arXiv:2303.05568v2 [math.CA] 4 Oct 2023

UDC 517.5

A. C. 谢尔久克 (乌克兰国家科学院数学研究所，基辅)**T.A. Степанюк** (乌克兰国家科学院数学研究所，基辅)**A. S. 谢尔久克** (乌克兰国家科学院数学研究所，基辅)**T.A. Stepaniuk** (乌克兰国家科学院数学研究所，基辅)

用插值三角多项式逼近广义泊松积分

用插值三角多项式逼近广义泊松积分

本文为 2π–周期函数 f 建立了不可改进的渐近插值类勒贝格型不等式，这些函数表示为函数 φ （属于空间 L_p, $1 \le p \le \infty$）的广义泊松积分。在上述不等式中，˜拉格朗日插值多项式 $-S_{n-1}(f;\, x)|$ 与 $|f(x)$ 的偏差模$x \in \mathbb{R}$ 在每个 $E_n(\varphi)_{L_p}$ 处，都通过函数 φ 在 L_p–度量下的三角多项式最佳逼近来估计。此外，还为属于空间L_p, $1 \le p \le \infty$的单位球的函数所对应的广义泊松积分类$C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}_{p}{}_{,}$ 上的插值三角多项式逐点逼近的精确上确界，求得了渐近等式。

本文为 2π 周期函数 f 建立了渐近意义下最优的插值型勒贝格不等式。这些函数可表示为函数 φ（来自空间 L_p, $1 \le p \le \infty$）的广义泊松积分。在这些不等式中，对于每个 $x \in \mathbb{R}$，插值拉格朗日多项式 $|f(x) - S_{n-1}(f;\, x)|$ 的偏差，均通过函数 φ 在 L_p 度量下由三角多项式给出的最佳逼近 $E_n(\varphi)_{L_p}$ 来表示。我们还求得了函数类 $C^{\alpha,}{}_{,\beta}{}^{r}_{p}{}_{,}$ 上逐点逼近精确上界的渐近等式；这些函数类由属于空间 L_p, $1 \le p \le \infty$ 单位球的函数的广义泊松积分构成。

关 键 词 广义泊松积分、插值拉格朗日多项式、最佳逼近、勒贝格不等式、傅里叶和。

数学主题分类：主要分类 42A10, 41A17。

1 引言

设 L_p, $1 \le p < \infty$ 为 p 次可积的 2π–周期函数空间，其中函数定义在 $[0, 2\pi)$ 上f，其范数为

$$\|f\|_{L_p} = \|f\|_p := \Big(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \Big)^{\frac{1}{p}};$$

L_∞ —空间 可测且本质有界的 2π–周期函数空间 f，其范数为

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_t |f(t)|;$$

C —连续 2π–周期函数空间 f，其范数为

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|.$$

通过 $C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\mathfrak{N}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\mathfrak{N} \in L_1$，记 2π–周期函数 $f(x)$ 的集合，这些函数对所有 $x \in \mathbb{R}$ 都可以表示为卷积

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,r,\beta}(x-t)\varphi(t)dt, \ a_0 \in \mathbb{R}, \ \varphi \in \mathfrak{N}, \ \varphi \perp 1, \tag{1}$$

其核为固定形式

$$P_{\alpha,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos\big(kt - \frac{\beta\pi}{2}\big), \quad \alpha, r > 0, \quad \beta \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

等式（1）中的函数 f 称为函数 φ 的广义泊松积分，记作 $\mathcal{J}^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\varphi$；另一方面，等式（1）中的函数 φ 称为函数 f 的广义导数，记作 $f^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}$（即，$\varphi(\cdot) = f^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}(\cdot)$）。形如（2）的核 $P_{\alpha,r,\beta}(\cdot)$称为广义泊松核。

显然，如果给定函数 φ 满足等式（1），那么任意另一个属于 L_1 的函数也满足同一等式，该函数与 $\varphi(\cdot)$ 仅在一个零测集上不同。因此，今后我们约定将等式 $\varphi = f^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}$ 理解为：在所有导数 $f^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}$ 中，存在一个具体函数 φ。

对于任意的 $r > 0$ 集合 $C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\mathfrak{N}$，都属于 D^∞ 无限可微的 2π–周期函数集合，即 $C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\mathfrak{N} \subset D^\infty$ （例如，参见 [19, 第 139], [23, 页1408]）。当 $r = 1$ 时，集合 $C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\mathfrak{N}$ 是普通泊松积分的集合，由可在带状区域 $|\mathrm{Im}\, z| < \alpha$ 内解析延拓的函数组成（例如，参见 [19, 第 142]页）。当 $r > 1$ 时，类 $C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\mathfrak{N}$ 由在整个复平面上全纯的函数组成（例如，参见 [19, 第 142]页）。此外，由论文 [24] 的定理 1 可知，对于每个 $r > 0$，都有嵌入 $C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}\mathfrak{N} \subset J_{1/r}$，其中$J_a$、 $a > 0$是已知的吉弗雷类

$$J_a = \left\{ f \in D^\infty : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\|f^{(k)}\|_C}{(k!)^a} \right)^{1/k} < \infty \right\}.$$

我们研究广义泊松积分集合 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}\mathfrak{N}$ 的逼近性质，其中 $\mathfrak{N}$ 可以是所有空间 C 或 L_p, $1 \le p \le \infty$，也可以是空间 L_p的单位球，即集合 $U_p = \{\varphi \in L_p : \ ||\varphi||_p \le 1\}$ （下文为方便起见，将类$C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}U_p$ 记为 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}{}_{p}$,）；作为逼近算子，则采用经典的拉格朗日插值三角多项式，其节点为奇数个均匀分布的点。

~对于任意 $f(x)$，借助 C通过 $S_{n-1}(f;\, x)$，我们将记为在节点 $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$处插值 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶三角多项式，即满足

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \ k = 0, 1, ..., 2n-2. \tag{3}$$

$S_{n-1}(f;\, \cdot)$ 多项式由插值条件 (3) 唯一确定，称为拉格朗日插值多项式，并可通过狄利克雷核显式表示为

$$D_{n-1}(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \cos kt = \frac{\sin(n-\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

如下:

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} f(x_k^{(n-1)}) D_{n-1}(x - x_k^{(n-1)}). \tag{4}$$

设 $\mathcal{T}_{2n-1}$ 为所有 t_{n-1} $n-1$ 阶三角多项式组成的空间， $E_n(f)_{L_p}$ 为函数 $f \in L_p$, $1 \le p \le \infty$ 的最佳逼近，即在 L_p 度量下由 $t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}$ 三角多项式给出的最佳逼近，其值为

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_p,$$

而 $E_n(f)_C$ 是函数 $f \in C$ 用三角多项式 t_{n-1}获得的最佳一致逼近，即其大小为

$$E_n(f)_C = \inf_{t_{n-1} \in \mathcal{T}_{2n-1}} \|f - t_{n-1}\|_C.$$

用 $\tilde{\rho}_n(f;\, \cdot)$ 表示函数 $f \in C$与其拉格朗日插值多项式~Лагранжа $S_{n-1}(f;\, \cdot)$ 的偏差

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x). \tag{5}$$

对于形式为 (5) 的量的模，有不等式（例如，参见 [2], [20]）

$$\left| f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f; x) \right| \le (1 + \bar{L}_n(x)) E_n(f)_C, \quad f \in C, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

де

$$\bar{L}_n(x) = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=0}^{2n-2} \left| D_{n-1}(x - x_k^{(n-1)}) \right|. \tag{7}$$

不等式 (6) 是经典勒贝格不等式的插值类比，而形式为 (7) 的函数

$L_n(x)$称为形式为 (4) 的算子 S_{n-1} 的勒贝格函数。

勒贝格函数 $L_n(x)$ 在 $n \to \infty$ 时的渐近行为由下列公式描述:

$$\bar{L}_n(x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \ln n + \mathcal{O}(1), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

其中 $\mathcal{O}(1)$ 是关于 x 和 n一致有界的量。关于算子 (2) 的常数和勒贝格函数的行为，详见文献 [27], [28]。

结合 (8)，不等式 (6) 可写为

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le \left(\frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \ln n + \mathcal{O}(1) \right) E_n(f)_C, \quad f \in C, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

尽管具有一般性，对于每个固定的$x \neq \frac{2k\pi}{2n-1}$、 $k \in \mathbb{Z}$，在已知的 W^r、 $r \in \mathbb{N}$、 2π-周期函数类中，这一估计是渐近精确的；这些函数具有直到（包括）$r-1$阶的绝对连续导数 $f^{(k)}$，并且满足 $\|f_{(r)}\|_\infty \le 1$。这一事实可由 S.M. 尼科尔斯基的论文 [3], 得出；该文基于 (9) 在 $r \in \mathbb{N}$ 时建立了渐近公式

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(W^r_\infty; x) = \sup_{f \in W^r_\infty} \left| f(x) - \tilde{S}_{n-1}(f;x) \right| = \frac{2K_r}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r} \right), \tag{10}$$

其中 $K_r = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{v(r+1)}}{(2v+1)^{r+1}}$ ——法瓦尔常数，而量 $\mathcal{O}$ 关于 x 和 n 一致有界。

然而，随着光滑性的进一步提高，特别是对于无限可微、解析或整函数类，基于使用 (6)（或 (9)）得到的偏差 $|\tilde{\rho}_n(f;\, x)|$ 估计不再是渐近精确的，甚至可能在阶的意义上也不精确。

在类上的 $\|\tilde{\rho}_n(f;\, x)\|_C$ 精确阶估计

$$C(\varepsilon) = \{ f \in C : \; E_k(f)_C \le \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{N} \}$$

та

$$L_p(\varepsilon) = \left\{ f \in L_p : \; E_k(f)_{L_p} \le \varepsilon_k, \quad k \in \mathbb{N} \right\}, \; 1 < p < \infty, \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{k^{1-\frac{1}{p}}} < \infty,$$

这些类由单调趋于零的非负数列 $\varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ 定义，其精确阶估计见文献 [4] 和 [29]。

本文针对广义泊松积分集合中的函数 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r} L_p$, $\alpha > 0$,$r \in (0,1)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $1 \le p \le \infty$, 建立了勒贝格型不等式的插值类比，其中量 $|\tilde{\rho}_n(f;\, x)|$ 的上界估计通过最佳逼近$E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_p}$ 表示。本文还证明了所得不等式在集合 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r} L_p$ 上的渐近不可改进性。值得注意的是，当 $p = \infty$ 时，此类不等式已在文献 [7, 定理 3] 中建立。

此外，本文针对所有 $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in$ (0,1), $1 \le p \le \infty$，解决了广义泊松积分类上形如（4）的拉格朗日插值多项式$\sim S_{n-1}(f;\, x)$的柯尔莫哥洛夫–尼科尔斯基问题，即建立了量在 $n \to \infty$ 时的渐近等式：

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p}; x) = \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} |\tilde{\rho}_n(f; x)| \,. \tag{11}$$

值得指出的是，当 $r \ge 1$, $1 \le p \le \infty$ 时，文中已求得上述量的渐近等式 [5], [21], [6], [8]。

文献 [21] 表明，若 $r = 1$, $p = \infty$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$，则当 $n \to \infty$ 时，成立渐近等式

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,\infty}; x) = e^{-\alpha n^r} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{16}{\pi^2} \mathbf{K}(e^{-\alpha}) + \mathcal{O}(1) \frac{e^{-\alpha n}}{n(1-e^{-\alpha n})} \right), \tag{12}$$

π2</style}其中 K0 正弦^2 u ——第一类完全椭圆积分，而 $\mathcal{O}(1)$ 是关于 n, x, α 和 β一致有界的量。

由 [6], 可知，对于形如 (11) 的量，在所有 $\alpha > 0$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$ 下，当 $r = 1$ 和 $1 < p \le \infty$ 时，成立关于 $n \to \infty$ 的渐近等式

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,p}; x) \\ =&e^{-\alpha n} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{2}{\pi} \| \cos t \|_{p'} F^{1/p'} \left(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2\alpha} \right) + \mathcal{O}(1) \frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^{s(p)}} \right), x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $F(a, b;\ c;\ z)$ 是高斯超几何函数

$$F(a,b;c;z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!},$$

$$(y)_k := y(y+1)(y+2)...(y+k-1),$$

$s(p)$ 由公式给出

$$s(p) = \begin{cases} 1, & p = \infty, \\ 2, & 1 \le p < \infty, \end{cases}$$

而在 $r = 1$ 和 $p = 1$ 的情况下，等式

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,1}_{\beta,1}; x) = e^{-\alpha n} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{1-e^{-\alpha}} + \mathcal{O}(1) \frac{e^{-\alpha}}{n(1-e^{-\alpha})^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

在公式 (13) 和 (14) 中，量 $\mathcal{O}(1)$ 关于参数 x, n,β, α 和 p一致有界。

由于在 $p = \infty\, (p' = 1)$ $\| \cos t \|_{p'} = \| \cos t \|_1 = 4$i

$$F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'}{2}, \frac{p'}{2}; 1; e^{-2\alpha} \right) = F \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; e^{-2\alpha} \right) = \frac{2}{\pi} \mathbf{K}(e^{-\alpha}),$$

因此由 (13) 可推出 (12)。

还应指出，在工作 [9] 中，对于形如（11）的量，当 $r=1, p=2, \alpha>0, \beta \in \mathbb{R}$和 $n \in \mathbb{N}$ 时，已证明等式成立

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^{\alpha,r};x)\\&=e^{-\alpha n}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\frac{2}{\sqrt{\pi(1-e^{-2\alpha})}}\left(\frac{1+e^{-2\alpha(2n-1)}}{1-2e^{-2\alpha(2n-1)}\cos(2n-1)x+e^{-4\alpha(2n-1)}}\right)^{\frac{1}{2}},\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{15}$$

此外，由 [9] 和 [10], 可知，当 $p=2$ 且对于所有 $r>0, \alpha>0, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 时，对于˜的量 $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,\ r}_{\beta\,2,}\,;x)$，等式成立

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,2}^{\alpha,r};x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\sin^2\frac{(2n-1)mx}{2}\sum_{k=m(2n-1)-n+1}^{m(2n-1)+n-1}e^{-2\alpha k^r}\right)^{\frac{1}{2}},\quad x\in\mathbb{R} \tag{16}$$

这对所有 $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$均成立。

˜当 $r>1$时，由 [6], [8], 可知，对于量 $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,\ r}_{\beta\,p,}\,;x)$，当 $\alpha>0, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $p=\infty$时，有关于 $n \to \infty$ 的渐近等式成立

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,\infty}^{\alpha,r};x)\\&=e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi}+\mathcal{O}(1)\left(\frac{e^{2\alpha n^r}}{e^{2\alpha(n+1)^r}}+\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+2)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+1)^r}}\right)\right),x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{17}$$

而当 $1 \le p<\infty$ — 时，等式

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r};x)\\&=e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi}\|\cos t\|_{p'}+\mathcal{O}(1)\left(1+\frac{1}{\alpha r(n+1)^{r-1}}\right)\frac{e^{\alpha n^r}}{e^{\alpha(n+1)^r}}\right),x\in\mathbb{R}.\end{aligned} \tag{18}$$

公式 (17) 和 (18) 中的量 $\mathcal{O}(1)$ 关于 x, n, r, α, β 和 p 一致有界。

还要指出，在文献 [11] 中，对于类 $C^{\alpha}_{,\beta\,1}{}^{r}{}_{,}$，$\alpha>0, r>1, \beta \in \mathbb{R}$，也建立了插值多项式 $\tilde{S}_{n-1}(f;\cdot)$ 在任意 L_p–度量下偏差的精确上界的渐近等式（$1 \le p \le \infty$）。

˜至于 $0<r<1$ 的情形，除上述 $p=2$ 情形外，关于量 $\mathcal{E}_n(C^{\alpha,\ r}_{,\beta\,p\,,};x)$,$\alpha>0, \beta \in \mathbb{R}$ 的渐近等式此前仅在 $p=\infty$ 情形下已知，这得益于 [22] 和 [7], 的研究，由此可知，当 $n \to \infty$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,\infty}^{\alpha,r};x)=e^{-\alpha n}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\ln n^{1-r}+\mathcal{O}(1)\right),\quad x\in\mathbb{R}, \tag{19}$$

其中 $\mathcal{O}(1)$ 是关于 x、 n 和 β 一致有界的量。

本文将证明，特别是，对于任意的 $0<r<1, \alpha>0, \beta \in \mathbb{R}, \mathbf{i}x \in \mathbb{R}$，当 $1<p<\infty$ 和 $n \to \infty$ 时，渐近等式成立

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)$$
$$=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)+\mathcal{O}(1)\frac{1}{n^{\min\{r,\frac{1-r}{p}\}}}\right),\qquad(20)$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $F(a,b;\ c;\ z)$ 是高斯超几何函数， $\mathcal{O}(1)$ 是关于 x, n 和 β 一致有界的量，而当 $p=1$ 时，等式

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x)=e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi\alpha r}+\mathcal{O}(1)\frac{1}{n^{\min\{r,1-r\}}}\right).\qquad(21)$$

此外，文中明确写出了公式（20）和（21）中余项的估计，并以问题参数表示，这对实际应用其中所得结果可能有所帮助。因此，对于广义泊松积分类 $C^{\alpha}{}_{,\beta}{}^{r}{}_{p}$，在所有 $\alpha>0, r>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ i $1\le p\le\infty$ 的情况下，已完全解决拉格朗日插值多项式的科尔莫哥洛夫-尼科尔斯基问题。该问题旨在对每个 $x\in\tilde{\mathbb{R}}$，确定形如（11）的量 $\mathcal{E}_n(C^{\alpha}{}_{,\beta}{}^{r}{}_{p};\ x)$ 的强渐近式，其中 $n\to\infty$。

主要ч　　在（11）式所示的量的渐近展开中， A_n　　i

$$\widetilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)=e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|(A_n+o(A_n)).$$

自然称为在类 $C^{\alpha}{}_{,\beta}{}^{r}{}_{p}$, 上拉格朗日插值多项式的柯尔莫哥洛夫-尼科尔斯基常数。下表列出了这些常数根据参数 r 和 p 之间关系确定的精确值:

A_n		r		
		(0, 1)	1	(1, ∞)
p	∞	Степанець, 谢尔久克（2000） [22] 谢尔久克（2004） [7] $\frac{8}{\pi^2}(1-r)\ln n$	Степанець, 谢尔久克（2000） [21] $\frac{16}{\pi^2}\mathrm{K}(e^{-\alpha})$	谢尔久克（1999） [5] Степанець, 谢尔久克（2000年）] [21] $\frac{8}{\pi}$
	(1, ∞)	**本文作者的结果** $n^{\frac{1-r}{p}}\frac{2\mathrm{k}\cos tkp\prime}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)$	谢尔久克（2012） [6] $\frac{2\|余弦\ t\|_{p'}}{\pi}F^{\frac{1}{p'}}(\frac{p'}{2},\frac{p'}{2};1;\ e^{-2\alpha})$	Сердюк, 沃伊托维奇（2010） [8] $\frac{2\|余弦\ t\|_{p'}}{\pi}$
	1	**本文作者的结果** $n^{1-r}\frac{2}{\pi\alpha r}$	谢尔久克（2012） [6] $\frac{2}{\pi(1-e^{-\alpha})}$	Сердюк, 沃伊托维奇（2010） [8] $\frac{2}{\pi}$

2 勒贝格型不等式：用于广义泊松积分集合上的拉格朗日插值多项式

对于任意固定的 $\alpha>0, r\in(0,1)$ 和 $1\le p\le\infty$，用 $n_*=n_*(\alpha,r,p)$ 表示满足以下条件的最小编号 n：

$$\frac{\ln \pi n}{\alpha r n^r} + \frac{\alpha r \chi(p)}{n^{1-r}} \le \begin{cases} \frac{1}{14}, & p = 1, \\ \frac{1}{(3\pi)^3} \cdot \frac{p-1}{p}, & 1 < p < \infty, \\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p = \infty, \end{cases} \tag{22}$$

其中 $\chi(p)$ 在 $1 \le p < \infty$ 时为 $= p$，而 $\chi(p)$ 在 $p = \infty$ 时为 $= 1$。

定理 2.1. 设 $0 < r < 1$, $\alpha > 0$, $1 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $n \in \mathbb{N}$。那么，对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r} L_p$ 当 $n \ge n_*(\alpha, r, p)$ 时，不等式成立

$$|\tilde{\rho}_n(f; x)| \le 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{\| \cos t \|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right.$$
$$\left. + \gamma^*_{n,p} \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r} \right) \right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}. \tag{23}$$

此外，对于任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r} L_p$，可以指定函数 $\mathcal{F}(\cdot) = \mathcal{F}(f; n; x, \cdot)$，使得 $E_n(\mathcal{F}^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_p} = E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_p}$ 并且对于 $n \ge n_*(\alpha, r, p)$ 满足下列等式:

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F}; x)| = 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{\| \cos t \|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}} (\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{1}{2}, \frac{3-p'}{2}; \frac{3}{2}; 1 \right) \right.$$
$$\left. + \gamma^*_{n,p} \left(\left(1 + \frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1} \right) \frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r} \right) \right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}. \tag{24}$$

在 (23) 和 (24) 中，量 $\gamma^*_{n,p} = \gamma^*_{n,p}(\alpha, r, \beta, f, x)$ 满足 $|\gamma^*_{n,p}| < 20\pi^4$。

定理 *2.1* 的证明。根据论文 [21] 中的引理 1，对于任意函数 $f \in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r} L_p$, $1 \le p \le \infty$, $\alpha > 0$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$，在每一点 $x \in \mathbb{R}$ 处，量 $\tilde{\rho}_n(f; x)$ 都有如下积分表示:

$$\tilde{\rho}_n(f; x) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{2n-1}{2} x \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t + x) \left(\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \gamma_n) + r_n(t) \right) dt, \tag{25}$$

其中 $\delta_n(\tau) = f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}(\tau) - t_{n-1}(\tau)$, t_{n-1} 是集合 $\mathcal{T}_{2n-1}$ 中的任意三角多项式，而 r_n 和 γ_n 由下列等式定义

$$r_n(t) = r_n(\alpha; r; \beta; x; t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha \nu^r} \sin \left(\nu t + \left(k + \frac{1}{2} \right) (2n-1)x + \frac{\beta \pi}{2} \right), \tag{26}$$

$$\gamma_n = \gamma_n(\beta; x) = \frac{(2n-1)x + \pi(\beta - 1)}{2}. \tag{27}$$

为了求得公式 (25) 中余项 $r_n(t)$ 绝对值的上界，下面的结论将很有帮助。

引理 2.2。 设 $\alpha>0, r\in(0,\ 1)$，且编号 $n, n\in\mathbb{N}$ 满足不等式

$$\frac{1}{\alpha r n^r}+\frac{\alpha r}{n^{r-1}}\leq\frac{1}{14}. \tag{28}$$

To∂i

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty}e^{-\alpha v^r}<\frac{636}{169}\frac{n^{1-r}}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}. \tag{29}$$

引理 2.2 的证明见本论文第 4 小节。

比较不等式 (22) 和 (28) 不难发现，若对任意固定的 $\alpha>0, r\in\in$(0,1) 和 $1\leq p\leq\infty$, $n\geq n_*(\alpha,r,p)$，则对于上述 n, α 和 r，引理 2.2 的条件 (28) 也成立，进而不等式 (29) 也成立。

因此，考虑到 (26)，当 $n\geq n_*(\alpha,r,p)$、 $1\leq p\leq\infty$ 时，得到

$$|r_n(t)|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty}e^{-\alpha v^r}<\frac{636}{169}\frac{n^{1-r}}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}. \tag{30}$$

下面证明，对于任意的 $n\geq n_*(\alpha,r,p)$、 $r\in\in$(0, 1)、 $\alpha>0$ 和 $1\leq p\leq\infty$,

$$\frac{n^{1-r}}{\alpha r}<\frac{1}{\pi}e^{\alpha((3n-1)^r-n^r)}. \tag{31}$$

确实，根据（22）

$$\frac{\ln(\pi n)}{\alpha r n^r}\leq\frac{1}{14},\ \frac{n^{1-r}}{\alpha r}\geq 14, \tag{32}$$

因此,

$$\frac{\ln\frac{\pi n}{\alpha r n^r}}{\alpha r n^r}<\frac{\ln\frac{\pi n}{\alpha r n^r}+\ln\alpha r n^r}{\alpha r n^r}=\frac{\ln\pi n}{\alpha r n^r}\leq\frac{1}{14},$$

由此

$$\ln\frac{\pi n}{\alpha r n^r}\leq\frac{\alpha r n^r}{14},$$

或者说，也就是说

$$\frac{\pi n}{\alpha r n^r}\leq e^{\frac{\alpha r n^r}{14}}. \tag{33}$$

由于

$$\frac{r}{2^{1-r}}<2^r-1<r,\quad r\in(0,1),$$

TO

$$e^{\frac{\alpha r n^r}{14}}<e^{\frac{\alpha r n^r}{2^{1-r}}}<e^{\alpha n^r(2^{r-1})}\leq e^{\alpha n^r((3-\frac{1}{n})^r-1)}=e^{\alpha((3n-1)^r-n^r)}. \tag{34}$$

将（33）和（34）合并，得到（31）。

由 (30) 和 (31) 可得 $|r_n(t)|$ 的以下估计:

$$|r_n(t)|<\frac{636}{169\pi}e^{-\alpha n^r},\quad n\geq n_*(\alpha,r,p),\quad \alpha>0,\ r\in(0,1),\ 1\leq p\leq\infty. \tag{35}$$

在（25）中取 t_{n-1} 作为 t_{n-1}^* 最佳逼近多项式，在 L_p 函数$f^{\alpha}{}_{,\beta}{}^{r}$ (·)空间中，即满足

$$\|f_\beta^{\alpha,r}-t_{n-1}^*\|_p=E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}=\inf_{t_{n-1}\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|f_\beta^{\alpha,r}-t_{n-1}\|_p,\quad 1\leq p\leq\infty, \tag{36}$$

并应用赫尔德不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}|h(t)g(t)|dt\le\|h\|_p\|g\|_{p'},\quad h\in L_p,\quad 1\le p\le\infty,g\in L_{p'},\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1 \tag{37}$$

以及估计式（35），对于任意函数 $f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_p$ 当 $n\ge n_*(\alpha,r,p)$时，有

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)|\le 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)\right\|_{p'}+\theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}, \tag{38}$$

其中 γ_n 由公式（27）定义，而对于量 $\theta_{n,\ p}=\theta_{n,\ p}(\alpha,r,\beta,x)$，有估计$|\theta_{n,\ p}|<\frac{1272}{169\pi}$，$1\le p\le\infty$。

由 [13]–[15] 可知，对任意 $r\in(0,1)$，$\alpha>0,\xi\in\mathbb{R},1\le p\le\infty$ 和 $n\ge n_0(\alpha,r,p)$，其中 $n_0(\alpha,r,p)$ 是编号 n 中满足下列条件的最小编号

$$\frac{1}{\alpha rn^r}+\frac{\alpha r\chi(p)}{n^{1-r}}\le\begin{cases}\frac{1}{14}, & p=1,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}\cdot\frac{p-1}{p}, & 1<p<\infty,\\ \frac{1}{(3\pi)^3}, & p=\infty,\end{cases} \tag{39}$$

以下估计成立

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_{p'}\\ =&e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\gamma^{(1)}_{n,p}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}}I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right)\right),\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_{p'}\\ =&e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\gamma^{(2)}_{n,p}\left(\frac{1}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}}I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right)\right),\end{aligned} \tag{41}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $I_s(v):=\left\|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right\|_{L_s[0,v]}$,

$$I_s(v):=\left\|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right\|_{L_s[0,v]}=\begin{cases}\left(\int_0^v\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right|^s dt\right)^{\frac{1}{s}}, & 1\le s<\infty,\\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,v]}\left|\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right|, & s=\infty.\end{cases} \tag{42}$$

而对于量 $\gamma^{(i)}_{n,p}=\gamma^{(i)}_{n,p}(\alpha,r,\xi)$，$i=1,2$，满足不等式 $|\gamma^{(i)}_{n,p}|\le(14\pi)^2$。

考虑到根据 (22) 和 (39)， $n_0(\alpha,r,p) \le n_*(\alpha,r,p)$，于是将公式 (40) 应用于 $\xi=\gamma_n$（其中 γ_n 由公式 (27) 定义），并在 $n \ge n_*(\alpha,r,p)$ 的情况下使用 (37) 和 (38)，得到

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) + \frac{\gamma^{(1)}_{n,p}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}} I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)\frac{1}{n^r} + \left(\gamma^{(1)}_{n,p}+\theta_{n,p}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}, \quad 1\le p\le\infty. \tag{43}$$

由 [15], 在 $1<p<\infty$ і $n \ge n_0(\alpha,r,p)$ 中可知

$$I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) = F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \frac{\Theta^{(1)}_{\alpha,r,p,n}}{p'-1}\left(\frac{\alpha r}{\pi n^{1-r}}\right)^{p'-1}, \tag{44}$$

其中 $|\Theta^{(1)}_{\alpha,\ r,\ p,\ n}|<2$，此外,

$$I_{p'}\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right) < p^{\frac{1}{p'}}. \tag{45}$$

由 (44)、(45) 以及显然的不等式

$$\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} > \frac{1}{n^{(1-r)(p'-1)}}$$

可得，当 $n \ge n_0(\alpha,r,p)$、$1<p<\infty, \xi\in\mathbb{R}$ 时，关系式 (40) 和 (41) 导出以下估计:

$$\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_{p'} = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \bar{\gamma}^{(1)}_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \tag{46}$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_{p'} = e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \bar{\gamma}^{(2)}_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right)\right), \tag{47}$$

其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$，对于量 $\bar{\gamma}^{(i)}_{n,\ p}=\bar{\gamma}^{(i)}_{n,\ p}(\alpha,r,\xi)$，满足不等式 $|\bar{\gamma}^{(i)}_{n,\ p}| \le (14\pi)^2$。

应用公式 (46)，其中 $\xi=\gamma_n$，γ_n 由等式 (27) 定义，并考虑到 $n_0(\alpha,r,p) \ge n_*(\alpha,r,p)$，由 (35) 在 $n \ge n_*(\alpha,r,p)$、$1<p<\infty$ 时，得到

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \le 2e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}} \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}} F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right) + \left(\bar{\gamma}^{(1)}_{n,p}\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)+\theta_{n,p}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}} + \bar{\gamma}^{(1)}_{n,p}\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}} n^r}\right) E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_p}. \tag{48}$$

由于 $|\bar{\gamma}_n^{(1),\ p}+\theta_{n,\ p}|<20\pi^4$，因此由 (48) 得出估计 (23)。

接下来证明定理 2.1 第二部分成立。

利用积分表示式 (25)，并考虑到形如 (26) 的函数 $r_n(t)$ 与任意三角多项式 $t_n\in\mathcal{T}_{2n-1}$ 正交，对于任意函数 $f\in C^{\alpha,\ \beta}{}^rL_p$, $1\le p\le\infty$，在每一点 $x\in\mathbb{R}$ 都可以写出

$$\begin{aligned}&\tilde{\rho}_n(f;x)=f(x)-\tilde{S}_n(f;x)\\&=2\sin\frac{2n-1}{2}x\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^{\alpha,r}(t+x)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta_n(t+x)r_n(t)dt\right),\end{aligned}\tag{49}$$

其中 $\delta_n(\cdot)=f^{\alpha,\ \beta}{}^r(\cdot)-t_{n-1}(\cdot)$，$t_{n-1}$ 是 $\mathcal{T}_{2n-1}$ 中的任意多项式，而 $r_n(t)$ 和 $\gamma_n=\gamma_n(\beta;\ x)$ 分别由等式 (26) 和 (27) 定义。对于函数

$$g_x(\cdot):=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^{\alpha,r}(t+x)\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt,\tag{50}$$

它显然属于集合 $C^{\alpha,\ r}_{2\gamma_n/\pi}L_p$；当 $x\in\mathbb{R}$ 固定时，其傅里叶部分和 $S_{n-1}(g_x,\cdot)$ 的 $n-1$ 阶偏差满足等式

$$\rho(g_x;\cdot)=g_x(\cdot)-S_{n-1}(g_x,\cdot)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^{\alpha,r}(t+\cdot)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt,\tag{51}$$

并且，特别是

$$\rho(g_x;x)=g_x(x)-S_{n-1}(g_x,x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^{\alpha,r}(t+x)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt.\tag{52}$$

根据论文 [16] 的定理 1，对于函数 $g_x(\cdot)$，对每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在函数 $G(\cdot)=G(f;\ n;\ x;\ \cdot)$，使得

$$E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_p}=E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p},\quad 1<p<\infty,\tag{53}$$

且对于该函数，当 $n\ge n_0(\alpha,r,p)$ 时

$$\begin{aligned}&\|\rho_n(G;\cdot)\|_C=\|f(x)-S_n(f;x)\|_C\\&=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.\\&\left.+\gamma_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}n^r}\right)\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\end{aligned}\tag{54}$$

其中 $\gamma_{n,p}=\gamma_{n,p}(\alpha,r,\beta,x)$ 满足不等式 $|\gamma_{n,p}|\le(14\pi)^2$。

选择点 x_0，使得等式成立

$$|\rho_n(G;x_0)| = \|\rho_n(G;\cdot)\|_C. \tag{55}$$

我们来设定。

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{J}_\beta^{\alpha,r} G_{2\gamma_n/\pi}^{\alpha,r}(t-x+x_0). \tag{56}$$

根据定义 $\mathcal{F}(t) \in C^{\alpha,\ \beta\ r}L_p$。下面证明它就是所求函数。事实上，由于根据 (56) $\mathcal{F}^{\alpha,\ \beta\ r}(t) = G^{\alpha,\ r}_{\ 2\gamma_n/\pi}(t-x+x_0)$，因此考虑到 (54) 以及 L_p–范数关于自变量平移的不变性，可得

$$E_n(\mathcal{F}_\beta^{\alpha,r})_{L_p} = E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_p} = E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p},\ 1<p<\infty. \tag{57}$$

此外，由 (49)、(53)、(54)、(55)、(30) 和 (38)，对于任意给定的自变量值 $x\in\mathbb{R}$，当 $n \geq n_*(\alpha,r,p)$ 时

$$\begin{aligned}
&|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)|\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi}(x_0+t)\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt\right| + \theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}\right)\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(|\rho_n(G;x_0)| + \theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}\right)\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\|\rho_n(G;\cdot)\|_C + \theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p}\right)\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| e^{-\alpha n^r} n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.\\
&\left.+\gamma_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}n^r}\right)+\frac{\theta_{n,p}}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_p},
\end{aligned} \tag{58}$$

其中，对于量 $\gamma_{n,\ p}$ 和 $\theta_{n,\ p}$，有估计式 $|\gamma_{n,\ p}|\leq(14\pi)^2$,$|\theta_{n,\ p}|<\frac{1272}{169\pi}$ 和 $|\theta_{n,\ p}+\gamma_{n,\ p}|<20\pi^4$。由等式 (58) 得出 (24)。定理 2.1 得证。 □

定理 2.3. 设 $0<r<1$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$ 和 $n\in\mathbb{N}$。那么，对于任意 $x\in\mathbb{R}$ 以及任意函数 $f\in C^{\alpha,\ \beta\ r}L_1$ 当 $n\geq n_*(\alpha,\ r,\ 1)$ 时，不等式成立

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \leq 2e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\gamma^*_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}. \tag{59}$$

此外，对于任意函数 $f\in C^{\alpha,\ \beta\ r}L_1$，可以指定函数 $\mathcal{F}(\cdot)=\mathcal{F}(f;\ n;\ x,\cdot)$，它属于集合 $C^{\alpha,\ \beta\ r}L_1$，且满足 $E_n(\mathcal{F}^{\alpha,\ \beta\ r})_{L_1} = E_n(f^{\alpha,\ \beta\ r})_{L_1}$，并且当 $n\geq n_*(\alpha,r,1)$ 时，等式成立

$$|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)| = 2e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\gamma^*_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_1}. \tag{60}$$

在 (59) 和 (60) 中，量 $\gamma^*_{n,1}=\gamma^*_{n,1}(\alpha,r,\beta,f,x)$ 满足条件 $|\gamma^*_{n,1}|<20\pi^4$。

定理 *2.3* 的证明。为证明不等式 (59)，我们将使用公式 (43)，其中$p=1$；根据该公式，对于任意的 $x\in\mathbb{R}$, $f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$和 $n\geq n_*(\alpha,r,1)$

$$
\begin{aligned}
|\tilde{\rho}_n(f;x)|\leq{}& 2e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\frac{\|\cos t\|_\infty}{\pi\alpha r}\left\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\|_{L_\infty[0,\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}]}\\
&+\frac{\gamma^{(1)}_{n,1}}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}\left\|\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\|_{L_\infty[0,\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}]}+(\gamma^{(1)}_{n,1}+\theta_{n,1})\frac{1}{n^{1-r}}\Big)\Big)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}\\
={}&2e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\Big(\frac{1}{\pi\alpha r}+\frac{\gamma^{(1)}_{n,1}}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+(\gamma^{(1)}_{n,1}+\theta_{n,1})\frac{1}{n^{1-r}}\Big)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1},
\end{aligned}
\tag{61}
$$

其中$|\gamma_{n,\ 1}|\leq(14\pi)^2$, $|\ \theta_{n,1}|<\frac{1272}{169\pi}$。由于 $|\gamma^{(1)}_{n}{}_{,1}+\theta_{n,1}|<20\pi^4$，因此由 (61) 得出估计 (59)　.

我们证明定理 2.3 的第二部分。对于任意 $f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_1$ 以及任意固定的$x\in\mathbb{R}$，等式 (49) 成立，其中 $f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}\in L_1$。考虑形如 (50) 的函数 $g_x(\cdot)$，显然它属于集合 $C^{\alpha}_{,2\gamma_n/\pi}{}^{r}L_1$。函数 $g_x(\cdot)$ 的 $n-1$ 阶傅里叶部分和 $S_{n-1}(g_x;\cdot)$ 的偏差满足等式 (51)（因此也满足 (52)）。根据 [16] 的论文中的定理 2，对于函数 $g_x(\cdot)$，对每个 $n\in\mathbb{N}$，都存在函数 $G(\cdot)=G(f,n;x;\cdot)$，使得

$$
E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_1}=E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}
\tag{62}
$$

且对于该函数，当 $n\geq n_0(\alpha,r,1)$

$$
\begin{aligned}
\|\rho_n(G,\cdot)\|_C=&\|G(\cdot)-S_{n-1}(G;\cdot)\|_C\\
&=e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\Big(\frac{1}{\pi\alpha r}+\gamma_{n,1}\Big(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\Big)\Big)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1},
\end{aligned}
\tag{63}
$$

其中 $\gamma_{n,1}=\gamma_{n,1}(\alpha,r,\beta,x)$ 满足条件$|\gamma_{n,1}|\leq(14\pi)^2$。

选择点 x_0，使等式 (55) 成立。考虑由等式 (56) 定义的函数$\mathcal{F}(t)$，显然它属于集合 $C^{\alpha,}_{\ \beta}{}^{r}L_1$，并证明该函数就是所求函数。对于函数 $\mathcal{F}(t)$，根据公式 (62)、(56) 以及 L_1-范数关于自变量平移的不变性，有

$$
E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}=E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_{L_1}=E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_{L_1}.
\tag{64}
$$

此外，由于 (49)、(62)、(63)、(55)、(35)、(37)，对于任意给定的自变量值 $x\in\mathbb{R}$，当 $n\geq n_*(\alpha,r,1)$

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)|\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi}(x_0+t)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt\right|+\theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}\right)\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(|\rho_n(G,x_0)|+\theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}\right)\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\|\rho_n(G,\cdot)\|_C+\theta_{n,1}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_1}\right)\\
=&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\Big(\frac{1}{\pi\alpha r}+\gamma_{n,1}\Big(\frac{1}{(\alpha r)^2}\frac{1}{n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\Big)+\frac{\theta_{n,1}}{n^{1-r}}\Big)E_n(\varphi)_{L_1},
\end{aligned}
\tag{65}
$$

其中，对于量 $\gamma_{n,1}$ 和 $\theta_{n,1}$，满足估计 $|\gamma_{n,1}|\le(14\pi)^2$, $|\theta_{n,1}|<\frac{1272}{169\pi}$ 和 $|\gamma_{n,1}+\theta_{n,1}|<20\pi^4$。由等式 (65) 可推出 (60)。定理 2.3 得证。 □

定理 2.4. 设 $r\in(0,1)$，$\alpha>0$ 且 $\beta\in\mathbb{R}$。那么对于所有 $x\in\mathbb{R}$ 及任意函数 $f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_\infty$，当 $p=\infty$ 且 $n\ge n_*(\alpha,r,\infty)$ 时，以下不等式成立

$$
|\tilde{\rho}_n(f;x)|\le 2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\gamma^*_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_{L_\infty},
\tag{66}
$$

其中，对于量 $\gamma^*_{n,\infty}(\alpha,r,\beta,x)$，有估计 $|\gamma^*_{n,\infty}|<20\pi^4$

此外，对于任意函数 $f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}C$，可以指定一个来自集合 C^α 的函数 $\mathcal{F}(x)=\mathcal{F}(f;n;x;\cdot)$，$_{,\beta}{}^{r}C$，使得 $E_n(\mathcal{F}^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_C=E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_C$，并且对于 $n\ge n_*(\alpha,r,\infty)$，满足等式

$$
|\tilde{\rho}_n(\mathcal{F};x)|=2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\gamma^{**}_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_{\beta})_C.
\tag{67}
$$

在公式 (67) 中，对于量 $\gamma^{**}_{n,\infty}=\gamma^{**}_{n,\infty}(\alpha,r,\beta,f,x)$ 成立估计 $|\gamma^{**}_{n,\infty}|<1951$。

显然，若满足定理 2.4 $f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}C$ 的条件，则在不等式 (66) 中，量 $E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_\infty}$ 可以替换为 $E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_C$。

定理 *2.4* 的证明。为证明不等式 (66)，我们将使用在 $p=\infty$ 时的估计 (43)，以及以下估计（参见 [14] 中的公式 (112)）：

$$
I_1\left(\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)=\int_0^{\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n},\quad 0<\Theta_{\alpha,r,n}<1,
\tag{68}
$$

其中 $I_1(v)$ 由在 $s=p'=1$ 时的公式 (42) 定义。

因此，由 (43) 和 (68) 可知，对于任意函数 $f\in C^{\alpha,}{}_{\beta}{}^{r}L_\infty$，当 $n\ge n_*(\alpha,r,\infty)$ 时

$$|\tilde{\rho}_n(f;x)| \leq 2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right.$$
$$\left.+\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}+\theta_{n,\infty}\right)E_n(f_\beta^{\alpha,r})_{L_\infty}. \tag{69}$$

因为当 $n \geq n_*(\alpha, r, \infty)$ 时

$$\frac{4}{\pi^2}(\ln\pi+\Theta_{\alpha,r,n})+|\gamma_{n,\infty}^{(1)}|\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+|\gamma_{n,\infty}^{(1)}+\theta_{n,\infty}|$$
$$<\frac{4(1+\ln\pi)}{\pi^2}+\frac{2(14\pi)^2}{(3\pi)^3}+(14\pi)^2+\frac{1272}{169\pi}<20\pi^4, \tag{70}$$

那么由 (69) 和 (70) 可得估计式 (66)。

我们证明定理 2.4 的第二部分。对于任意函数 $f \in C^{\alpha,\ r}_{\ \beta}C$ 及任意固定值 $x \in \mathbb{R}$，等式 (49) 成立，其中 $f^{\alpha,\ r}_{\ \beta} \in C$。考虑集合 $C^{\alpha,\ r}_{\ 2\gamma_n/\pi}C$中的函数 $g_x(\cdot)$，其形式如 (50)。对于函数 $g_x(\cdot)$，其傅里叶部分和$S_{n-1}(g_x;\cdot)$ 的 $n-1$ 阶偏差 $\rho_n(g_x,\cdot)$ 满足等式 (51)（因此也满足 (52)）。根据文献 [17] 中的定理 1，对于函数 g_x，任意给定 $n \in \mathbb{N}$，都存在函数$G(\cdot) = G(f;\ n;\ x;\ \cdot)$，属于集合 $C^{\alpha,\ r}_{\ 2\gamma_n/\pi}C$，使得

$$E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_C = E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C \tag{71}$$

且对于所有 $n \geq n_1(\alpha, r)$，其中 $n_1(\alpha, r)$ 是满足不等式的最小自然数

$$\frac{1}{\alpha r n^r}\left(1+\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}<\frac{1}{(3\pi)^3},\quad \alpha>0,\ r\in(0,1), \tag{72}$$

等式成立

$$\|\rho_n(G,\cdot)\|_C = \|G(\cdot)-S_{n-1}(G,\cdot)\|_C = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C, \tag{73}$$

其中 $\bar{\gamma}_{n,\ \infty} = \bar{\gamma}_{n,\ \infty}(\alpha, r, \beta, x)$ 满足条件$|\bar{\gamma}_{n,\ \infty}| \leq 20\pi^4$。

我们将证明,

$$n_1(\alpha, r) \leq n_*(\alpha, r, \infty), \tag{74}$$

也就是说，对于任意 $\alpha > 0$ 和 $r \in (0, \infty)$，由条件

$$\frac{\ln\pi n}{\alpha r n^r}+\frac{\alpha r}{n^{1-r}} \leq \frac{1}{(3\pi)^3} \tag{75}$$

由此得到不等式（72）。事实上，由（75）可直接推出

$$\alpha r n^r \geq (3\pi)^3\ln\pi n \geq (3\pi)^3\ln\pi,$$

因此

$$1-\ln\alpha r n^r \le 1-\ln(3\pi)^3\ln\pi<0. \tag{76}$$

因此，在满足（75）的条件下，结合（76），可以写出

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha r n^r}\left(1+\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}=\frac{1}{\alpha r n^r}\left(1-\ln\alpha r n^r+\ln\pi n\right)+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}\\ <&\frac{\ln\pi n}{\alpha r n^r}+\frac{\alpha r}{n^{1-r}}\le\frac{1}{(3\pi)^3}\end{aligned}$$

由此得出（72）。至此，不等式（74）得证。

选择点 x_0，使其满足等式（55）。与前面一样，考虑由公式（56）定义的函数 $\mathcal{F}$。这个函数属于集合 $C^{\alpha,\ {}^r_\beta}C$，并且就是所求函数。对于该函数，结合（71）以及一致范数关于自变量平移的不变性，可得

$$E_n(\mathcal{F}^{\alpha,r}_\beta)_C=E_n(G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi})_C=E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C. \tag{77}$$

此外，根据（49）、（77）、（73）、（55）、（35）、（36）、（37）和（74），对于自变量 $x\in\mathbb{R}$ 的任意取值，当 $n\ge n_*(\alpha,r,\infty)$ 时

$$\begin{aligned}&|\tilde\rho_n(\mathcal{F};x)|\\ =&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}G^{\alpha,r}_{2\gamma_n/\pi}(x_0+t)\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\gamma_n)dt\right|+\theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C\right)\\ =&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(|\rho_n(G;x_0)|+\theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C\right)\\ =&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\|\rho_n(G;\cdot)\|_C+\theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C\right)\\ =&2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar\gamma_{n,\infty}+\theta_{n,\infty}\right)E_n(f^{\alpha,r}_\beta)_C,\end{aligned} \tag{78}$$

其中，对于量 $\bar\gamma_{n,\infty}$ i $\theta_{n,\infty}$ 满足估计 $|\bar\gamma_{n,\infty}|\le 20\pi^4$, $|\theta_{n,\infty}|<\frac{1272}{169\pi}$ i $|\bar\gamma_{n,\infty}+\theta_{n,\infty}|$ <1951。定理 2.4 得证。 □

3 广义泊松积分类 Cα,r β,p 上拉格朗日插值多项式的柯尔莫哥洛夫—尼科尔斯基问题的解 $C^{\alpha,\ r}_{\beta\ p}$，

由本文的定理 2.1、2.3 和 2.4 可知，不等式 (23)、(59) 和 (66) 在广义泊松积分集合 $C^{\alpha,\ {}^r_\beta}L_p$ 上是渐近不可改进的，其中 $x\in\mathbb{R}$、 $\beta\in\mathbb{R}$、 $\alpha>0$、 $r\in$ 取遍 (0,1)，且 $1\le p\le\infty$。显然，所述不等式也适用于

任意子集，其中 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}L_p$，例如集合 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}\mathfrak{N}$、 $\mathfrak{N}\subset L_p$ ，尤其是类

$$C^{\alpha,r}_{\beta,p}=C^{\alpha,r}_{\beta}U_p,\quad U_p=\{\varphi\in L_p:\|\varphi\|_p\le 1\}.$$

考察不等式 (23)、(59) 和 (66) 两边在类 $C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}{}_{p,}$上的精确上确界，其中分别取 $p\in(1,\infty)$、 $p=1$ 和 $p=\infty$ ，并注意到对于任意的$f\in C^{\alpha}_{,\beta}{}^{r}{}_{p,}$， $1\le p\le\infty$， $E_n(f^{\alpha}_{,\beta}{}^{r})_{L_p}\le 1$，可得当 $n\ge n_*(\alpha,r,p)$ 且所有 $x\in\mathbb{R}$时，以下不等式成立：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)\le&2e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac12,\frac{3-p'}{2};\frac32;1\right)\right.\\&\left.+\bar\gamma^*_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac1p}n^r}\right)\right),\ 1<p<\infty,\ \frac1p+\frac{1}{p'}=1,\end{aligned}\tag{79}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x)\le 2e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{1}{\pi\alpha r}+\bar\gamma^*_{n,1}\left(\frac{1}{(\alpha r)^2n^r}+\frac{1}{n^{1-r}}\right)\right),\tag{80}$$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x)\le 2e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar\gamma^*_{n,\infty}\right),\tag{81}$$

其中$|\bar\gamma^*_{n,p}|<20\pi^4$，当 $1\le p\le\infty$时。

事实证明，在 (79)–(81) 中，符号“≤”可以替换为符号“=”。这一事实将由下面的命题得出。

定理 3.1。设 $r\in(0,\ 1)$， $\alpha>0$、 $\beta\in\mathbb{R}$和 $x\in\mathbb{R}$。那么当 $n\ge n_*(\alpha,\ r,\ 1)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1};x)=e^{-\alpha n^r}n^{1-r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2}{\pi\alpha r}+\delta^*_{n,1}\left(\frac{1}{n^{1-r}}+\frac{1}{(\alpha r)^2n^r}\right)\right),\tag{82}$$

当 $n\ge n_*(\alpha,\ r,\ p)$ 和 $1<p<\infty$

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p};x)=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\\&\times\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac1p}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac12,\frac{3-p'}{2};\frac32;1\right)+\delta^*_{n,p}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac1p}n^r}\right)\right),\end{aligned}\tag{83}$$

而当 $n\ge n_*(\alpha,\ r,\ \infty)$

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,\infty};x)=e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\delta^*_{n,\infty}\right).\tag{84}$$

在公式 (82)–(84) 中，对于量 $\delta^*_{n,\ p}=\delta^*_{n,\ p}(\alpha,\ r,\ \beta,\ x)$ 满足估计 $|\delta^*_{n,\ p}|<40\pi^4$。

定理 *3.1* 的证明。我们从积分表示式 (25) 出发，其中 $f \in C^{\alpha,\ _\beta{}^r}$，$1 \le p \le \infty$。考察等式 (25) 两边模的精确上界在 $t_{n-1} \equiv 0$ 时关于类 $C^{\alpha,\ _\beta{}^r_p}$，，并考虑集合的不变性

$$U_p^0 = \left\{ \varphi \in L_p : \ \|\varphi\|_p \le 1, \ \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)dt = 0 \right\}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

关于自变量平移，对于所有 $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, 1 \le p \le \infty$ і $n \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,p}; x) &= \sup_{f \in C^{\alpha,r}_{\beta,p}} |\tilde{\rho}_n(f; x)| \\ &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\sup_{\varphi \in U_p^0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \gamma_n) dt + \xi_n \|r_n(\cdot)\|_C \right), \end{aligned} \tag{85}$$

其中 γ_n і $r_n(t)$ 分别由等式 (27) 和 (26) 定义，而对于量 $\xi_n = \xi_n(\alpha, r, \beta, p)$，不等式 $|\xi_n| \le 2$ 成立。

由对偶关系（例如，参见 [2, 第 27] 页）可得

$$\sup_{\varphi \in U_p^0} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \gamma_n) dt = \frac{1}{\pi} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \gamma_n) - \lambda \right\|_{p'}, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{86}$$

考虑 $p = 1$ 的情形。由 [13]–[15] 可知，对于任意 $r \in (0,1)$、$\alpha > 0, \xi \in \mathbb{R}$ 和 $n \ge n_0(\alpha, r, 1)$，其中 $n_0(\alpha, r, 1)$ 是满足当 $p = 1$ 时不等式 (39) 的最小编号 n，估计式成立

$$\left\| \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \xi) \right\|_{\infty} = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \bar{\gamma}^{(1)}_{n,1} \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right), \tag{87}$$

$$\frac{1}{\pi} \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha k^r} \cos(kt + \xi) - \lambda \right\|_{p'} = e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \bar{\gamma}^{(2)}_{n,1} \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) \right), \tag{88}$$

其中对于 数值 $\bar{\gamma}^{(i)}_{n,\ 1} = \bar{\gamma}^{(i)}_{n\ 1,}\ (\alpha, r, \xi)$，$i = 1,\ 2$，满足不等式 $|\bar{\gamma}^{(i)}_{n,\ 1}| \le (14\pi)^2$.

应用公式 (88)，其中 γ_n 由等式 (27) 定义，并注意到当 $n_0(\alpha, r, 1) \le n_*(\alpha, r, 1)$ 时，由 (85)、(86)、(88) 和 (35)，对于 $n \ge n_*(\alpha, r, 1)$，有

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_n(C^{\alpha,r}_{\beta,1}; x) &= 2 \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left(\frac{1}{\pi \alpha r} + \bar{\gamma}^{(2)}_{n,1} \left(\frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + \frac{1}{n^{1-r}} \right) + \theta_{n,1} e^{-\alpha n^r} \right) \right) \\ &= e^{-\alpha n^r} n^{1-r} \left| \sin \frac{2n-1}{2} x \right| \left(\frac{2}{\pi \alpha r} + 2\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1} \frac{1}{(\alpha r)^2} \frac{1}{n^r} + 2 \left(\bar{\gamma}^{(2)}_{n,1} + \theta_{n,1} \right) \frac{1}{n^{1-r}} \right), \end{aligned} \tag{89}$$

其中 $|\theta_{n,1}| < \frac{1272}{169\pi}$。

由于 $2\left(|\bar{\gamma}_{n,1}^{(2)}|+|\theta_{n,1}|\right)<40\pi^4$，由（89）可得（82）。

设 $p\in(0,1)$。在这种情况下，估计式 (47) 对所有 $n\geq n_0(\alpha,r,p)$、$1<p<\infty$ 均成立。将 (47) 应用于 $\xi=\gamma_n$，其中 γ_n 由公式 (27) 定义，并注意到 $n_0(\alpha,r,p)\leq n_*(\alpha,r,p)$、$1<p<\infty$，由 (85)、(86) 以及在 $n\geq n_*(\alpha,r,p)$ 时的 (35) 可得

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r};x)=2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left(\frac{\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}\left(\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}+\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}n^r}\right)\right)+\theta_{n,p}e^{-\alpha n^r}\right)\\
&=e^{-\alpha n^r}n^{\frac{1-r}{p}}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{2\|\cos t\|_{p'}}{\pi^{1+\frac{1}{p'}}(\alpha r)^{\frac{1}{p}}}F^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{1}{2},\frac{3-p'}{2};\frac{3}{2};1\right)\right.\\
&\left.+2\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}\frac{p^{\frac{1}{p'}}}{(\alpha r)^{1+\frac{1}{p}}}\frac{1}{n^r}+\left(2\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}\left(1+\frac{(\alpha r)^{\frac{p'-1}{p}}}{p'-1}\right)+2\theta_{n,p}\right)\frac{1}{n^{\frac{1-r}{p}}}\right),
\end{aligned}\tag{90}$$

其中 $|\theta_{n,p}|\leq\frac{1272}{169\pi}$。

Враховуючи, що $2\left(|\bar{\gamma}_{n,p}^{(2)}|+|\theta_{n,p}|\right)<40\pi^4$, із (93) отримуємо (83).

最后，设 $p=\infty$。

由 (68) 以及在 $p=\infty$ 时应用的公式 (46) 和 (47)，对所有指标 $n\geq n_0(\alpha,r,\infty)$ 及任意 $\alpha>0$, $r\in(0,1)$、$\gamma\in\mathbb{R}$，有以下估计式

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_1\\
&=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+\gamma_{n,\infty}^{(1)}\right),
\end{aligned}\tag{91}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_1\\
&=e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\frac{4}{\pi^2}\Theta_{\alpha,r,n}+\gamma_{n,\infty}^{(2)}\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+\gamma_{n,\infty}^{(2)}\right),
\end{aligned}\tag{92}$$

其中 $|\gamma_{n,\infty}^{(i)}|\leq(14\pi)^2$, $i=1,2$，而 $0<\Theta_{\alpha,r,n}<1$。

当 $n\geq n_1(\alpha,r)$ 时，其中 $n_1(\alpha,r)$ 是满足不等式 (72) 的最小自然数，以下估计成立

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{\pi^2}\left(\ln\pi+\Theta_{\alpha,r,n}\right)+|\gamma_{n,\infty}^{(i)}|\left(\ln\frac{\pi n^{1-r}}{\alpha r}+\Theta_{\alpha,r,n}\right)\frac{1}{\alpha r n^r}+|\gamma_{n,\infty}^{(i)}|\\
&<\frac{4(1+\ln\pi)}{\pi^2}+(14\pi)^2\left(\frac{1}{(3\pi)^3}+1\right)<1938.
\end{aligned}\tag{93}$$

由 (91)–(92)，结合不等式 $n_1(\alpha,r) > n_0(\alpha,r,\infty)$，可得当 $\alpha>0, r\in(0,1)$， $\gamma\in\mathbb{R}$ 和 $n\geq n_1(\alpha,r)$ 时

$$\frac{1}{\pi}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)\right\|_1 = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(1)}\right), \tag{94}$$

$$\frac{1}{\pi}\inf_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\|\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\alpha k^r}\cos(kt+\xi)-\lambda\right\|_1 = e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(2)}\right), \tag{95}$$

其中 $|\bar{\gamma}_{n,\ \infty}^{(i)}|<1938, i=1,2.$

将公式 (95) 应用于 $\xi=\gamma_n$，其中 γ_n 由等式 (27) 定义，并结合 (74)，由 (85)、(86) 和 (35) 可得，对于 $n\geq n_*(\alpha,r,\infty)$，有

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,\infty}^{\alpha,r};x) &= 2\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(e^{-\alpha n^r}\left(\frac{4}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(2)}\right)+\theta_{n,\infty}e^{-\alpha n^r}\right)\\ &= e^{-\alpha n^r}\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\left(\frac{8}{\pi^2}\ln\frac{n^{1-r}}{\alpha r}+2\left(\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(2)}+\theta_{n,\infty}\right)\right),\end{aligned} \tag{96}$$

其中 $|\theta_{n,\ \infty}|<\frac{1272}{169\pi}$.

注意到 $2\left(|\bar{\gamma}_{n,\infty}^{(2)}|+|\theta_{n,\infty}|\right)<40\pi^4$，由 (96) 可得 (84)。定理 3.1 得证。

□

注意，定理 3.1 中的估计 (84) 改进了论文 [7]中的估计 (45)。

还应指出，估计式 (82)–(84) 推导出了量 $\widetilde{\ }\ \mathcal{E}_n(C^{\alpha,\ r}_{\beta\ p,\ ;}\ x)$，$1\leq p\leq\infty$, $\alpha>0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $r\in(0,1)$ 在 $n\to\infty$ 时的渐近等式；这些估计是 [14] 中所得相应估计的插值类比（另见 [13], [15], [18]）。

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C = \sup_{f\in C_{\beta,p}^{\alpha,r}}\|f-S_{n-1}(f)\|_C, \tag{97}$$

$S_{n-1}(f)$ 是函数 f 的 $n-1$ 阶傅里叶部分和。

将本文的公式 (82)–(84) 与论文 [14], 中的估计式 (17)、(18)、(30) 进行比较，可确认量 (11) 和 (97) 在 $n\to\infty$ 时满足极限关系。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r};x)}{\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right|\mathcal{E}_n(C_{\beta,p}^{\alpha,r})_C}=2,\ 1\leq p\leq\infty,\ \alpha>0,\ r\in(0,1),\ \beta\in\mathbb{R}. \tag{98}$$

对于有限光滑度函数类，情况则截然不同。

设和前面一样， W_∞^r—为 2π–周期函数 f的类，这些函数的导数 $f^{(k)}$ 直至（$r-1$）阶（含）均绝对连续，且 $\|f^{(r)}\|_\infty\leq 1$。正如 A.M. Kolmogorov 所证明的[1]

$$\mathcal{E}_n(W_\infty^r)_C = \sup_{f\in W_\infty^r}\|f-S_{n-1}(f)\|_C = \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^r}\right),\quad r\in\mathbb{N}. \tag{99}$$

将 Kolmogorov 对傅里叶级数和的估计（99）与 Nikolsky 对插值多项式的估计（10）进行比较，可在 $x \neq \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$时写出极限关系

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{\mathcal{E}}_n(W_\infty^r; x)}{\left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \mathcal{E}_n(W_\infty^r)_C} = 2\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{v(r+1)}}{(2v+1)^{r+1}}, \ r \in \mathbb{N}. \tag{100}$$

由（100）可见，比值 $\mathcal{E}_n(W_\infty^r; x) \left|\sin\frac{2n-1}{2}x\right| \mathcal{E}_n(W_\infty^r)_C$ 在 $n \to \infty$ 时的极限取决于被积函数的光滑性。

关于 уточн 补充和推广估计（99），例如参见 [19], [25], [12], [26] 以及其他 .

4 引理 2.2 的证明

引理 *2.2* 的证明。设 $n \in \mathbb{N}$ 满足不等式（28）。我们将证明，在给定的 n 条件下，估计式成立

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha v^r} < \frac{636}{169} \frac{n^{1-r}}{\alpha r} e^{-\alpha(3n-1)^r}. \tag{101}$$

首先注意，对于任意正的单调递减函数 $\xi(u)$，只要满足 $\int_m^\infty \xi(u)du < \infty$ 关系成立

$$\sum_{j=m}^{\infty} \xi(j) < \xi(m) + \int_m^{\infty} \xi(u)du. \tag{102}$$

在文献 [14] （公式（22））中，得到了以下估计:

$$\int_m^{\infty} e^{-\alpha t^r} t^\delta dt = \frac{e^{-\alpha m^r}}{\alpha r} m^{\delta+1-r} \left(1 + \Theta_{\alpha,m}^{r,\delta} \frac{|\delta+1-r|}{\alpha r} \frac{1}{m^r}\right), \ |\Theta_{\alpha,m}^{r,\delta}| \leq \frac{14}{13}, \tag{103}$$

该式对所有满足 $m \geq \left(\frac{14|\delta+1-r|}{\alpha r}\right)^{\frac{1}{r}}$的 $\alpha > 0$、 $r > 0$、 $\delta \in \mathbb{R}$以及编号 m均成立。由（102）、（103）和条件（28），

$$\begin{aligned}
&\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha v^r} < e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r} + \int_{(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha t^r} dt \\
\leq &\frac{e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r}}{\alpha r} ((2k+1)n-k)^{1-r} \left(\frac{\alpha r}{((2k+1)n-k)^{1-r}} + 1 + \frac{14}{13} \frac{1-r}{\alpha r((2k+1)n-k)^r}\right) \\
< &\frac{14}{13} \frac{e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r}}{\alpha r} (2k+1)n-k)^{1-r}.
\end{aligned} \tag{104}$$

根据 (28) 以及函数 $e^{-\alpha t^r} t^{1-r}$ 在 $[n, \infty)$ 上的单调递减性，当 n 满足

条件 (28)，结合 (104) 以及在 $\delta = 1 - r$ 处应用的等式 (103)，得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{v=(2k+1)n-k}^{\infty} e^{-\alpha v^r} < \frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha((2k+1)n-k)^r}(2k+1)n-k)^{1-r} \\
<&\frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}\left(e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r} + \int_1^{\infty} e^{-\alpha((2n-1)u+n)^r}(2n-1)u+n)^{1-r}du\right) \\
=&\frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}\left(e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r} + \frac{1}{2n-1}\int_{3n-1}^{\infty} e^{-\alpha t^r}t^{1-r}dt\right) \\
\leq&\frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}\left(e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r} + \frac{1}{2n-1}\frac{e^{-\alpha(3n-1)^r}}{\alpha r}(3n-1)^{2(1-r)}\left(1+\frac{14}{13}\frac{2(1-r)}{\alpha r(3n-1)^r}\right)\right) \\
<&\frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r}\left(1+\frac{(3n-1)^{1-r}}{(2n-1)\alpha r}\left(1+\frac{14}{13}\frac{2}{\alpha r(3n-1)^r}\right)\right) \\
=&\frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r}\left(1+\frac{3n-1}{2n-1}\frac{1}{\alpha r(3n-1)^r}\left(1+\frac{28}{13}\frac{1}{\alpha r(3n-1)^r}\right)\right) \\
<&\frac{14}{13}\frac{1}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}(3n-1)^{1-r}\left(1+2\cdot\frac{1}{14}\left(1+2\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{1}{14}\right)\right) \\
=&\frac{212}{169}e^{-\alpha(3n-1)^r}\frac{(3n-1)^{1-r}}{\alpha r} < \frac{636}{169}\frac{n^{1-r}}{\alpha r}e^{-\alpha(3n-1)^r}. \qquad (105)
\end{aligned}$$

引理2.2得证。 □

本文部分得到H2020-MSCA-RISE-2019项目（项目编号873071，SOMPATY：谱优化：从数学到物理学与先进技术）以及大众汽车基金会（VolkswagenStiftung）“从建模与分析到逼近”计划的资助。

文献

[1]A. Kolmogoroff，可微函数傅里叶级数余项的渐近阶，《数学年刊》（第二辑），36，第2期，521–526页（1935年）。

[2] Н.П. Корнейчук，逼近论中的精确常数，科学出版社，莫斯科（1987年）。

[3] С.М. Никольский，用三角多项式逼近周期函数，苏联科学院数学研究所论文集，15（1945年）。

[4]*K.I. Oskolkov*，《大尺度》型不等式及其在三角逼近问题中的应用，《分析数学》12，143–166（1986年）。

[5]*A. C.* 谢尔久克，关于用插值三角多项式逼近高光滑度函数的误差的渐近精确估计，《乌克兰国家科学院通报》，第*8*期，*29-33*（*1999*年）。[6] *A. C.* 谢尔久克，在周期解析函数类上用插值三角多项式进行逼近，《乌克兰数学杂志》，*64*，第*5*期，*698–712*（*2012*年）。[7]*A. C.* 谢尔久克，用插值三角多项式逼近无限次可微周期函数，《乌克兰数学杂志》，*56*，第*4*期，*495–505*（*2004*年）。[8]*A. C.* 谢尔久克，*B.A. Войтович*，用瓦莱-普桑和的插值类比逼近整函数类，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，*7*，第*1*期：函数逼近理论及相关问题。—基辅：乌克兰国家科学院数学研究所，*274-297*（*2010*年）。[9] *A. C.* 谢尔久克，*I.B. Соколенко*，利用插值三角多项式逼近（ψ, β）-可微函数类，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，*13*，第*1*期，*289–299*（*2016*年）。[10]*A. C.* 谢尔久*к*，*I.B. Соколенко*，基于傅里叶–拉格朗日系数的线性方法逼近周期函数的卷积类，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，*14*，第*1*期，*238–248*（*2017*年）。[11] *A. C.* 谢尔久*к*，*I.B. Соколенко*，在周期整函数类上以空间 L_p 的度量用插值三角多项式进行逼近，《乌克兰数学杂志》，*71*，第*2*期，*283–292*（*2019*年）。[12] *A. C.* 谢尔久*к*，*I.B. Соколенко*，以傅里叶和逼近具有高光滑度指标的韦伊–纳迪意义下可微函数类，《乌克兰数学杂志》，*74*，第*5*期，*685–700*（*2022*年）。[13] *A. C.* 谢尔久*к*，*T.A. Степанюк*，以傅里叶和一致逼近泊松积分卷积类，《乌克兰国家科学院通报》，第*11*期，*10–16*（*2016*年）。[14] *A.S. Serdyuk*，*T.A. Stepanyuk*，以傅里叶和一致逼近广义泊松积分类，*Analysis Mathematica*，*45*，第*1*期，*201–236*（*2019*年）。

[15] A. C. 谢尔久克，T.A. Степанюк，广义泊松积分类在函数空间度量下的傅里叶和逼近，《乌克兰数学杂志》，69，第5期，695–704页（2017年）。[16]A. S. 谢尔久克，T.A. Stepanyuk，广义泊松积分集上的傅里叶和的渐近最优勒贝格型不等式，FILOMAT，34，第14期，4697–4707页（2020年）。[17] A. S. 谢尔久克，T.A. Stepanyuk，关于广义泊松积分类上的勒贝格不等式，Jaen J. Approx. 12，25–40页（2021年）。[18]A. S. 谢尔久克，T.A. Stepanyuk，对高光滑度周期函数卷积集上的傅里叶和一致逼近，arXiv:2301.02017v1（2023年）。[19]А.И. Степанец，逼近理论方法：共2册，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，40，第I册（2002年）。[20]А.И. Степанец，逼近理论方法：共2册，《乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，乌克兰国家科学院数学研究所，基辅，40，第II册（2002年）。[21]А.И. Степанец，A. C. 谢尔久克，利用插值三角多项式逼近周期解析函数，《乌克兰数学杂志》，59，第12期，1689–1701页（2000年）。[22]O.I. Степанець，A. C. 谢尔久克，无穷可微函数类上插值三角多项式逼近余项的估计，《函数逼近理论及其应用：乌克兰国家科学院数学研究所论文集》，31，446–460页（2000年）。[23] O.I. Степанець，A. C. 谢尔久克，А.Л. Шидліч，周期函数无穷可微性的一些新判据，《乌克兰数学杂志》，59，第10期，1399–1409页（2007年）。[24] А.И. Степанец，A. C. 谢尔久克，А.Л. Шидлич，关于类 (ψ,β) 可微函数与*Жевре*类的关系，《乌克兰数学杂志》，61，第1期，140–145页（2009年）。[25] С.Б. Стечкин，可微函数傅里叶级数余项的估计，《用多项式和样条逼近函数》，论文集，《苏联科学院数学研究所论文集》第145卷，126–151页（1980年）。

[26]C.A. 特利亚科夫斯基，关于用傅里叶和逼近高光滑度函数《乌克兰数学杂志》41，第41期，510–518页（1989年）。[27]И.A. 沙基罗夫，与经典拉格朗日插值多项式相对应的勒贝格函数的全面研究，《高校数学通报》，第10期，80–88页（2011年）。[28]И.A. 沙基罗夫，用带有自变量平移的对数函数逼近拉格朗日多项式的勒贝格常数，《科学与技术成果。现代数学及其应用专题综述》，153，151–157页（2018年）。[29]I.I. Sharapudinov，关于最佳逼近与最小平方偏差多项式，Analysis Mathematica，9，223–234页（1983年）。