离散数学与理论计算机科学.**第26卷第2期：第5篇（2024）**

扩展圈和路径的迭代笛卡尔积的部分边染色

Carl Johan Casselgren[1]* Jonas B. Granholm[1] Fikre B. Petros[2]

[1] 林雪平大学¨，瑞典[2] 亚的斯亚贝
巴大学，埃塞俄比亚

修订日期：*2023*年*5*月*25*日、*2024*年*3*月*8*日；录用日期：*2024*年*4*月*19*日。

我们研究迭代笛卡尔积图的部分边染色扩展问题，其中各因子为偶圈和路径，重点关注预着色边满足 Evans 型条件或构成匹配的情形。具体而言，我们证明，若 $G = C_{2k}^d$ 是偶圈 C_{2k} 与自身的笛卡尔积的第 d 次幂，且 G 中至多有 $2d-1$ 条边被预着色，则存在 G 的正常 $2d$ 边着色，使其与部分着色一致。我们还证明，如果任意两条预着色边之间的距离至少为 4，那么无论预着色边的数量如何，结论仍然成立。对于长度至少为 5 的奇圈，我们证明，若 G 是奇圈 C_{2k+1} 与自身的笛卡尔积的第 d 次幂（$k \geq 2$），且 G 中至多有 $2d$ 条边被预着色，则存在 G 的正常（$2d+1$）边着色，使其与部分着色一致。我们的结果推广了此前关于超立方体预着色扩展的结果 [《图论杂志》 95 (2020) 410–444]。

关键词： 预着色　　扩展、边着色、笛卡儿积、列表着色　　列表着色

1 引言

图 G 的（边）预着色（或部分边着色）是其某个子集$E' \subseteq E$（G）上的正常边着色；一个 t边预着色是使用 t 种颜色的这种着色。如果 G 上的 t-预着色 φ 是可扩展的，则存在 G 上的正常 t-边着色 f，使得对于 φ下着色的任意边 e， f（e） $= \varphi$（e）； f 称为 φ的扩展。一般而言，扩展给定边预着色的问题是一个$\mathcal{NP}$-完全问题，即使对于 3-正则二分图 [8, 11]也是如此。

边预着色扩展问题似乎最早是在研究补全部分拉丁方的问题时被提出的，这与著名的埃文斯猜想有关：每个至多有 $n-1$ 个非空单元格的 $n \times n$ 部分拉丁方都可以补全为一个拉丁方 [10]。根据一个众所周知的对应关系，补全部分拉丁方的问题等价于询问：平衡完全二部图 G 的一个使用 Δ（G）种颜色的部分边着色，能否扩展为一个 Δ（G）-边着色；其中，按照惯例， Δ（G）表示最大度。H¨aggkvist [13], 证明了当 n 足够大时埃文斯猜想成立；Andersen 和 Hilton [1], 以及 S metaniuk [16]则分别独立地证明了该猜想在一般情形下成立。

*研究工作得到瑞典研究理事会 VR 的资助（2017-05077）

ISSN 1365–8 050 ©2024 作者所有，依据知识共享署名 4.0 国际许可协议发布

arXiv:2303.05551v3 [math.CO] 3 Jun 2024

关于边预着色扩展的另一篇早期文献是 [14], , 作者从多面体组合学的角度研究了这一问题。近来，文献 [9]研究了匹配的预着色扩展问题。具体而言，有人猜想：对于每个图 G，如果 φ 是图 G 中匹配 M 的一个边预着色，使用了 $\Delta(G)+1$ 种颜色，且 M 中的任意两条边之间的距离至少为 2，那么 φ 可以扩展为图 G的一个正常（$\Delta(G)+1$）-边着色；这里，两个边 e 和 e' 之间的距离是指连接 e 的一个端点与 e'的一个端点的最短路径所含的边数；距离-t 匹配是指任意两条边之间的距离至少为 t 的匹配。文献 [9], 证明，该猜想对二分多重图和次立方多重图等成立；文献 [12] 则证明，对于一般图，将猜想中的距离增加到 9 后，相应版本的猜想成立。

最近，受关于补全部分拉丁方的结果启发，文献 [7]研究了将 d维超立方体 Q_d 上的部分边着色扩展的问题。其中，研究者刻画了至多有 d 条预着色边、且可扩展为 d-边着色的部分边着色 Q_d，从而为超立方体建立了与 Andersen 和 Hilton [1] 对至多含有 n 个非空单元格、且可补全为拉丁方的 $n\times n$ 部分拉丁方所作刻画的类比。特别地，每个至多有 $d-1$ 条已着色边的部分 d-边着色，都可扩展为 Q_d的 d-边着色。文献 [5, 6] 继续了这一研究方向，并探讨了树上的类似问题。

文献 [4], 研究了图的笛卡尔积上的类似问题。两个图 G和 H的笛卡尔积 $G\square H$是一个图，其顶点集为 $V(G\square H)=\{(u,v):\ u\in V(G)\ v\in V(H)\}$；当且仅当 $u=u'$ 且 $vv'\in E(H)$，或 $uu'\in E(G)$且 $v=v'$时，(u,v)与(u',v')相邻。

在 [4], 中，分别针对完全图和完全二分图与 K_2 的笛卡儿积，以及 K_2 与最大度较小的图和树的笛卡儿积，得到了 Evans 型边预着色扩展结果。此外，对于 K_2 与一般正则（无三角形）图的笛卡儿积，当要求预着色边彼此独立时，也得到了类似结果。

本文继续研究图的笛卡儿积的预着色扩展问题，重点关注图的迭代笛卡尔积。记 G^d 为 G 与自身的笛卡尔积的 d 次幂。我们提出以下问题。

问题 1.1 设 G 是一个图，其中任意至多含有 $\chi'(G)-k$ 条边的预着色（其中 $k\geq 1$）都可以扩展为正常的 $\chi'(G)$ 边着色。是否可以断言，G^d 中任意至多含有 $\chi'(G^d)-k$ 条边的预着色，都可以扩展为 G^d 的 $\chi'(G^d)$ 边着色?

关于超立方体的结果 [7] 讨论的是 $G=K_2$（以及 $G=C_4$）的情形，因此，问题 1.1 若有肯定答案，将是对该结果的重大推广。

本文研究最大度为二的图中的问题 1.1。我们证明，对于长度至少为 5 的偶圈和奇圈，问题 1.1 均有肯定答案，因此对于路径也成立。长度为 3 的奇圈情形似乎更为困难；在这种情形下，问题 1.1 是否有肯定答案仍是一个开放问题。

尽管奇圈的任何部分边着色都可扩展，但我们将把讨论限于图 G 中至多有 $\chi'(G)$ 条边 -1 被预着色的情形，因为对于除奇圈和星之外的所有连通图，都存在这样的部分边着色示例：有 $\chi'(G)$ 条预着色边，却不可扩展。事实上， [4]中已证明， G 的每个部分 $\chi'(G)$-边着色都可扩展，当且仅当 G 同构于一颗星$K_{1,\ n}$ 或一个奇圈。

对于偶圈，我们还证明了，在 C_{2k}^d 中，对距离-4 匹配的任何预着色都可扩展为正常的 $2k$-边着色。这里的论证很大程度上依赖于这样一个事实： C_{2k}^d 属于第一类；对于奇圈是否也有类似结果，我们尚不清楚。

2 预备知识

在证明我们的结果之前，先介绍一些术语和辅助结果。

如果 φ 是 G 的边预着色，且边 e 在 φ下被着色，那么我们称 e 是 φ-着色的。如果有一条与顶点 v 关联的边在 φ 下被着成颜色 c，则称颜色 c 出现在顶点 v 上；否则，颜色 c 在 v处缺失。

如果边着色 φ 使用 t 种颜色，且 $1 \leq a,\ b \leq t$，那么 G 中的路径或圈称为在 φ 下（$a,\ b$）-着色的，当且仅当其边由颜色 a 和 b 交替着色。我们也称这样的路径或圈在 φ下双色着色。在一条极大（$a,\ b$）-着色路径或一个（$a,\ b$）-着色圈上交换颜色 a 和 b ，可得到 G的另一种正常 t-边着色；这一操作称为颜色互换或交换。

在上述定义中，如果上下文已明确，我们通常省略对特定着色 φ的明确引用。

如果 G_1 和 G_2 是 G的子图，且 f_i 是 G_i的正常边着色，那么如果没有顶点同时关联两条边 e_1 和 e_2 ，使得 $f_1(e_1) = f_2(e_2)$，我们就称 f_1 与 没有冲突。

根据构造，按边的划分， $G = C_r^d$可分解为 d 个子图，每个子图由 r^{d-1}个互不相交的 C_r副本组成；这些子图称为维度。维度中与 C_r 同构的每个子图称为层，而 $G - E(D)$的每个连通分支（其中 D 是一个维度）称为 G的一个平面 。如果 $d = 2$，那么层和平面是相同的对象。

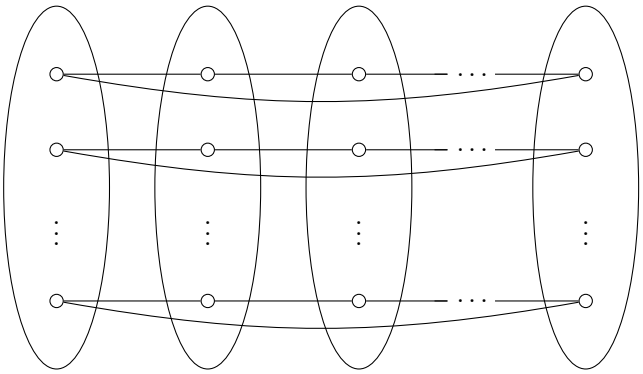


图 1： 维度、层和平面的示意图。每个圈构成一个层，所有圈共同构成一个维度，移除圈上的所有边后得到的连通分支就是平面。

在图 1 中，由所有顶点和画出的边组成的边导出子图构成一个维度，每个圈是一层，而移除所有画出的边后所得子图中的每个连通分量都是一个平面。

如果有一条边的端点分别位于两个平面内，则称这两个平面相邻 。类似地，若边 e 不包含在某个平面内，且其一个端点 e 位于该平面内，则称该边关联 于该平面，并且我们称

若一条层边同时关联于两个平面，则称它位于 这两个平面之间。

若两个不同平面中的两个顶点由一条边相连，则称它们为对应顶点；边的情形也类似。给定两个不同平面的边着色，若对应边具有相同的颜色，则称这两个平面相应着色。

我们还需要一些关于列表边着色的标准定义。给定一个图 G，为 G 的每条边e 指定一个颜色集合 $\mathcal{L}(e)$。这样的赋值 $\mathcal{L}$ 称为 G 的列表赋值，而这些集合 $\mathcal{L}(e)$称为列表或颜色列表。若所有列表大小相同，均为 k，则 $\mathcal{L}$ 称为 k-列表赋值。通常，我们要寻找 G 的正常边着色 φ，使得对所有 $e \in E(G)$，$\varphi(e) \in \mathcal{L}(e)$。若存在这样的着色 φ，则称 G 是 $\mathcal{L}$-可着色的，而 φ 称为 $\mathcal{L}$-着色。记 $\chi'_L(G)$ 为满足以下条件的最小整数 t：当 $\mathcal{L}$ 是一个 t-列表赋值时，G 总是 $\mathcal{L}$-可着色。若 $\chi'_L(G) \leq t$，则称 G 是 t-边可选择着色的。以下引理众所周知且易于证明。

引理 2.1 每个偶圈都是2-边列表可着色的。

引理 2.2 若 L 是奇圈 C 的一个2-列表赋值，则 C 是 L-可着色的，除非所有列表都相同。

我们还将用到一个众所周知的命题：对于路径，若除第一条边外的每条边所获列表的大小至少为二，则该路径是边列表可着色的。

$2d-1$ 条预着色边对 C_{2k}^d 的扩展

本节将证明以下定理。

定理 3.1 若 $G = C_{2k}^d$ 是偶圈 C_{2k} 与自身的笛卡儿积的 d 次幂，且 φ 是 G 的一个适当的部分边着色，其中至多有 $2d-1$ 条预着色边，则 φ 可以扩展为 G 的一个适当的 $2d$-边着色。

如引言中所述，除奇圈和星外，每个连通图都有一种含有 $\chi'(G)$条预着色边且不可扩展的部分边着色。因此，由于 $\chi'(G) = 2d$，这里预着色边数量的上界是最优的。

证明 定理 3.1 的证明： 证明采用关于 d的归纳法，$d = 1$ 的情形显然成立。我们将证明一系列引理，由此共同推出该定理。在这些引理的证明中，我们考虑一个指定的维度 D_1，以及由 $2k$ 个平面 Q_1、.....、Q_{2k}构成的子图 $G - E(D_1)$，其中 Q_i 与 Q_{i+1} 相邻（此处及下文中，指标均模 $2k$取值）。

我们假设，对于 $G - E(D_1)$的一个平面，其至多含有 $2d-3$ 条预着色边的任何预着色，都可以扩展为使用 $2d-2$ 种颜色的正常边着色；并证明，G的一个至多含有 $2d-1$ 条预着色边的给定预着色 φ，可以扩展为 G的正常 $2d$边着色。

我们将区分以下几种情况，并在下面的引理中分别处理。

- G 中存在一个不含预着色边的维度。
- G 的每个维度都包含预着色边，且存在一个维度，其中至多有两条预着色边；这些边所用的颜色不会出现在 G其他维度的边上。
- G 的每个维度都包含颜色与另一维度中的边所用颜色相同的边，或者至少有三条预着色边。

□

引理3.2 如果 G存在一个不包含预着色边的维度，那么 φ 是可扩展的 *e.*

证明： 假设 D_1 是 G 中一个不含预着色边的维度，并考虑子图 $G - E(D_1)$。

首先假设所有预着色边都包含在同一个平面中，记为 Q_1。令 c_1 和 c_2 为 φ 使用的两种颜色（如果 φ 下只出现一种颜色，那么 c_2 可以是 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1\}$ 中的任意一种颜色）。根据 φ 在 Q_1 上的限制，我们通过从 Q_1 φ 中被 c_1 和 c_2 着色的任意一条边上去掉这些颜色，定义 Q_1 的边预着色 φ'。然后，根据归纳假设，φ' 可以扩展为使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 的 Q_1 的 $(2d-2)$-着色。接下来，我们用这些颜色重新着色预着色为 c_1 和 c_2 的边，之后相应地为所有其他平面着色。因此，我们可以为 D_1 的边定义列表赋值 L：对于每条边 $e \in E(D_1)$，令 $L(e)$ 为 $\{1,\ldots,2d\}$ 中所有未出现在与 e 相邻的边上的颜色所组成的集合。根据引理 2.1，我们可以从这些列表中为 D_1 的边进行正常着色，从而得到一种与 $G - E(D_1)$ 的着色不冲突的正常着色，因此 φ 可以扩展。

接下来，我们考虑恰有两个平面（设为 Q_1 和 Q_i）包含所有预着色边的情况。由于在 φ下最多出现 $2d-1$ 种颜色，因此存在一种颜色 $c_1 \in \{1,\ldots,2d\}$ 未被 φ使用。此外，设 c_2 为出现在预着色边数量最多的平面（设为 Q_1）中某条边上的一种颜色。设 φ' 为从 φ 中移除 c_2 后得到的着色，其中移除的是 φ下任何着色为 c_2 的边上的颜色。于是，φ' 在 Q_1 和 Q_i上的限制分别可扩展为使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1,c_2\}$的正常（$2d-2$）边着色。将任何着色为 c_2 的 φ边重新着色为 c_2后，我们便得到 Q_1 和 Q_i的正常边着色 f_1 和 f_i。

现在，$i \neq 2$ 或 $i \neq 2k$成立；不妨设前者成立。接着，我们按照 f_1下 Q_1的着色方式对 Q_2 着色，并按照 f_i下 Q_i 的着色方式对其余所有未着色的 Q_j逐一着色。由于 Q_{2j-1} 和 Q_{2j} 的着色方式相对应，对于每条一端点在 Q_{2j-1} 中、另一端点在 Q_{2j}中的边 e，都存在一种颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1\}$，不会出现在 e的端点处。因此，将所有此类边都着成这种颜色，再将 D_1 的所有其他边着成颜色 c_1，便得到 φ 的一个扩展。

最后，我们考虑至少有三个平面包含所有预着色边的情形。与之前一样，设 c_1是 φ未使用的一种颜色。由于至少有三个平面包含预着色边，每个平面至多包含 $2d-3$ 条预着色边，而两个相邻平面中的预着色边至多使用 $2d-2$种颜色。这意味着，对于每个 $j=1$，.....，k，在 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1\}$ 中都存在一种颜色 c'_j，它未用于将 φ限制在 Q_{2j-1}和 Q_{2j}上所得的限制。因此，对于 $j=1$，.....，k，我们可以使用 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1,c'_j\}$中的 $2d-2$种颜色，将 φ限制在 Q_{2j-1}和 Q_{2j} 上所得的限制扩展。对于 $j=1$，$\ldots k$，接着将 D_1中 Q_{2j-1} 与 Q_{2j} 之间的所有边着为 c'_j，并将 D_1 的所有其他边着为颜色 c_1。由此得到 φ的一个扩展。□

引理 3.3 如果 G 的每个维度都包含预着色边，并且存在一个维度，其中至多有两条预着色边，且这些边的颜色没有出现在 G 的任何其他维度的边上，那么 φ 是可扩展的。

证明： 首先，假设存在一个维度 D_1，其中只包含一条预着色边，并且存在一个平面 Q_1，位于 $G - E(D_1)$中，包含所有其他预着色边。设该预着色边

D_1 被着为 c_1。如前述引理的证明所示，存在一种使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1\}$对 φ在 Q_1 上的限制进行扩展的方法。接下来，我们以相应的方式为 $G-E(D_1)$的所有其他平面着色，这意味着 D_1 的每条边都与 $2d-2$ 中颜色各不相同的边相邻，因此根据引理 2.1， φ是可扩展的。

现在考虑这样的情况：不存在一个只包含一条预着色边的维度，以及一个包含所有其他预着色边的平面。设 D_1 是一个维度，其中至多有两条边被着色为在 φ 下其他边上均未出现的颜色。我们的假设意味着， $G-E(D_1)$ 中的每个平面至多包含 $2d-3$ 条预着色边，并且有两种颜色 c_1， c_2 在 $G-E(D_1)$ 的任何边上都未出现，而 D_1 中至多有两条边被着成 $\{c_1,c_2\}$ 中的颜色。

首先，假设存在将 φ 在 D_1 上的限制扩展为使用颜色 c_1 和 c_2 的着色。由于 $G-E(D_1)$ 中的每个平面至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此每个平面都存在一种使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 且与 φ 一致的正常边着色。因此， φ 是可扩展的。

现在假设，将 φ 限制到 D_1 后，无法使用颜色 c_1 和 c_2 进行扩展。那么 D_1 中至少有两条预着色边，因此 $G-E(D_1)$ 至多包含 $2d-3$ 条预着色边，并且存在一种颜色 $c_3\in\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1,c_2\}$，它没有出现在 φ 下的任何边上。

由于将 φ 限制到 D_1 后无法扩展，因此在 $G-E(D_1)$ 中存在平面 Q_1、Q_2、.....、Q_i，使得 Q_1 和 Q_i 与 D_1 的预着色边关联，而 Q_2、.....、Q_{i-1} 则没有。无需 loss of generality，假设 Q_1 与 D_1 中一条预着色为 c_1 的边关联。我们使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1,c_3\}$ 扩展 Q_1；对于 $j=2$、.....、$i-1$，我们使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 扩展将 φ 限制到 Q_j 后得到的限制。此外，我们交替使用颜色 c_3 和 c_2 为 D_1 中顶点属于 Q_1、.....、Q_i 的每条路径着色，并从 Q_1 处的 c_3 开始。

如果 Q_i 与一条颜色为 c_2 的 D_1 关联，那么 i 为偶数；我们取 φ 在 Q_i 上的限制的扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$；对于 $j=i+2,\dots,2d$，我们取 φ 在 Q_j 上的限制的扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1,c_3\}$。此外，我们将 D_1 中顶点属于 $Q_{i+1},\dots,Q_{2k}$ 的每条路径上的边交替染成 c_3 和 c_1，并从 Q_{i+1} 处的 c_3 开始。最后，将 Q_1 与 Q_{2k} 之间的所有边染成颜色 c_1，将 Q_i 与 Q_{i+1} 之间的所有边染成颜色c_2。由此得到 φ 的一个扩展。

如果 Q_i 与一条染成 c_1的边关联，那么 i 为奇数，我们便以类似方式进行，但取 φ 在 Q_i 和 Q_{i+1} 上的限制的扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1,c_2\}$；对于 $j=i+2,\dots 2k-1$，我们取 φ 在 Q_j 上的限制的扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$；还取 φ 在 Q_{2k} 上的限制的扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1,c_3\}$。然后，我们对 D_1 的路径进行着色，使所得着色正常且与 φ一致。□

引理 3.4 如果 G 的每个维度中都含有一些颜色，而这些颜色也出现在另一个维度的边上中，
或者至少有三条预着色边，那么 φ 是可扩展的。

证明： 由于至多有 $2d-1$ 条边被预着色，因此存在一个维度 D_1，其中只有一条预着色边 e。假设 $\varphi(e)=c_1$。由于至少有一种颜色出现在两条或更多边上，因此有两种颜色c_2，$c_3\in\{1,\dots,2d\}\setminus\{c_1\}$不会出现在 φ下的任何边上。

我们考虑几种不同的情况。

情形 1. 除了 e 之外，所有预着色边都位于同一平面：

令 Q_1 为一个平面，其中包含除 e之外的所有预着色边。通过移除Q_1 中 φ着色为 c_1的每条边上的颜色，我们得到一个预着色。根据归纳假设，该预着色可扩展为一个正常的

使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1,c_2\}$对 Q_1进行边着色。将此着色记为 f。通过对 Q_1 中 φ着色为 c_1的边重新着色，我们从 f得到 φ 在 Q_1上的限制的一个扩展 f'。我们以相应的方式对 $G-E$（D_1）的所有其他平面进行着色。

首先，假设 e 与 Q_1关联。那么，根据引理 2.1，存在 D_1 的正常边着色 g，且它与 f'没有冲突。此外，由于 D_1 只有一条边预先着色，我们可以选择这种着色，使得 $g(e)=c_1$。因此，φ 可扩展。

接下来，我们考虑 e 与 Q_1不关联的情形。设 D_1 中包含 e的圈为 C。如果 C 中没有顶点与在 f'下着色为 c_1 的边关联，那么我们可以按前一段所述的方法进行。否则，e 的端点分别与 $G-E$中的两条边 e_1 和 e_2 关联，这两条边在 D_1下的颜色均为 c_1。注意，e，e_1，e_2 包含在 G 的一个 4-圈中，我们将该圈的第四条边记为 e_3。与前面一样，我们对 D_1 的边进行正常着色，使所得着色 g' 为 G 的正常边着色。此外，我们选择g'，使得 $g'(e)=g'(e_3)=c_2$。通过交换边 e，e_1，e_2，e_3 所构成的双色 4-圈上的颜色，我们最终得到 φ的一个扩展。

情形 2。除了 e 之外，所有预着色边恰好位于两个平面：
令 Q_1 和 Q_i 为包含与 e 不同的预着色边的两个平面。

首先，假设 e 与 Q_1 和 Q_i 均不相邻。由于 Q_1 和 Q_i 各自至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此可以分别将 φ 在 Q_1 和 Q_i 上的限制扩展为 f_1 和 f_i，并使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$。接着，我们用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 对 $G-E(D_1)$ 中所有不同于 Q_1和 Q_i 的平面 Q 进行正常着色，使这些平面的着色彼此对应。此外，对 D_1 的所有边交替使用颜色 c_2 和 c_3 着色，并从 D_1 中端点位于 Q_1 和 Q_2 的所有边开始使用颜色 c_2。于是 e 包含在一个双色 4-圈中，通过交换该圈上的颜色，我们得到 φ 的一个扩展。

现在考虑 e 与 Q_1 和 Q_i 中恰有一个相邻的情形。举例来说，假设 e与 Q_1 和 Q_2 关联，因此 $i\neq 2$。由于 Q_1 和 Q_i 各自至多包含 $2d-3$ 条预着色边，分别存在 f_1 和 f_i，它们是将 φ 的限制分别扩展到 Q_1 和 Q_i后得到的，并使用颜色$\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$。接下来，按照 Q_1的着色方式，对 $G-E$（D_1）中的所有未着色平面进行相应着色；用颜色 c_2 和 c_3对 D_1 中的所有圈进行正常着色；并从颜色 c_2 开始，为端点分别位于 Q_1 和 Q_2的所有边着色。由于Q_1和 Q_2 的着色方式相对应，存在一个颜色为 c_1，c_2 的双色 4-圈，其中包含 e。通过交换这个 4-圈上的颜色，我们得到 φ 的一个扩展。

现在假设 e_1 与包含预着色边的两个平面都关联，记作 Q_1 和 Q_2。通过移除在 φ下着色为 c_1 的任意边上的颜色，我们得到 G 的一个预着色 φ'，使得 φ' 分别在 Q_1 和 Q_2上的限制可扩展为使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_1,c_3\}$的正常边着色。通过对 Q_1和 Q_2 中任意一条在 c_1下着色为 φ的边重新着色，我们分别得到 Q_1和 Q_2的正常边着色 f_1和 f_2，使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_3\}$。我们将$D_1$ 中位于 Q_1 和 Q_2 之间的边着色为 c_3，但 e 除外，它被着色为 c_1。

接下来，我们按照 Q_2在 f_2下的着色情况，相应地给 $Q_3,\ldots,Q_{2k-1}$着色；并按照 Q_1 的着色情况，相应地给 Q_{2k}着色。现在，由于 Q_2和 Q_3 的着色相对应，对于 D_1 中连接Q_2和 Q_3的每条边 e'，都存在一种颜色 $c'\in\{1,\ldots,2d\}$，它既未出现在 Q_2 中与之相邻的边上，也未出现在连接 Q_1 和 Q_2的边上。我们用这种颜色 c'给每条连接 Q_2 和 Q_3 的此类边 e' 着色，随后将 D_1 中从 Q_1 到 Q_{2k} 的每条路径上的所有边交替地染成分别用于连接 Q_1 和 Q_2、连接 Q_2 和 Q_3 的边的颜色。由此得到一个适当的部分边着色，其中每条边的端点

D_1 中连接 Q_1 和 Q_{2k} 的每条边都关联于来自 $\{1,\ldots,2d\}$且与 $2d-1$ 颜色不同的边。因此，我们可以适当地给每条此类边着色，从而得到使用颜色 $1,\ldots,2d$对 φ 的一个扩展。

情形 3. $G-E$（D_1）中至少有三个平面包含预着色边：

该假设意味着 $G-E(D_1)$中的每个平面至多包含 $2d-4$ 条预着色边，并且任意两个相邻平面总共至多包含 $2d-3$ 条预着色边。不失一般性，假设 e 与 Q_1 和 Q_2关联。由于 Q_1 和 Q_2 的每个顶点的度均为 $2d-2$，且$Q_1\cup Q_2$ 至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此存在未着色的对应边 $e_1\in E(Q_1)$和 $e_2\in E(Q_2)$，它们与 e 相邻，但不与 $Q_1\cup Q_2$ 中任何一条预着色 c_1相邻。根据 φ 在 $G-E(D_1)$上的限制，我们通过额外将 e_1 和 e_2 着为颜色 c_1，定义 $G-E(D_1)$的新预着色 φ'。

现在，由于 $G-E(D_1)$ 的每个连通分支至多包含 $2d-3$ φ' 条预着色边，根据归纳假设，存在一个使用颜色 $\{1,\ldots,2d\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 将 φ' 扩展到 $G-E(D_1)$ 的方案。接下来，我们使用颜色 c_2 和 c_3 对 D_1 的边进行正常着色，并从端点位于 Q_1 和 Q_2 中的边开始，使用颜色 c_2。现在，由于 e_1 和 e_2 都被着成了 c_1，因此存在一个双色 4-圈，其边为 e_1，e_2 和 e，颜色为 c_1 和 c_2。通过交换这个 4-圈上的颜色，我们得到 φ 的一个扩展。□

4 将 C^d_{2k+1} 中 $2d$ 条边的预着色扩展

本节中，我们证明关于长度至少为 5 的奇圈的迭代笛卡儿积的下述定理。

定理 4.1 如果 $G=C^d_{2k+1}$ 是奇圈 C_{2k+1} 与自身的笛卡儿积的 d 次幂（$k\geq 2$），且 φ 是 G 的适当部分边着色，其中至多有 $2d$ 条预着色边，那么 φ 可以扩展为 G 的适当 $(2d+1)$-边着色。

与偶圈的情形一样（对于 $d\geq 2$），这里预着色边的数量显然是最优的，因为 $\chi'(G)=2d+1$。

定理 4.1 的证明： 本定理的证明与定理 3.1 的证明相似，因此我们将省略一些部分，或仅简述其中与该证明所用技巧相似的部分。尤其在证明的最后几部分，为避免繁琐重复，我们省略那些与证明前文已详细描述的技巧非常相似的内容。

我们对 d 进行归纳，$d=1$ 的情形显然成立。与定理 3.1 的证明类似，我们将证明一系列引理，由此共同推出该定理。由于奇圈不能进行 2-边着色，这个证明比该定理的证明更长，也更困难。在这些引理的证明中，我们将考虑一个指定的维度 D_1，以及由 $2k+1$ 个平面 Q_1、.....、Q_{2k+1} 组成的子图 $G-E(D_1)$，其中 Q_i 与 Q_{i+1} 相邻（此处及下文中，指标均按模 $2k+1$ 计算）。

我们假设，对于 $G-E(D_1)$ 中的一个平面，其至多含有 $2d-2$ 条预着色边时，任何边预着色都可扩展为使用 $2d-1$ 种颜色的正常边着色；并证明给定的预着色 φ of$G$ 至多含有 $2d$ 条预着色边时，可扩展为 G 的正常 $(2d+1)$-边着色。为此，我们将区分以下几种不同情形。

- G 中存在一个不含预着色边的维度。

- G 的每个维度都包含预着色边，且存在一个维度，其中至多有两条预着色边；这些边的颜色不会出现在 G任何其他维度的边上。
- G 的每个维度都包含颜色与其他维度中的边所用颜色相同的边，或至少包含三条预着色边；并且有一个维度只包含一条预着色边。
- G 的每个维度都包含两条预着色边，其中至少一条边的颜色也出现在另一维度的边上。

□

引理 4.2 如果 G中存在一个不含预着色边的维度，那么 φ 可扩展 *e.*

证明： 假设 G 中的 D_1 是一个不含预着色边的维度。我们考虑几种不同的情形。

情形 1. 所有预着色边都位于同一个平面内：

假设所有预着色边都包含在一个平面中，记作 Q_1。设 c_1 和 c_2 是 φ所用的两种颜色（如果 φ 下只出现一种颜色，那么 c_2可以是 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1\}$中的任意一种颜色）。从任何以这些颜色着色的边上去除颜色 c_1 和 c_2 后，我们得到 Q_1的边预着色 φ'，它可扩展为使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$的 $(2d-1)$-着色 Q_1。接着，我们分别用这些颜色重新着色预着色边 c_1 和 c_2，随后相应地为所有其他平面着色。由于所有平面都已相应着色，我们可以应用引理 2.2，对 D_1 的每一层的边进行正常着色，从而得到 φ的扩展。

情形 2. 所有预着色边都包含在两个平面中：

假设 Q_1 和 Q_i 包含所有预着色边。我们将考虑三种不同的情况。

首先，假设 $2d-1$ 预着色边都包含在同一个平面中，记作 Q_1，并且 Q_i 中的一条边e_i 被着色为 c_1。设 c_2 是 Q_1中某条边所呈现的一个颜色。根据 φ 在 Q_1 上的限制，我们通过从每条 φ着色为 c_2的边上去掉颜色 c_2，定义 Q_1 的一个预着色 φ'。那么 φ' 可以扩展为一个使用 $\{1,\ldots 2d+1\}\setminus\{c_2\}$中的 $2d-1$ 种颜色的正常 $(2d-1)$-边着色。将 Q_1 中每条 φ着色为 c_2 的边重新着色为颜色 c_2，即可得到 Q_1的一个正常边着色 f。

设 e_1 是 Q_1 中对应于 Q_i的 e_i 的边。如果 $f(e_1)=c_1$，那么我们按照 Q_1 的着色方式，相应地给 $G-E(D_1)$中的所有平面着色。根据引理 2.2，我们随后可以给 D_1 的边着色，从而得到 φ的一个扩展。另一方面，如果 $f(e_1)=c_3\neq c_1$，那么我们通过按照 Q_1 的着色方式给 Q_i 着色，并置换 $\{1,\ldots,2d+1\}$中的颜色，定义 Q_i 的一个正常边着色，使得 c_1映射到 c_3，反之亦然，而所有其他颜色都映射到自身。由此得到 Q_i的一个正常边着色，它与 φ 在 Q_i上的限制一致。我们按照 Q_i 的着色方式给所有其他 Q_j'着色，然后应用引理 2.2，像之前一样得到 φ的一个扩展。

现在假设 Q_1 和 Q_i 分别至多包含 $2d-2$ 条预着色边，并且 φ使用的颜色至多有 $2d-1$ 种，即 1，……，$2d-1$。根据归纳假设，φ 对Q_1到 Q_i的限制分别可扩展为使用颜色 1，……，$2d-1$的 $(2d-1)$-边着色 f_1和 f_i。我们按照 Q_i 的着色方式对所有其他 Q_j'进行相应着色，并利用引理 2.2 得到 φ的一个扩展。

另一方面，如果 Q_1 和 Q_i 分别至多包含 $2d-2$ 条预着色边，但 φ总共使用了 $2d$ 种颜色 $\mathbf{1}$，……，$2d$，那么在 φ下，每种颜色恰好出现在一条边上。因此，我们可以假设 Q_1中有一条边着色为 $\mathbf{1}$，而 Q_i中没有，并且类似地，Q_i 中有一条边着色为 $2d$。根据归纳假设，存在一个扩展 f_1，它是 φ 对 Q_1 的限制的扩展，使用颜色 $\mathbf{1}$，……，$2d-1$；还存在一个扩展 f_i，它是 φ 对 Q_i 的限制的扩展，使用颜色 $\mathbf{2}$，……，$2d$。

现在，要么 $i \neq 2$，要么 $i \neq 2k+1$；假设前者成立。我们将 f_2 定义为Q_2 的正常边着色，使用颜色 $\mathbf{2}$、……、$2d$：按照给 Q_1 着色的方式给 Q_2 着色，但使用颜色 $2d$ 代替 $\mathbf{1}$；然后按照 Q_i 的着色方式给 $G-E(D_1)$ 的所有其他平面着色。根据 f_2的构造，对于 Q_1 与 Q_2之间的 D_1 的每条层边 e，在 $\{2,\dots,2d\}$ 中都有一种颜色未出现在 e的任一端点上。我们用这种颜色给每条这样的层边着色，然后依次用颜色 $\mathbf{1}$ 和 $2d+1$ 给 D_1中的每个圈的边着色，并从 Q_2处的颜色 $\mathbf{1}$ 开始。由此得到 φ的一个扩展。

情形 3. 所有预着色边都包含在至少三个平面中：

设 Q_{j_1}、Q_{j_2}、……、Q_{j_s} 为 $G-E(D_1)$ 中包含预着色边的平面，其中 $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_s \leq 2k+1$。注意，任意两个平面所含预着色边的颜色总数至多为 $2d-1$，且存在两个平面 Q_{j_i} 和 $Q_{j_{i+1}}$，它们所含预着色边的颜色总数至多为 $2d-2$。我们假设Q_{j_1} 和 Q_{j_s} 是这样两个平面。

考虑 D_1 中任意一个圈 C。我们将 C 的边划分为路径 P_{12}、……、$P_{(s-1)s}$、P_{s1}，其中 $P_{r(r+1)}$ 的端点分别在 Q_{j_r} 和 $Q_{j_{r+1}}$ 中。现在，对每条路径 $P_{r(r+1)}$，存在两种颜色$c_{r(r+1)}$、$c'_{r(r+1)} \in \{1,\dots,2d+1\}$，使得这些颜色都没有出现在 φ 在 $Q_{j_r} \cup Q_{j_{r+1}}$ 上的限制中。对于 $r=1$、$\dots s-1$，我们用颜色 $c_{r(r+1)}$ 和 $c'_{r(r+1)}$ 交替给每条路径 $P_{r(r+1)}$ 着色，使所得边着色正常。根据假设，Q_{j_1} 和 Q_{j_s} 所含边的颜色总数至多为 $2d-2$。因此，存在两种颜色 c 和 c'，它们既没有出现在 Q_{j_1}或 Q_{j_s} 的边上，也没有出现在与 Q_{j_1} 关联的 D_1 的边上。我们用颜色 c和 c' 给 C 中从 Q_{j_s} 到Q_{j_1} 的路径上的边着色，使所得着色正常。

接下来，我们按照 C 的着色方式，对 D_1 的所有未着色边进行着色。现在，每个 Q_j 都与 D_1 中颜色不同的两条边关联，而这两种颜色在 φ 下不会出现在 Q_j 的边上；此外，每个 Q_j 至多包含 $2d-2$ 条预着色边。因此，根据归纳假设，φ 在每个 Q_j 上的限制都可以扩展为正常边着色，所用颜色不会出现在与 Q_j 关联的 D_1 的边上。综上，φ 是可扩展的。□

引理 4.3 如果 G 存在一个维度，其中至多有两条预着色边，且这些边的颜色不会出现在 G 的任何其他维度的边上，那么 φ 是可扩展的。

证明： 设 D_1 是一个维度，其中至多有两条预着色边，且这些边的颜色不会出现在 $G-E(D_1)$ 中的任何边上。

我们首先考虑只有一种颜色 c_1 出现在 D_1的预着色边上的情形。

情形 1. 预着色边上只出现一种颜色 c_1 D_1：在这种情形下，论证分为几个子情形。

情形 1.1. $G-E$ 的所有预着色边(D_1) 都包含在一个平面内：

令 Q_1 为 $G-E(D_1)$ 中包含除 D_1的边以外所有预着色边的一个平面。与前面一样，将 φ 在 Q_1 上的限制用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1\}$ 扩展（通过移除

由某种颜色 $c_2 \neq c_1$ 着色的边的颜色，对由此得到的 Q_1 的预着色用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 进行扩展，然后将 φ 着色的边重新着色为 c_2）。接着，我们以相应的方式为 $G-E(D_1)$ 的所有其他平面着色。现在，由于 $G-E(D_1)$ 的所有平面都已相应着色， D_1 的每条边都与颜色各不相同的 $2d-2$ 条边相邻，因此根据引理 2.2， φ 可扩展。

情形 1.2. $G-E$（D_1）的所有预着色边都包含在两个平面中：

由于 D_1 至多有两条边被预着色，且只有两个平面包含预着色边，因此存在两个平面 Q_j 和 Q_{j+1}，其中至多一个包含预着色边，并且 Q_j 与 Q_{j+1}之间没有预着色边。比如，假设 Q_{j+1} 不包含预着色边。取一种颜色 $c_2 \in\{1,\ldots,2d+1\}$，使得 G 中没有边被预着色为 c_2。我们将 φ 在 Q_j 上的限制扩展为使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$的着色，并相应地将 Q_{j+1} 着色；随后，将 Q_j 与 Q_{j+1} 之间的所有边都着成 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 中其端点处缺失的唯一颜色。现在，除非 D_1 中有两条预着色边位于同一层 P，且它们在从 P 中删去 Q_j 与 Q_{j+1}之间的边后得到的路径 P' 上相距偶数，否则我们可以交替使用颜色 c_1 和 c_2给 D_1 的所有边着色，然后用$\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 中的颜色给 $Q-E$（D_1）的所有其余平面着色，使所得边着色是正常的，并且与 φ一致。

或者，如果 D_1 的两条预着色边之间的距离为偶数（在 P' 中），那么我们选取另外两个平面 Q_r 和 Q_{r+1}，它们之间不含预着色边，并且 Q_r 和 Q_{r+1} 中至多有一个包含预着色边。接着，我们可以对 Q_r 和 Q_{r+1} 重复上述着色过程；具体细节留给读者。

情形 1.3. $G-E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在至少三个平面中：

首先，假设 e 中只有一条预着色边属于 $G-E$（D_1），并令 $Q_{j_1},Q_{j_2},\ldots,Q_{j_s}$ 为包含预着色边的 $G-E$（D_1）中的平面，其中 $j_1\le j_2\le\ldots\le j_s$。注意，任意两个平面总共至多包含 $2d-2$ 种颜色的预着色边。现在，如前述引理证明中的情形 3 所示，我们选取两种不会出现在 φ 在这些平面上的限制中的颜色，为每对包含预着色边的平面之间的路径上的边着色。显然，我们选择这些颜色时，要使包含 e 的路径上的所得着色与 φ 一致。之后，我们将 φ 在平面 $Q_{j_1},Q_{j_2},\ldots,Q_{j_s}$ 上的限制扩展，使所得着色正常。因此， φ 是可扩展的。

现在，假设 $G-E(D_1)$ 包含两条预着色边 e_1 和 e_2。那么存在颜色 c_2， c_3，它们在 G 的任何边上都不会出现在 φ下。

现在，如果 e_1 和 e_2 是对应边，或者不与同一个平面关联，那么我们可以按照前一段中的方法继续，但在为含有预着色边的平面之间的路径着色时，可能需要选取三种颜色，以确保得到的 D_1 着色是正常的，并且与 φ一致。这是可行的，因为任意两个平面至多包含 $2d-3$ 条预着色边。

剩下需要考虑的是这样的情形： e_1 和 e_2 恰好关联于一个公共平面 Q_1。假设此外 e_1 还与 Q_2关联。如果 $Q_1\cup Q_2$中至多有 $2d-4$ 条预着色边，且 $Q_{2k+1}\cup Q_1$中至多有$2d-4$ 条预着色边，那么 Q_1中存在独立边 e_1' 和 e_2'， 分别与e_1 和 e_2相邻，并且这些边以及 Q_2 和 Q_{2k+1}中对应的边均未预着色。根据 φ 在 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$上的限制，我们通过将 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$ 的这四条边全部着成颜色 c_1，定义预着色 φ'。现在，我们可以按照前述引理的情形 3 中的方法，得到 φ'的一个扩展；随后交换分别包含 e_1 和 e_2的两个双色 4-圈上的颜色，从而得到 φ的一个扩展。

现在反过来假设，例如 $Q_1 \cup Q_{2k+1}$恰好含有 $2d-3$ 条预着色边。如果 Q_1中存在前一段所述的独立边 e_1' 和 e_2'，那么我们可以按照该情形中的方法继续。因此，假设不存在这样的两条边。

于是，由于 $Q_{2k+1} \cup Q_1$ 和 $Q_1 \cup Q_2$ 都至多包含 $2d-3$ 条预着色边，且每个 Q_j 都是 $(2d-2)$-正则的，e_1 和 e_2 在 Q_1 中的端点必定相邻。现在很容易看出，这意味着要么存在一条与 e_1 相邻但不与 e_2 相邻的边 e_1'，使得 e_1' 及其在 Q_2 中对应的边都未预着色；要么存在一条与 e_2 相邻但不与 e_1 相邻的未着色边 e_2'，且 e_2' 及其在 Q_{2k+1} 中对应的边都未预着色。比如，假设存在这样一条边 e_1'。

考虑由 φ 在 $Q_{2k+1} \cup Q_1 \cup Q_2$ 上的限制得到的预着色 φ'，并额外将 e_1' 及其在 Q_2 中对应的边着为颜色 c_1。现在，由于不存在上述所述的未着色边 e_2'，可知与 e_2 在 Q_1 中相邻的所有 $d-2$ 条边 $a_1, \ldots, a_{d-2}$ 都满足以下条件之一：a_i 或其在 Q_{2k+1}中对应的边已被 φ'-预着色，或者与一条在 φ' 下着为颜色 c_1 的边相邻。此外，由于 $Q_{2k+1} \cup Q_1$ 无三角形且至多包含 $2d-2$ φ' 条预着色边，$Q_{2k+1} \cup Q_1$ 的每条预着色边都满足此条件。因此，通过使用 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_1, c_2, c_3\}$ 中的颜色为与 e_2 相邻的未着色边适当地着色，但不包括与 e_1 相邻的那条边，我们从 φ' 得到预着色 φ''。于是，在 φ'' 下，$G - E(D_1)$ 中的每个平面至多包含 $2d-2$ 条预着色边。此外，使用颜色 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_2, c_3\}$ 对 φ'' 在 $Q_{2k+1} \cup Q_1$ 上的限制进行的任何扩展，都不会将 c_1 用于与 e_2 相邻的边上。现在，由于 $G - E(D_1)$ 恰有一条不包含在 $Q_{2k+1} \cup Q_1$ 中的预着色边，我们可以再次按照引理 4.2 的情形 3 进行操作，并适当地为 D_1 的边着色，从而得到 φ'' 的一个扩展，其中没有与 e_2 相邻的边被着为颜色 c_1。之后，我们可以交换一个双色 4-圈上的颜色，并对 e_2 重新着色，从而得到 φ 的一个扩展。

情形 2。 D_1 的预着色边颜色不同：

现在假设 D_1 包含两条预着色边，其颜色分别为 c_1 和 c_2，并且 c_3 是一种在 φ下的任何边上都未出现的颜色。如果存在一种扩展，将 φ 在 D_1 上的限制用颜色 $\{c_1, c_2, c_3\}$进行着色，且 D_1 的所有边都相应着色，那么就存在将 φ 在所有平面 $G - E（D_1）$上的限制进行扩展的方法，所用颜色不会出现在与 D_1关联的边上。因此，φ是可扩展的。

另一方面，如果 φ的限制不存在这样的扩展，那么 D_1 的两条预着色边 e_1和 e_2 与同一对平面关联，记为 Q_1 和 Q_2。现在，如果 $Q_1 \cup Q_2$ 至多包含$2d-4$ 条预着色边，那么就存在未着色的对应边 $e_1' \in E（Q_1）$和 $e_2' \in E（Q_2）$，它们与 e_2相邻，但不与 e_1相邻。现在我们可以给这些边 c_2 着色，并从 e_2 中移除该颜色，从而得到由 φ导出的预着色 φ'；然后按照情形 3 中仅有 D_1 的一条边预着色时的做法继续操作，得到 φ'的一个扩展。此后，在一个双色 4-圈上交换颜色，从而得到φ的一个扩展。

另一方面，如果 $Q_1 \cup Q_2$ 至少包含 $2d-3$ 条预着色边，那么在 $G - E（D_1）\cup E（Q_1）\cup E（Q_2）$中至多有一条边是预着色的。不失一般性，我们假设 Q_3不包含预着色边。根据归纳假设，存在一种对 φ 在$Q_1 \cup Q_2$ 上的限制进行扩展的着色，使用颜色 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_1, c_2\}$。我们按照 Q_2 的着色方式对 Q_3 着色，并将 Q_2 与 Q_3 之间的每条边着为其端点处 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_1, c_2\}$ 中缺少的颜色。D_1 中的所有其他边交替着为 c_1，c_2，使得该着色与 φ一致。最后，我们使用颜色 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_1, c_2\}$ 对所有迄今未着色的平面着色，使所得着色与 φ一致。总之，φ是可扩展的。

□

引理 4.4 如果 G 的每个维度都包含预着色边，且存在一个维度恰好包含一条预着色边，并且该边的颜色确实出现在 G其他维度的边上，那么 φ 是可扩展的。

证明: 设 D_1 是仅包含一条预着色边 e 的维度，该边的颜色为 c_1，并考虑由 $2k+1$ 个平面 Q_1、.....、Q_{2k+1} 构成的子图 $G-E(D_1)$。由于至少有一种颜色出现在至少两条边上，因此有两种颜色 c_2、$c_3 \in \{1,\ldots,2d+1\}$ 在 φ 下的任何边上都没有出现。

情形 1。 的所有预着色边(D_1) 都包含在同一个平面内：在这种情况下，我们可以按照引理 3.4 中的情形 1 进行，但用引理 2.2 代替引理 2.1。我们省略细节。

情形 2。 $G-E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在两个平面内：

设 Q_1 和 Q_i 是包含与 e 不同的预着色边的两个平面。

我们先考虑 e 不与 Q_1 或 Q_i关联的情形。由于 Q_1 和 Q_i 各自至多包含 $2d-2$ 条预着色边，因此分别存在扩展 f_1 和 f_i，将 φ 在 Q_1 和 Q_i上的限制扩展，并使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$。随后，我们适当地为 D_1 的边着色，并相应地使用颜色 $\{c_1,c_2,c_3\}$，使着色与 φ 在 D_1 上的限制一致，且不与 f_1 或 f_i冲突。最后，我们为 $G-E$（D_1）中剩余的平面着色，从而得到 φ的一个扩展。

现在假设 e 与 Q_1、Q_2以及 $i\neq 2$关联。那么， Q_3 或 Q_{2k+1} 必有一个不包含预着色边；不妨设为 Q_3。（Q_{2k+1} 具有这一性质的情形类似。）与前一段一样，分别存在扩展 f_1 和 f_i，将 φ 在 Q_1 和 Q_i上的限制扩展，并使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$。我们按照 Q_1 的着色方式，相应地为 Q_2和 Q_3着色。接着，将 D_1 中位于 Q_2和 Q_3之间的每条边着上其端点处缺少的一种颜色，该颜色取自 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$；然后用颜色 c_2 和 c_3 交替为 D_1 的所有其他边着色，使 Q_1 和 Q_2 之间的所有边都着成 c_2。使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$为 G中剩余的未着色平面正常着色。现在，如果 e与着成 c_1的边相邻，那么就在一个包含 e 以及两条着成 c_1 的边的双色 4-圈上交换颜色，从而得到 φ的一个扩展；否则，只需将 e重新着色，即可得到 φ的一个扩展。

现在假设 e 与 Q_1、Q_2 和 $i=2$关联。移除 φ下任何被着色为 c_1 的边上的颜色，可得到 G的预着色 φ'。φ' 在 Q_1 和 Q_2 上的限制分别可扩展为正常边着色，使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$。将 Q_1和 Q_2 中任何在 c_1 下着色为 φ 的边重新着色为 c_1，即可分别得到 Q_1 的边着色 f_1 和 Q_2的边着色 f_2。

接下来，将 Q_1 和 Q_2 之间的每条边都着色为 c_2，但 e 着色为 c_1。之后，按照 Q_2 的着色方式，相应地为 Q_3，...，Q_{2k} 着色；并按照 Q_1 的着色方式，相应地为 Q_{2k+1} 着色。现在，对于 Q_2的每个顶点 x，都有颜色 c_x，$c'_x\in\{1,\ldots,2d+1\}$ 没有出现在 Q_2 中的 x处，也没有出现在 Q_1 和 Q_2 之间与其关联的边上。我们交替使用颜色 c_x 和 c'_x 为 D_1 中从 Q_2 到 Q_{2k} 的每条路径着色，之后将 Q_{2k} 和 Q_{2k+1} 之间的每条边着色为同一层中 Q_1 和 Q_2之间那条边的颜色。最后，将 Q_1 和 Q_{2k+1} 之间的边着色为其端点处缺少的颜色，从而得到 φ的一个扩展。

情形 3. $G-E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在至少三个平面中：

该假设意味着， $G - E(D_1)$中的每个平面至多包含 $2d - 3$ 条预着色边。假设 e 与 Q_1 和 Q_2关联。

首先，假设 $Q_1 \cup Q_2$ 总共至多包含 $2d-3$ 条预着色边。那么存在未着色的对应边 $e_1 \in E(Q_1)$ 和 $e_2 \in E(Q_2)$，它们与 e 相邻，但不与 $Q_1 \cup Q_2\varphi$-着色的 c_1 中任何边相邻。根据 φ 到 $G - E(D_1)$ 的限制，我们通过将 e_1 和 e_2 着为颜色 c_1，定义一个新的预着色 φ'。此后，我们可以按照引理 4.2 证明中的情形 3 继续，从而得到 G 的一个正常 $(2d + 1)$-边着色，它是 φ' 的扩展，并且 D_1 中的边均按对应关系着色。因此，通过交换一个双色 4-圈上的颜色，我们得到 φ 的一个扩展。

现在假设 $Q_1 \cup Q_2$ 总共包含 $2d - 2$ 条预着色边。如果存在未着色的对应边 $e_1 \in E(Q_1)$ 和 $e_2 \in E(Q_2)$，它们与 e 相邻，但不与 $Q_1 \cup Q_2\varphi$-着色的 c_1 中任何边相邻，那么我们就按照前一段的方法继续。因此，假设不存在这样的边 e_1 和 e_2。那么在 Q_1 中存在 $2d - 2$ 条边 e_1，……，e_{2d-2}，它们与 e 相邻，并且每条边都满足

(i) e_j 或 Q_2 中对应的边被着上与 c_1不同的颜色，或者

(ii) e_j 或 Q_2 中对应的边与一条被着上 c_1的边相邻。

此外，由于 $Q_1 \cup Q_2$ 无三角形且至多包含 $2d - 2$ 条预着色边， $Q_1 \cup Q_2$ 中的每条预着色边都满足上述条件之一。现在，对于 $j = 1$，2，根据 φ 在 Q_j上的限制，我们通过以下方式定义 Q_j 的一个新预着色 φ_j：将 Q_1 和 Q_2 中与 e 相邻且不满足 (i) 或 (ii) 的每条边都着上 $\{1, \ldots, 2d + 1\} \setminus \{c_1, c_2, c_3\}$ 中的某种颜色，使所得着色正常且与 φ一致。根据归纳假设， φ_j 可扩展为 Q_j的正常边着色，使用颜色 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_2, c_3\}$。注意，在这些着色中， Q_1 或 Q_2 中与 e 相邻的边都没有被着上 c_1。因此，我们可以将 Q_1 与 Q_2 之间的所有边都着上 c_2，但将 e 着上 c_1。

接下来，假设 $Q_r, r \notin \{1, 2\}$ 是包含预着色边的第三个平面。那么 Q_{r+1} 或 Q_{r-1}不包含任何预着色边或此前已着色的边，设为 Q_{r+1}。我们取 φ 在 Q_r 上的限制的一个扩展，使用颜色 $\{1, \ldots, 2d + 1\} \setminus \{c_2, c_3\}$，并按照 Q_r 的着色方式对所有其他未着色平面进行相应着色。随后，我们用 $\{1, \ldots, 2d + 1\} \setminus \{c_2, c_3\}$ 中在 Q_r 与 Q_{r+1} 的端点处缺失的唯一颜色，对两者之间的边着色。最后，我们交替使用颜色 c_2， c_3 为 D_1所有剩余未着色边着色，使所得着色正常。这就得到了 φ的一个扩展。□

引理 4.5 如果 G 的每个维度都恰好包含两条预着色边，且其中至少一条边使用的颜色也出现在其他维度的预着色边上，那么 φ 可扩展。

证明： 设 D_1 是包含两条预着色边 e_1 和 e_2 的一个维度。根据假设，在 φ 下的边上至多出现 $2d - 1$ 种颜色，因此取 $\{1, \ldots, 2d + 1\}$ 中的两种颜色 c_3， c_4，它们未出现在 φ 下的任何边上。

情形 1. $G - E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在同一个平面内：

假设除 e_1 和 e_2 之外，所有预着色边都位于 $G - E(D_1)$的同一个连通分支 Q_1 中。不失一般性，假设 $\{\varphi(e_1)\ \varphi(e_2)\} \subseteq \{c_1, c_2\}$。我们根据 φ 在 Q_1 上的限制定义一个新的预着色 φ'：从 Q_1 中所有用颜色 c_1 和 c_2 着色的边上去除这些颜色。现在，根据归纳假设， φ' 可扩展为使用颜色 $\{1, \ldots, 2d + 1\} \setminus \{c_1, c_2\}$对 Q_1 进行正常的 $(2d - 1)$-边着色。将 Q_1 中分别用颜色 c_1 和

c_2重新着色后，我们得到 Q_1的正常边着色 f'。接下来，我们以相应的方式为 $G-E(D_1)$的所有其他平面着色，并通过为 D_1 的每条边分配 $\{1,\dots,2d+1\}$ 中未出现在其相邻边上的颜色，来定义一个列表赋值。于是，除预着色的两条边 e_1 和 e_2 外， D_1的每条边都获得一个包含 3 种颜色的列表。因此， φ存在一个扩展。

情形 2. $G-E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在两个平面中：我们将考虑若干不同的子情形。

情形 2.1. D_1 的预着色边在 φ下具有相同的颜色：

假设 $\varphi(e_1)=\varphi(e_2)=c_1$。如果 e_1 和 e_2 都与同样的两个平面关联，那么我们可以采用与引理 4.4 证明中情形 2 类似的论证。因此，假设 e_1 和 e_2 至多与一个公共平面关联。

子情形 2.1.1. e_1 和 e_2 都恰好与一个公共平面关联

假设 e_1 和 e_2 都与公共平面 Q_1 关联，且 e_1 也与 Q_2 关联。如果 Q_1 和 Q_2 包含 $G-E(D_1)$ 的所有预着色边，那么引理 4.4 的情形 2 中，当 $Q_1\cup Q_2$ 包含 $G-E(D_1)$ 的所有预着色边时所用的类似论证同样适用，因此这里也省略细节。

接下来考虑以下子情形：

(a) Q_1 包含预着色边，但 Q_2 和 Q_{2k+1} 都不包含。

(b) Q_{2k+1} 或 Q_2 包含预着色边，但 Q_1 不包含。

(c) Q_2 和 Q_{2k+1} 都包含预着色边。

(*a*) 成立：

假设 Q_1和 Q_i包含 $G-E(D_1)$的所有预着色边，其中 $i\notin\{1,2,3,2k+1\}$。如果e_1 和 e_2 通过 Q_1中一条未着色边 e 相邻，那么由于 Q_1 至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此存在一种颜色 $c\in\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3,c_4\}$，它未出现在与 e相邻的任何边上。于是，由 φ 再将 e 着为颜色 c 所得到的预着色 φ' 是正常的。另一方面，如果不存在这样的边，则令 $\varphi'=\varphi$。

现在，由于 Q_1和 Q_i都至多包含 $2d-2$ φ'条预着色边，因此分别存在扩展 f_1和 f_i，它们分别是 φ'在 Q_1和 Q_i上的限制的扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$。我们按照 Q_1 的着色方式，分别给 Q_2， Q_3，Q_{2k+1} 着色，随后将Q_2与 Q_3之间的每条边着为其端点在 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 中缺少的颜色。

接下来，我们交替使用颜色 c_3,c_4 为 D_1 中所有迄今未着色的边着色，使得 Q_1 与 Q_2 之间的所有边颜色均为 c_3；同时，使用颜色$\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$为所有迄今未着色的平面进行正常着色。所得着色是正常的，且除 e_1和 e_2外，与 φ'一致。现在，如果 e_2的 e_1均不与颜色为 c_1的边相邻，那么我们只需将它们重新着色；否则，我们在一条或两条双色圈上进行交换，以得到 φ的扩展。注意，如果 e_1 和 e_2 都与颜色为 c_1的边相邻，那么这些圈互不相交。因此， φ 是可扩展的。

(*b*) 成立：

若 Q_{2k+1} 或 Q_2 中有预着色边，而 Q_1 中没有，则可应用与 (a) 中类似的论证，因此省略细节。

(*c*) 成立:

假设 Q_2 和 Q_{2k+1} 包含 $G-E(D_1)$ 的所有预着色边，并设 u_{2k+1} 和 u_2 分别为 Q_{2k+1} 和 Q_2 中与 e_1 和 e_2 关联的顶点。

如果 Q_{2k+1} 和 Q_2 都至多包含 $2d-4$ 条预着色边，那么存在未着色边 $e'_{2k+1}\in E$（Q_{2k+1}）和 $e'_2\in E$（Q_2），它们分别与 u_{2k+1} 和 u_2 关联，不与 $Q_{2k+1}\cup Q_2$ 的任何预着色 c_1 边相邻，并且 Q_1 中对应的边彼此独立。我们用颜色 c_1 给 e'_{2k+1}、e'_2 以及 Q_1 中对应的边着色。连同 φ，这定义了 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$ 的一个预着色。根据归纳假设，该预着色可扩展为使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 的正常边着色。我们将 Q_1 和 Q_2 之间的所有边着为颜色 c_4，并将 Q_{2k+1} 和 Q_1 之间的所有边着为颜色 c_3。接下来，我们按照 Q_{2k+1}和 Q_2 的着色方式，分别给 Q_{2k} 和 Q_3 着色。之后，我们将 Q_{2k+1} 和 Q_{2k} 之间的所有边着为其在 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 中端点处缺少的颜色；对 Q_2 和 Q_3 也作类似处理。最后，我们用颜色 c_3、c_4 交替给 D_1 的所有未着色边着色，用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 给所有尚未着色的平面着色，并在分别包含 e_1 和 e_2 的两个双色圈上进行交换，从而得到 φ 的一个扩展。

现在反过来，假设 Q_{2k+1} 和 Q_2 中有一个包含 $2d-3$ 条预着色边，例如 Q_{2k+1}。那么 Q_2 恰好包含一条预着色边 e。从 Q_{2k+1} 中任意一条已预着色的边上去掉颜色后，我们便得到一个预着色 φ'，它来自将 φ 限制到 Q_{2k+1}。φ' 可扩展为Q_{2k+1}的正常着色，所用颜色为 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3\}$；再将 Q_{2k+1} φ 中由 c_1 着色的边重新着色为颜色 c_1，便得到一个扩展 f_{2k+1}，它来自将 φ 限制到 Q_{2k+1}。

接下来，我们按照 Q_{2k+1} 的方式给 Q_1 着色，唯一的区别是：将 Q_1 中对应于以颜色 c_1 着色的边的边，着色为颜色 c_3。我们用$\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3\}$中任意一种在 Q_{2k+1} 和 Q_1 的端点处均未出现的颜色，给它们之间的边着色；但 e_2 着色为 c_1。

首先，假设 e 被预着色为 c_1。接着，我们按照 Q_1 的着色方式相应地为 Q_2 着色，但将 e着为颜色 c_1。然后，我们用 $\{1,\dots,2d+1\}$中在其端点处缺失的任意一种颜色为 Q_1与 Q_2之间的所有边着色，但 e_1着为 c_1 的情况除外。此后，我们按照 Q_1的着色方式相应地为 Q_3 着色，并按照 Q_{2k+1} 的着色方式相应地为所有剩余的未着色平面着色。随后，我们可以适当地为 D_1 中此前未着色的边着色，从而得到 φ的一个扩展。

现在，假设 Q_2 的预着色边被着为 $c_2\neq c_1$。令 e' 为 Q_1 中与 e对应的边，并假设在此前构造的着色中，e' 被着为 c'。我们按照 Q_1 的着色方式相应地为 Q_2 着色，但在 Q_2的着色中置换颜色 c_2 和 c'。此后，我们按照 Q_2 的着色方式相应地为 Q_3 着色，但置换颜色 c_2 和 c'；最后，按照前一段中的方法为 G中剩余的未着色边着色。

子情形 2.1。**2** e_1 和 e_2 不与同一公共平面关联:

假设 e_1 与 Q_1 和 Q_2 关联，且 e_2 与 Q_j 和 Q_{j+1}关联，并且这四个平面各不相同。若所有预着色边都包含在 $Q_1\cup Q_2$中，则与之前一样，我们可以选取 Q_j 和 Q_{j+1} 中与 e_2相邻的相应未着色边 e'_j 和 e'_{j+1}。接下来，考虑由 φ 得到的预着色 φ'：将 e'_j 和 e'_{j+1} 着为 c_1，并从 e_2中去掉颜色 c_1。现在，我们可以采用与引理 **4.4** 的情形 **3** 中 $Q_1\cup Q_2$ 包含 $2d-2$ 条预着色边时该子情形类似的论证，从而得到 φ'的一个扩展。特别地，由于 G中至少有一个平面不同于 Q_1，Q_2，Q_j，Q_{j+1}，且其中不含任何 φ'着色的边，因此我们可以给 D_1的边着色

使得 Q_j 与 Q_{j+1} 之间的所有边颜色相同。随后，我们可以在一个双色 4-圈上进行交换，从而得到 φ的一个扩展。

现在假设平面 Q_1 和 Q_2中恰有一个包含预着色边，平面 Q_j 和 Q_{j+1}中也恰有一个包含预着色边。举例来说，假设 Q_1 和 Q_j 中不包含预着色边（其他情况类似）。我们选取一条边 e_2'，使其位于 Q_2 中、尚未着色且与 e_1相邻，但不与任何其他已预着色的边 c_1相邻；再以类似方式选取 Q_{j+1}中的一条边 e_{j+1}'。由于这些平面中各自至多包含 $2d-3$条预着色边，这样的边必然存在。根据 φ 在 $Q_2 \cup Q_{j+1}$ 上的限制，我们定义一个新的预着色φ'，并额外为 e_2'和 e_{j+1}' c_1着色。现在，根据归纳假设，存在 f_2 和f_{j+1}，分别是 φ'在 Q_2和 Q_{j+1}上的限制的扩展，且使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$。

现在我们来为 $G-E(D_1)$ 的其他平面着色。不失一般性，假设 $j+1<2k+1$。我们按照 Q_2 的着色情况，分别为 Q_1 和 Q_{2k+1} 着色；按照 Q_{j+1}的着色情况为 Q_j 着色；其余平面则任意使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$着色。随后，我们用一种在 Q_1 和 Q_{2k+1} 的端点处缺失的颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 为它们之间的所有边着色，并用颜色 c_3，c_4 交替为 D_1 的其余所有边着色，从 Q_1 处的颜色 c_3 开始。最后，我们分别交换包含 e_1 和 e_2 的两个双色 4-圈上的颜色，从而得到 φ 的一个扩展。

最后，我们考虑这样的情况：Q_1 可能包含预着色边，但 Q_2，Q_j，Q_{j+1} 均不包含预着色边。我们通过将 φ 限制在 Q_1 上来定义一个预着色 φ'：像之前一样，选择一条与 e_1 相邻的边 $e_1'\in E(Q_1)$ 并为其着色 c_1。随后，我们使用颜色$\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$对 φ' 进行扩展，并相应地为 Q_2 着色。接着，我们用颜色 c_1为 Q_j 和 Q_{j+1}之间的所有边着色，并用颜色 c_3 和 c_4交替为 D_1 的其余所有边着色，从Q_{j+1}处的颜色 c_3 开始。现在，我们像之前一样得到 φ 的一个扩展。

情形 2.2 的预着色边 D_1 在 φ下颜色不同：假设 $\varphi(e_1)=c_1$ 且 $\varphi(e_2)=c_2$。我们将考虑若干不同的情形。

子情形 2.2：1 e_1 和 e_2 都与两个公共平面关联：

假设 e_1 和 e_2 都与平面 Q_1 和 Q_2关联。设Q_1 中与 e_1 和 e_2分别关联的顶点为 u_1 和 u_2。

如果 Q_1 和 Q_2 均不含预着色边，那么我们可以在 Q_1 (和 Q_2)中选取与 u_1 和 u_2分别关联的独立边，并将它们着色为 c_1 和 c_2。随后，我们可以按照引理4.2的情形3进行处理，从而得到 $G-E(D_1)$的所得预着色 φ' 的扩展，然后像之前一样得到 φ的扩展。

现在假设所有预着色边都包含在 $Q_1\cup Q_2$ 中。我们先证明以下命题。

命题 4.6 假设 $d\geq 3$。以下两个陈述至少有一个成立。

(i) 存在一条边 $e_1'\in E(Q_1)$ 与 u_1 关联但不与 u_2 关联，使得 e_1' 以及 Q_2 中对应的边e_1'' 均未着色，且与任何颜色为 c_1 的边都不相邻。***(ii)*** 存在一条边 $e_2'\in E(Q_1)$ 与 u_2 关联但不与 u_1 关联，使得 e_2' 以及 Q_2 中对应的边e_2'' 均未着色，且与任何颜色为 c_2 的边都不相邻。

证明： 假设 (i) 不成立。由于 $G-E(D_1)$ 是无三角形且为 $2d-2$-正则的图，因此有 $2d-3$ 条边 a_1、.....、$a_{2d-3}\in E(Q_1)$ 与 u_1 关联，这些边要么是预着色边，要么与一条颜色为 c_1 的边相邻，要么其在 Q_2 中对应的边满足上述条件之一。由于 $Q_1\cup Q_2$

含有 $2d-2$ 条预着色边，很容易看出此时 (ii) 必然成立，因此存在一条符合要求的边 e_2'。□ 若 $d=2$, 我们注意到，如果 u_1 和 u_2 通过一条未着色边相邻，则该断言可能不成立。然而，在
在这种情形下，显然可以验证 φ 是可扩展的，因为奇圈的每一种预着色都可以用 3 种颜色扩展。

现在假设命题 4.6 的 (ii) 成立，并令 e_2' 和 e_2'' 分别为 Q_1 和 Q_2中对应的边，如命题中所述。根据 φ 到 $Q_1 \cup Q_2$ 的限制，我们通过另外将e_2' 和e_2'' 着为颜色 c_2，定义 $Q_1 \cup Q_2$ 的一个新预着色φ'。现在，我们可以按照引理 4.4 证明中情形 2 的子情形（所有预着色边都包含在 $Q_1 \cup Q_2$中）继续进行，从而得到 φ' 的一个扩展（用 c_3 代替 c_2）。之后，我们交换一个包含e_2 的双色 4-圈上的颜色，从而得到 φ的一个扩展。

剩下的情况是，所有预着色边都包含在 Q_1 和 Q_i中，其中 $i \neq 2$。那么， Q_3 或 Q_{2k+1} 中必有一个不含预着色边，不妨设为 Q_3。
首先假设 Q_1 至多包含 $2d-4$ 条预着色边。由于 Q_1 是 $(2r-2)$-正则的，因此存在相互独立的未着色边 $e_1' \in E(Q_1)$ 和 $e_2' \in E(Q_1)$，分别与 u_1 和 u_2关联，并且 e_1' 不与 Q_1 φ-着色的 c_1中的任何边相邻， e_2' 也不与 $Q_1$$\varphi$-着色的 c_2中的任何边相邻。

根据 φ 到 Q_1 的限制，我们定义 Q_1 的新预着色 φ'：额外将 e_1' 着为颜色 c_1，并将 e_2' 着为颜色 c_2。接下来，我们使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\} \setminus \{c_3,c_4\}$对 φ' 进行扩展，并按照 Q_1 的着色方式，分别为 Q_2 和 Q_3 着色。之后，按如下方式为 D_1 的边着色：将 Q_2和 Q_3之间的所有边着为其端点处缺少的一种 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 中的颜色，并交替使用颜色 c_3 和 c_4 为 D_1 的其余边着色，使得 Q_1 和 Q_2 之间的所有边均着为 c_3。此后，使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\} \setminus \{c_3,c_4\}$ 为平面 Q_4、.....、 Q_{2k+1} 着色，使着色与 φ 一致。现在，我们可以通过在分别包含 e_1 和 e_2的两个双色 4-圈上交换颜色，得到 φ 的一个扩展。

现在假设 Q_1 恰好包含 $2d-3$ 条预着色边。那么 Q_i 恰好包含一条预着色边。此外，正如命题 4.6 的证明中所示，很容易看出存在

- 一条满足命题 4.6 中条件 (i) 的边 e_1'，或者
- 一条满足命题 4.6 中条件 (ii) 的边 e_2'。

例如，假设条件 (i) 成立。然后，根据 φ 到 Q_1 的限制，我们通过额外将 e_1' 着为颜色 c_1，并移除 Q_1 中所有着为 c_2 的边上的颜色，来定义 Q_1 的一个新预着色 φ'。
接下来，我们使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\} \setminus \{c_2,c_3\}$ 对 φ' 进行扩展，将着为 c_2 的边 φ 重新着为颜色 c_2，然后按照 Q_1 的着色情况，分别为 Q_2 和 Q_3 着色。将所得着色记为 f。我们将 Q_1 与 Q_2 之间的所有边着为颜色 c_3，但将 e_2 着为 c_2；并将 Q_2 与 Q_3 之间的边着为一种在其端点处缺少的 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 中的颜色。

现在，令 e_i''为 Q_i中已预着色的边，并令 e_1''为 Q_1中与之对应的边。如果 $f(e_1'') = \varphi(e_i'')$，那么我们按照 Q_1 的着色方式为此前所有未着色的平面着色，随后为 D_1 剩余的未着色边着色，最后交换包含 e_1 的一个双色 4-圈上的颜色，从而得到 φ的扩展。

否则，如果 $f(e_1'') \neq \varphi(e_i'')$，那么我们按照 Q_1 的着色方式对所有其他平面进行着色，只是在着色中置换颜色 $f(e_1'')$ 和 $\varphi(e_i'')$。现在可以应用与之前类似的论证，得到 φ 的一个扩展；细节留给读者。

情形 2.2。**2** e_1 和 e_2 恰好关联于一个公共平面:

假设 e_1 与 Q_1 和 Q_2 关联，且 e_2 与 Q_1 和 Q_{2k+1} 关联。令 u_1 和 u_2 分别为 Q_1 中与 e_1 和 e_2 关联的顶点。如果 Q_1，Q_2，Q_{2k+1} 均不包含预着色边，则适用与子情形 2.2.1 第二段类似的论证。因此，只需考虑以下子情形:

(a) $G - E(D_1)$的所有预着色边都包含在 $Q_1 \cup Q_2$中。(b) Q_1 包含预着色边，但 Q_2 和 Q_{2k+1}都不包含。(c) Q_2包含预着色边，但 Q_1 和 Q_{2k+1}都不包含。(d) $G - E(D_1)$的所有预着色边都包含在 $Q_2 \cup Q_{2k+1}$中。

由对称性，只需考虑以下情形。

*(a)*成立:

我们先考虑这样的情形：存在一条边 $e'_1 \in E(Q_1)$与 e_1相邻，使得 e'_1 和对应的边 $e'_2 \in E(Q_2)$均未着色，且均不与任何预着色为 c_1的边相邻。若此条件成立，则根据 φ 对 $Q_1 \cup Q_2$ 的限制，我们通过将e'_1 和e'_2 着色为 c_1，并移除所有 φ着色为 c_2的边上的颜色，定义一个新的预着色 φ' 。

根据归纳假设，存在一个使用颜色 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_2, c_3\}$ 对 φ' 的扩展。由 φ'，通过将 Q_1 和 Q_2 中被颜色 c_2 着色为 φ-coloredc_2 的边重新着色，我们得到 $Q_1 \cup Q_2$ 的边着色 f。我们将 Q_1 与 Q_2 之间的所有边着为颜色 c_3，将所有平面 $Q_3, \ldots, Q_{2k}$ 按照 Q_2 的着色方式相应着色，并将 Q_{2k+1} 按照 Q_1 的着色方式相应着色。现在，Q_{2k+1} 与 Q_{2k} 之间的边可以着为颜色 c_3，而 D_1 的其余每条边都可以着为其端点处缺少的某种适当颜色。因此，通过交换包含 e_1 的一个双色 4-圈上的颜色，我们得到 φ 的一个扩展。

现在假设不存在与 e_1 相邻的边 $e'_1 \in E(Q_1)$，使得 e'_1 和相应的边 $e'_2 \in E(Q_2)$ 均未着色，且不与任何预着色为 c_1 的边相邻。那么，由于 $Q_1 \cup Q_2$ 是 $(2d-2)$-正则的，且包含 $2d-2$ 条预着色边，u_1 与 $2d-2$ 条边 $a_1, \ldots, a_{2d-2}$ 关联，其中每条 a_i 或其在 Q_2 中的对应边，都被着为区别于 c_1 的 φ 颜色，或者未着色且与一条着为 c_1 的 φ 边相邻。特别是，如果 $Q_1 \cup Q_2$ 中有一条边被着为 c_2，那么 Q_1 和 Q_2 中各自至多有一条边被着为 c_2。此外，由于 G 无三角形，且 $Q_1 \cup Q_2$ 恰好包含 $2d-2$ 条预着色边，$Q_1 \cup Q_2$ 中一条预着色为 c_2 的边不会与 $Q_1 \cup Q_2$ 中一条预着色为 c_1 的边相邻。

如果 Q_1 包含一条预着色为 c_2 的边 a，那么根据 φ 到 $Q_1 \cup Q_2$的限制，我们通过将 a 重新着色，并将 Q_2 中对应的边也着色为 c_1，定义一个预着色φ'。否则，如果 Q_1 和 Q_2都包含预着色为 c_2的边，那么我们将这些边重新着色为 c_1，以此定义 φ'。现在，根据归纳假设，存在一个使用颜色 $\{1, \ldots, 2d+1\} \setminus \{c_2, c_3\}$对着色 φ'的扩展。将先前重新着色的边 c_1 重新着色为 c_2 后，我们便得到 φ到 $Q_1 \cup Q_2$的限制的一个扩展。接下来，将 e_1 着色为 c_1，并将 Q_1 和 Q_2 之间的所有其他边着色为 c_3。我们按照 Q_1的方式对 Q_{2k+1} 着色，并按照 Q_2 的着色方式对 Q_3，……，Q_{2k} 着色，然后像之前那样为 D_1 中迄今未着色的边着色，从而得到 φ的一个扩展。

另一方面，若没有边被着色为 c_2，那么根据 φ 到 $Q_1 \cup Q_2$ 的限制，我们定义一个新的预着色 φ'：将所有与 e_1 相邻、且未被预着色或未与某条边相邻的边着色

在 $G-E(D_1)$ 中着色为 c_1，并从 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2,c_3\}$ 中任取一种颜色，使所得的预着色为正常着色。根据归纳假设，得到的 Q_1 预着色可扩展为使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 的正常着色，而 Q_2 的预着色可扩展为使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 的着色，其中 c_4 是一种任意颜色，且它没有出现在 Q_2 的任何一条边上。注意，在此着色中，没有与 e_1 相邻的边被着色为 c_1。因此，我们可以按照 Q_1 的着色方式给 Q_{2k+1} 着色，将 Q_1 与 Q_{2k+1} 之间的所有边着为颜色 c_2，并将 Q_1 与 Q_2 之间的所有边着为颜色 c_3，但将 e_1 着为 c_1。由于 $G-E(D_1)$ 中其他平面均不含预着色边，现在可以直接从此部分着色得到 φ 的一个扩展。

(b) 成立：

假设 Q_1 和 Q_i 包含 $G-E(D_1)$ 的所有预着色边，其中 $i\notin\{1,2,3,2k+1\}$。我们将 φ 在 $Q_1\cup Q_i$ 上的限制扩展为使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$、颜色 Q_2，Q_3，Q_{2k+1}，分别与 Q_1 的着色方式相同；并用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 对 $G-E(D_1)$ 中所有其余平面着色，使着色与 φ 一致。接下来，我们给 D_1 的边着色：Q_2 与 Q_3 之间的边使用其端点处缺少的颜色着色，而 D_1 的所有其他边则以 c_3 和 c_4 交替着色，并从 Q_2 处的颜色 c_3 开始。由此得到的着色除 e_1 和 e_2 外均与 φ 一致。我们分别用 c_1 和 c_2 重新着色这些边；必要时可通过在一个或两个双色 4- 圈上交换颜色，从而得到 φ 的一个扩展。

(c) 成立：

Q_2 中含有预着色边，而 Q_{2k+1} 和 Q_1 中不含预着色边的情况，可以像前一段那样处理，因此这里省略细节。

(d) 成立：

如果 $d=2$，那么显然 φ 可扩展，因为奇圈的任意部分3-边着色都可扩展。如果 $d>2$，那么由于 $Q_2\cup Q_{2k+1}$ 恰好包含 $2d-2$ 条预着色边，显然存在非对应边 $e'_{2k+1}\in E(Q_{2k+1})$ 和 $e'_2\in E(Q_2)$，它们未着色，分别与 e_1 和 e_2 相邻，且分别不与 $Q_{2k+1}\cup Q_2$ 中的任何预着色边及 c_2 和 c_1 相邻。

根据 φ 到 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$ 的限制，我们定义 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$ 的一个新预着色 φ'：另外将 e'_{2k+1} 着为 c_2，将 e'_2 着为颜色 c_1，并将 Q_1 的对应边分别着为颜色 c_2 和 c_1。根据归纳假设，存在一个使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 将 φ' 扩展到 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$ 的扩展。由此着色出发，我们现在可以像之前一样进行，从而得到 φ 的扩展。

情形 2.2。3 e_1 和 e_2 不与任何公共平面关联：

假设 e_1 与 Q_1 和 Q_2关联，且 e_2 与 Q_j 和 Q_{j+1}关联。如情形 2.1.2 中所示，我们可以区分以下三种情况：

- 所有预着色边都包含在 Q_1 和 Q_2中。
- Q_1 和 Q_2中的一个，以及 Q_j 和 Q_{j+1}中的一个，包含预着色边。
- 至多有一个平面 Q_1,Q_2,Q_j,Q_{j+1} 包含预着色边。

此外，在这三个子情形中，我们都可以完全按照子情形 2.1.2 中对应的子情形进行。细节从略。

情形 3. $G - E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在至少三个平面中：
如果 D_1 的预着色边都不与含有预着色边的平面关联，那么只需在 D_1 的预着色边所关联的平面中选取未着色边，即可轻易得到一个扩展，因此下文均假设情况并非如此。还需注意，由于G至少包含五条预着色边， $d \geq 3$。

情形 3.1. 在 D_1 的预着色边在 φ下具有相同颜色：假设 $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = c_1$。
我们将考虑若干种不同的子情形。

子情形 3.1.1 e_1 和 e_2 与相同的两个平面关联：
假设 e_1 和 e_2 与相同的两个平面 Q_1 和 Q_2关联。如果 e_1 和 e_2的端点在 Q_1 和 Q_2中都通过未着色边相邻，那么我们将 φ 在 $Q_1 \cup Q_2$ 上的限制作为预着色 φ'，并将 Q_1 和 Q_2 中的这些边着为颜色 c_1。现在可以按照引理 4.2 的情形 3 进行，从而得到 φ'的扩展；之后在一个双色 4-圈上交换颜色，以得到 φ的扩展。

否则，若 e_1 和 e_2 的端点在 Q_1 和 Q_2中均不通过未着色边相邻。由于 $d > 2$、 $Q_1 \cup Q_2$ 中至多有 $2d-3$ 条预着色边，且 G 中任意两个顶点至多包含在一个5-圈中，因此不难看出， Q_1中存在独立边 e_1' 和 e_2'，分别与 e_1和 e_2相邻，并且这些边及 Q_2 中对应的边均未预着色，也不与 $Q_1 \cup Q_2$中 c_1 预着色的边相邻。因此，我们可以将 Q_1 和 Q_2 中的这些边着为颜色 c_1，然后按照前一段中的方法继续，从而得到 φ的扩展。

子情形 3.1。**2** e_1 和 e_2 关联于一个公共平面：
假设 e_1 和 e_2 恰好关联于一个公共平面 Q_1，且 e_1 也关联于 Q_2。若 $Q_1 \cup Q_2$ 中至多有 $2d-4$ 条预着色边，且 $Q_{2k+1} \cup Q_1$中至多有 $2d-4$ 条预着色边，则 Q_1中存在独立边 e_1' 和 e_2'，分别与 e_1 和 e_2 相邻，并且这些边以及 Q_2 和 Q_{2k+1}中对应的边均未预着色，也不与 $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_{2k+1}$中 c_1 预着色的边相邻。因此，我们可以按照上述方法继续，从而得到 φ的扩展。

现在反过来，假设比如说 $Q_1 \cup Q_{2k+1}$恰好包含 $2d-3$ 条预着色边。如果存在独立边 e_1' 和 e_2'，且它们位于 Q_1中，如前一段所述，那么我们可以按该情形处理；因此，假设不存在这样的两条边。

我们首先考虑可以恰好选取一条这样的边的情形，也就是说，存在一条边 $e_1' \in E(Q_1)$，它与 e_1 相邻但不与 e_2相邻，并且满足： e_1' 及 Q_2 中对应的边均未预着色，也不与 $Q_1 \cup Q_2$ 中已预着色 c_1的边相邻。此外，不存在与 e_2 相邻且具有类似性质的边 e_2'。考虑由 φ 在 $Q_{2k+1} \cup Q_1 \cup Q_2$上的限制，再额外将 e_1' 及 Q_2 中对应的边着为颜色 c_1所得到的预着色 φ'。现在，由于不存在上述描述的未着色边 e_2'，可知在 Q_1 中所有与 e_2相邻的 $d-2$ 边 $a_1, \ldots, a_{d-2}$ 都满足以下条件之一： a_i，或者 Q_{2k+1}中对应的边，是 φ'-预着色的，或与一条在 φ'下着为 c_1 的边相邻。此外，由于 $Q_{2k+1} \cup Q_1$ 至多包含 $2d-2$ φ'条预着色边， $Q_{2k+1} \cup Q_1$ 中的每条预着色边都满足此条件。因此，通过适当地为未着色的

与 e_2相邻的边着色，颜色取自 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3,c_4\}$，但与 $G-E(D_1)$中着为 c_1的边相邻的边除外，我们便从 φ'得到一个预着色 φ''。注意，使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$ 对 φ'' 在 $Q_{2k+1}\cup Q_1$ 上的限制进行的任何扩展，都不会将 c_1 用于与 e_2相邻的边。因此，由于 $G-E(D_1)$中恰有一条预着色边未包含在 $Q_{2k+1}\cup Q_1$中，我们可以再次按照引理4.2的情形3进行处理，得到 G的一个正常$(2d+1)$-边着色，该着色与 φ''一致；其中，与 e_2 相邻的边均未着为 c_1，并且我们为 D_1 中的边着色，使任意两个给定平面之间的所有边都着为一种固定颜色，且该颜色不出现在这两个平面中。此后，我们可以交换一个双色 4-圈上的颜色，并对 e_2 重新着色，从而得到 φ的一个扩展。

现在假设在 Q_1 中，既不存在上述的边 e_1'，也不存在上述的边 e_2'。那么，e_1 和 e_2 在 Q_1 中的端点u_1 和 u_2 分别通过一条未着色边 e 相邻，该边位于 Q_1 中，而 Q_{2k+1} 和 Q_2 中对应的边均未着色。此外，由于 $Q_{2k+1}\cup Q_1$ 和 $Q_1\cup Q_2$ 各自至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此 Q_1 中有 $2d-4$ 条边被预着色为 c_1，这些边的端点分别与 u_1 和 u_2相邻。此外，Q_{2k+1} 恰好包含一条预着色边，Q_2 也恰好包含一条预着色边，因此 $G-E(D_1)$ 的所有预着色边都包含在$Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$中。

现在，根据 φ 到 Q_{2k+1} 的限制，我们通过将 Q_1 中着色为 c_1的边所对应的 Q_{2k+1}中的所有边着色为颜色 c_1，定义一个新的预着色 φ'；随后，将 Q_{2k+1} 中与e_2 相邻、既未预着色，也不与任何已预着色为 c_1 的边相邻的每条边，任意着上$\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3,c_4\}$ 中的一种颜色，使所得着色正常。接下来，我们使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$对 φ'进行扩展。（注意，在此扩展中，与 e_2相邻的边没有一条被着色为 c_1。）随后，按照 Q_{2k+1} 的着色方式对 Q_1 相应着色，但将所有着色为 c_1 且在 φ' 下未预着色为 c_1 的边重新着色为 c_3。将得到的 G 的部分着色记为 f。

现在，若 b_2 的预着色边 Q_2 在 φ下着为 c_1，则我们按照Q_1 在 f下的着色方式，对 Q_2 进行相应着色，但边 φ（预着色为 c_1）着为 c_1。随后，我们按照 Q_3、.....、Q_{2k}的着色方式，对 Q_1 进行相应着色。现在可以应用引理 2.2 为 D_1 的边着色，从而得到 φ的扩展。（由于 e_1 和 e_2 包含在 D_1的不同圈中，我们可以选择 D_1 的着色，使其与 φ一致。）否则，若 b_2 着为 $c_5\neq c_1$，则 Q_1 的对应边未着为 c_1。我们按照 Q_1 的着色方式对 Q_2 进行相应着色，但将颜色 c_5 与 Q_1 的对应边在 f下的颜色互换。同样，我们按照 Q_1的着色方式，对所有平面Q_3、.....、Q_{2k}进行相应着色，并应用引理 2.2，得到 φ 的扩展。

子情形 3.1。**3** e_1 和 e_2 不与任何公共平面关联：

假设 e_1 与 Q_1 和 Q_2 关联，而 e_2 与 Q_j 和 Q_{j+1}、$j>2$关联。由于每个Q_i 都是（$2d-2$）-正则的，且任意一对相邻平面至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此显然存在相应的未着色边 $e_1'\in E$（Q_1）和 $e_2'\in E$（Q_2），它们与 e_1 相邻，但不与任何其他已预着色为 c_1的边相邻；对于 e_2也同理。因此，我们可以按照引理 4.2 的情形3进行处理：通过分别将选定的、与 e_1 和 e_2相邻的边着为颜色 c_1，并从 e_1 和 e_2中移除颜色 c_1，从而得到 $G-E$（D_1）的预着色 φ' 的一个扩展，其中该预着色由 φ 定义。由 φ'的扩展，我们像之前一样得到 φ 的一个扩展。

情形3.2。 D_1 的预着色边在 φ下具有不同的颜色：假设 $\varphi(e_1)=c_1$ 和 $\varphi(e_2)=c_2$。

子情形 3.2。**1** e_1 和 e_2 都与两个公共平面关联：

假设 e_1 和 e_2 都与同一对平面 Q_1 和 Q_2关联。令 u_1 和 u_2 为 Q_1 中分别与 e_1 和 e_2关联的顶点。

若 $Q_1 \cup Q_2$ 中至多有 $2d-4$ 条预着色边，则存在独立边 $e_1' \in E$（Q_1）和 $e_2' \in E$（Q_1），分别与 u_1 和 u_2关联，使得 e_1' 及 Q_2 的对应边 e_1'' 均未预着色，也不与 $Q_1 \cup Q_2$中 c_1 预着色的边相邻；对于 e_2'、Q_2 的对应边 e_2'' 和 c_2，情况也类似。因此，根据 φ 在 $Q_1 \cup Q_2$ 上的限制，我们可以通过分别用 c_1 和 c_2 为这四条边着色，定义一个新的预着色 φ'。现在，我们可以按照引理 4.2 的情形 3 进行，从而得到 φ'的一个扩展；随后，通过在两个双色 4- 圈上交换颜色，我们可以得到 φ 的一个扩展。

现在假设 $Q_1 \cup Q_2$ 含有 $2d-3$ 条预着色边，因此恰有一个平面 $D_i, i \neq 1,2$ 含有一条预着色边 a_i；我们假设 $i \neq 3$。那么，如命题 4.6 中所述，以下情况必有其一：

(i) 存在一条边 $e_1' \in E(Q_1)$，它与 u_1 关联但不与 u_2关联，且 e_1' 和 Q_2中对应的边 e_1''均未着色，并且不与 $Q_1 \cup Q_2$ 中任何一条着色为 c_1的边相邻；或者

(ii) 存在一条边 $e_2' \in E(Q_1)$，它与 u_2 关联但不与 u_1关联，且 e_2' 和 Q_2中对应的边 e_2''均未着色，并且不与 $Q_1 \cup Q_2$ 中任何一条着色为 c_2的边相邻。

例如，假设 (ii) 成立。接着，我们通过将 φ 限制到 $Q_1 \cup Q_2$，并用颜色 c_2给 e_2' 和 e_2'' 着色，来定义一个新的预着色 φ'。从 φ'下着色为 c_1 的任意边上去掉颜色 c_1 后，我们得到 $Q_1 \cup Q_2$的预着色 φ''。接下来，使用颜色 $\{1,\ldots,2d+1\}\backslash\{c_1,c_3\}$扩展 φ''，然后将所有着色为 c_1 的 φ重新着色为颜色 c_1，从而得到着色 f，它是 φ'的一个扩展。我们将 Q_1 与 Q_2 之间的所有边着色为颜色 c_3，但 e_1 除外；e_1 着色为c_1。按照 Q_2 的着色方式给 Q_3 着色，并将 Q_2 与 Q_3 之间的边着色为一种在其端点处缺失的颜色$\{1,\ldots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3\}$。

接下来，考虑 Q_i的预着色边 a_i，以及对应的 Q_1的边 a_1。如果 f（a_1）$=\varphi$（a_i），那么我们按照 Q_1 的着色方式，对所有平面 Q_4、.....、Q_{2k+1} 相应着色。之后，我们仿照 Q_1 与 Q_2 之间各边的着色方式，为 Q_3 与 Q_4 之间的边着色，然后用两种未出现在这些路径端点上的颜色，为 D_1 中其余未着色的路径着色。最后，在包含 e_2 的双色 4-圈上交换颜色，从而得到 φ的扩展。

否则，如果 f（a_1）$\neq\varphi$（a_i），那么我们按照 Q_1 的着色方式，对平面 Q_4、.....、Q_{2k+1} 相应着色，但要置换颜色 f（a_1）和 φ（a_i）。然后，用颜色 c_3为 Q_3 与Q_4 之间的边着色，并考虑子图 H，它由 D_1 中端点位于序列 Q_4、.....、Q_{2k+1}、Q_1中两个连续平面内的边构成。若为这些边定义列表赋值，使每条边的列表包含 $\{1,\ldots,2d+1\}$ 中未出现在任何相邻边上的颜色，则除端点位于 Q_1 和 Q_{2k+1}的边以外，每条边的列表大小至少为二。因此，H 可由这些列表进行列表边着色。由此得到 G的一个边着色，除 e_2外，它与 φ 一致。最后，在包含 e_2 的双色 4-圈上交换颜色，从而得到 φ的扩展。

子情形 3.2。2 e_1 和 e_2 恰好关联一个公共平面：

现在反过来假设，e_1 和 e_2 恰好关联于一个公共平面，设为 Q_1；此外，e_1 也关联于 Q_2。若存在未着色的对应边 $e_1' \in E(Q_1)$和 $e_{2k+1}' \in E(Q_{2k+1})$，它们关联于 e_2，但不与任何其他预着色为 c_2的边关联；并且对于 e_1 和颜色 c_1，在 Q_1 和 Q_2中分别也存在类似的边，且这些边与 e_1'不相交，则我们按上述方法继续：我们可以

通过分别将与 e_1 和 e_2 相邻的边着色为 c_1 和 c_2，得到一个扩展，然后像之前一样按照引理4.2的情形3继续。

现在，任意两个相邻平面至多包含 $2d-3$ 条预着色边，因此，如果不存在如前一段所述的边，那么所有预着色边都包含在 $Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$ 中，并且 e_1 和 e_2 与公共顶点 $u_1\in V(Q_1)$ 相邻。此外，u_1 与 $2d-4$ 条分别着有不同颜色（来自 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2,c_3,c_4\}$）的边关联，$Q_{2k+1}$ 恰好包含一条预着色边，而 Q_2 也恰好包含一条预着色边。此外，$Q_{2k+1}\cup Q_2$ 中的这些预着色边要么与对应于 u_1 的顶点相邻，要么分别着色为 c_2 和 c_1，并且与关联于 u_1 的边相邻。我们根据 Q_1 和 Q_2 的预着色边的颜色，考虑若干不同情形。

首先，假设预着色边 Q_{2k+1} 被赋予颜色 c_2，且 Q_2 包含一条预着色为c_1的边。对于 Q_{2k+1} 中与 e_2 相邻、且未预着色或不与预着色为c_2的边相邻的所有边，我们从 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2,c_3\}$ 中任意选取颜色进行着色，使所得预着色为正常着色；对 Q_2 也同样处理，不过用 c_1 代替 c_2。接着，我们取所得预着色 φ' 的一个扩展$Q_{2k+1}\cup Q_1\cup Q_2$，其中用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3\}$ 给 Q_{2k+1}着色，用 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 给Q_1着色，并用 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 给 Q_2着色。然后，将 Q_{2k+1}与 Q_1 之间的边着为 c_1，但将e_2 着为 c_2；将 Q_1 与 Q_2 之间的边着为 c_2，但将 e_1 着为 c_1。接着，依次使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_3,c_4\}$对平面 Q_3、.....、Q_{2k}进行相应着色，并交替用 c_3、c_4 给所有剩余的未着色边着色。由此得到 φ的一个扩展。

现在，如果颜色 c_1和 c_2中有一种没有出现在 $G-E(D_1)$ 中，设为 c_2，那么根据 φ到 $Q_1\cup Q_2$的限制，我们定义一个新的预着色 φ'：用任意颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2,c_3\}$ 对所有与 e_1 相邻且既未预着色、也不与一条着色为 c_1的边相邻的边进行正常着色，使所得着色正常。我们使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$对 φ'进行扩展，并使用颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$对 φ到 Q_{2k+1}的限制进行扩展。随后，将 Q_{2k+1}与 Q_1 之间的所有边着色为颜色 c_2，将 Q_1 与 Q_2 之间的边着色为颜色 c_3，但将e_1着色为 c_1。由于 $G-E(D_1)$ 中其他平面均不包含预着色边，因此现在可以直接根据所得到的 G的部分边着色，构造 φ 的一个扩展。

最后，如果 Q_{2k+1} 的预着色边被赋予颜色 c_1，且 Q_2 的边被赋予颜色 c_2，那么我们以类似方式进行，只需分别取 φ 在 Q_{2k+1} 上的限制在颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_2,c_3\}$ 下的扩展、φ 在 Q_1 上的限制在颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_2\}$ 下的扩展，以及 φ 在 Q_2 上的限制在颜色 $\{1,\dots,2d+1\}\setminus\{c_1,c_3\}$ 下的扩展。

子情形 3.2。3 e_1 和 e_2 不与任何公共平面关联：

剩下需要考虑的是 e_1 和 e_2 不与同一个平面关联的情形。这里我们可以完全按照子情形 3.1.3 的做法进行，因此再次省略细节。至此，这个引理的证明完成。□

5 在 C中扩展距离-4 匹配的预着色 $\frac{d}{2k}$

在最后一节中，我们考虑扩展 C^d_{2k} 的预着色问题，其中预着色边构成一个匹配。

定理 5.1 如果 φ 是 $2d$的距离-4 匹配的边着色，那么 φ 可以扩展为 G的正常 $2d$边着色。

证明： 设 φ 是 G的距离-4 匹配 M的 $2d$边预着色，且 $D_1, \dots D_k$ 是 G的维度。我们通过用 $2j-1$ 和$2j$对 D_j 的所有边进行正常着色，来定义 G 的边着色 f，使所有对应边具有相同的颜色。所得着色满足： G 中的每个 4-圈都是双色着色，因为对应边具有相同的颜色。

我们将描述一种获得所需着色 f' 的方法，使其与 φ 一致。对于所有预着色边，我们将对一些双色 4-圈进行变换。正如我们将看到的，如果 $e,\ e' \in M$，那么用于涉及 e 的变换的圈，与用于 e' 的圈边不相交。

考虑任意一条预着色边 $e \in M$。我们分几种不同情况讨论。

(i) 若 $f(e) = \varphi(e)$，则问题已解决；

(ii) 若 $f(e) \neq \varphi(e)$，且存在一个包含 e 的双色 4-圈，其中出现颜色 $\varphi(e)$，则在这个双色 4-圈上互换颜色；

(iii) 若前两个条件均不成立，则存在两条边 e_1 和 e_2，它们都与 e 相邻，且属于与 e 相同的维度，使得 $\varphi(e) = f(e_1) = f(e_2)$。通过在分别包含 e_1 和 e_2 的两个互不相交的 4-圈上互换颜色，我们得到着色 f_1，其中 e 包含在一个双色 4-圈中，该圈使用颜色 $\varphi(e)$。因此，在这个 4-圈上互换颜色后，我们得到着色 f_2，满足 $f_2(e) = \varphi(e)$。

注意，变换 (i)–(iii) 中涉及的所有边与 e 的距离至多为 1。因此，如果 M 中的 e 和 e' 是不同的边，并且我们分别对这两条边执行变换 (i)–(iii) 中的一种，那么针对 e 的变换所涉及的边与用于 e' 的边互不相交，因为预着色边构成距离 -4 匹配。

因此，我们可以对 G 的任意预着色边重复上述过程，从而得到所需的着色 f'。□

我们认为，如果预着色的是距离-3 匹配而非距离-4 匹配，命题 5.1 仍可能成立；但是，如果 M 中的 e 和 e' 是不同的边，那么针对 e 的变换所涉及的边可能与用于 e' 的边不互不相交，因此我们无法在此应用我们的技巧；我们提出以下猜想。

猜想5.2 如果 C_{2k}^d 的距离-3 匹配的边预着色为 φ，那么 φ 可以扩展为 C_{2k}^d 的正常4-边着色。

注意，如果我们预着色一个距离-2匹配，命题 5.1 就不再成立；例如，考虑一个度为 $2d$ 的顶点 v，使得与 v 关联的每条边都未着色，但存在一个固定颜色 $c \in \{1, \dots, 2d\}$，满足与 v 关联的每条边都与另一条已着色为 c 的边相邻。若 f 是 φ 的一个扩展，那么由于 v 的度为 $2d$，恰有一条与 v 关联的边被着色为 c，但这样的着色不可能是正常的。

致谢

Petros 感谢瑞典乌普萨拉的国际科学计划提供经费支持。Casselgren 获得了瑞典研究理事会 VR 的资助（2017-05077）。

参考文献

[1] L.D. Andersen, A.J.W. Hilton，感谢 Evans！伦敦数学会会刊47 (1983), 507–522。[2] L.D. Andersen, A.J.W Hilton，对称拉丁方和完全图中的 Evans 猜想类似问题，组合设计杂志4 (1994), 197–252。[3] A.S. Asratian, T.M.J. Denley, R. H¨aggkvist，二部图及其应用，剑桥大学出版社，剑桥，1998。[4] C.J. Casselgren, F.B. Petros, S.A. Fufa，图的笛卡儿积的部分边着色扩展，已投稿。[5] C.J. Casselgren, F.B. Petros，树的边预着色扩展，澳大拉西亚组合学杂志81 (2021), 233–244。[6] C.J. Casselgren, F.B. Petros，树的边预着色扩展 II，数学讨论：图论（即将出版）。[7] C.J. Casselgren, K. Markstr¨om, L.A. Pham，超立方体的预着色扩展，图论杂志95 (2020), 410–444。[8] T.Easton, R.Gary Parker，关于补全拉丁方，离散应用数学15 (2001), 167–181。[9] K. Edwards, A. Girao, J. van den Heuvel, R.J. Kang, G.J. Puleo, J.-S. Sereni，从预着色边集进行扩展，组合电子杂志25 (2018), P3.1, 28页。[10] T. Evans，嵌入不完整拉丁方，美国数学月刊67 (1960), 958–961。[11] J. Fiala，二部图上的边预着色扩展问题的 NP 完全性，图论杂志43 (2003), 第156–160页。[12] A. Girao, R.J. Kang，Vizing 定理的预着色扩展，图论杂志92 (2019), 255–260。[13] R. H¨aggkvist，大阶拉丁方 Evans 猜想的一个解组合学（*1976*年凯斯特海伊第五届匈牙利学术讨论会论文集），第 *I* 卷，Bolyai János 数学学会论文集第18卷，495–513。[14] O. Marcotte, P. Seymour，扩展一种边着色图论杂志14 (1990), 565–573。[15] H.J. Ryser，一个应用于拉丁方的组合定理，美国数学会会刊2 (1951), 550–552。[16] B. Smetaniuk，拉丁方的一种新构造 I：Evans 猜想的证明，组合学11 (1981), 155–172。