arXiv:2303.05573v1 [math.AG] 9 Mar 2023

Gorenstein 代数与加性作用的唯一性

IVAN BELDIEV

Abstract. 我们研究射影超曲面上的诱导加法作用，即代数群 $\mathbb{G}_a^m$ 的正则作用，该作用具有一个开轨道，且可扩展为环境射影空间上的正则作用。我们证明，如果一个射影超曲面具有诱导加法作用，那么当且仅当该超曲面非退化时，这种作用是唯一的。我们还证明，对于任意 $n \geq 2$，在 $\mathbb{P}^n$ 中，对从 2 到 n 的每个次数 d，都存在一个非退化超曲面。

Introduction

设 $\mathbb{K}$ 是一个零特征代数闭域。从现在起，代数簇均指定义在 $\mathbb{K}$ 上的代数簇。记代数群 $(\mathbb{K}, +)^m$ 为 $\mathbb{G}_a^m$，其中 m 是正整数。

代数簇 X 上的加法作用，是群 $\mathbb{G}_a^m$ 在 X 上具有开轨道的有效正则作用。若 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是射影超曲面，则我们可以考虑所谓的 X 上的诱导加法作用，即 $\mathbb{G}_a^m$ 在 X 上的加法作用，该作用可扩展为 $\mathbb{G}_a^m$ 在环境射影空间 $\mathbb{P}^n$ 上的正则作用。我们所考虑的所有加法作用都是诱导的，因此有时谈及这些作用时会省略“诱导”一词。

并非所有射影超曲面上的加法作用都是诱导的（见 [3, 例 2.2]）。不过，诱导这一性质并不像看起来那样严格。例如，假设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个线性正规子簇，即 X 不包含在任何超平面中，且它不是从更大的射影空间中的某个子簇线性投影得到的。等价地，这意味着映射 $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1)) \to H^0(X, \mathcal{O}(1))$是满射。在这种情况下，如果 X 存在加法作用，那么该作用就是诱导的（证明见 [1, 第 2]节）。

加法作用理论的发展始于 [5] Hassett 和 Tschinkel 的工作。他们证明，$\mathbb{P}^n$ 上的加法作用与维数为 $n+1$的局部有限维交换结合含幺代数之间存在自然的一一对应。根据 Hassett-Tschinkel 对应的推广版本（见 [3, 第 1.5]节），以下对象之间存在双射（相差自然等价关系）：

(1) $\mathbb{P}^n$ 中不包含于任何超平面的射影超曲面上的诱导加法作用；

2010年数学主题分类。主要分类：14L30，14J70；次要分类：13E10。关键词和短语：代数簇、代数群、加法作用、局部代数、射影空间、射影超曲面。受俄罗斯科学基金会项目 23-21-00472 资助。

(2) 对 (A,U)，其中 A 是 $\mathbb{K}$ 上维数为 n、极大理想为 $\mathfrak{m}$ 的局部交换结合含幺代数，而 $U\subseteq\mathfrak{m}$ 是生成代数 A 的维数为 $n-2$ 的子空间。这样的对 (A,U) 称为 H-对。

在 [9], 中，证明了在同构意义下，$\mathbb{G}_a^n$ 在光滑二次超曲面 $Q_n\subseteq\mathbb{P}^{n+1}$ 上存在唯一的诱导加法作用。在 [4], 中，作者将这一结果推广到任意交换线性代数群在 $Q_n\subseteq\mathbb{P}^{n+1}$ 上的正则作用。他们证明，除了 $\mathbb{G}_a^n$ 的唯一加法作用外，只有以下三种情形：$\mathbb{G}_m$ 在 Q_1 上的作用、$\mathbb{G}_a\times\mathbb{G}_m$ 在 Q_2 上的作用，以及 $\mathbb{G}_m^2$ 在 Q_2 上的作用（这里 $\mathbb{G}_m$ 是乘法群（$\mathbb{K}$，$\times$））。

对于奇异二次超曲面，情况则变得更加复杂。在 [2, 第 4] 章中，证明了对于 $n\geq 5$，$\mathbb{P}^n$ 中余秩为 1 的二次超曲面存在一个两两不等价的诱导加法作用无限族。在 [1], 中，作者对 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中余秩为 1 的二次超曲面上的 $\mathbb{G}_a^n$ 诱导加法作用进行了分类。在 [6], 中，得到了余秩为 2 的二次超曲面上、其奇点不被 $\mathbb{G}_a^n$ 作用固定的加法作用分类。在 [7], 中，找出了所有允许加法作用的射影环面超曲面。具体而言，证明了允许加法作用的环面超曲面同构于 $\mathbb{P}^n$ 或秩为 3 或 4 的二次超曲面。此外，该文还给出了低维二次超曲面上加法作用的完整分类。

非退化超曲面的情形尤其值得关注。由齐次多项式 $f\in\mathbb{K}[z_0,z_1,\dots,z_n]$ 给出的超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^n$ 称为非退化的，如果不存在变量的线性变换能够减少 f 中变量的个数。等价地，这意味着对于某个 $k<n$，X 不是射影子空间 $\mathbb{P}^k\subseteq\mathbb{P}^n$ 中超曲面 $X_0\subseteq\mathbb{P}^k$ 上的射影锥。特别地，二次曲面当且仅当光滑时才是非退化的。

在 [3], 中，作者建立了非退化超曲面上的加法作用与 Gorenstein 局部有限维代数之间的关系；后者是指带有极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部有限维代数 A，其中理想 $\operatorname{Soc}A=\{a\in A\mid a\mathfrak{m}=0\}$ 是一维的。他们证明，在 $\mathbb{P}^n$ 中非退化超曲面上的诱导加法作用与满足以下条件的 H-对 (A,U) 一一对应：A 是 Gorenstein 局部有限维代数，且 $U\subseteq\mathfrak{m}$ 是 $\operatorname{Soc}A$ 的补超平面。此外，同一篇文章还证明，任意非退化超曲面 X 上的诱导加法作用在等价意义下至多有一个。由此自然产生以下猜想（见 [3,猜想 5.19]）。

猜想。设 $X\subseteq\mathbb{P}^n$ 是一个具有诱导加法作用的退化超曲面。那么 X 上至少存在两个不等价的诱导加法作用。

在定理 2.2 中，我们证明了这个猜想。为此，我们将下文命题 1.9 中描述的约化过程应用于与给定的、具有加法作用的退化超曲面 $X\subseteq\mathbb{P}^n$ 相对应的 H-对 (A,U)。由此得到与非退化超曲面 $X_0\subseteq\mathbb{P}^k$ 相对应的 H-对 (A_0,U_0)，其中 X 是以 X_0 为底的射影锥。此后，我们构造两个不等价的 H-对 (A_1,U_1) 和 (A_2,U_2)，使得 $\dim A_1=\dim A_2=\dim A_0+1$，且它们经约化后都变为 (A_0,U_0)。

在 [3, 推论 2.16], 中，作者还证明了具有诱导加法作用的超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 的次数至多为 n。值得注意的是，对于 $2 \leq n \leq 5$，在 $\mathbb{P}^n$ 中存在次数从 2 到 n 的、具有诱导加法作用的超曲面。在命题 3.1 中，我们证明这一结论对任意 $n \geq 2$ 都成立。相应的超曲面可用 H-对来描述。

Acknowledgements

作者感谢 Ivan Arzhantsev 和 Yulia Zaitseva 的宝贵讨论。

1. Preliminaries

我们先介绍一些关于局部有限维代数的基本结果。从现在起，文中所说的“代数”均指域 $\mathbb{K}$ 上的有限维交换结合含幺代数。回顾一下，若一个代数恰好含有一个极大理想 $\mathfrak{m}$，则称其为局部代数。

引理 1.1. [3,引理 1.2] 有限维代数 A 是局部代数，当且仅当 A 是其子空间 $\mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$ 的直和，其中 $\mathfrak{m}$ 是由 A 中所有幂零元构成的理想。

定义 1.2. 带有极大理想 $\mathfrak{m}$ 的局部代数 A 的底是理想

$$\mathrm{Soc}A = \{a \in A \mid a\mathfrak{m} = 0\}.$$

如果一个局部有限维代数 A 满足 $\dim \mathrm{Soc}A = 1$，则称其为 Gorenstein。

考虑满足 $\mathfrak{m}^d \neq 0$ 的最大正整数 d。显然， $\mathfrak{m}^d \subseteq \mathrm{Soc}A$，但这一包含关系可能是严格的。因此， A 是 Gorenstein 代数，当且仅当 $\dim \mathfrak{m}^d = 1$ 且 $\mathrm{Soc}A = \mathfrak{m}^d$。

我们已经介绍了超曲面上的诱导加法作用这一概念（见引言）。现在给出两个作用等价的正式定义。

定义 1.3. 若存在一个代数群自同构 $\varphi\colon \mathbb{G}_a^m \to \mathbb{G}_a^m$ 和一个自同构 $\psi\colon \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$，使得 $\psi(X_1) = X_2$ 且，则称两个诱导加法作用 $\alpha_i\colon \mathbb{G}_a^m \times X_i \to X_i$, $X_i \subseteq \mathbb{P}^n$, $i = 1, 2$ 等价。

$$\psi \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ (\varphi \times \psi).$$

在下述定义中，我们考虑对 (A, U)，其中 A 是一个以 $\mathfrak{m}$ 为极大理想的局部有限维代数，而 $U \subseteq \mathfrak{m}$ 是生成代数 A 的余维为 1 的子空间。

定义 1.4. 如果存在代数同构 $\varphi\colon A_1 \to A_2$ 使得 $\varphi(U_1) = U_2$，则称对 (A_1, U_1) 和 (A_2, U_2) 等价。

现在，我们准备好精确陈述 Hassett-Tschinkel 对应的广义版本，这一对应我们已在引言中提及。

定理 1.5. [3, 定理 2.6] 假设 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$。以下对象之间存在一一对应：

(1) 诱导一个 在 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中不包含于任何超平面的超曲面上的加法作用；

(2) 对 (A, U)，其中 A 是维数为 n 的局部交换结合含幺代数，且极大理想 $\mathfrak{m}$ 和 $U \subseteq \mathfrak{m}$ 是生成代数 A 的超平面。此类对 (A, U) 称为 H-对。

这一对应关系在定义 1.3 和 1.4 所述的等价关系下考虑.

我们简要说明这一对应的构造。设给定一对满足定理 1.5 条件的 (A, U)。令 p: $A \setminus \{0\} \to \mathbb{P}(A) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 为典范投影。相应的射影超曲面 X 定义如下:

$$X = p(\overline{\mathbb{K}^\times \exp U}),$$

也就是说，它是子集 $\mathbb{K}^\times \exp U \subseteq A \setminus \{0\}$ 的扎里斯基闭包的射影化。显然，$\exp(U)$ 可与 $\mathbb{G}_a^{n-2}$ 等同，因此，$\exp(U)$ 中元素的乘法定义了 $\mathbb{G}_a^{n-2}$ 在 $\mathbb{P}(A)$ 上的作用。容易看出，X 在此乘法下保持不变，因此这便给出了 $\mathbb{G}_a^{n-2}$在 $X \subseteq \mathbb{P}(A) \cong \mathbb{P}^{n-1}$ 上的诱导加法作用，如所需。

反过来，假设给定了超曲面$X \subseteq \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(V)$上的 $\mathbb{G}_a^{n-2}$诱导加法作用，其中 V 是一个 n维向量空间。可以证明，此作用可以提升为 V上的 $\mathbb{G}_a^{n-2}$作用，从而得到一个忠实表示ρ: $\mathbb{G}_a^{n-2} \to \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$。定义 A 为由 $\rho(\mathbb{G}_a^{n-2})$生成的 $\mathrm{Mat}_m(\mathbb{K})$ 子代数，并定义U为由 $\rho(\mathbb{G}_a^{n-2})$张成的 A向量子空间。可以验证，(A, U)是满足定理 1.5 条件的一对。细节可参见 [3, 定理 1.38]。

给定一个 H-对 (A, U)，可以如下求出相应射影超曲面的方程（更多细节见 [3, 第 2 章.2]）。记 π 为典范投影 π: $U \to U/\mathfrak{m}$。设 d 为满足 $\mathfrak{m}^d \neq 0$的最大正整数。那么，相应的射影超曲面由以下齐次多项式给出

$$z_0^d \pi(\ln(1 + \frac{z}{z_0})) = 0$$

对于 $z_0 + z \in A = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{m}$、$z_0 \in \mathbb{K}$、$z \in \mathfrak{m}$。该超曲面不可约，次数为 d。在第 2 节和第 3 节中，我们通过若干例子对此加以说明。

定义 1.6. 假设射影超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 由方程$f(z_0, z_1, \ldots, z_n) = 0$给出，其中 f是一个齐次多项式。若满足以下等价条件之一，则称超曲面 X为非退化的:

(1) 不存在变量的线性变换可以减少 f中的变量个数;

(2) 超曲面 X 不是某个射影子空间 $\mathbb{P}^k \subseteq \mathbb{P}^n$ 中的超曲面 $X_0 \subseteq \mathbb{P}^k$ 上的射影锥，其中 $k < n$ 为某个值。

以下定理已在 [3,定理 2.30] 中证明。

定理 1.7. $\mathbb{P}^{n+1}$ 中的次数为 d 的超曲面上的诱导加法作用，与对 (A, U) 之间存在一一对应关系，其中 A是维数为 $n+2$、底为 $\mathfrak{m}^d$ 的 Gorenstein 局部代数，且 $U \subseteq \mathfrak{m}$ 是 Soc$A$的补超平面。

在 [3, 定理2.32]中证明的另一个定理如下。

定理1.8. 设 $X \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ 是一个非退化超曲面。那么，在等价意义下， X 上至多存在一个诱导加法作用。

在 [3], 中，作者引入了诱导加法作用约化的概念，并证明了其性质。设 H-对 (A, U) 对应于射影超曲面 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 上的一个诱导加法作用。设 J 是 A 的一个维数为 $n-k$ 的理想，使得 $J \subseteq U$。

命题 1.9。 [3, 命题 2.20 和推论 2.23] 对 $(A/J, U/J)$ 对应于射影超曲面 $X_0 \subseteq \mathbb{P}^k$上的一个诱导加法作用，且 X 是以 X_0为底的射影锥，即在 $\mathbb{P}^n$ 中对坐标作某种选取并取 $\mathbb{P}^k$ 后，超曲面 X 和 X_0 的方程相同。此外，若 J 是包含于 U 中的 A 的最大（关于包含关系）理想，则 X_0 是 $\mathbb{P}^k$ 中的非退化超曲面。

2. Non-uniqueness of additive action on degenerate hypersurfaces.

本节中，我们证明引言中陈述的猜想。先回顾一下该猜想的内容。设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个退化超曲面，且存在诱导加法作用。我们将证明，在 X上至少存在两个不等价的诱导加法作用。

设 (A, U) 是与 X上的给定诱导加法作用相对应的 H-对。由于X 是退化的，我们可以应用命题 1.9 中的约化过程。这为我们给出一个新的 H-对 (A_0, U_0)，使得 $\dim A_0 < \dim A$。

关键步骤如下。我们需要构造两个不等价的 H-对 (A_1, U_1) 和 (A_2, U_2)，它们在约化后都变为 (A_0, U_0)，并且满足

$$\dim A_1 = \dim A_2 = \dim A_0 + 1.$$

我们将显式构造 (A_1, U_1) 和 (A_2, U_2)。

记 $\mathfrak{m}_0$为 A_0的极大理想。选取 $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathfrak{m}_0 \subseteq A_0$，使得这些 k 元素模 $\mathfrak{m}_0^2$ 的类构成 $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$的一组基。由中山引理，$a_1, a_2, \ldots, a_k$生成代数 A_0。因此， A_0同构于某个理想 $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$的商 $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]/I$；在此同构下， $x_1, x_2, \ldots, x_k$分别映至 $a_1, a_2, \ldots, a_k$。由于 $a_1, a_2, \ldots, a_k$构成 $\mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2$的一组基，每个 $f \in I$都不含线性项（ f 的常数项也为 0）。

我们按如下方式构造 (A_1, U_1)。令 A_1 为多项式代数$\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}]$ 模理想 I_1所得的商，其中理想 I_1定义如下

$$I_1 = I\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}] + (x_1 x_{k+1}) + (x_2 x_{k+1}) + \ldots + (x_k x_{k+1}) + (x_{k+1}^2).$$

非正式地说，我们在代数 A_0 中添加一个新变量 x_{k+1}，并要求对任意 $i = 1$，2，....., k，$k+1$，满足关系$x_i x_{k+1} = 0$。

显然， $A_1 = A_0 \oplus \langle x_{k+1} \rangle$，因此 $\dim A_1 = \dim A_0 + 1$。我们将 U_1定义为 $U_1 = U_0 \oplus \langle x_{k+1} \rangle$。现在， $\langle x_{k+1} \rangle$ 是 A_1 的一个理想，且包含于 U_1 中。显然，若我们相对于这个理想对 H-对 (A_1, U_1)进行约化，就会得到 H-对 (A_0, U_0)。因此，(A_1, U_1)这一对满足我们的条件。

(A_2, U_2) 的构造更为复杂。其非正式的思路是缩小理想 I，而不是向 A_0 中添加一个新变量。为此，我们需要以下技术引理。

引理 2.1. 设 $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ 是一个非零理想。那么存在一组$f_1, f_2, \ldots, f_l$生成元，使得由 J 生成的理想

$$f_1, f_2, \ldots, f_{l-1}, x_1 f_l, x_2 f_l, \ldots, x_k f_l$$

严格包含于 J。

证明。任取理想 J 的一个有限生成元系 $f_1, f_2, \ldots, f_l$。如果由 $f_1, f_2, \ldots f_{l-1}, x_1 f_l, x_2 f_l, \ldots, x_k f_l$ 生成的理想严格包含于 J，则结论成立。否则，

$$f_1, f_2, \ldots f_{l-1}, x_1 f_l, x_2 f_l, \ldots, x_k f_l$$

这是 J 的另一个生成元系，因此我们可以将其替换为

$$f_1, f_2, \ldots, f_{l-2}, x_1 f_{l-1}, x_2 f_{l-1}, \ldots, x_k f_{l-1}, x_1 f_l, x_2 f_l, \ldots, x_k f_l.$$

我们可以用类似的方法继续进行，每一步都将某个 f_i 替换为 $x_1 f_i, x_2 f_i, \ldots, x_k f_i$。如果理想 J 在某一步变小，则结论成立。否则，在第 l 步之后，我们得到一个系

$$x_1 f_1, x_2 f_1, \ldots, x_k f_1; x_1 f_2, x_2 f_2, \ldots, x_k f_2; \ldots x_1 f_l, x_2 f_l, \ldots, x_k f_l$$

根据我们的假设，它生成理想 J。

将 d 记为最小的正整数，使得多项式 f_1、f_2、.....、f_k 中至少有一个含有次数为 d 的非零项。于是，不存在形如 $x_i f_j (i = 1, 2, ..., k,\ j = 1, 2, ..., l)$ 且含有次数小于 $d+1$ 的非零项的多项式。若此类多项式生成 J，则 J 的任意元素都不含次数小于 $d+1$ 的项。这就产生了矛盾，因此证明完毕。□

我们将引理 2.1 应用于理想 $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$。选取 I 的一组˜生成元 f_1、f_2、.....、f_l，使得理想 $I = (f_1, f_2, \ldots f_{l-1}, x_1 f_l, x_2 f_l, ..., x_k f_l)$ 严格包含于 I 中。定义代数 A_2 为 $A_2 = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]/I$。不难看出，$\dim A_2 = \dim A_0 + 1$。事实上，选取一组多项式 S_1、S_2、.....、S_r，使它们模 I 的剩余类构成 A_0 的一组基。于是，任意多项式 $g \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ 都可以写成

$$g = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots + a_r S_r + H,$$

其中 $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{K}, H \in I$。将 H写作

$$H = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + h_l f_l.$$

若 h_l 的常数项为 c，则

$$g = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \ldots a_r S_r + c f_l + \tilde{H},$$

˜其中 $H = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \ldots + (h_l - c) f_l$ 是 I的一个元素。因此，$S_1, S_2, \ldots, S_r, f_l$的等价类生成了作为向量空间的 A_2，故 $\dim A_2 \leq \dim A_0 + 1$。但是，$I$严格包含于 I，所以等式 $\dim A_2 = \dim A_0 + 1$ 成立。

令 $U_2 = U_0 \oplus \langle f_l \rangle$。元素 $f_l \in A_2$ 在乘以任意 $x_i, i = 1, 2, \ldots, k$ 后均被消去，因此 $\langle f_l \rangle$ 是 A_2 中包含于 U_2的一个理想。显然，(A_2, U_2) 模这个理想约化后得到 H-对 (A_0, U_0)。

用 $\mathfrak{m}_i$ 表示 A_i, $i = 1, 2$ 的极大理想。我们看到

$$\dim \mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_1^2 = \dim \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 + 1$$

and

$$\dim \mathfrak{m}_2/\mathfrak{m}_2^2 = \dim \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2.$$

这证明了 H-对 (A_1, U_1) 和 (A_2, U_2) 并不等价。

现在，我们的猜想在 $\dim A - \dim A_0 = 1$ 的情形下得到了证明。接下来还需处理 $\dim A - \dim A_0 = r \geq 2$ 的情形，也就是说，我们需要构造两个不等价的 H-对$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \hat{\ }\hat{\ }(A, U)$、$(A, U)$，它们在约化下都映射到 (A_0, U_0)，并且满足

$$\dim \widetilde{A} = \dim \hat{A} = \dim A_0 + k.$$

$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }$为构造 H-对 (A, U)，我们将构造中的第一种方法应用 k 次，也就是说，$\hat{\ }\hat{\ }$向 A_0 添加 k 个新变量。为构造 H- 对 (A, U)，我们向 A_2 添加 $k-1$ 个新变量$\widetilde{\ }\ \hat{\ }$。如果分别用 $\widetilde{\mathfrak{m}}$ 和 $\hat{\mathfrak{m}}$ 表示 A、 A 的极大理想，那么

$$\dim \widetilde{\mathfrak{m}}/\widetilde{\mathfrak{m}}^2 = \dim \hat{\mathfrak{m}}/\hat{\mathfrak{m}}^2 + 1,$$

$\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \hat{\ }\hat{\ }$因此， H-对（A， U）和（A， U）确实不等价。

结合我们的 结果与定理 1.7 和 1.8，我们现在可以陈述以下定理 .

定理 2.2. 假设 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 是一个允许诱导加法作用的超曲面。那么以下条件等价:

(1) X上存在唯一的诱导加法作用；(2) X 是一个非退化超曲面；(3) 与给定的 X 上的诱导加法作用相对应的 H-对（A， U）满足：代数 A 是 Gorenstein 代数，其极大理想为 $\mathfrak{m}$ ，且 $U \subseteq \mathfrak{m}$ 是与 Soc$A$互补的超平面。

例 2.3. 考虑局部代数 $A = \mathbb{K}[x, y]/$（x^4， x^2y， $x^3 - y^2$）。其极大理想 $\mathfrak{m}$有一组基 x， y， x^2， xy， x^3（特别地，$\dim A = 6$）。子空间 $U \subseteq \mathfrak{m}$ 定义为$U = \langle x,\ y,\ x^2,\ xy\rangle$，它生成代数 A，因此（A， U）是一个 H-对。容易验证 Soc$A = \langle xy,\ x^3\rangle$。因此， A 不是 Gorenstein 代数，相应的射影超曲面 X 在 $\mathbb{P}^5$ 中是退化的。下面求该超曲面的方程。与前面一样，用 π 表示典范投影 π： $\mathfrak{m} \to \mathfrak{m}/U$。用坐标表示， π（z）就是在 $z \in \mathfrak{m}$ 中 x^3 的系数，其中 z 表示为元素 x， y， x^2， xy， x^3的线性组合时，表达式是唯一的。

$$\pi(\ln(1 + t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4xy + t_5x^3)) =$$
$$= \pi(t_1x + t_2y + \ldots + t_5x^3 - \frac{(t_1x + t_2y + \ldots + t_5x^3)^2}{2} + \frac{(t_1x + t_2y + \ldots + t_5x^3)^3}{3}) =$$
$$= t_5 - t_1t_3 - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_1^3}{3},$$

因此， X 的齐次方程为

$$z_0^2z_5 - z_0z_1z_3 - \frac{z_0z_2^2}{2} + \frac{z_1^3}{3} = 0.$$

注意，这个方程不依赖于 z_4，因此超曲面 X 确实是退化的。现在，子空间 $\langle xy\rangle \subseteq U$ 是 A 中的一个理想，并且包含于 U中，因此可以应用约化过程。约化后，我们得到代数

$$A_0 = \mathbb{K}[x,y]/(x^4, xy, x^3 - y^2) = \mathbb{K}[x,y]/(xy, x^3 - y^2)$$

其极大 理想 $\mathfrak{m}_0 = \langle x, y, x^2, x^3\rangle$ 以及生成子空间 $U_0 = \langle x, y, x^2\rangle$.

按照猜想的证明中构造 H-对 (A_1, U_1) 的方法，我们向 A_0 中添加一个新变量 w 。由此得到代数

$$A_1 = \mathbb{K}[x,y,w]/(xy, x^3 - y^2, xw, yw, w^2)$$

及其生成子空间 $U_1 = \langle x, x^2, y, w\rangle$。

为了求出相应超曲面 X_1 的方程，我们进行如下计算:

$$\pi_1(\ln(1 + t_1x + t_2y + t_3w + t_4x^2 + t_5x^3)) =$$
$$= \pi_1(t_1x + t_2y + \ldots + t_5x^3 - \frac{(t_1x + t_2y + \ldots + t_5x^3)^2}{2} + \frac{(t_1x + t_2y + \ldots + t_5x^3)^3}{3}) =$$
$$= t_5 - t_1t_4 - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_1^3}{3},$$

因此， X_1 的齐次方程为

$$z_0^2z_5 - z_0z_1z_4 - \frac{z_0z_2^2}{2} + \frac{z_1^3}{3} = 0.$$

为了构造 (A_2, U_2)，我们需要选取理想$I = (xy, x^3 - y^2)$的一组生成元 $f_1, f_2, \ldots, f_n$，并将 f_n 替换为 xf_n, yf_n。这两个多项式 $xy, x^3 - y^2$ 生成理想 I。若对 xy应用我们的过程，便得到理想

$$\tilde{I} = (x^2y, xy^2, x^3 - y^2) = (x^2y, x^4, x^3 - y^2).$$

由此得到代数

$$A_2 = \mathbb{K}[x,y]/(x^2y, x^4, x^3 - y^2)$$

及其生成子空间 $U_2 = \langle x, y, xy, x^2\rangle$。我们看到，它就是最初的 H-对，因此相应的超曲面 X_2 就是超曲面 X。

下面明确写出超曲面 X_1 和 X_2 上的 $\mathbb{G}_a^4$-作用公式。这些作用是诱导得到的，我们将求出 $\mathbb{P}^5$上相应的$\mathbb{G}_a^4$-作用公式。为此，我们将 $\mathbb{G}_a^4$ 与 $\exp(U_i)$，$i = 1,2$ 识别。在此识别下，$\mathbb{G}_a^4$ 的作用由 $\exp(U_i)$中的元素对 $i = 1, 2$ 的乘法给出。

对于 H-对 (A_1, U_1)，元素 $(t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbb{G}_a^4$与.....相对应

$$\exp(t_1x + t_2y + t_3w + t_4x^2) \in \exp(U_1).$$

我们需要进行的计算如下:

$$\exp(t_1x+t_2y+t_3w+t_4x^2)\cdot(z_0+z_1x+z_2y+z_3w+z_4x^2+z_5x^3)=$$
$$=(1+t_1x+t_2y+t_3w+(t_4+\frac{t_1^2}{2})x^2+(\frac{t_2^2}{2}+\frac{t_1^3}{6})x^3)\cdot(z_0+z_1x+z_2y+z_3w+z_4x^2+z_5x^3)=$$
$$=z_0+(z_1+t_1z_0)x+(z_2+t_2z_0)y+(z_3+t_3z_0)w+(z_4+t_1z_1+(t_4+\frac{t_1^2}{2})z_0)x^2+$$
$$+(z_5+t_1z_4+t_2z_2+(t_4+\frac{t_1^2}{2})z_1+(\frac{t_2^2}{2}+\frac{t_1^3}{6})z_0)x^3,$$

因此， $\mathbb{G}_a^4$ 在 $\mathbb{P}^5$ 上的作用由以下公式给出

$$(t_1,t_2,t_3,t_4)\cdot[z_0:z_1:z_2:z_3:z_4:z_5]=$$
$$=[z_0:z_1+t_1z_0:z_2+t_2z_0:z_3+t_3z_0:z_4+t_1z_1+(t_4+\frac{t_1^2}{2})z_0:z_5+t_1z_4+t_2z_2+(t_4+\frac{t_1^2}{2})z_1+(\frac{t_2^2}{2}+\frac{t_1^3}{6})z_0].$$

此作用在超曲面 $X_1\subseteq\mathbb{P}^4$ 上的限制具有一个与仿射空间 $\mathbb{A}^4$同构的开轨道。该轨道由所有满足 $z_0\neq0$的点 $[z_0:\ z_1:\ z_2:\ z_3:\ z_4:\ z_5]\in X_1$ 组成。从 X_1 的方程容易看出， X_1 中开轨道的补集是子空间

$$\{[z_0:z_1:z_2:z_3:z_4:z_5]\in\mathbb{P}^5\colon z_0=z_1=0\}.$$

在此集合上， $\mathbb{G}_a^4$-作用化为

$$(t_1,t_2,t_3,t_4)\cdot[0:0:z_2:z_3:z_4:z_5]=[0:0:z_2:z_3:z_4:z_5+t_1z_4+t_2z_2].$$

我们得到，任意满足 $z_2\neq0$ 或 $z_4\neq0$ 的点 $[0:0:\ z_2:\ z_3:\ z_4:\ z_5]$ 的轨道都与 $\mathbb{A}^1$同构，而点 $[0:0:0:\ z_3:0:\ z_4]$ 则是 $\mathbb{G}_a^4$-作用的不动点。因此， $\mathbb{G}_a^4$-作用的不动点集与 $\mathbb{P}^1$同构。

接下来，考虑 H-对 (A_2,U_2)。对于这个 H-对，元素 $(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\mathbb{G}_a^4$ 对应于

$$\exp(t_1x+t_2y+t_3x^2+t_4xy)\in\exp(U_2).$$

我们需要进行的计算如下:

$$\exp(t_1x+t_2y+t_3x^2+t_4xy)\cdot(z_0+z_1x+z_2y+z_3x^2+z_4xy+z_5x^3)=$$
$$=(1+t_1x+t_2y+(t_3+\frac{t_1^2}{2})x^2+(t_4+t_1t_2)xy+(t_1t_3+\frac{t_2^2}{2}+\frac{t_1^3}{6})x^3)\cdot(z_0+z_1x+z_2y+z_3x^2+z_4xy+z_5x^3)=$$
$$=z_0+(z_1+t_1z_0)x+(z_2+t_2z_0)y+(z_3+t_1z_1+(t_3+\frac{t_1^2}{2})z_0)x^2+(z_4+t_1z_2+t_2z_1+(t_4+t_1t_2)z_0)xy+$$
$$+(z_5+t_1z_3+t_2z_2+(t_3+\frac{t_1^2}{2})z_1+(t_1t_3+\frac{t_2^2}{2}+\frac{t_1^3}{6})z_0)x^3,$$

因此， $\mathbb{G}_a^4$ 在 $\mathbb{P}^5$ 上的作用由以下公式给出

$$(t_1,t_2,t_3,t_4)\cdot[z_0:z_1:z_2:z_3:z_4:z_5]=$$
$$=[z_0:z_1+t_1z_0:z_2+t_2z_0:z_3+t_1z_1+(t_3+\frac{t_1^2}{2})z_0:z_4+t_1z_2+t_2z_1+(t_4+t_1t_2)z_0:$$

$$z_5 + t_1 z_3 + t_2 z_2 + (t_3 + \frac{t_1^2}{2}) z_1 + (t_1 t_3 + \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_1^3}{6}) z_0].$$

同样，该作用在超曲面 $X_2 \subseteq \mathbb{P}^4$ 上的限制具有一个与仿射空间 $\mathbb{A}^4$ 同构的开轨道，该轨道由所有满足 $z_0 \neq 0$的点 $[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in X_2$组成。对于（$A_1, U_1$），我们发现该轨道在 X_2 中的补集为

$$\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \in \mathbb{P}^5 : z_0 = z_1 = 0\}.$$

在这个集合上，$\mathbb{G}_a^4$-作用化简为

$$(t_1, t_2, t_3, t_4) \cdot [0 : 0 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] = [0 : 0 : z_2 : z_3 : z_4 + t_1 z_2 : z_5 + t_1 z_3 + t_2 z_2].$$

现在很容易看出，任意满足 $z_2 \neq 0$ 的点 $[0 : 0 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5]$ 的轨道同构于 $\mathbb{A}^2$；任意满足 $z_3 \neq 0$ 的点 $[0 : 0 : 0 : z_3 : z_4 : z_5]$ 的轨道同构于 $\mathbb{A}^1$。对于任意 z_4, z_5，满足 $z_4 \neq 0$ 或 $z_5 \neq 0$ 的不动点为 $[0 : 0 : 0 : 0 : z_4 : z_5]$。$\mathbb{G}_a^4$- 作用的不动点集再次同构于 $\mathbb{P}^1$。

自然会想到，缩小理想 I 的构造是否取决于理想 I 的生成元。在我们的例子中，可以用 $x^4 - xy^2, x^3 y - y^3$ 替换 $x^3 - y^2$。我们得到理想

$$\hat{I} = (xy, x^4 - xy^2, x^3 y - y^3) = (xy, x^4, y^3).$$

这给出了代数

$$\hat{A}_2 = \mathbb{K}[x, y]/(xy, x^4, y^3)$$

及其生成子空间 $\hat{} U_2 = \langle x, y, x^2, x^3 - y^2 \rangle$。

证明代数不同构。事实上，假设存在一个同构 $\hat{} \varphi \colon A_2 \to A_2$，其定义为

$$x \mapsto a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 y^2,$$
$$y \mapsto b_1 x + b_2 y + b_3 x^2 + b_4 x^3 + b_5 y^2.$$

由于 $x^3 = y^2$ 属于 A_2，我们必有

$$a_1^3 x^3 = b_1^2 x^2 + b_2^2 y^2$$

属于 $\hat{} A_2$，因此 $a_1 = b_1 = b_2 = 0$。但此时元素 $\varphi(y)$ 属于 $\hat{}\mathfrak{m}_2^2$，这就导致矛盾。

我们可以看出，通过缩小关系理想的构造得到的 H-对，可能取决于该理想生成元的顺序。

3. Existence of non-degenerate hypersurfaces admitting an induced additive action.

本节中，我们证明以下命题。

命题 3.1. 对任意满足 $2 \leq d \leq n$ 的正整数 n 和 d，存在一个次数为 d 的非退化超曲面，它位于 $\mathbb{P}^n$ 中并且承认诱导加法作用。

证明. 只需给出一个 Gorenstein 代数 A 的例子，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，满足 $\dim A = n+1$ 且 $\mathrm{Soc}A = \mathfrak{m}^d$，其中任意 n 和 d 均满足命题的陈述。我们的构造取决于数 $n-d$ 的奇偶性。

假设 $n-d$ 为偶数。那么对于某个非负整数 k，有 $d = n-2k$。若 k 为正数，令 $A_{n,\,k}$ 为由生成元 S_1、S_2、……、S_{2k+1} 及以下关系所定义的交换结合含幺代数：

$$S_iS_j = 0 \text{ for all } i,j,\ 1 \le i \le j \le 2k+1,$$
$$\text{except } (i,j) = (1,2),\ (3,4),\ \ldots,\ (2k-1,2k),\ (2k+1,2k+1), \text{ and}$$
$$S_1S_2 = S_3S_4 = \ldots = S_{2k-1}S_{2k} = S_{2k+1}^{n-2k}.$$

显然，元素 1、S_1、……、S_{2k}、S_{2k+1}、S_{2k+1}^2、$\ldots S_{2k+1}^{n-2k}$ 构成 $A_{n,\,k}$ 的一组基，因此 $\dim A_{n,\,k} = n+1$。$A_{n,\,k}$ 的极大理想为 $m_{n,\,k}^A = \langle S_1$、……、$S_{2k}$、$S_{2k+1}$、$S_{2k+1}^2$、$\ldots S_{2k+1}^{n-2k}\rangle$。我们来计算理想 $\mathrm{Soc}A_{n,\,k}$。假设

$$a = x_1S_1 + x_2S_2 + \ldots x_{2k}S_{2k} + y_1S_{2k+1} + y_2S_{2k+1}^2 + \ldots + y_{n-2k}S_{2k+1}^{n-2k} \in \mathrm{Soc}A.$$

由于对所有 $i = 1, 2, \ldots, 2k, 2k+1$，$S_ia = 0$ 成立，将 a 依次乘以 $S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$，我们得到

$$x_2 = x_1 = \ldots = x_{2k} = x_{2k-1} = 0.$$

接下来，依次将 a 乘以 $S_{2k+1}^{n-2k-1}, S_{2k+1}^{n-2k-2}, \ldots, S_{2k+1}$，我们得到

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_{n-2k-1} = 0.$$

这意味着 $\mathrm{Soc}A = \langle S_{2k+1}^{n-2k}\rangle$。还需指出，$(\mathfrak{m}_{n,k}^A)^{n-2k} = \langle S_{2k+1}^{n-2k}\rangle$。这是因为 $n-2k \ge 2$，而任何形如 $S_{i_1}S_{i_2}\ldots S_{i_{n-2k}}$ 的元素要么为零（当 $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{n-2k}}$ 中至少有两个元素的乘积为零时，就会出现这种情况；特别地，当 $n-2k > 2$ 且 $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{n-2k}}$ 并非全都等于 S_{2k+1} 时，就会出现这种情况），要么 S_{2k+1}^{n-2k}（当 $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_{n-2k}}$ 全都等于S_{2k+1}，或者当 $n-2k = 2$ 且对于某个 $l = 1,\ 2, \ldots, k$，$(i_1, i_2) = (2l-1, 2l)$ 时，就会出现这种情况）。

我们需要分别处理 $k = 0$ 的情形，即 $d = n$。定义 $A_{n,0}$ 为由一个元素 S 生成、满足关系 $S^{n+1} = 0$ 的代数。于是 $A_{n,0}$ 同构于$\mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$，显然 $\dim A_{n,0} = n+1$ 且根基 $\mathrm{Soc}A_{n,0} = \langle x^n\rangle$，因此代数 $A_{n,0}$满足我们的条件。

现在，假设 $n-d$ 为奇数，即 $d = n-2k+1$，其中 k 是不超过 $[\frac{n-1}{2}]$ 的正整数。令 $B_{n,k}$ 为由生成元$S_1, S_2, \ldots, S_{2k}$ 生成、满足以下关系的交换结合含幺代数：

$$S_iS_j = 0 \text{ for all } i,j,\ 0 \le i \le j \le 2k,$$
$$\text{except } (i,j) = (1,2),\ (3,4),\ \ldots,\ (2k-3,2k-2),\ (2k-1,2k-1),\ (2k,2k), \text{ and}$$
$$S_1S_2 = S_3S_4 = \ldots = S_{2k-3}S_{2k-2} = S_{2k-1}^2 = S_{2k}^{n-2k+1}.$$

元素 $1, S_1, \ldots, S_{2k-1}, S_{2k}, S_{2k}^2, \ldots S_{2k}^{n-2k+1}$ 显然构成 $B_{n,k}$ 的一组基，因此 $\dim B_{n,\,k} = n+1$。$B_{n,k}$ 的极大理想为 $\mathfrak{m}_{n,k}^B = \langle S_1, \ldots, S_{2k-1}, S_{2k}, S_{2k}^2, \ldots S_{2k}^{n-2k+1}\rangle$。

根基$B_{n,\,k} = \langle S_{2k}^{n-2k}\rangle$ 和 $(m_{n,\,k}^B)^{n-2k} = \langle S_{2k}^{n-2k}\rangle$ 的证明与偶数 $n-d$ 的情形相同。至此，命题 3.1 得证。

□

一个自然的问题是，能否唯一确定在 $\mathbb{P}^n$ 中具有诱导加法作用的 d 次超曲面。一般而言，答案是否定的，下面的例子将说明这一点。不过，对于 $d=2$ 和 $d=n$，结论成立。事实上，次数为 2 的非退化超曲面是光滑二次超曲面，它在同构意义下是唯一的。对于 $d=n$，这样的超曲面对应于一个 H-对 (A,U)，其中 A 是维数为 $n+1$ 的局部有限维 Gorenstein 代数，其极大理想为 $\mathfrak{m}$，并且满足 $\mathfrak{m}^n \neq 0$ 和 $\mathfrak{m}^{n+1}=0$。考虑 A 的子空间序列：

$$A \supseteq \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{m}^{n-1} \supseteq \mathfrak{m}^n \supseteq 0.$$

这个序列中的子空间维数严格递减。由于 $\dim A = n+1$，它每一步必定恰好递减 1。特别地，$\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$。现在，中山引理表明，每个元素 $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ 都生成代数 A。因此，代数 A 同构于某个幂零理想 $I \subseteq \mathbb{K}[x]$ 对应的 $\mathbb{K}[x]/I$。然而，$\mathbb{K}[x]$ 中任意非零幂零理想都具有形式 (x^k)，其中 k 是某个正整数。由于 $\dim A = n$，我们得出 $A \cong \mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$。接下来要证明，$H$-对 (A,U) 不依赖于与根基 $\operatorname{Soc} A = \langle x^n \rangle$ 互补的子空间 $U \subseteq \mathfrak{m}$ 的选取。本节最后，我们证明代数 $A_5 = \mathbb{K}[x,y,z]/(x^2, y^2, xz, yz, xy - z^3)$ 也具有相同性质。对于代数 $A = \mathbb{K}[x]/(x^{n+1})$，证明类似。证明并不困难，但技术性较强且相当繁琐，因此这里不予赘述。

例如，我们明确计算了所有维数为 6 的 Gorenstein 局部代数所对应的射影超曲面的方程。在 [3, 第 1 章1], 中，给出了维数不超过 6 的局部有限维代数的完整列表。维数为 6 的局部代数中，有 25 个两两不同构，其中有 6 个是 Gorenstein 局部代数。它们如下：

№	代数	d
1	$A_1 = \mathbb{K}[x]/(x^6)$	5
2	$A_2 = \mathbb{K}[x,y]/(xy, x^4 - y^2)$	4
3	$A_3 = \mathbb{K}[x,y]/(xy, x^3 - y^3)$	3
4	$A_4 = \mathbb{K}[x,y]/(x^3, y^2)$	3
5	$A_5 = \mathbb{K}[x,y,z]/(x^2, y^2, xz, yz, xy - z^3)$	3
6	$A_6 = \mathbb{K}[x_1,x_2,x_3,x_4]/(x_i^2 - x_j^2, x_i x_j, i \neq j)$	2

注意，代数 A_1、A_2、A_5 和 A_6 是我们在命题 3.1 的证明中构造的代数。

让我们明确计算与这些代数相对应的 $\mathbb{P}^5$ 中非退化超曲面的方程（对于生成子空间 U_i 的某种选取）。与之前一样，π_i 表示典范投影 $\mathfrak{m}_i \to \mathfrak{m}_i/U_i$。

(1) 我们从 $A_1 = \mathbb{K}[x]/(x^6)$ 开始。A_1 的极大理想为 $\mathfrak{m}_1 = \langle x, x^2, x^3, x^4, x^5 \rangle$，底为根基 $A_1 = \langle x^5 \rangle$。选择生成子空间 $U_1 = \langle x, x^2, x^3, x^4 \rangle$。相应超曲面 X_1 的方程计算如下：

$$\pi_1(\ln(1+t_1x+t_2x^2+t_3x^3+t_4x^4+t_5x^5))=\pi_1(t_1x+t_2x^2+\ldots+t_5x^5-$$
$$-\frac{(t_1x+t_2x^2+\ldots+t_5x^5)^2}{2}+\frac{(t_1x+t_2x^2+\ldots+t_5x^5)^3}{3}-\frac{(t_1x+t_2x^2+\ldots+t_5x^5)^4}{4}+$$
$$+\frac{(t_1x+t_2x^2+\ldots+t_5x^5)^5}{5})=t_5-t_1t_4-t_2t_3+t_1^2t_3+t_1t_2^2-t_1^3t_2+\frac{t_1^5}{5},$$

因此， X_1 的齐次方程为

$$f_1(z)=z_0^4z_5-z_0^3z_1z_4-z_0^2z_2z_3+z_0^2z_1^2z_3+z_0^2z_1z_2^2-z_0z_1^3z_2+\frac{z_1^5}{5}=0.$$

我们来求出 X_1 的奇异轨迹。 X_1 上 $\mathbb{G}_a^4$ 作用的开轨道为

$$\{[z_0:z_1:z_2:z_3:z_4:z_5]\colon z_0\neq 0\},$$

因此，对于 X_1 的任意奇异点 $[z_0\colon z_1\colon z_2\colon z_3\colon z_4\colon z_5]$，都有 $z_0=0$。容易看出，等式 $\frac{\partial f_1}{\partial z_i}=0$、$i=1$、2、3、4、5 成立，当且仅当 $z_1=0$。由此得到， X_1 的奇异轨迹为以下子空间:

$$\{[z_0:z_1:z_2:z_3:z_4:z_5]\colon z_0=z_1=0\}.$$

众所周知，射影超曲面是正规的，当且仅当其奇异轨迹的余维至少为 2（参见 [8, 第 2] 章第 5.1 节）。由于 X_1 的奇异轨迹在 X_1 中的余维为 1，超曲面 X_1 不是正规超曲面。

(2) $A_2=\mathbb{K}[x,y]/(xy,x^4-y^2)$. A_2 的极大理想为 $\mathfrak{m}_2=\langle x,y,x^2,x^3,x^4\rangle$，底为 $\mathrm{Soc}\,A_2=\langle x^4\rangle$。选取生成子空间 $U_2=\langle x,y,x^2,x^3\rangle$。现在，我们有

$$\pi_2(\ln(1+t_1x+t_2y+t_3x^2+t_4x^3+t_5x^4))=\pi_2(t_1x+t_2y+\ldots+t_5x^4-$$
$$-\frac{(t_1x+t_2y+\ldots+t_5x^4)^2}{2}+\frac{(t_1x+t_2y+\ldots+t_5x^4)^3}{3}-\frac{(t_1x+t_2y+\ldots+t_5x^4)^4}{4})=$$
$$=t_5-t_1t_4-\frac{t_2^2}{2}-\frac{t_3^2}{2}+t_1^2t_3-\frac{t_1^4}{4},$$

因此，相应超曲面 X_2 的齐次方程为

$$z_0^3z_5-z_0^2z_1z_4-\frac{z_0^2z_2^2}{2}-\frac{z_0^2z_3^2}{2}+z_0z_1^2z_3-\frac{z_1^4}{4}=0.$$

容易看出， X_2 的奇异轨迹为

$$\{[z_0:z_1:z_2:z_3:z_4:z_5]\colon z_0=z_1=0\}.$$

由于它在 X_2 中的余维为 1，因此超曲面 X_2 不正规。

(3) $A_3 = \mathbb{K}[x,y]/(xy, x^3 - y^3)$。 A_3 的极大理想为 $\mathfrak{m}_3 = \langle x, y, x^2, y^2, x^3\rangle$，其底为根基 $A_3 = \langle x^3\rangle$。选取生成子空间 $U_3 = \langle x, y, x^2, y^2\rangle$。我们有

$$\pi_3(\ln(1 + t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4y^2 + t_5x^3)) = \pi_3(t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4y^2 + t_5x^3 - \\ - \frac{(t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4y^2 + t_5x^3)^2}{2} + \frac{(t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4y^2 + t_5x^3)^3}{3}) = \\ = t_5 - t_1t_3 - t_2t_4 + \frac{t_1^3}{3} + \frac{t_2^3}{3},$$

因此，对应射影超曲面 X_3 的齐次方程为

$$z_0^2z_5 - z_0z_1z_3 - z_0z_2z_4 + \frac{z_1^3}{3} + \frac{z_2^3}{3} = 0.$$

X_3 的奇异轨迹为

$$\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \colon z_0 = z_1 = z_2 = 0\}.$$

它在 X_3中的余维为 2，因此超曲面 X_3 是正规的。

(4) $A_4 = \mathbb{K}[x,y]/(x^3, y^2)$。 A_4的极大理想为 $\mathfrak{m}_4 = \langle x, y, x^2, xy, x^2y\rangle$，底为 $\mathrm{Soc}A_4 = \langle x^2y\rangle$。取生成子空间 $U_4 = \langle x, y, x^2, xy\rangle$。于是

$$\pi_4(\ln(1 + t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4xy + t_5x^2y)) = \pi_4(t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4xy + t_5x^2y - \\ - \frac{(t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4xy + t_5x^2y)^2}{2} + \frac{(t_1x + t_2y + t_3x^2 + t_4xy + t_5x^2y)^3}{3}) = \\ = t_5 - t_1t_4 - t_2t_3 + t_1^2t_2,$$

因此，对应射影超曲面 X_4 的齐次方程为

$$z_0^2z_5 - z_0z_1z_4 - z_0z_2z_3 + z_1^2z_2 = 0.$$

X_4 的奇异轨迹是

$$\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \colon z_0 = z_1 = 0\}.$$

它在 X_4 中的余维为 1，因此超曲面 X_4 不是正规环。

(5) $A_5 = \mathbb{K}[x,y,z]/(x^2, y^2, xz, yz, xy - z^3)$. A_5的极大理想为 $\mathfrak{m}_5 = \langle x, y, z, z^2, z^3\rangle$，底为根基$A_5 = \langle z^3\rangle$。取生成子空间 $U_5 = \langle x, y, z, z^2\rangle$。于是我们有

$$\pi_5(\ln(1 + t_1x + t_2y + t_3z + t_4z^2 + t_5z^3)) = \pi_5(t_1x + t_2y + t_3z + t_4z^2 + t_5z^3 - \\ - \frac{(t_1x + t_2y + t_3z + t_4z^2 + t_5z^3)^2}{2} + \frac{(t_1x + t_2y + t_3z + t_4z^2 + t_5z^3)^3}{3} = t_5 - t_1t_2 - t_3t_4 + \frac{t_3^3}{3},$$

因此 h 对应射影超曲面的齐次方程 X_5 为

$$z_0^2z_5 - z_0z_1z_2 - z_0z_3z_4 + \frac{z_3^3}{3} = 0.$$

X_5 的奇异轨迹为

$$\{[z_0 : z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5] \colon z_0 = z_3 = 0\}.$$

它在 X_5 中的余维为 1，因此超曲面 X_5 不正规。

(6) $A_6 = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]/(x_i^2 - x_j^2, x_ix_j, i \neq j)$。$A_6$ 的极大理想为 $\mathfrak{m}_6 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_1^2\rangle$，底为 $\mathrm{Soc}A_6 = \langle x_1^2\rangle$。取生成子空间 $U_6 = \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$。于是

$$\pi_6(\ln(1 + t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 + t_5x_1^2)) = \pi_6(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 + t_5x_1^2 - \\ - \frac{(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4 + t_5x_1^2)^2}{2}) = t_5 - \frac{t_1^2}{2} - \frac{t_2^2}{2} - \frac{t_3^2}{2} - \frac{t_4^2}{2},$$

因此，相应射影超曲面 X_6 的齐次方程为

$$z_0z_5 - \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} - \frac{z_3^2}{2} - \frac{z_4^2}{2} = 0.$$

超曲面 X_6 是光滑二次超曲面，因此自动正规 .

总之，我们得到了以下六个非退化且两两不同构、允许诱导加法作用的 $\mathbb{P}^5$ 中的射影超曲面:

方程	次数	奇异轨迹	是否正规?
$z_0^4z_5 - z_0^3z_1z_4 - z_0^2z_2z_3 + z_0^2z_1^2z_3 + z_0^2z_1z_2^2 - z_0z_1^3z_2 + \frac{1}{5}z_1^5 = 0$	5	$\{z_0 = z_1 = 0\}$	No
$z_0^3z_5 - z_0^2z_1z_4 - \frac{1}{2}z_0^2z_2^2 - \frac{1}{2}z_0^2z_3^2 + z_0z_1^2z_3 - \frac{1}{4}z_1^4 = 0$	4	$\{z_0 = z_1 = 0\}$	No
$z_0^2z_5 - z_0z_1z_3 - z_0z_2z_4 + \frac{1}{3}z_1^3 + \frac{1}{3}z_2^3 = 0$	3	$\{z_0 = z_1 = z_2 = 0\}$	Yes
$z_0^2z_5 - z_0z_1z_4 - z_0z_2z_3 + z_1^2z_2 = 0$	3	$\{z_0 = z_1 = 0\}$	No
$z_0^2z_5 - z_0z_1z_2 - z_0z_3z_4 + \frac{1}{3}z_3^3 = 0$	3	$\{z_0 = z_3 = 0\}$	No
$z_0z_5 - \frac{1}{2}z_1^2 - \frac{1}{2}z_2^2 - \frac{1}{2}z_3^2 - \frac{1}{2}z_4^2 = 0$	2	$\emptyset$	Yes

我们看到，对于 $d = 2,4,5$，在 $\mathbb{P}^5$ 中存在唯一一个（在同构意义下）次数为 d 、容许诱导加法作用的非退化超曲面；而对于 $d = 3$ ，此类超曲面有三个同构类。

严格来说，我们目前还不能说这些就是 $\mathbb{P}^5$中所有具有诱导加法作用的非退化超曲面。问题在于，对于不同的、与 $\mathrm{Soc}A$互补的子空间 U ，形如（A， U）的 H-对可能并不等价。不过，通过显式计算可以证明，对于代数 A_1、A_2、 A_3、 A_4、 A_5、 A_6，这种情况不会发生。举例来说，我们来考察代数 A_5。只需证明

对于任意与 $\langle z^3\rangle$互补的超平面 $U_5' \subseteq \mathfrak{m}_5$， H-对（A_5， U_5）都等价于任意 H-对（A_5， U_5'）。任何这样的子空间 U_5' 都由形如以下形式的元素构成

$$t_1x + t_2y + t_3z + t_4z^2 + t_5z^3$$

满足方程

$$p_1t_1 + p_2t_2 + p_3t_3 + p_4t_4 + t_5 = 0$$

对于某些 $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{K}$。我们需要证明存在一个代数自同构$\varphi$： $A_5 \to A_5$，将 U_5映至 U_5'。我们尝试寻找如下形式的同构

$$x \mapsto x + a_1z^2 + a_2z^3,$$
$$y \mapsto y + b_1z^2 + b_2z^3,$$
$$z \mapsto z + c_1z^2 + c_2z^3$$

对于某些 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{K}$。

显然，关系理想 $I_5 = (x^2, y^2, xz, yz, xy - z^3)$ 在任何这样的 φ 作用下都映到自身，因此 φ 是从 A_5 到自身的良定义同态。我们只需确保子空间 U_5 在 φ作用下映到 U_5'。回顾一下，$U_5 = \langle x, y, z, z^2\rangle$。由于 $\varphi(z^2) = z^2 + 2c_1z^3$，我们必须有

$$p_4 + 2c_1 = 0, \ c_1 = -\frac{p_4}{2}.$$

现在，条件 $\varphi(x)\ \varphi(y)\ \varphi(z) \in U_5'$ 成立，当且仅当

$$p_1 + a_1p_4 + a_2 = p_2 + b_1p_4 + b_2 = p_3 + c_1p_4 + c_2 = 0.$$

我们可以任意选取 a_1、 b_1，然后 a_2、 b_2、 c_2 便唯一确定。

为完成证明，只需证明 φ 是双射。然而，这些元素

$$x + a_1z^2 + a_2z^3, y + b_1z^2 + b_2z^3, z + c_1z^2 + c_2z^3$$

构成了 $\mathfrak{m}_5/\mathfrak{m}_5^2$ 作为 $\mathbb{K}$ 上向量空间的一个基。因此，根据中山引理，这三个元素生成 A_5。由此可知， φ 是满射，故由维数关系可知它是双射。

使用相同的技巧，可以证明，对于任意 $i = 1$（其中 2，...，6），对应于 (A_i, U) 的超曲面不依赖于 U 的选取（同样，前提是 $U \subseteq \mathfrak{m}_i$ 与 $\mathrm{Soc}A_i$ 互补）。因此，在 $\mathbb{P}^5$ 中，模等价意义下恰有六个允许加法作用的非退化超曲面。

References

[1] Ivan Arzhantsev 和 Andrey Popovskiy。《射影超曲面上的加法作用》。载于：《双有理几何与仿射几何中的自同构》，Springer 数学统计丛书，79，施普林格，2014，17-33[2] Ivan Arzhantsev 和 Elena Sharoyko。《Hassett–Tschinkel 对应：模态与射影超曲面》。代数杂志 348 (2011)，第 1 期，217-232[3] Ivan Arzhantsev 和 Yulia Zaitseva。《仿射空间的等变完备化》。俄罗斯数学调查。77 (2022)，第 4 期，571–650[4] Viktoriia Borovik、Sergey Gaifullin 和 Anton Trushin。《光滑射影二次曲面上的交换作用》。交换代数。50 (2022)，第 12 期，5468-5476[5] Brendan Hassett 和 Yuri Tschinkel。《 $\mathbb{G}_a^n$的等变紧化几何》。国际数学研究通报 IMRN 1999 (1999)，第 22 期，1211-1230

[6] Yingqi Liu。《余秩二超二次曲面上的加法作用》。Electron. Res. Arch. 30 (2022)，第 1 期，1-34[7] Anton Shafarevich。《环面射影超曲面上的加法作用》。Results Math. 76 (2021)，第 3 期，文章编号 145[8] Igor Shafarevich。《基础代数几何 /I》。R. Shafarevich 著；K. A. Hirsch 从俄语译出。施普林格出版社，柏林；纽约，1974[9] Elena Sharoyko。《Hassett-Tschinkel 对应与二次曲面的自同构》。Sb. Math. 200 (2009)，第 11 期，1715–1729

HSE University, Faculty of Computer Science, Pokrovsky Boulevard 11, Moscow, 109028Russia电子邮箱：ivbeldiev@gmail.com