有向图中方位等价的刻画 ⋆

Zhiyong Sun * Shiyu Zhao ** Daniel Zelazo ***

*埃因霍温理工大学（TU/e）电气工程系，埃因霍温，荷兰（电子邮箱：z.sun@tue.nl, sun.zhiyong.cn@gmail.com）

**西湖大学工程学院，中国杭州 310024（电子邮箱：zhaoshiyu@westlake.edu.cn）。

***以色列理工学院航空航天工程学院，以色列海法。（电子邮箱：dzelazo@technion.ac.il）。

arXiv:2303.05576v1 [eess.SY] 9 Mar 2023

摘要：本文研究有向图中的方位等价。首先，我们基于方位刚性矩阵与方位拉普拉斯矩阵之间的核等价关系，给出方位等价的强化定义。随后，我们提出若干条件，用于刻画有向无环图和含环图中的方位等价。这些条件涉及有向方位编队所对应的方位拉普拉斯矩阵的谱和零空间。对于有向无环图，相应方位拉普拉斯矩阵的所有特征值均为实数且非负；而对于含环的有向图，方位拉普拉斯矩阵可能具有负实部的特征值。文中还给出若干方位等价和方位非等价编队的示例，以说明这些条件。

关键词：方位刚性；方位等价；基于方位的编队；有向图。

1. 引言

近年来，人们对网络化多智能体系统中基于方位的分布式控制与估计日益关注，例如基于方位的编队控制（Zhao and Zelazo（2015a）；Tron 等（2016）；Kari mian 和 Tron（2021）；Tang 等（2022））以及网络定位（Lin 等（2016）；Arrigoni 和 Fusiello（2018））。基于视觉的传感器不断发展，使人们能够感知空间分布的智能体之间的相对方向，从而推动了方位测量在网络化系统中的应用。这与相对位置或距离测量形成对比，后两者往往成本更高或可靠性较低。

支撑这些基于方位的应用的关键图概念之一是方位刚性理论。Zhao and Zelazo（2015b）对此进行了深入讨论，重点关注无向图。方位刚性理论为研究多智能体系统的基于方位的编队控制提供了强有力的框架，其中期望的目标形状由恒定的智能体间方位指定（Zhao and Zelazo（2019）；Tang 等（2021））。与基于位移（Oh 等人（2015））或基于距离（Sun 等人（2017））的方法相比，基于方位的编队控制为编队尺度控制问题提供了一种自然的解决方案：编队形状保持不变，而智能体间距离发生变化。基于方位的编队控制中一个尚未得到彻底解决的根本问题是如何在有向图上实现期望的方位编队。现有关于基于方位的编队或定位的大多数研究都假设底层图是无向图（Zhao and Zelazo（2019）），或满足特定的有向图结构（Tang 等（2021））。此外，现有的基于方位的编队控制律在有向图上也可能变得不稳定。

作为解决有向图中基于方位的编队控制这一一般问题的关键一步，Zhao 和 Zelazo（2015a）首次研究了有向图中方位编队的方位持久性。方位持久性的概念承袭了 Hendrickx 等人（2007）和 Anderson 等人（2008）最初提出的距离刚性与持久性研究思路。然而，在 Zhao 和 Zelazo（2015a）中，基于方位的持久性定义涉及（针对无向图的）方位刚性矩阵与（针对有向图的）方位拉普拉斯矩阵之间的核等价。为区分这些概念，本文将这一条件称为方位等价。然而，与距离持久性的全面发展及其在基于距离的多智能体控制中的应用不同，方位等价的条件尚未得到充分理解，其刻画仍是一个开放问题。本文遵循 Zhao 和 Zelazo（2015a）的研究，旨在提出若干条件来刻画有向图中的方位等价。这些条件涉及相关方位拉普拉斯矩阵的谱与零空间，并分别针对含有或不含有向环的基于方位的有向图进行阐述。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾以下方面的关键概念和预备知识：

*Zhiyong Sun 的工作部分得到了埃因霍温人工智能系统研究所（EAISI）（荷兰埃因霍温）的一项启动基金资助。

图论、方位刚性以及有用的矩阵结果。第 3 节介绍方位等价的概念，并推导方位拉普拉斯矩阵的一个有用公式。第 4 节和第 5 节分别给出若干关键条件，用于刻画无环和有环有向图的方位等价。第 6 节总结全文。

2. 预备知识

2.1 符号说明

本文所用符号均为标准记法。我们用 $\mathrm{diag}(A_i) \triangleq \mathrm{blkdiag}\{A_1,\dots,A_n\} \in \mathbb{R}^{np\times nq}$ 表示给定 $A_i \in \mathbb{R}^{p\times q}$ 的分块对角矩阵，其中 $i=1,\dots,n$。设 Null(·) 和 Range(·) 分别表示矩阵的零空间和值域，dim(·) 表示线性空间的维数。用 $I_d \in \mathbb{R}^{d\times d}$ 表示单位矩阵，并用$\mathbf{1}_n$，$[1\ \cdots\ 1]^{\mathrm{T}}$ 表示（若省略下标 1，则向量维数应可由上下文确定）。令 $\|\cdot\|$表示向量的欧几里得范数或矩阵的谱范数，$\otimes$ 表示克罗内克积。对于任意非零向量 $x \in \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$，定义投影矩阵 $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ 如下：

$$P(x) \triangleq I_d - \frac{x}{\|x\|}\frac{x^{\mathrm{T}}}{\|x\|}. \tag{1}$$

为简化记号，我们也将 $P_x = P(x)$ 记作。

2.2 图论预备知识

考虑一个有向图，它有 n 个顶点和 m 条边，记为 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$。顶点集 $\mathcal{V}=\{1,2,\dots,n\}$表示群体中智能体的索引，边集 $\mathcal{E}\subset\mathcal{V}\times\mathcal{V}$表示智能体之间的互连或邻接关系。若 $(i,j)\in\mathcal{E}$，则称智能体 i 可以“看到”智能体 j，这意味着智能体 i 可以获取智能体 j的相对信息。对于智能体 i，其邻居集 $\mathcal{N}_i$ 定义为 $\mathcal{N}_i := \{j\in\mathcal{V}\colon (i,j)\in\mathcal{E}\}$。有向图 $\mathcal{G}$ 的关联矩阵 $H=\{h_{ij}\}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 定义如下：若第 k 条边进入节点 i，则为 $h_{ki}=1$；若第k 条边离开节点 i，则为 $h_{ki}=-1$；否则为 $h_{ki}=0$。此外，其拉普拉斯矩阵 $L(\mathcal{G})=\{L_{ij}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 定义为$L_{ii}=|\mathcal{N}_i|$；若 $(i,j)\in\mathcal{E}$，则为 $L_{ij}=-1$；若 $(i,j)\notin\mathcal{E}$，则为 $L_{ij}=0$。众所周知，秩$(L(\mathcal{G}))=n-1$，且 0 是 $L(\mathcal{G})$ 的单特征值，当且仅当有向图$\mathcal{G}$ 包含一棵（有向）生成树（参见例如 Mesbahi and Egerstedt (2010)）。

2.3 方位刚性预备知识

方位刚性理论在分析基于方位的分布式编队控制和网络定位问题中发挥着关键作用。本节回顾 Zhao and Zelazo（2015b）提出的方位刚性理论中的重要概念和结果。

给定 $\mathbb{R}^d$ $(n\geq 2,d\geq 2)$ 中的有限点集 n $\{p_i\}_{i=1}^n$，记作 $p=[p_1^{\mathrm{T}}\ \cdots\ p_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{dn}$。$\mathbb{R}^d$ 中的一个编队，记作 $\mathcal{G}(p)$，是一个有向图 $\mathcal{G}=(\mathcal{V},\mathcal{E})$ 及 p，其中图中的顶点 $i\in\mathcal{V}$ 映射到点 p_i。对于编队 $\mathcal{G}(p)$，分别定义边向量和方位如下：

$$e_{ij}\triangleq p_j-p_i,\quad g_{ij}\triangleq e_{ij}/\|e_{ij}\|,\quad \forall (i,j)\in\mathcal{E}.$$

方位 g_{ij} 是一个单位向量。

定义 1（方位等价编队）。如果对于所有 $(i,j)\in\mathcal{E}$，$\mathcal{G}(p)$ 和 $\mathcal{G}(p')$ 这两个编队满足 $P_{g_{ij}}g'_{ij}=0$，则它们方位等价。

根据定义 1，方位等价编队的邻居间方位彼此平行。设 $|\mathcal{E}|=m$，并将所有有向边从 1 到 m 编号。将边向量和方位重新表示为 e_k 和 g_k，$e_k/\|e_k\|$，$\forall k\in\{1,\dots,m\}$。令 $e=[e_1^{\mathrm{T}}\ \cdots\ e_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $g=[g_1^{\mathrm{T}}\ \cdots\ g_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$。注意，$e$ 满足 $e=Hp$，其中 $H=H\otimes I_d$，且 H 是图 $\mathcal{G}$ 的关联矩阵。定义方位函数 $F_B\colon \mathbb{R}^{dn}\to\mathbb{R}^{dm}$ 如下：

$$F_{\mathrm{B}}(p)\triangleq [g_1^{\mathrm{T}},\cdots,g_m^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.$$

方位函数描述编队中的所有方位。方位刚性矩阵定义为方位函数的雅可比矩阵，

$$R_{\mathrm{B}}(p)\triangleq\frac{\partial F_{\mathrm{B}}(p)}{\partial p}\in\mathbb{R}^{dm\times dn}. \tag{2}$$

设 δp 是 p的一个变分。若 $R_{\mathrm{B}}(p)\delta p=0$，则称 δp 为 $\mathcal{G}(p)$的无穷小方位运动。

定义2（无穷小方位刚性）。如果编队的所有无穷小方位运动都是平凡的（即整个编队的平移和缩放），则称该编队具有无穷小方位刚性。

引理1（Zhao and Zelazo (2015b)）。对于任意编队$\mathcal{G}(p)$，在式（2）中定义的方位刚性矩阵满足

(1) $R_B(p)=\mathrm{diag}\,(P_{g_k}/\|e_k\|)\,\bar{H}$;
(2) $\mathrm{rank}(R_B)\leq dn-d-1$，张成空间$\{\mathbf{1}\otimes I_d,p\}\subseteq$零空间$(R_B)$。

定理1（Zhao and Zelazo (2015b)）。对于任意编队 $\mathcal{G}(p)$，以下陈述等价：

(1) $\mathcal{G}(p)$ 是无穷小方位刚性的；(2) 根据邻居间方位，可以唯一确定 $\mathcal{G}(p)$，但存在平移和缩放因子的差异；(3) $\mathrm{rank}(R_B)=dn-d-1$；(4) $\mathrm{Null}(R_B)=\mathrm{span}\{\mathbf{1}\otimes I_d,p\}$。

2.4 有用的矩阵结果

本文将频繁使用以下矩阵结果，以刻画基于方位的编队的方位刚性/等价性和稳定性。

引理2。（矩阵乘积的零空间，Sun 等人（*2017*）） 考虑 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $B\in\mathbb{R}^{n\times k}$ 两个矩阵，以及矩阵乘积 $C=AB$。则有 $\dim(\mathrm{Null}(C))=\dim(\mathrm{Null}(B))+\dim((\mathrm{Null}(A)\cap\mathrm{Range}(B))$. 特别地，当且仅当 $\mathrm{Null}(A)\cap\mathrm{Range}(B)=\{0\}$ 时，成立 $\mathrm{Null}(C)=\mathrm{Null}(B)$。

引理 3。（分块三角矩阵，Harville（2008））考虑一个实值分块上三角方阵 A，其第 i 个对角方块记为 A_{ii}。那么，A 的特征值是各对角块 A_{ii} 的特征值集合的并集；即，有 $\lambda(A)=\bigcup_{i=1}^n\lambda(A_{ii})$。

引理4。（投影矩阵的性质，Bernstein（2018））对于式 (1) 中定义的投影矩阵 P_x，有 $P_x^{\mathrm{T}}=P_x$、$P_xP_x=P_x$，且 P_x 为半正定。此外，零空间$(P_x)=$张成空间$\{x\}$，且 P_x 的特征值为 $\{0,1^{(d-1)}\}$。两个非零向量 x、$y\in\mathbb{R}^d$ 平行，当且仅当 $P_xy=0$（或等价地，$P_yx=0$）。

引理 5。（投影矩阵之和）考虑一组投影矩阵 $P_i(x_i)$，它们由式 (1) 定义，并与非零向量 $x_i \in \mathbb{R}^d$ $(d \geq 2)$ 相关联。则有：

(1) 对于矩阵和 $P_i(x_i) + P_j(x_j)$，如果向量x_i 和 x_j 平行（即线性相关），那么 Null$(P_i(x_i) + P_j(x_j))$ =张成空间 $\{x_i\}$，且 $P_i(x_i) + P_j(x_j)\}$ 为半正定矩阵。(2) 否则，如果向量 x_i 和 x_j 线性无关，那么 Null$(P_i(x_i) + P_j(x_j))$ $= \{0\}$，且矩阵和 $P_i(x_i) + P_j(x_j)$ 为正定矩阵。(3) 对于矩阵和 $P_i(x_i) + P_j(x_j) + \cdots + P_k(x_k)$，如果所有向量 x_i, $x_j, \cdots, x_k$ 都平行，那么 Null$(P_i(x_i) + P_j(x_j) + \cdots + P_k$ $(x_k))$ =张成空间$\{x_i\}$.(4) 如果列表中至少有两个向量不平行，则矩阵和 $P_i(x_i) + P_j(x_j) + \cdots + P_k(x_k)$ 为正定矩阵。

上述引理的证明将在本文的期刊版本中给出。

3. 方位等价的概念

方位等价的发展源于有向图中的基于方位的编队控制。基于方位的编队控制问题给定一组期望的智能体间方位，g_{ij}^*, 其目标是设计一种分布式控制，仅利用来自邻居智能体的相对位置测量来驱动智能体形成由这些 g_{ij}^*指定的编队，即 $\lim_{t\to\infty} g_{ij}(t) = g_{ij}^*$。Zhao and Zelazo（2015a）提出了以下控制方案,

$$\dot{p}_i(t) = -\sum_{j\in\mathcal{N}_i} P_{g_{ij}^*}\left(p_i(t) - p_j(t)\right), \quad i \in \mathcal{V}, \tag{3}$$

其中 $P_{g_{ij}^*} = I_d - (g_{ij}^*)(g_{ij}^*)^{\mathrm{T}}$。上述分布式线性编队控制系统的稳定性和收敛性取决于方位拉普拉斯矩阵 $L_{\mathrm{B}} \in \mathbb{R}^{dn\times dn}$ 的谱和零空间，其第 ij 个分块子矩阵定义如下

$$\begin{cases} [L_{\mathrm{B}}]_{ij} = 0_{d\times d}, & i \neq j, (i,j) \notin \mathcal{E}, \\ [L_{\mathrm{B}}]_{ij} = -P_{g_{ij}^*}, & i \neq j, (i,j) \in \mathcal{E}, \\ [L_{\mathrm{B}}]_{ii} = \sum_{j\in\mathcal{N}_i} P_{g_{ij}^*}, & i \in \mathcal{V}. \end{cases}$$

由此，控制律 (3) 的紧凑矩阵表达式为

$$\dot{p}(t) = -L_{\mathrm{B}}p(t). \tag{4}$$

显然，矩阵 L_{B} 也可以解释为一个矩阵加权图拉普拉斯矩阵，其权重为正交投影矩阵。方位拉普拉斯矩阵L_{B}及其谱和零空间，由底层图的拓扑结构和编队的方位信息共同决定。

对于无向图，很容易证明

$$L_{\mathrm{B}} = \bar{H}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(P_{g_k})\bar{H} \tag{5}$$

由此可立即得出，对于无向编队 $\mathcal{G}(p)$，方位拉普拉斯矩阵 L_{B} 是对称半正定的，并满足 Null(L_{B}) = Null(R_{B})。

然而，当图为有向图时，方位拉普拉斯矩阵并非对称矩阵，因此上述核等价关系通常不成立。方位等价的概念最初由 Zhao 和 Zelazo （2015a）定义（当时称为“方位持久性”），其定义基于核等价条件，即 Null(R_{B}) = Null(L_{B})。本文将引入如下更强的方位等价定义。

定义 3（方位等价）。若有向编队 $\mathcal{G}(p)$ 满足 Null(R_B) = Null(L_B) = span$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}$，则称其为方位核等价（简称方位等价）。

在有向图中，研究方位拉普拉斯矩阵 L_{B} 和方位等价的良好性质，动机源于基于方位的编队系统 (3)。具体而言，

- 矩阵 L_{B} 的谱决定了编队系统 (3) 的稳定性。我们希望找到能够保证 L_{B} 的所有特征值实部均非负的条件，从而使编队系统 (3) 稳定。

- 系统 (3) 的零空间 L_{B} 决定了其收敛后的编队形状。我们希望找到能够保证 Null(L_{B}) = span$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}$ 的条件，从而使收敛后的编队形状与目标编队方位等价。

对于方位编队，保证方位等价的图条件仍未解决，尽管 Zhao and Zelazo（2015a）提出了一些部分解。本文将重新审视 Zhao and Zelazo（2015a）中的这些条件，并提出更多刻画方位等价的（必要和/或充分）条件。具体而言，我们将给出若干图拓扑条件，以刻画 L_{B} 的谱和零空间；这些条件为通过方位控制律 (3) 确保编队收敛提供了某些关键要求。

3.1 关于 L_B 的一个有用公式

作为无向图方位拉普拉斯矩阵表达式 (5) 的对应形式，我们首先推导有向图方位拉普拉斯矩阵的如下表达式。对于具有有向图 $\mathcal{G}$ 的方位编队，其对应的方位拉普拉斯矩阵可表示为

$$L_{\mathrm{B}} = \bar{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(P_{g_k})\bar{H} \tag{6}$$

其中 $\bar{J} = J\otimes I_d$，矩阵 J 是通过将有向图的关联矩阵 H 中的“-1”项替换为“ 0”得到的。

式 (6) 的方位拉普拉斯矩阵公式可由有向图的传统拉普拉斯矩阵 L 的公式 $L = J^{\mathrm{T}}H$ 推出。通过扩充克罗内克积和矩阵权重（即与每条有向边相关联的投影矩阵 P_{g_k}），即可得到式 (6)。

式 (6) 的公式给出了以下零空间集合包含关系（Zhao and Zelazo（2015a）的定理4）。

引理6. 对于有向编队 $\mathcal{G}(p)$，方位拉普拉斯矩阵 L_B 满足

$$\mathrm{span}\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\} \subseteq \mathrm{Null}(R_B) \subseteq \mathrm{Null}(L_B). \tag{7}$$

证明。该引理已在 Zhao 和 Zelazo（2015a）中证明，此处我们基于公式（6）给出一个较短的证明。首先定义 $\bar{R}_B = \mathrm{diag}(\|e_k\|)R_{\mathrm{B}}$ 其中 R_{B} 是承载刚性矩阵。于是有 Null(R_B) = Null$(\bar{R}_B)$

˜因此 span$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}\subseteq$ Null(R_B)。注意到$L_{\mathrm{B}}=\bar{J}^{\mathrm{T}}\tilde{R}_B$，并且有 Null$(\tilde{R}_B)\subseteq$ Null(L_{B})，由此得出集合包含关系（7）。□

我们指出，根据引理4中的投影矩阵性质，L_{B} 的一个替代公式如下

$$L_{\mathrm{B}}=\bar{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(P_{g_k})\bar{H}=\underbrace{\bar{J}^{\mathrm{T}}\mathrm{diag}(P_{g_k}^{\mathrm{T}})}_{\tilde{J}_B^{\mathrm{T}}}\underbrace{\mathrm{diag}(P_{g_k})\bar{H}}_{\tilde{R}_B}. \quad (8)$$

基于此公式（8），我们给出保证方位等价的一个必要且充分条件。

定理2. 对于有向编队 $\mathcal{G}(p)$，等式

$$\mathrm{Null}(L_B)=\mathrm{span}\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}$$

成立，当且仅当以下两个条件均满足

(1) Null(R_B) $=$ 张成$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}$（即该编队是无穷小方位刚性的），且 (2) Null$(\tilde{J}_B^{\mathrm{T}})\cap$ 值域$(\tilde{R}_B)=\{0\}$。

证明. 这一必要且充分条件可由定理1中的无穷小方位刚性条件以及（8）中 $L_{\mathrm{B}}=\tilde{J}_B^{\mathrm{T}}\tilde{R}_B$ 的零空间性质推出，应用引理2即可得证。□

在现阶段，尚不清楚如何利用第二个条件，也不清楚它意味着什么。在接下来的章节中，我们将推导出更具体的条件，以刻画 L_{B}的谱和零空间。

4. 有向无环图中的方位等价

本节将聚焦于有向无环图，并给出关于方位等价的若干条件。

4.1 方位拉普拉斯矩阵的谱

第一个结果刻画了有向无环图中 L_{B}的谱性质。

命题1. 对于有向无环图，方位拉普拉斯矩阵 L_B 的特征值均为实数且非负。

证明。对于有向无环图，经过顶点和边的置换后，方位拉普拉斯矩阵总可以重构为一个分块三角矩阵，而第 i 个对角块由投影矩阵 $P_{g_{ij}^*}$ 组成（如果对应的顶点 i 只有一条出边（i，j）），或由投影矩阵 $\sum_{j\in\mathcal{N}_i}P_{g_{ij}^*}$ 之和组成（如果对应的顶点 i 有多条出边（i，j）），或者是零块（如果对应的顶点 i 没有出边）。

根据引理 3，分块三角矩阵的特征值集合等于各对角块特征值集合的并。在该方位拉普拉斯矩阵中，每个对角块要么是零块，要么是半正定矩阵（即单个投影矩阵或投影矩阵之和）。因此，根据引理 5，有向无环图的方位拉普拉斯矩阵的特征值均为实数且非负。

□

4.2 方位等价的条件

下面给出用于刻画 L_{B} 在有向无环图中零空间性质的条件。注意，任何有向无环图都包含一个出度为零的顶点，这种顶点在编队控制中通常称为“领导者智能体”。

命题2。对于由有向无环图建模的方位编队，以下任一条件都会导致 span$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}\subset$ Null(L_B)，从而形成方位不等价的编队。

（1）至少有两个顶点没有出边；（2）至少有两个顶点只有一条出边；（3）至少有两个顶点的出边共线。

证明。由于 L_{B} 有向无环图的块上三角结构，上述任一条件都会为 L_{B} 引入除 span$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}$以外的额外零空间。受篇幅所限，此处省略详细证明。

□

无环有向图中的一个特殊类别是领导者优先跟随者（LFF）图；参见 Trinh 等人（2018）。

定义 4（领导者优先跟随者图）。领导者优先跟随者（LFF）图是一个包含 $n>1$ 个节点的有向图，满足以下条件:

i) 一个顶点（称为领导者）没有出边。ii) 一个顶点（称为第一跟随者）有一条出边，且对应的边与领导者相连。iii) 其他每个顶点至少有两条出边，且这些出边不共线。

现在我们给出方位等价的一个充分条件，该条件刻画了有向图中的领导者优先跟随者（LFF）结构。

定理 3. 基于领导者优先跟随者图的有向编队是方位等价的。

定理 3 的证明同样可由 L_{B} 的块上三角结构推出，因篇幅所限，此处省略细节。我们还指出，该定理可视为将距离保持性（Hendrickx 等人（2007）、Anderson 等人（2008））推广至有向 LFF 图中的方位等价。

5. 含有环的有向图中的方位等价

本节重点讨论含有环的有向图，并推导出关于方位拉普拉斯矩阵和方位等价的若干必要和／或充分条件。

5.1 方位拉普拉斯矩阵的谱

对于包含环的有向图，相关的方位拉普拉斯矩阵（非对称）无法写成分块上三角结构，因此其特征值通常为复数。

关于方位拉普拉斯矩阵谱的以下猜想由 Zhao and Zelazo（2015a）提出。
猜想1. 有向编队的方位拉普拉斯矩阵L_B 的特征值实部非负。

这个猜想并不成立。反例见图1中的编队图，后文将对此进行讨论。请注意，方位拉普拉斯矩阵的元素（因而其特征值的位置）取决于构型（智能体位置）。对于与有向循环图相关联的给定方位拉普拉斯矩阵，在某些特殊位置下，可能出现实部为负的特征值。

5.2 方位等价的条件

我们首先将一个用于刻画 Null(R_{B}) = Null(L_{B}) 的充分条件（见 Zhao and Zelazo, 2015a, 命题1）推广到一般维数空间中的方位编队。
命题3. 对于 $\mathcal{G}(p)$ 中的有向编队，如果每个智能体至多有两条不共线的出边，则该编队满足 Null(R_B) =Null(L_B)。

证明可由 Zhao and Zelazo（2015a，命题1）的证明推出，此处略去。我们注意到，这个条件并非必要条件。反例见图1中的图(c)。在此例中，智能体2有三条出边，而图1(c)中的方位编队满足Null(R_{B}) = Null(L_{B})，并且仍然方位等价。

现在我们给出有向图中方位等价的一个必要条件。

命题4. 对于有向方位编队 $\mathcal{G}(p)$，如果其对应的方位拉普拉斯矩阵满足 Null(L_B) =span$\{\mathbf{1}\otimes I_d, p\}$，那么底层有向图包含一棵有向生成树。

证明. 如果底层有向图不包含生成树，那么拉普拉斯矩阵 $L = J^T H$除了 $\{\mathbf{1}\}$之外还会有其他零向量，这意味着增广拉普拉斯矩阵 $\bar{L} = L \otimes I_d = \bar{J}^T \bar{H}$除了 span $\{\mathbf{1} \otimes I_d\}$之外还会有其他零空间，即 $\bar{}$span$\{\mathbf{1} \otimes I_d\} \subset$ Null(L)。根据引理2，由于分块对角矩阵 diag(P_{g_k}) 总是奇异的，因此会导出 L_{B} 的零空间 span$\{p\}$，于是有零空间($\bar{L}$) =零空间($\bar{J}^{\mathrm{T}} \bar{H}$) $\subset$零空间($\bar{J}^{\mathrm{T}}$diag(P_{g_k}) $\bar{H}$) =零空间(L_{B})，这意味着张成空间$\{\mathbf{1} \otimes I_d, p\} \subset$零空间($L_{\mathrm{B}}$)。因此，为确保零空间($L_{\mathrm{B}}$) = 张成空间$\{\mathbf{1} \otimes I_d, p\}$，底层有向图必须包含一棵生成树。 □

命题4给出了方位等价的一个必要条件，该条件对无环和有环有向图均成立。特别地，命题2中的条件（1）不满足生成树条件，因此，任何具有两个领导智能体（即两个出度为零的顶点）的方位编队都不具备方位等价性。

5.3 扩展方位等价编队

含有环的有向图中的方位等价仍缺乏完整刻画。现在，我们提出一种替代性刻画方法，以扩展方位等价编队，使其包含更多智能体或处于更高维的空间中。

命题5. 设方位编队$\mathcal{G}(p)$具有 $\mathbb{R}^d$ 个 n 智能体，并由有向图 $\mathcal{G}$建模。假设在 $\mathcal{G}(p)$中新增一个顶点（智能体） p' 至 $\mathcal{G}(p)$，且该顶点与已有顶点之间至少有两条非共线出边。则这个增广编队$\mathcal{G}'(p, p')$是方位等价的。特别地，若张成空间$\{\mathbf{1}_n \otimes I_d, p\}$ =零空间($L_B(\mathcal{G})$)，则张成空间$\{\mathbf{1}_{n+1} \otimes I_d, (p, p')\}$ =零空间($L_B(\mathcal{G}')$)。

证明。一般性不失，给增广图 $\mathcal{G}'$中的新顶点 p' 赋予索引‘$n+1$’。增广图 $\mathcal{G}'$ 对应的增广方位拉普拉斯矩阵 $L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}')$可表示为

$$L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}'(p, p')) = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}(p)) & \vdots \\ & & 0 \\ \cdots -P_{g_{(n+1)j}} & \cdots & \sum_{j\in\mathcal{N}_{n+1}} P_{g_{(n+1)j}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

新顶点 p' 至少有两条与已有顶点相连的非共线出边，这一条件保证添加边后不会在 $L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}')$中引入额外的零向量。因此，若rank($R_{\mathrm{B}}(\mathcal{G})$) = rank($L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G})$)，则有rank($R_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}')$) = rank($L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}')$)。特别地，利用式（9）中的矩阵结构，可以直接证明：若span$\{\mathbf{1}_n \otimes I_d, p\}$ = Null($L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G})$)，则span$\{\mathbf{1}_{n+1} \otimes I_d, (p, p')\}$ = Null($L_{\mathrm{B}}(\mathcal{G}')$)。 □

该命题对无环和有环有向编队均成立，因此，若复杂方位编队能够分解为由具有非共线出边的顶点构成的简单子图，则可用该命题进行分析。

以下命题表明，在低维空间中方位等价的编队，在高维空间中仍将保持方位等价。
命题6.（维数不变性）方位等价性不受空间维数影响。

该命题可视为对 Zhao and Zelazo (2015b) 发现的无穷小方位刚性的维数不变性这一性质的推广。

5.4 示例

图1展示了若干由带环的有向图建模的方位等价编队示例。由于这些图具有环状结构，其方位拉普拉斯矩阵存在复特征值。对于某些特殊的智能体位置，相应的方位拉普拉斯矩阵可能具有负实部特征值。

以图1中的图(a)为例。我们随机选择智能体位置，而图(a)的方位拉普拉斯矩阵往往会产生具有负实部的特征值。其中一种位置配置为

$$p_1 = [5.8009, 0.1698]^{\mathrm{T}}, p_2 = [1.2086, 8.6271]^{\mathrm{T}},$$
$$p_3 = [4.84308.4486]^{\mathrm{T}}, p_4 = [2.0941, 5.5229]^{\mathrm{T}}.$$

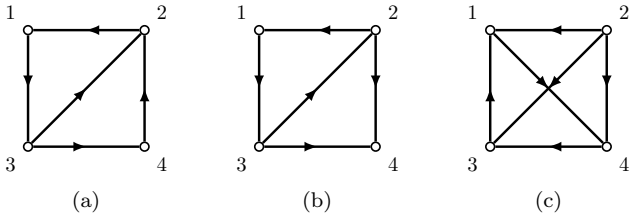


图1. 由含环有向图建模的方位等价编队示例。

方位拉普拉斯矩阵的谱计算如下

$$\lambda_{1,2,3} = 0, \lambda_{4,5} = 1.6400 \pm 0.7564i,$$
$$\lambda_{6,7} = 0.8879 \pm 0.3799i, \lambda_8 = -0.0559,$$

这仅得到一个实部为负的特征值。 [1]

对于图1中的图(c)，可通过在循环三角形编队（其方位等价）中添加智能体2来构造，该智能体有三条出边，分别指向智能体1、3和4。因此，根据命题5，图1(c)中的编队是方位等价的。对于图1中在二维空间内评估的所有方位等价编队，根据命题6中的维数不变性，这些编队在将智能体位置提升至三维或更高维空间后仍保持方位等价。

6. 结论

本文受有向图中基于方位的编队控制问题的启发，提出了若干用于刻画有向方位编队方位等价性的条件。方位等价的概念由方位刚性矩阵与方位拉普拉斯矩阵的核等价定义。方位等价的这些条件分为两种情况：具有无环有向图（不含任何环）的方位编队，以及具有有环有向图（至少含一个环）的方位编队。本文推导了若干必要条件和/或充分条件，以揭示相关方位拉普拉斯矩阵的谱与零空间的性质。

方位等价是影响由有向图建模的基于方位的编队系统稳定性和收敛性的关键性质之一。在未来的工作中，我们将致力于全面刻画方位等价，并应用所得条件解决以有向图为基础的基于方位的编队控制和网络定位问题。

致谢

作者谨向 Minh Hoang Trinh博士 致谢，感谢他为本研究提供的有益讨论和意见。

参考文献

Anderson, B.D.O., Yu, C., Fidan, B., and Hendrickx, J.M. (2008). 面向自主编队的刚性图控制架构。IEEE 控制系统杂志，28(6)，48–63。Arrigoni, F. and Fusiello, A. (2018). 基于方位的网络可定位性：统一视角。IEEE 模式分析与机器智能汇刊，41(9)，2049–2069。Bernstein, D.S. (2018). 《标量、向量与矩阵数学：理论、事实与公式》。普林斯顿大学出版社。Harville, D.A. (2008). 《矩阵代数：统计学家的视角》。施普林格科学与商业媒体。Hendrickx, J.M., Anderson, B.D.O., Delvenne, J.C., and Blondel, V.D. (2007). 用于分析自主智能体系统中刚性与持久性的有向图。《国际鲁棒与非线性控制》，17(10-11)，960–981。Karimian, A. and Tron, R. (2021). 具有视场约束的仅方位导航。载于美国控制会议（ACC）论文集，20–25。IEEE。Lin, Z., Han, T., Zheng, R., and Fu, M. (2016). 切换拓扑下二维传感器网络中基于仅方位测量的分布式定位。《IEEE 信号处理汇刊》，64(23)，6345–6359。Mesbahi, M. and Egerstedt, M. (2010). 《多智能体网络中的图论方法》。普林斯顿大学出版社。Oh, K.K., Park, M.C., and Ahn, H.S. (2015). 多智能体编队控制综述。《自动化》，53，424–440。Sun, Z., Park, M.C., Anderson, B.D.O., and Ahn, H.S. (2017). 具有指定方向的刚性编队分布式稳定控制。《自动化》，78，250–257。Tang, Z., Cunha, R., Hamel, T., and Silvestre, C. (2021). 利用方位测量在三维空间中对领导者–跟随者结构进行编队控制。《自动化》，128，109567。Tang, Z., Cunha, R., Hamel, T., and Silvestre, C. (2022). 持续激励条件下的宽松方位刚性与方位编队控制。《自动化》，141，110289。Trinh, M.H., Zhao, S., Sun, Z., Zelazo, D., Anderson, B.D.O., and Ahn, H.S. (2018). 具有领导者优先的跟随者结构的智能体群体基于方位的编队控制。《IEEE 自动控制汇刊》，64(2)，598–613。Tron, R., Thomas, J., Loianno, G., Daniilidis, K., and Kumar, V. (2016). 结合辅助距离测量、领导者与碰撞避免的仅方位编队控制。载于 IEEE 第55届决策与控制会议（CDC）论文集，1806–1813。IEEE。Zhao, S. and Zelazo, D. (2015a). 具有有向交互拓扑的基于方位的编队稳定。载于 IEEE 第54届决策与控制会议（CDC）论文集，6115–6120。IEEE。Zhao, S. and Zelazo, D. (2015b). 方位刚性与几乎全局的仅方位编队稳定。《IEEE 自动控制汇刊》，61(5)，1255–1268。Zhao, S. and Zelazo, D. (2019). 方位刚性理论及其在网络系统控制与估计中的应用：超越距离刚性。《IEEE 控制系统杂志》，39(2)，66–83。

[1] 用于评估有向方位编队示例中方位等价性的 Matlab 代码可在 https://www.dropbox.com/sh/5qzk9lqab0s448k/AACGEOr1r4riQVg-RqjmNDO4a?dl=0 获取。