$：$TD \to T^*M$ 是一个从带有两个标记点且边界为 $\gamma$、$\gamma'$ 的圆盘出发的态射，如下图所示：




现在根据假设 8.0.3，向量空间中位于同一 $\gamma$ 上的任意两个点都不会被识别，因此它下降为一个线丛。我们将等价类中的点记为 $[(\lambda,\gamma)]$ . 投影定义为

$$[(\lambda,\gamma)]\mapsto[\gamma]\,. \tag{8.0.5}$$

乘法定义为

$$[(\lambda,\gamma_2)]\cdot[(\beta,\gamma_1)]=[(\lambda\beta e^{\frac{i}{\hbar}S[X]},\gamma_3)], \tag{8.0.6}$$

其中， $[\gamma_3]=[\gamma_2]\cdot[\gamma_1]$ 和 $X\colon\ T|\Delta^2|\to T^*M$ 是任意将 $\gamma_1$、$\gamma_2$ 复合为 $\gamma_3$. 的态射。这个乘积定义良好，并由此在 $\Pi_1(T^*M)$ .[26] 上定义了一个乘法线丛

现在有一点值得注意：考察 6.0.1 可知，我们在定义可观测量时，隐式地使用了常值截面 $s(\gamma)=1$ 。问题在于，被积函数实际上并非规范不变，这是因为常值截面并非规范不变；也就是说，它不能下降为 $\Pi_1(T^*M)$ 上的乘法线丛的截面。等价地说，常值截面沿映射的纤维并非协变常数

$$\Pi^{(1)}_\infty(T^*M)\to\Pi^{(1)}_1(T^*M)\,,$$

相对于刘维尔联络而言。为了解决这个问题，我们必须使用一个规范不变且处处非零的截面来定义可观测量。这样的截面的存在实际上意味着一个比 8.0.3 更强的条件：对于所有态射 $X\colon\ TS^2\to T^*M$,

$$\int_{S^2}X^*\Pi=0\,. \tag{8.0.7}$$

线丛 $h$ 的截面： $\Pi^{(1)}_\infty(T^*M)\ \to\mathbb{C}$ 可下降，当且仅当对于任意 $X\colon\ TD\to T^*M$形变 $\gamma$ 至 $\gamma'$,

$$h(\gamma')=h(\gamma)e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,. \tag{8.0.8}$$

给定这样一个截面，并假设其满足 $h|_M=1$，我们将在 6.0.1 中改用以下可观测量： $\gamma\mapsto h(\gamma)t^*f(\gamma)$ $\gamma\mapsto h(\gamma)s^*g(\gamma)$。使用这些可观测量，6.0.1 将替换为

$$(f\star g)(m)=\int_X h(\gamma_2)t^*f(\gamma_2)\,h(\gamma_1)s^*g(\gamma_1)\,h(\gamma_3)^{-1}e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}\,dX\,. \tag{8.0.9}$$

[26]乘法线丛的存在性是通过上同调方法在 [31], 中证明的，另一个不同的证明见 [49]。

$h(\gamma_3)^{-1}$ 的出现源于这样一个事实：在 $\gamma_2$上的乘法线丛中，点$\gamma_1$ 的乘积是 $\gamma_3$ 上的一个点，而我们需要将这个点与 $m$ 上的一个点等同起来（因为积分本质上涉及将不同向量空间中的点相加）。现在来分析如何

$$h(\gamma_2)t^*f(\gamma_2)\,h(\gamma_1)s^*g(\gamma_1)\,h(\gamma_3)^{-1}e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}$$

在保持角点不变的情况下， $X$的边界经同伦变化时，我们看到，$h(\gamma_2)h(\gamma_1)h(\gamma_3)^{-1}$ 的贡献恰好抵消了 $e^{\frac{i}{\hbar}S[X]}$ 的贡献，因此这个被积函数是规范不变的。等价地，在商映射 $q\colon \Pi_\infty^{(2)}(T^*M) \to \Pi_1^{(2)}(T^*M)$下，8.0.9 可以写成

$$(f\star g)(m) = \int_X t^*f(\gamma_2)s^*g(\gamma_1)\,e^{\frac{i}{\hbar}q^*\tilde{S}[X]}\,dX\,, \tag{8.0.10}$$

其中 $\tilde{S}$是 $\Pi_1(T^*M)$上的一个 2-余循环，我们将假设（这总是可以做到）[27]是反对称的，并且经 van Est 映射映到 $\Pi$ 。利用规范不变性，我们便形式上得到 7.3.1，即

$$(f\star g)(m) = \int_{s^{-1}(m)\times t^{-1}(m)} d\mu_m \otimes d\mu_m\,(t^*f)(s^*g)e^{\frac{i}{\hbar}\tilde{S}}\,.$$

例 4。在莫亚尔乘积的例子中，截面 $h$. 有一个规范选择。如果 $\gamma$ 是测地线，则我们定义 $h(\gamma) = 1$. 这便确定了所有 $\gamma$.上的 $h$

# 9 示例

本节将介绍等式 (7.3.1) 的一些示例。我们先来看一些已知会使代数 $C_c^\infty(M)$ 发生变形的示例。

## 9.1 严格变形量子化

例5. 设 $(M, 0)$ 是具有零泊松结构的流形。我们已在上一节证明， $f\star g = fg$. The $C^*$-代数就是 $L^\infty(M,\mathbb{C})$。

例6. 考虑常数辛结构 $(\mathbb{R}^2, dp\wedge dq)$。我们在第2节详细讨论了这个例子；此处将使用条件 7.6.2 证明结合性（此证明改编自 [50]）。乘积定义为

$$(f\star g)(p,q) = \frac{1}{(4\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^4} f(p'',q'')g(p',q')e^{\frac{i}{2\hbar}[(p''-p)(q-q')-(q''-q)(p-p')]}\,dp''\,dq''\,dp'\,dq'\,. \tag{9.1.1}$$

现在根据条件 7.6。 2，对于所有 $(p''',q''',p'',q'',p',q',x,y) \in$，结合性等价于以下等式

[27]要了解为实现这一点必须如何选取截面，请参阅 [46] 第 184 页的注释。

$\mathbb{R}^6$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{2\hbar}[(p'''-x')(y'-q'')-(q'''-y')(x'-p'')+(x'-x)(y-q')-(y'-y)(x-p')]}dx'dy'$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{2\hbar}[(p'''-x)(y-y')-(q'''-y)(x-x')+(p''-x')(y'-q')-(q''-y')(x'-p')]}dx'dy' \,. \tag{9.1.2}$$

为验证该等式成立，我们对 $x', y'.$ 进行积分。上述积分分别等于:

$$\delta(q''-q'''+y-q')\delta(p'''-p''-x+p')e^{\frac{i}{2\hbar}[-p'''q''+q'''p''+xq'-yp']}\,, \tag{9.1.3}$$
$$\delta(q'''-y+q'-q'')\delta(x-p'''+p''-p')e^{\frac{i}{2\hbar}[p'''y-q'''x-p''q'+q''p']}\,, \tag{9.1.4}$$

¯而且，事实上，这两者相等。此外，性质 $\overline{f\star g}=\bar{g}\star f$ 可由余循环的反对称性和变量替换推出，即:

$$\overline{f\star g} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\bar{f}(p'',q'')\bar{g}(p',q')e^{-\frac{i}{2\hbar}[(p''-p)(q-q')-(q''-q)(p-p')]}\,dp''\,dq''\,dp'\,dq' \tag{9.1.5}$$
$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{\mathbb{R}^4}\bar{g}(p',q')\bar{f}(p'',q'')e^{\frac{i}{2\hbar}[(p'-p)(q-q'')-(q'-q)(p-p'')]}\,dp''\,dq''\,dp'\,dq' \tag{9.1.6}$$
$$= \bar{g}\star\bar{f}. \tag{9.1.7}$$

通过计算 $f\star g$ 在 $\hbar$ 处的 $\hbar=0.$ 的渐近展开，我们得到一个星乘积。为此，可使用驻相近似并结合分部积分（我们将在例 10 中进一步详细说明）。

回顾一下例 2 中的例子：莫亚尔乘积可以看作相关泊松σ模型的一种规范固定。与此相关的是，对于任意具有非正截面曲率的黎曼流形，任意两个点之间的每个路径同伦类中都存在一条唯一的测地线（见 [19]）。这也可用于得到接下来两个例子中的余循环。

例 7。考虑辛二维环面（$T^2$,$\omega$）。在这种情况下，利用 $f,g$的周期性，公式 (7.3.1) 可化简为

$$(f\star g)(\theta,\phi)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2\pi\hbar)^2}\int_{[-2\pi n,2\pi n]^4}d\theta_1 d\phi_1 d\theta_2 d\phi_2\, f(\theta_1,\phi_1)g(\theta_2,\phi_2)e^{\frac{i}{\hbar}\omega((\theta-\theta_2,\phi-\phi_2),(\theta-\theta_1,\phi-\phi_1))}\,,$$

这实质上等同于将 $f,g$ 拉回到万有覆盖上，并在那里使用莫亚尔乘积。这里我们认为 $(\theta,\phi)$ 属于 $[0,2\pi]^2\subset\mathbb{R}^2$ .。事实上，可以验证

$$\boxed{e^{i\theta}\star e^{i\phi}=e^{i\hbar}e^{i\theta}e^{i\phi}\,,\; e^{i\phi}\star e^{i\theta}=e^{-i\hbar}e^{i\theta}e^{i\phi}},$$

因此，$e^{i\theta}\star e^{i\phi}=e^{2i\hbar}e^{i\phi}\star e^{i\theta}$ . 配备通过使用算子范数得到的自然 $C^*$-代数后，该代数就是非交换环面（其中对合为复共轭）。

例 8. 令 $G$ 为海森堡群，并考虑 $\mathfrak{g}^*$. 上的自然泊松结构。辛群胚为 $G \ltimes \mathfrak{g}^* \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$. 注意，指数映射 $\mathfrak{g} \to G$ 是一个微分同胚，因此我们将 $G$ 和 $\mathfrak{g}$ 视为同一个空间，其中后者按通常方式由（$a$， $b$， $c$）参数化，即。

$$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9.1.8}$$

乘积可以通过 Baker-Campbell-Hausdorff公式定义，即。

$$X \cdot Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y]\,. \tag{9.1.9}$$

在对偶基底 $(x, y, z) \in \mathfrak{g}^*$ 上，余伴随作用由下式给出

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (x + zb, y - za, z)\,. \tag{9.1.10}$$

因此，对于 $z \neq 0$，辛叶是二维的；对于 $z = 0$.，辛叶是点。注意，在这些坐标下，泊松结构由下式给出

$$\Pi = \frac{1}{2} z \partial_x \wedge \partial_y\,. \tag{9.1.11}$$

$z \neq 0$ 的各向同性由 $\{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\}$给出，而 $z = 0$ 的各向同性由 $\{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ 给出

现在我们已经描述了群胚，接下来描述余循环。有一个自然映射 $h : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$，其定义为

$$(X, f) \mapsto f(X)\,, \tag{9.1.12}$$

而我们感兴趣的余循环是[28]

$$\delta^* h(X, Y, f) = \frac{1}{2} f[X, Y]\,. \tag{9.1.13}$$

用坐标表示，这给出

$$\delta^* h(a', b', c', a, b, c, x, y, z) = \frac{z(ab' - ba')}{2}\,. \tag{9.1.14}$$

显然，余循环在整个各向同性群作用下保持不变，因此我们可以用方法一或方法二对相空间进行约化，二者得到的结果相同。使用方法 2 稍微简单一些，因为我们对整个各向同性群取商，将 $f \star g$ 化为一个只涉及辛叶及典范辛形式的积分。对于 $z \neq 0$，这给出

$$(f \star g)(x, y, z) = \boxed{\frac{1}{(2\pi z\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(x'', y'', z) g(x', y', z) e^{\frac{i}{z\hbar}((x''-x)(y'-y)-(x'-x)(y''-y))}\, dx''\, dy''\, dx'\, dy'}\,, \tag{9.1.15}$$

并且对于 $z = 0$，乘积为 $(f \star g)(x, y, 0) = (fg)(x, y, 0)$。

这是一个结合的乘积，并且通过使用算子范数，我们得到一个 $C^*$-代数，其中对合为复共轭。

[28]我们稍后会解释这一推导。

由于海森堡群是幂零的，因此可以按照 Rieffel 处方对这个泊松结构进行变形量子化；虽然这一点并非一目了然，但结果相同。

我们指出，对于固定的 $z$，9.1.15 是带有 $\hbar \to z\hbar$ 的 Moyal 乘积（因此特别地，它是结合的）。因此，对于每个辛叶 $\mathcal{L}_z$，我们都得到这个代数的一个 $\star$-表示，记作 $\mathcal{H}_{\mathcal{L}_z}$.。对所有辛叶上的希尔伯特空间取直和，即

$$\bigoplus_{z\in\mathbb{R}} \mathcal{H}_{\mathcal{L}_z}\,, \tag{9.1.16}$$

我们得到这个 $C^*$-代数的一个表示。之所以能在希尔伯特空间的直和上得到这个表示（每个辛叶对应一个希尔伯特空间），是因为 $\star$-乘积是切向的（即，乘积限制在辛叶上）。当然，经典地说，泊松流形上的粒子被限制在一个辛叶上。因此，从这个意义上说，切向乘积不会表现出量子隧穿。

例 9。让我们推广常辛结构的例子，以得到完整的 Moyal 乘积。考虑向量空间 $(V,\Pi)$ 上的一个常泊松结构。其源单连通积分为 $G = V^* \times V$，其源映射、目标映射和乘法定义如下：

$$s(v,x) = x\,,\; t(v,x) = x + \Pi(v,\cdot)\,,\; m(v',v,x) = (v'+v,x)\,, \tag{9.1.17}$$

余循环由下式给出

$$S(v',v,x) = \pi(v,v')\,. \tag{9.1.18}$$

现在，这个余循环在各向同性下保持不变，即 $S(v'+b,v+a,x) = S(v',v,x)$，其中 $a\,,b$ 满足 $\pi(a,\cdot) = \pi(b,\cdot) = 0$.。因此，我们将使用方法 2，并对各向同性取商。乘积为 [29]

$$(f\star g)(m) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{2n}}\int_{L_m\times L_m} \omega_x^n\otimes\omega_y^n\, f(x)g(y)\, e^{\frac{i}{\hbar}\Pi(x-m,y-m)}\,, \tag{9.1.19}$$

再次如前所述，我们得到一个 $C^*$-代数。这个结果与 [27] 中的结果一致。

备注 5. 我们再次看到，与海森堡李代数对偶的例子一样，给定两个对象之间的任意态射 $\gamma\in V^*\times V$，都存在一个典范态射 $\tilde\gamma\in\Pi_\infty(T^*V)$；除去包含在各向同性中的一条路径外，此结论成立，而我们的余循环 $S$ 是典范余循环的拉回。

例 10. 来看最后一个例子。我们将再次考虑 $(\mathbb{R}^2, dx\wedge dy)$，但采用不同的余循环。事实上，在这个例子中，我们将使用一个非反对称的余循环。我们会看到，仍然可以得到一个变形量子化，不过它具有前几个例子所没有的性质。

这次我们将用 $\mathrm{Pair}(\mathbb{R}^2) \rightrightarrows \mathbb{R}^2$. 来描述群胚。任意两个对象之间都有唯一的箭头，因此我们将用 $(x',y',x,y)$ 表示一个箭头，并用 $(x'',y'',x,y,x',y')$ 表示一个可复合对。考虑

$$h(x',y',x,y) = \varepsilon y'y, \tag{9.1.20}$$

[29]有时我们使用 $2\hbar$ 而不是 $\hbar$ 作为参数，但这只是约定。

对于 $\varepsilon \in \mathbb{R}.$，我们有 $d_{\mathrm{CE}}VE(h) = 0$，并且由于 $VE$ 是一个余链映射（见 **11**），因此可得$VE(\delta^* h) = 0.$。具体而言，

$$\delta^* h(x'', y'', x, y, x', y') = \varepsilon(yy' - y'y'' + yy''). \tag{9.1.21}$$

现在考虑这个余循环

$$S[x'', y'', x, y, x', y'] = (x'' - x)(y - y') - (y'' - y)(x - x') + \varepsilon(yy' - y'y'' + yy''). \tag{9.1.22}$$

这与 2 中的余循环相同，只是增加了 $\delta^* h$，因此 $VE(S) = \partial_x \wedge \partial_y$.

现在第一步是进行归一化，即我们希望 $1 \star 1 = 1.$ 我们有

$$1 \star 1 = \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\left[(x''-x)(y-y')-(y''-y)(x-x')+\varepsilon(yy'-y'y''+yy'')\right]} dx''dy''dx'dy' . \tag{9.1.23}$$

首先对 $x''$、$x'$ 积分，得到

$$(2\pi\hbar)^2 \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \delta(y - y')\delta(y'' - y) e^{\frac{i}{\hbar}\left[-x(y-y')-(y''-y)x+\varepsilon(yy'-y'y''+yy'')\right]} dy''dy' \tag{9.1.24}$$

$$= (2\pi\hbar)^2 e^{\frac{i}{\hbar}\varepsilon y^2} . \tag{9.1.25}$$

因此，**7.3.1** 为

$$(f \star g)(x, y) = \tag{9.1.26}$$
$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f(x'', y'')g(x', y') e^{\frac{i}{\hbar}\left[(x''-x)(y-y')-(y''-y)(x-x')+\varepsilon(yy'-y'y''+yy''-y^2)\right]} dx''dy''dx'dy' .$$

此外，根据驻相近似（参见 [3]）

$$\lim_{\hbar\to 0}(f \star g)(m) = f(m)g(m). \tag{9.1.27}$$

现在我们将证明，这个乘积给出了 $\partial_x \wedge \partial_y$. 的变形量子化。考虑 $\frac{d}{d\hbar}(f \star g)(m)$。分部积分后，我们发现它等于

$$\frac{-i}{(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \left(\partial_{x''}\partial_{y'} - \partial_{x'}\partial_{y''}\right) f(x'', y'')g(x', y') e^{\frac{i}{\hbar}S[x'',y'',x,y,x',y']} dx''dy''dx'dy'$$
$$- \frac{2i\varepsilon}{(2\pi)^2\hbar^4} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f(x'', y'')g(x', y') (y'' - y)(y' - y) e^{\frac{i}{\hbar}S[x'',y'',x,y,x',y']} dx''dy''dx'dy' . \tag{9.1.28}$$

现在，根据驻相近似，**9.1.28** 中的第一个积分在 $\hbar \to 0$ 时收敛到 $i\{f, g\}$，因此我们只需计算第二个积分。作如下变量替换：

$$Y'' = y'' - y,\ Y' = y' - y,\ X'' = x'' - x,\ X' = x' - x. \tag{9.1.29}$$

于是我们的积分变为[30]

$$-\frac{2i\varepsilon}{(2\pi)^2\hbar^4} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} fg\, Y'Y'' e^{\frac{i}{\hbar}[-X''Y'+Y''X'-Y'Y'']} dX''dY''dX'dY' . \tag{9.1.30}$$

[30]为简洁起见，我们省略了 $f$、$g$ 的参数。

现在，指数函数 $-X''Y'+Y''X'-Y'Y''$ 在 $(X''、\ Y''、\ X'、\ Y')$ =(0, 0, 0, 0) 处有一个非退化的唯一临界点，因此我们的思路是使用驻相近似。原则上，驻相近似只能告诉我们积分 $\sim (2\pi\hbar)^2$ 在 $\hbar \to 0$ 时的情况，但这还不够，因为分母中有一个 $\hbar^4$。受莫尔斯引理的启发，我们作如下代换：[31]

$$A = \frac{X'' + Y'}{2},\ B = \frac{X'' - Y'}{2},\ C = \frac{Y'' + X' - y}{2},\ D = \frac{Y'' - X' + y}{2}\,. \tag{9.1.31}$$

于是我们的积分变为

$$\frac{2i\varepsilon}{(2\pi)^2\hbar^4} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} fg\,(A-B)(C+D) e^{\frac{i}{\hbar}[-A^2+B^2+C^2-D^2]}\,dA\,dB\,dC\,dD\,. \tag{9.1.32}$$

现在，经过分部积分，我们发现这等于

$$-\frac{i\varepsilon}{2(2\pi\hbar)^2} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} [(\partial_A + \partial_B)(\partial_C - \partial_D) fg]\, e^{\frac{i}{\hbar}[-A^2+B^2+C^2-D^3]}\,dA\,dB\,dC\,dD\,, \tag{9.1.33}$$

并且当 $\hbar \to 0$趋于 $-i\frac{\varepsilon}{2}\,\partial_y f(x,y)\partial_y g(x,y)$ 时。因此，我们有

$$(f \star g)(x,y) \sim f(x,y)g(x,y) - i\hbar\big[\{f,g\}(x,y) + \frac{\varepsilon}{2}\,\partial_y f(x,y)\partial_y g(x,y)\big] \quad (\hbar \to 0)\,. \tag{9.1.34}$$

由此可得

$$f \star g - g \star f \sim -2i\hbar\{f,g\} \quad (\hbar \to 0)\,. \tag{9.1.35}$$

现在我们看到了这个例子与前面几个例子的区别： $f \star g$在 $\hbar$ 中的一阶项并不只是泊松括号，它还包含一个对称部分。正如 Kontsevich 在 [30]（第 3 页）中指出的，对称部分总是可以通过规范变换消去。在此情形下，规范变换为

$$f \to f - i\hbar\frac{\epsilon}{4}\partial_y^2, \tag{9.1.36}$$

since $-f\partial_y^2 g + \partial_y^2(fg) - g\partial_y^2 f = 2\partial_y f\,\partial_y g$.

事实上，9.1.35 的对称部分对应于我们余循环 $\varepsilon(yy'-y'y''+yy'')$ 的对称部分。关于这一点的简要讨论，请参见 7.1。

## 9.2 指数李群与半单李群的李-泊松结构

对于与指数李群（即 $\exp:\ \mathfrak{g} \to G$ 是微分同胚的李群）和半单李群相关的泊松结构，在辛

[31]并感谢 Willie Wong 在这方面提供的帮助 [48]。

群胚 $G \ltimes \mathfrak{g}^* \rightrightarrows \mathfrak{g}^*$ 上存在具有所需性质的典范二阶余循环，现将对此进行描述。首先请注意，在 $T^*\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}$ 上存在一个典范的李代数丛 1-形式，其定义如下：

$$\alpha(f, v) = f(v)\,. \tag{9.2.1}$$

这个 1-形式的重要意义在于， $d_{CE}\alpha$ 是泊松结构，其中 $d_{CE}$ 是 Chevalley-Eilenberg 微分。

例11。设 $G$ 是一个指数李群。那么在 $G \times \mathfrak{g}^*$ 上有一个典范函数，定义如下：

$$\tilde{\alpha}(g, f) = f(\log g)\,. \tag{9.2.2}$$

现在我们有 $VE(\tilde{\alpha}) = \alpha$，又因为 $VE$ 是一个余链映射，所以可得 $VE(\delta^*\tilde{\alpha})$ 是泊松结构。由此可知，$\delta^*\tilde{\alpha}$ 的反对称化具有所需的性质，因此我们可以将其取作余循环。

指数群中一类特别优美的例子是幂零李群。这类群之所以优美，是因为 Baker-Campbell-Hausdorff公式只有有限多项；我们可以将指数映射与李代数上的恒等映射等同起来。在这种情况下，哈尔测度就是底层向量空间上的勒贝格测度。

例12。设 $G$ 是一个半单李群。我们可以使用 Killing 型，其定义为

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}\,, (X, Y) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_X \mathrm{Ad}_Y)\,, \tag{9.2.3}$$

通过它将 $\mathfrak{g}^*$ 与 $\mathfrak{g}$ 识别，因此我们将李代数丛与 $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ 识别，并可将辛群胚与 $G \ltimes \mathfrak{g} \rightrightarrows \mathfrak{g}$. 识别。此时典范一形式 $\alpha$ 可描述为

$$\alpha_X(Y) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_X \mathrm{Ad}_Y)\,. \tag{9.2.4}$$

在 $G \times \mathfrak{g}$ 上有一个自然函数，其定义为

$$\tilde{\alpha}(g, X) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_X)\,, \tag{9.2.5}$$

且 $VE(\tilde{\alpha}) = \alpha$，因此和前一个例子一样，对 $\delta^*\tilde{\alpha}$ 进行反对称化便得到我们所需的余循环。

这个例子的最佳情形是 $G$ 紧致，因为此时不存在发散问题。我们可以将 $\star$ 写成如下形式[32]：

$$\boxed{(f \star k)(X) = C_{X,\hbar} \int_{G \times G} dg\, dg'\, f(\mathrm{Ad}_g X) k(\mathrm{Ad}_{g'} X) e^{\frac{i}{\hbar} S(g, g', X)}}\,, \tag{9.2.6}$$

其中

$$S(g, g', X) = \frac{1}{2}\left[\delta^*\tilde{\alpha}(g, g', X) - \delta^*\tilde{\alpha}(g'^{-1}, g^{-1}, \mathrm{Ad}_{gg'} X)\right], \tag{9.2.7}$$

$$\tilde{\alpha}(g, X) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_X)\,. \tag{9.2.8}$$

这里 $dg$ 是 $G$ 上的归一化哈尔测度，而 $C_{X,\,\hbar}$ 是归一化参数，在这种情况下，它沿辛叶保持不变（即它是一个卡西米尔函数），而 $C_{0,\,\hbar} = 1$.

[32]唯一需要检查的是 $C_{X,\,\hbar} \neq 0$ 对于任意 $X$.，至少我们知道 $C_{X,\,\hbar} \neq 0$ 在 $X = 0$.附近

这个乘积满足

$$\overline{(f \star k)} = \bar{k} \star \bar{f} \tag{9.2.9}$$

并且该乘积是 $G$-等变的，含义如下

$$(g \cdot f) \star (g \cdot k) = g \cdot (f \star k)\,. \tag{9.2.10}$$

因此，与 $\star$ 关联的 $C^*$-代数带有一个 $G$-作用量，因为

$$(g \cdot f) \star k = g \cdot (f \star (g^{-1} \cdot k))\,. \tag{9.2.11}$$

该 $G$-作用量保持对合和范数。

将 $G = SU(2)$ 特化，并将 $\star$限制在一个一般的辛叶上，我们得到一个 $SU(2)$-等变映射，它从 $L^2(S^2)$ 映入受限的 $C^*$- 代数。Rieffel 的结果（见下一小节）表明 $\star$ 是非结合的，因此，这（很可能）至多构成了对 $C^\infty(S^2)$ 的严格量子化（但不是严格变形量子化）。

注意，对于 $GL_n(\mathbb{C})$ 的半单子群，可以通过改写 Killing 型得到更简单的余循环选项。例如， $\mathfrak{su}(n)$ 上的 Killing 型等于 $2n\mathrm{tr}(XY)$，因此可以用 $\tilde{\alpha}(g, X) = \mathrm{tr}(gX)$ 代替 9.2.5。

### 9.2.1 结合性

在结束之前，我们应当讨论例 11 和例 12 的结合性。我们已经见过一个例子，其中 2.0.10 是结合的（海森堡群的例子）。不过，一般而言，这似乎不太可能，因为 [20] 中表明，某些幂零李群不存在切向星乘积。但也有一种可能的例外：如果余循环在单位双截面之外存在临界点，那么 $\hbar$ 中在 $\hbar = 0$ 处的渐近展开未必会给出 [30] 意义下的星乘积。

对于半单李代数的对偶， [10] 中也证明了存在切向星乘积的类似障碍。此外， [40] （例 14）指出，不存在保持 $SO(3)$ 作用量的辛 $S^2$ 的严格变形量子化。当然，这并不意味着不存在保持 $SO(3)$ 作用量的辛 $S^2$ 的严格量子化（见 0.4）。

对于正则泊松流形， [34] 证明了形式切向乘积（但不一定是星乘积）的存在性（注意，海森堡李代数的对偶不是正则的，因此这并非充要条件）。与此相关的是 Weinstein 1 的猜想。

## 10 总结

概括而言，基于 Bonechi、Cattaneo、Felder 和 Zabzine 在泊松σ模型方面的工作，我们从形式上证明了 Kontsevich 星乘积可以由李2-群胚的几何量子化得到。随后，我们将泊松σ模型解释为取值于高阶群胚的σ模型，并指出，如果能够在量子化中进行辛约化（包括处理无穷大），那么就可以利用一个（非微扰的）群胚值σ模型来计算规范不变可观测量的关联函数。[33]

有一点尚不明确：如何按照 [27] 的含义，将这项工作与几何量子化精确联系起来。李-2群胚的几何量子化以及群胚值σ模型，都与泊松流形的通常几何量子化有许多共同之处，但两者都不尽相同——极化如何参与其中尚未完全明晰，尽管在某种意义上，约化会用到极化。

[33]同样，我们对规范等价的定义比 [6] 中的定义更宽泛。

现在，即使在乘积不具结合性的情况下，我们仍能得到 $C^*$-代数，它们或许可以构成严格量子化。[34] 因此，即使切向变形量子化不存在，切向严格量子化仍有可能存在。一些可能的例子来自紧致半单李群。

让我们从泊松σ模型以及由 0.1.1 给出的原始乘积的角度来考察这一切。考虑 $S^2$ 这一例子，其具有 $SO$(3)不变的辛结构。Rieffel 证明，不存在能够保留 $SO$(3)作用的 $S^2$ 严格变形量子化（见[40]）。如果这种情况下存在泊松σ模型的非微扰定义，那么作者预期它会通过使用算子范数，诱导出 $S^2$ 的严格变形量子化。然而，由于它不可能是 $SO$(3)不变的，这可能意味着 0.1.1 实际上并非 $SO$(3)不变（尽管泊松结构是不变的），或者乘积不具结合性，或者乘积相对于算子范数不连续。请注意，Kontsevich 对 [30] 中星乘积结合性的证明，仅表明围绕常数临界点展开时，0.1.1 是微扰结合的。

现在来讨论本文中一些思想的推广。首先，在群胚值σ模型中，并非必须使用源单连通积分；我们之所以使用它，只是因为如果某个 2-余循环存在于任意一个 1-群胚上，那么它也会存在于源单连通的群胚上。不过，例如对于李代数的对偶，我们可以使用任意积分。此外，要求余循环是反对称的也并非必要。再者，我们并未怎么用到群胚上的光滑结构（主要只在单位双截面附近用到），因此，即使泊松结构不可积，也有可能以类似方式进行构造。

最后，如果条件 8.0.7 不成立，可以尝试两种方案。一种是将泊松流形嵌入另一个流形，使其成为闭子流形，然后尝试通过量子化环境泊松流形来获得量子化，正如我们在例12中所做的那样。另一种方案是使用 $T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R} \to M$ 的积分来完成本文中的所有构造；也就是说，我们不把这些构造应用于积分 $T^*M \to M$ 的群胚，而是将其应用于积分$T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R} \to M$ 的群胚，其中 $T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R} \to M$ 是 $T^*M$ 的自然扩张：

$$0_M \to \mathbb{R} \to T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R} \xrightarrow{p} T^*M \to 0_M\,. \tag{10.0.1}$$

唯一的区别在于，我们不再寻找满足 $VE(S) = \Pi$ 的 $S$ 在 $\Pi_1(T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R})$ 上的余循环，而是寻找满足 $VE(S) = p^*\Pi$. 的 $S$ 在 $\Pi_1(T^*M)$ 上的余循环。只要 $\Pi_1(T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R})$ 存在，这样的余循环总是存在，因为 $p^*\Pi$ 在上同调中（典范地）是平凡的。如果该余循环满足 [6], 中使用的必要条件，那么 $T^*M \oplus_\Pi \mathbb{R}$ 就是可积的。

## 致谢

在 撰写本文期间，我与 Alberto S. Cattaneo 通过电子邮件进行了几次有益的交流 .

# 11 附录

这里我们将简要讨论本文所需了解的上同调和 van Est 映射。我们在这里所做的一切都适用于更广泛的情境，但这里只陈述本文所需的内容。有关这些主题的参考资料，请见 [13], [27], [31], [32], [33], [46]。

## 11.1 单纯空间的上同调

[34]参见 0.4。

Let $S^\bullet$ 是一个单纯空间。存在一个微分 $\delta^*$ : $C(S^{(n)},\mathbb{R}) \to C(S^{(n+1)},\mathbb{R})$，由 b 给出 y

$$\delta^* f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^* f \,, \tag{11.1.1}$$

其中 $d_i$ : $S^{(n+1)} \to S^{(n)}$、$i = 0$、.....、$n$ 是相应的面映射。作为一个微分，$\delta^*$ 满足 $\delta^{*2} = 0$，因此我们得到一个余链复形

$$C(S^{(0)},\mathbb{R}) \to C(S^{(1)},\mathbb{R}) \to C(S^{(2)},\mathbb{R}) \to \cdots . \tag{11.1.2}$$

定义 16。（参见 *[18]*）这个单纯空间的上同调（系数取为层 $\mathcal{O}$）定义为该余链复形的上同调，记作 $H^*(S^\bullet,\mathbb{R})$。当 $S^\bullet$ 是群胚 $G$ 的神经时，这称为系数取为 $\mathcal{O}$ 的群胚上同调；我们将其记作 $H^*(G^\bullet,\mathbb{R})$。

请注意，如果单纯空间是光滑的，那么默认在每个次数上我们只考虑光滑函数。此外，在不改变任何公式的情况下，我们可以在余链复形中用 $\mathbb{C}$ 代替 $\mathbb{R}$ 。事实上，我们可以考虑更一般的上同调系数，例如取值于 $S^1$ 的函数层；但定义会稍微复杂一些，因为我们需要在每个次数上对该层取一个分解，参见 [18], [31]。

命题 1.（见 *[27]*）对于李群胚 $G \rightrightarrows M$ 上的任意 2-余循环 $f$，都对应一个李群胚的中心扩张

$$M \to S^1_M \to S^1 \times_f G \to G \to M \,, \tag{11.1.3}$$

其中，$M$ 表示仅含恒等态射的李群胚，$S^1_M$ 表示 $M \times S^1$，将其视为以 $M$ 为底空间的李群胚，其源映射和目标映射均为投影，复合则由 $S^1$ . 诱导。这里，$S^1_M \times_f G$ 是对象为 $M$ 、箭头空间为 $S^1 \times G^{(1)}$ 的群胚，其复合定义为 $(\lambda, g_2) \cdot (\beta, g_1) = (\lambda\beta e^{if(g_2,g_1)}\, g_2 g_1)$。

此外，与这样的扩张相对应的是一个乘法复线丛（即 $G^{(1)}$ 上的一个线丛，带有相容的乘法），其全空间为 $\mathbb{C} \times G^{(1)}$，复合定义与上面的公式相同，即 $(\lambda, g_2) \cdot (\beta, g_1) = (\lambda\beta\, e^{if(g_2,g_1)}\, g_2 g_1)$。更一般地，我们有以下结论：

定义 17。（参见 *[27], [46]* 乘法线丛 $L \to G$ 由线丛 $L \to G^{(1)}$以及一个处处非零线性映射给出

$$s : d_0^* L \otimes d_2^* L \to d_1^* L \,, \tag{11.1.4}$$

使得对于可复合对 $(g_2, g_1)$，诱导映射

$$L_{g_2} \times L_{g_1} \to L_{g_2} \otimes L_{g_1} \xrightarrow{s} L_{g_2 g_1} \tag{11.1.5}$$

是结合的。这里 $L_g$ 表示线丛在 $g$ . 上的点

## 11.2 李代数丛的上同调

定义18. (*[31], [32], [46]*) 设 $\pi$: $\mathfrak{g} \to M$ 是一个带有锚映射 $\alpha$ 的李代数丛，并令 $\mathcal{C}^n(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 表示 $\mathfrak{g}$ . 上的实值 $n$-形式。存在一个典范微分，定义如下：

$$d_{CE} : \mathcal{C}^n(\mathfrak{g},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{g},\mathbb{R}) \,,\ n \geq 0$$

定义如下：设 $\omega \in C^n(\mathfrak{g},\mathbb{R})$ 并选取一个 $m \in M$；我们要计算 $d_{CE}\omega$ 在点 $m$ 处的值。那么，对于 $X_1,\ldots,X_{n+1} \in \pi^{-1}(m)$，选取这些向量的局部延拓 $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_{n+1}$，即。

$$p \mapsto \mathbf{X}_1(p),\ldots,p \mapsto \mathbf{X}_{n+1}(p)$$

是 $\mathfrak{g}$ 在包含 $m$ 的某个开集 $U$ 上的截面，并且对所有 $1 \le i \le n+1$，$\mathbf{X}_i(m) = X_i$。

然后令

$$d_{CE}\omega(X_1,\ldots,X_{n+1}) = \sum_{i<j}(-1)^{i+j-1}\omega([\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j],\mathbf{X}_1,\ldots,\hat{\mathbf{X}}_i,\ldots,\hat{\mathbf{X}}_j,\ldots,\mathbf{X}_{n+1})|_{p=m} \tag{11.2.1}$$

$$+\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i\alpha(\mathbf{X}_i)(\omega(\mathbf{X}_i,\ldots,\hat{\mathbf{X}}_i,\ldots,\mathbf{X}_{n+1}))|_{p=m}\,, \tag{11.2.2}$$

这一定义良好，且与所选扩张无关。我们将此上同调记为$H^*(\mathfrak{g},\mathbb{R})$。

注意，与单纯空间的上同调情形一样，我们可以用 $\mathbb{C}$ 替换 $\mathbb{R}$，所有公式仍保持不变。此外，我们可以针对更一般的层（例如 $S^1$值函数的层）取李代数丛的上同调，这需要进行分解，见 [31]。

命题 2。（见 *[25]*）与任意闭李代数丛 2-形式 $\omega$ 相伴的是一个李代数丛的中心扩张

$$0_M \to \mathbb{R}_M \to \mathbb{R}_M \oplus_\omega \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \to 0_M\,, \tag{11.2.3}$$

其中 $0_M$ 表示 $M$ 上的零向量丛，$\mathbb{R}_M$ 表示向量丛 $M \times \mathbb{R}$，并将其视为李代数丛。作为向量丛，$\mathbb{R}_M \oplus_\omega \mathfrak{g}$ 就是 $\mathbb{R}_M \oplus \mathfrak{g}$。李代数丛 $\mathbb{R}_M \oplus_\omega \mathfrak{g}$ 的锚映射由 $(\lambda, X) \mapsto \alpha(X)$ 给出，而括号定义为

$$[(\lambda,X),(\beta,Y)] = (\alpha(X)\beta - \alpha(Y)\lambda + \omega(X,Y),[X,Y])\,. \tag{11.2.4}$$

当且仅当这两个扩张对应的 2-形式在上同调中相等时，它们才同构。

## 11.3 van Est 映射

van Est 映射最简单的[35] 体现，是从李群胚的上同调到其李代数丛的上同调的映射，记作

$$VE : H^*(G^\bullet,\mathbb{R}) \to H^*(\mathfrak{g},\mathbb{R})\,.$$

不过，值得注意的是，van Est 映射在上链层面上也存在，我们在本文中正是利用了这一点。在定义它之前，我们需要引入一些记号。

令 $S_n$ 表示 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上的置换，对于 $\sigma \in S_n$，令 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ 表示置换符号。此外，给定 $X \in \Gamma(\mathfrak{g})$，我们可以将其右平移为 $G^{(1)}$. 上的向量场 $R_X$。现在假设有一个函数 $f\colon G^{(n)} \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$。通过定义，我们得到一个新函数 $R_X f\colon G^{(n-1)} \to \mathbb{R}$

$$R_X f(g_{n-1},\ldots,g_1) = R_X f(g_{n-1},\ldots,g_1,\cdot)|_{s(g_1)}\,, \tag{11.3.1}$$

[35] van Est 映射适用于比 $\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 更一般的系数；具体而言，可以取值于任意阿贝尔李群，参见 [31]。此外，van Est 映射也适用于可微叠，参见 [32]。

也就是说，我们在单位元处对第一个分量（或者从你的角度来看，是最后一个分量）求导 $s(g_1)$。现在我们可以在上链层面定义 van Est 映射了。

定义19。（参见 *[13], [31], [32], [46]*）设 $f$： $G^{(n)} \to \mathbb{R}$，且令 $X_1$、 $\ldots X_n \in \Gamma$（$\mathfrak{g}$）。则我们定义

$$VE(f)(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) R_{X_{\sigma(n)}} \cdots R_{X_{\sigma(1)}} f \,, \tag{11.3.2}$$

即使 $X_1$、.....、 $X_n$ 仅在一点 $m \in M$、[36] 上定义，这一定义仍然成立；这便定义了我们在 $\mathfrak{g}$ . 上的 $n$-形式

下面的引理告诉我们， $VE$ 可下降为上同调上的映射：

引理3。（参见 *[45]*） $VE$ 是一个余链映射。

一个重要定理称为 van Est 同构定理，内容如下（最初由 Crainic 在 [13] 中证明）：

定理3。假设 $G$ 的源纤维是 $n$-连通的。则 $VE$： $H^*$（$G$， $\mathbb{R}$）$\to \to H^*$（$\mathfrak{g}$， $\mathbb{R}$）在次数不超过 $n$（含）的范围内是同构，并且在次数 $n+1$ . 上是单射。它在次数 $n+1$ 上的像由满足以下条件的上同调类 $[\omega]$ 构成：将 $\omega$ 右平移到每个源纤维后，所得对象是恰当的。

在本文中，我们只关注次数 1 和 2 的情形（但主要是 2）。van Est 同构定理将告诉我们，何时可以将 2- 余循环 $\Pi$ （与泊松结构相关联）积分为李群胚上的 2- 余循环。具体来说，如果源纤维是 2- 连通的（即其次数不超过 2 的同伦群均消失），就属于这种情形。

# 参考文献


[1] N. Ben Amar。幂零特殊李代数对偶上的切向变形。《太平洋数学杂志》170（1995），297–318。[2]George A. Baker。基于相空间上诱导的准概率分布的量子力学表述。《物理评论》109，2198——发表于1958年3月15日（doi:10.1103/PhysRev.109.2198）[3] Sean Bates、Alan Weinstein。《量子化几何讲义》。《伯克利数学讲义》第8卷；1997；137页。[4] Pierre Bieliavsky 和 Victor Gayral。K ¨ahler 李群作用的变形量子化。《美国数学学会回忆录》第236卷；2015；154页。[5] M. Bojowald、A. Kotov 和 T. Strobl。李代数丛态射、泊松σ模型与壳外闭规范对称性。《几何与物理杂志》54（2005）400–426。[6] F. Bonechi、A. S. Cattaneo 和 M. Zabzine，几何量子化与非微扰泊松σ模型。《理论与数学物理进展》10（2006） 683 [arXiv:math/0507223]。


[36]我们只假设它们是 $\mathfrak{g}$ 的截面，因为这样定义稍快一些；不过观察公式便可发现，甚至没有必要选取延拓。

[7] F. Bonechi 和 M. Zabzine。李代数丛、李群胚与拓扑场论。《几何与物理杂志》，第57卷，731-744（2005）。[8] M. Buneci。群胚 C*-代数。《数学及其应用综述》1（2006），71-98。MR2274294(2007h:46067)。Zbl 1130.22002。[9] A. Cabrera。局部辛群胚的生成函数与非微扰半经典量子化。《数学物理通讯》395，1243–1296（2022）。[10] M. Cahen、S. Gutt 和 J. Rawnsley。余伴随泊松结构的切向乘积。《数学物理通讯》180，99–108（1996）。https://doi.org/10.1007/BF02101183[11] A. S. Cattaneo 和 G. Felder。Kontsevich 量子化公式的路径积分方法。《数学物理通讯》212，591–611（2000）。https://doi.org/10.1007/s002200000229 [12] A.S. Cattaneo 和 G. Felder。泊松σ模型与辛群胚。奇异辛商空间的量子化，《数学进展丛书》第198卷，Birkh¨auser，巴塞尔，2001年，第61–93页。[13] Marius Crainic。微分上同调与代数丛上同调、van Est 同构及特征类。《瑞士数学评论》第78卷（2003），第681-721页。[14] Marius Crainic 和 Rui Loja Fernandes。李括号的可积性。《数学年刊》157（2003），575-620。[15] Marius Crainic 和 Rui Loja Fernandes。泊松括号的可积性。《微分几何杂志》66（1），71–137，2004年1月。https://doi.org/10.4310/jdg/1090415030[16] Marius Crainic 和 Chenchang Zhu。Jacobi 结构与泊松结构的可积性。《傅里叶研究所年刊》第57卷（2007）第4期，第1181-1216页。[17] Thomas L. Curtright、David B Fairlie 和 Cosmas K. Zachos。《相空间量子力学简明论述》。Default Book Series（2014）。Default Book Series。2014年1月[18] P. Deligne。霍奇理论。 ́III。《高等科学研究所数学出版物》第44期（1974），第5-77页。 ́[19] Sylvestre Gallot、Dominique Hulin、Jacques Lafontaine。《黎曼几何》。施普林格出版社，柏林海德堡，2004年。[20] A. Gammella。切向乘积。《数学物理快报》51，1–15（2000）。[21] Ezra Getzler。幂零 L∞ 代数的李理论。《数学年刊》170（2009），271–301。[22] V. Guillemin、S. Sternberg。几何量子化与群表示的重数。《数学创刊》（1982），67（3）：515–538。[23]Jonathan Gleason。量子力学的 C*-代数表述。（2009）量子力学的 C*-代数形式体系。[24] V.V. Gorbatsevich、A.L. Onishchik。《李群与李代数 II》。施普林格，2000年2月3日。[25] Marco Gualtieri 和 Kevin Luk。对数 Picard 代数丛与亚纯线丛。《国际数学研究通知》，第2021卷，第21期，2021年11月，第16592–16635页。[26] B.C. Hall。分析与数学物理中的全纯方法。《当代数学》260（2000）。[27] Eli Hawkins。量子化的群胚方法。《辛几何杂志》6（2008），第1期，61-125。[28] Andr´e Henriques。L∞代数的积分化。《数学汇刊》（2008），第144卷。[29] M. Heins、O. Roth、S. Waldmann。李群余切丛上的收敛乘积。《数学年刊》（2022）。https://doi.org/10.1007/s00208-022-02384-x

[30] M. Kontsevich. 泊松流形的变形量子化。《数学物理快报》66, 157–216 (2003). https://doi.org/10.1023/B:MATH.0000027508.00421.bf[31] Joshua Lackman. 李群胚模的上同调与广义 van Est 映射。Inter- national Mathematics Research Notices, rnab027, (2021), https://doi.org/10.1093/imrn/rnab027[32] Joshua Lackman. 几何堆栈上的 van Est 映射。arXiv:2205.02109 (2022).[33]David Li-Bland and Eckhard Meinrenken. 关于李群胚的 van Est 同态。L'Enseignement Math´ematique, , Vol. 61, (2014).[34] M. Masmoudi. 正则泊松流形上泊松括号的切向形式变形与切向乘积。J. Geom. Phys. 9 (1992) 155-171.[35] J. E. Moyal. 作为统计理论的量子力学。剑桥哲学学会数学学报。剑桥大学出版社 (CUP). 45 (1) (1949): 99–124.[36] Gerard J. Murphy. C*-代数与算子理论。学术出版社 1990.[37] A. Polishchuk and E. Zaslow. 范畴镜像对称：椭圆曲线。Adv. Theor. Math. Phys. 2, 443-470 (1998) doi:10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a9 [arXiv:math/9801119 [math.AG]].[38] M. Rieffel. 变形量子化与算子代数。Proc. Sympos. Pure. Math., vol. 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI 1990, pp. 411-423. 15.[39] M. Rieffel. 李群卷积代数作为线性泊松结构的变形量子化。Amer. J. Math. 112 (1990), 657–685. MR1064995.[40] M. Rieffel. 关于量子化的问题。算子代数与算子理论 (1997, 上海), 《当代数学》228 (1998), 315–326, quant-ph/9712009.[41] V. Runde. 可容局部紧群。载于：《可容巴拿赫代数》。施普林格数学专著。施普林格，纽约，NY。[42] Izu Vaisman. 预辛流形上的几何量子化。Monatshefte f¨ur Mathematik (1983) Volume: 96, page 293-310 ISSN: 0026-9255; 1436-5081/e[43] Stefan Waldmann. 乘积的收敛性：从实例到一般框架。EMS Surv. Math. Sci. 6 (2019), no. 1/2, pp. 1–31 [44] A. Weinstein. 切向变形量子化与极化辛群胚。《变形理论与辛几何》，S. Gutt, J. Rawnsley, and D. Sternheimer, 编，数学物理研究 20，克卢维尔，多德雷赫特，1997, 301-314。[45] Alan Weinstein. 辛群胚、几何量子化与无理旋转代数。载于：Dazord, P., Weinstein, A. (编)《辛几何、群胚与可积系统》。数学科学研究所出版物，第20卷，(1991)。施普林格，纽约，NY。[46] Alan Weinstein and Ping Xu. 辛群胚的扩张与量子化。Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik. Vol. 417, (1991) pp. 159-190.[47] E. P. Wigner. 关于热力学平衡的量子修正。《物理评论》。40 (5) (1932): 749–759.[48]Willie Wong. 如何计算这个振荡积分的渐近行为? https://mathoverflow.net/q/439154.[49] Chenchang Zhu. 李代数丛的李第二定理：通过高阶李群胚。Arxiv: 微分几何，(2010)。arXiv:math/0701024v2 [math.DG[50] Cosmas Zachos. 星乘积的几何计算。J. Math. Phys. 41, 5129-5134 (2000) https://doi.org/10.1063/1.533395。