arXiv:2303.05583v1 [math.CO] 9 Mar 2023

嵌入图三染色与流

Caroline Bang* Zdenˇek Dvoˇr´ak† Emily Heath‡Bernard Lidick´y§

2023年3月13日

摘要

若曲面中绘制的图，其不同于四边形面的各面的长度之和有一个固定常数界，则称该图为 *near-quadrangulation* 。我们利用着色与流之间的对偶性，为可定向曲面上的近似四边形剖分设计了一种高效的三预染色扩张算法。此外，我们还利用这种对偶性，强化了此前已知的关于可定向曲面上绘制的无三角形图具有3-可着色性的充分条件。

1 引言

一般而言，判定一个平面图是否为 3-可着色是 NP 困难的 [14]；然而，Gr¨otzsch [17] 的著名定理指出，每个不含三角形的平面图都是 3-可着色的。这一结果促使人们进一步探索平面图 3-可着色性的充分条件，参见例如 [3], ；人们也对更一般的图类进行了研究，例如绘制在其他曲面上的图。

如果一个图不是 k-可着色的，但它所有的真子图都是 k-可着色的，那么它就是$(k+1)$-临界 图；因此，$(k+1)$-临界图恰好是 k-可着色性的极小禁用子图。由此，Gr¨otzsch 定理等价于不存在平面无三角形4-临界图这一事实。Gimbel 和 Thomassen [15] 推广了这一结果，证明了射影平面中的无三角形图是4-临界图，当且仅当它是一个没有分离4-圈的非二部四边形剖分。

*爱荷华州立大学数学系，艾姆斯，爱荷华州。电子邮箱： cbang@iastate.edu。该作者的研究部分由美国国家科学基金会资助，资助项目编号为 DMS-1839918 和 DMS-2152490。

†查理大学计算机科学研究所，捷克共和国布拉格。电子邮箱： rakdver@iuuk.mff.cuni.cz。本研究获得捷克科学基金会项目 22-17398S（曲面上图的流与圈）的资助。

‡爱荷华州立大学数学系，艾姆斯，爱荷华州。电子邮箱： eheath@iastate.edu。该作者的研究部分由美国国家科学基金会项目 DMS-1839918 资助。§爱荷华州立大学数学系，艾姆斯，爱荷华州。电子邮箱： lidicky@iastate.edu。该作者的研究部分由美国国家科学基金会项目 DMS-2152490 和 Scott Hanna奖学金资助。

事实证明，近似四边形剖分 在任意固定曲面上的无三角形图的3-可着色性研究中发挥着重要作用。出于稍后会明了的原因（见观察 20），采用以下定义会更方便。对于整数 n，令 $q(n)$表示满足 $3|i$、 $i \equiv n$ （模 2）以及 $|i| \leq n$的整数 i 的个数，并令 $b(n)$表示其中最大的整数 i。设 H 是一个在曲面上具有2-胞腔嵌入的图，并令 $F(H)$表示 H的面集。对于一个面 $f \in F(H)$，令 $|f|$ 表示 H中围绕 f 的闭游走的长度。我们令

$$q^\star(H) = \prod_{f \in F(H)} q(|f|) \text{ and}$$
$$b^\star(H) = 1 + \sum_{f \in F(H)} b(|f|).$$

注意， $q(4) = 1$ 和 $b(4) = 0$，因此若 H 是四边形剖分，则$q^\star(H) = b^\star(H) = 1$。我们称 H 为 a-近似四边形剖分，如果 $b^\star(H) \leq a$。Dvoˇr´ak、Kr´al’ 和 Thomas [8] 证明了以下关键结果。

定理1 (Dvoˇr´ak、Kr´al’ 和 Thomas [8])。 对于欧拉亏格为 g 的每个曲面 Σ，都存在一个正整数 $a_\Sigma = O(g)$，使得在 Σ 中嵌入曲面 H 的每个4-临界无三角形图至少满足以下条件之一：

- 图 H 的嵌入不是2-胞腔嵌入，或者
- H 包含一个不可缩四边形，或者
- H 是 a_Σ-近似四边形剖分。

Dvoˇr´ak、Kr´al’ 和 Thomas [7] 还给出了一个在线性时间内为近似四边形剖分进行3-着色的算法，并将这些结果结合起来，得到一个线性时间算法，用于判定嵌入于任意固定曲面 [9]中的无三角形图是否具有3-可着色性。

[7] 近似四边形剖分 3-着色的算法相当复杂；它利用割开和预着色论证，将输入实例转化为一般情形（其中不存在短不可缩圈），代价是引入与两两距离较远的面相邻的预着色顶点，随后再用一个拓扑判据刻画这种一般情形下的预着色扩张。这种方法的缺点是相当不明确，而且其复杂度和巨大的乘法常数使它无法在实践中使用。因此，研究其他方法很有意义。

为确立一个基本情形（平面图中，与外面相邻的顶点均已预着色，且所有其他面长度均为四），Dvoˇr´ak、Kr´al’ 和 Thomas [7]利用了无零流的对偶性。Dvoˇr´ak 和 Lidick´y [10, 引理 4 及其后的评述]进一步详细探讨了这种联系，并给出了以下算法。

定理 2 (Dvoˇr´akand Lidick´y [10])。 存在一种算法，给定一个具有 n 个顶点的简单平面图 H，可在时间 $O(q^\star(H)b^\star(H)n)$内判定 H 是否 3-可着色（若存在则找出一种 3-着色）。此外，该算法还可以

判定H 外面关联顶点的预着色能否扩展为 H的 *3*-着色。

该算法至多需要调用最大流算法 $q^\star(H)$ 次，因此在实践中很容易实现。类似地，Dvo˘r´ak 和 Pek´arek [12]研究了带有两个预着色面的平面图，并证明了以下结果。

定理 3 (Dvo˘r´ak和Pek´arek [12])。 存在一种算法，给定一个简单的 n 顶点平面图 H 以及对图 H 的两个面上关联顶点的预着色 ψ ，可以判定该预着色 ψ 是否能扩展为 H 的3-着色（若存在，则找出这样的 *3*-着色），所需时间为 $O(q^\star(H)b^\star(H)n)$。

Dvo˘r´ak 和 Pek´arek [12] 利用他们的结果，针对边宽有界的环面近似四边形剖分的 3-着色，以及判定无三角形环面图的 3-可着色性，提出了一种实用算法。

我们的主要结果是对这一方法的重大推广：

- 我们考虑嵌入在任意可定向曲面上的图，且不对边宽作任何限制。
- 我们允许对顶点的任意子集进行预着色。

定理 4. 设 Σ 是欧拉亏格为 g的可定向曲面。存在一个函数 γ 和一种算法：给定一个具有 Σ 中 *2*-胞腔嵌入的简单 n顶点图 H ，以及对其顶点子集 S 的预着色 ψ ，该算法可判定ψ 能否扩展为 H 的3-着色（若存在，则求出这样的 *3*-着色），所需时间为

$$O\left(q^\star(H)b^\star(H)n + q^\star(H)\cdot\min\begin{pmatrix} n^g(n^2+|S|^3), \\ \gamma(|S|)n^2\operatorname{polylog} n\end{pmatrix}\right).$$

值得注意的是，在定理 4 中，即使预着色的顶点数任意多，我们仍能得到多项式算法。相比之下，判定仅有三个预着色顶点的二分图是否具有 3-可着色性是 NP 完全的，Kratochv´ıl 和 Seb˝o [22], 证明了这一点；Monnot [23]则证明了，判定最大度为四、且具有（数量无界的）预着色顶点的平面无三角形图是否具有 3-可着色性，也是 NP 完全的。

与 Dvo˘r´ak、Kr´al’ 和 Thomas [7], 的算法相比，我们的算法实用得多（它基于现成算法的简单组合——最大流、最短路径以及有界维数下的整数规划），并允许预先着色任意数量的顶点。另一方面，Dvo˘r´ak 等人 [7]的算法的时间复杂度与输入图的顶点数呈线性关系。

与定理 3 相比，我们给出的算法对预着色顶点数量的依赖更差。不过，可以调整定理 4 中的算法，使其复杂度不依赖于 $|S|$，而只依赖于 $H[S]$的连通分量数量，从而弥合这一差距。具体做法是收缩预着色顶点之间的边，并根据预着色在这些边的对偶图上强制产生的流量来调整流约束

；关于这一想法的准确说明，请参见 [12,观察 17]，该想法很容易适用于我们的情形。

从图 H 到图 C 的同态是一个函数 $f\colon V(H) \to V(C)$，满足对于每个 $uv \in E(H)$，都有 $f(u)f(v) \in E(C)$。图H 的 3-着色等价于到 C_3的同态。定理 4 可以推广到到奇圈的同态。研究这类同态的一个动机，源于它们与圆色数的关系：图 H 的圆色数 $\chi_c(H)$ 是满足以下条件的圆的最小长度：存在从 $V(H)$ 到圆上长度为 1 的开弧的映射，使得相邻顶点对应的弧互不相交。圆色数是普通色数 [26], 的一种细化，其含义是，对于每个图 H，都有 $\chi(H) = \lceil \chi_c(H) \rceil$。此外，对于任意正整数 k，图的圆色数至多为 $2 + 1/k$，当且仅当它存在到 C_{2k+1}的同态。

对于长度为 m 的圈 C 和整数 n，令 $q_C(n)$ 表示满足 $m|i$、 $i \equiv n \pmod 2$ 且 $|i| \leq n$ 的整数 i 的数量，并令 $b_C(n)$ 表示此类整数 i 中的最大值。对于在曲面上具有 2-胞腔嵌入的图 H，令$q^\star_C(H) = \prod_{f \in F(H)} q_C(|f|)$ 和 $b^\star_C(H) = 1 + \sum_{f \in F(H)} b_C(|f|)$。

定理 5. 设 Σ 是欧拉亏格为 g 的可定向曲面，且 C 是一个奇圈。存在一个函数 γ 和一个算法：给定一个在 Σ 中具有 2-胞腔嵌入的简单 n 阶图 H，以及一个从其顶点的子集 S 出发的函数 $\psi\colon S \to V(C)$，该算法判断 ψ 是否能扩展为从 H 到 C 的同态（若存在，则找出该同态），运行时间为

$$O\left(q^\star_C(H) b^\star_C(H) n + q^\star_C(H) \cdot \min \begin{pmatrix} n^g(n^2 + |S|^3), \\ \gamma(|S|) n^2 \operatorname{polylog} n \end{pmatrix}\right).$$

回到 3-着色的情形，Hutchingson [19] 证明，对于每个可定向曲面，在该曲面上绘制的所有没有奇数长度面的图，只要边宽足够大，都是 3-可着色的（绘制在球面以外曲面上的图 H 的边宽 ew(H)，是其中 H最短非可缩圈的长度）。Dvo˘r´ak、Kr´al’ 和 Thomas [7] 将这一结论推广到了所有无三角形图。我们的论证给出了一个更一般的结果，并对边宽给出了明确的界。为陈述该结果，我们需要先给出几个定义。设 H 是绘制在可定向曲面 Σ 上的图，且 U 是 H的子图。

- 如果 U 不包含任何非可缩圈，我们就称 U 是平坦的；等价地，存在一个包含 U的圆盘 $\Delta \subseteq \Sigma$。我们将 Δ 中未包含在 U 内的唯一面称为外面，并将所有其他面称为内部面。

- 我们称 U 捕获了 H 的非四边形面，如果 H 的每个长度不为四的面也是 U的一个面。

- 平面中的图 U' 是 U 的平面四边形剖分扩张，如果 U' 是通过对 U 的外面进行四边形剖分得到的。更准确地说，如果存在一个同胚 θ，将 Δ 映射到平面中的一个圆盘 Δ'，使得

– θ 将 U 映射为 U'的一个子图，– θ 将 U 的内部面映射为包含在 Δ' 中的 U' 的面，并且– U' 中不是 U 的面在 θ 下的像的每个面，其长度均为四。

若图 H 嵌入在可定向曲面中，且每个捕获 H 非四边形面的平坦子图都有一个 3-可着色的平面四边形剖分扩张，则称其为局部 3-可着色 。

定理 6. 设 H 是一个简单图，它以 *2*-胞腔嵌入在欧拉亏格为 $g > 0$ 的可定向曲面上，且边宽至少为 $b^\star(H) + \Omega(g^{4/3})$。那么， H 是3-可着色的，当且仅当它是局部 *3*-可着色的。

如果 H 是无三角形图，那么 H 的每个平坦子图都有一个无三角形的平面四边形剖分扩张，根据 Gr¨otzsch 定理 [17]，该扩张是 3-可着色的。因此，局部 3-可着色这一条件自动满足。结合定理 1，可得以下推论。

推论 7. 设 H 是一个嵌入在欧拉亏格为 $g > 0$ 的可定向曲面上的无三角形图。如果 H 的边宽为$\Omega(g^{4/3})$，那么 G 是3-可着色的。

证明。 反设 H 不是3-可着色的。不失一般性，我们可以假设 H 是4-临界的。此外，我们可以假设 H 的嵌入是2-胞腔的；否则，可以沿着某个面内的一条不可缩简单闭曲线切开曲面，再用圆盘封闭由此产生的洞，从而得到 H 在一个亏格更小的可定向曲面上的嵌入，且边宽不减。我们还可以假设边宽至少为五。由定理1可知，这意味着 $b^\star(H) = O(g)$；而定理 6 表明 H 是3-可着色的。

□

值得指出的是，关于可定向曲面上无三角形图的3-可着色性，已有研究证明存在一个保证其可着色的边宽下界（对于不可定向曲面，也有类似但稍复杂的结果），见 [7], ，但并未量化该下界与亏格之间的关系。对于环面上的图，进一步的分析给出了以下明确的界。

推论 8. 设 H 是一个在环面上具有 *2*-胞腔嵌入的简单图。若 H不含三角形且边宽度至少为 $5 + b^\star(H)$，则 H 是3-可着色的。

对于环面上的四边形剖分，我们有 $b^\star(H) = 1$，推论 8 表明，若边宽度至少为 6，则 H 是 3-可着色的。这个界无法改进，因为 Archdeacon等人 [1] 发现了一个不可 3-着色的环面四边形剖分Q_{13} ，其边宽度为五，见图1。值得指出的是，Kr´al’ 和 Thomas [21] 证明了，在环面上嵌入且不含奇数边面的每个不可 3-着色的图都包含 Q_{13} 作为子图。

更一般地，Dvo˘r´ak 和 Pek´arek [11] 的结果表明，若将 H 画在环面上的图是一个 4-临界无三角形图，则 $b^\star(H) \leq 13$；因此，推论 8 表明，所有画在环面上的无三角形图

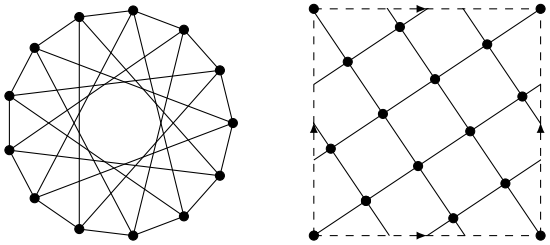


图1：凯莱图 $C(Z_{13}; 1,5)$ 及其作为环面上的四边形剖分 Q_{13} 的嵌入。

只要边宽至少为 18，便是 3-可着色的。值得指出的是，借助计算机辅助枚举 [13]，人们已经获得了画在环面上的无三角形图的 3-可着色性的精确刻画；该刻画表明，所有画在环面上且边宽至少为 6 的无三角形图都是 3-可着色的。

最后，对于没有奇数边面的图（特别是对于四边形剖分），我们可以加强推论 7 中的界。

定理 9. 对于任意欧拉亏格为 $g > 0$ 的可定向曲面 Σ，若图 H 在 Σ 上有一个 2-胞腔嵌入，且边宽为 $\Omega(g \log g)$，并且所有面长度均为偶数，则该图是3-可着色的。

本文其余部分安排如下：

- 在第 2 节中，我们介绍同调理论和流-着色对偶性的基本概念，并将近似四边形剖分的着色问题归约为寻找具有指定同调的循环流的问题。在第 3 节中，我们给出解决这一问题的算法。

- 在第 4 节中，我们证明可实现同调类构成一个多面体，并研究其性质。

- 在第 5 节中，我们论证，寻找合适的可实现同调可以归结为在相关多面体中寻找一个整数点，并针对处理预着色顶点时出现的一个特殊情形给出算法。结合截至此处所得的结果，我们给出证明定理 5 的算法。

- 在第 6 节中，我们陈述不含整数点的多面体的宽度界，并说明图的边宽如何为与其着色相关的多面体宽度提供下界。利用这些界，我们证明定理 9。

- 在第 7 节中，我们将局部 3-可着色性与边界可被 3 整除的处处非零流的存在性联系起来，并证明定理 6 和推论 8。

我们在第 8 节以一些结语作结。

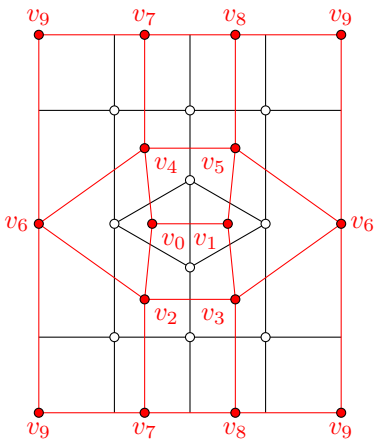


图2：图 G 以红色绘制在环面上（环面由将图的上边与下边粘合、左边与右边粘合得到）。对偶图 $G^\star$ 以黑色绘制。

2 预备知识

我们旨在利用图 H 在曲面上的对偶图 G 中的流，为图 G 寻找一种着色（图 H的顶点是图 H的面，而图 G 的每条边都会在图 H 中生成一条连接两个相邻面的边）。需要指出的是，尽管图G 可以在不失一般性的前提下假定为简单图，但图G可能有平行边和环。我们主要关注图 $G^\star$ 的性质；必要时，我们会用 H指代它。

我们提供了一些图来说明相关概念和结果。所有图都应理解为描绘在环面上的图；该环面由识别矩形的相对两边得到。我们用红色绘制图 G，用黑色绘制图 $G^\star$。例如，图2描绘了一个有10个顶点的图 G，其中顶点 v_6 和 v_9 之间有一条重边，以及它的对偶图$G^\star$（该对偶图是简单图，也有10个顶点）。当要求我们在 G中选取面时，为避免图面杂乱，我们通常会改为描绘对应的顶点 $G^\star$。

曲面上的图

设 G 是一个连通图。图 G 在曲面 Σ 上的嵌入 η 将 G 的顶点映射到 Σ 上两两不同的点，将每条非环边 $e = uv \in E(G)$ 映射为 Σ 上一条端点为 $\eta(u)$ 和 $\eta(v)$ 的简单曲线，并将每个环 $e = vv \in E(G)$ 映射为一条包含 $\eta(v)$ 的非平凡简单闭曲线；此外，对于任意 $e, e' \in E(G)$，曲线 $\eta(e)$ 与 $\eta(e')$ 的交集仅由同时与 e 和 e' 关联的顶点 $v \in V(G)$ 所对应的点 $\eta(v)$ 组成。嵌入的面是 $\Sigma \setminus \bigcup_{e\in E(G)} \eta(e)$ 的极大连通子集；令 $F(G)$ 表示

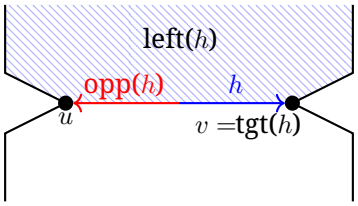


图3：半边 h、tgt(h)、opp(h) 和 left(h) 的示意图。

G 的面集。若嵌入的每个面都同胚于一个开圆盘，则称该嵌入为 2-胞腔 嵌入。我们只考虑 2-胞腔嵌入，因为如果一个连通图在曲面 Σ 上有非 2-胞腔嵌入，那么它也可以嵌入亏格更小的曲面。特别地，球面上任何连通图的嵌入都是 2-胞腔嵌入。我们还只考虑可定向曲面（第 8 节将简要讨论不可定向曲面）。

我们将图中的每条边视为由两条方向相反的半边组成，示意图见图3。对于半边 h，令 tgt(h) 表示 G 上 h 所指向的顶点，令 opp(h) 表示其反向半边，令 left(h) 表示绘制在 G 的 h 左侧的面。令 hes(G) 表示 G 的半边集。通常，任意从每对半边中选取一条会很方便；令 $\vec{\text{hes}}(G)$ 表示 hes(G) 的一个子集，其中每对方向相反的半边中恰好包含一条。

若让算法直接处理本节开头所定义的嵌入，未免过于复杂（我们需要想出一种离散方式来描述曲线）。对于我们的算法而言，一个带有 2-胞腔嵌入的图 G 由以下信息表示

- 图 G 的顶点集合 $V(G)$、半边集合 hes(G)（属于 G），以及面集合$F(G)$（属于 G）。这里的面是作为抽象元素，而非曲面的子集来处理的，并且

- 函数 opp : hes(G) $\to$ hes(G)、tgt : hes(G) $\to$ $V(G)$ 和 left : hes(G) $\to$ $F(G)$。

我们有时也会提到图 G 的边集合 $E(G)$，它可以看作是由 $h \in \text{hes}(G)$ 中的 $\{h, \text{opp}(h)\}$ 组成的对。值得指出的是，这种表示所包含的信息可以确定 G 在 Σ 中的嵌入，且同胚意义下唯一。图 G 的大小定义为 $|V(G)|+|F(G)|+|E(G)|$。注意，图及其对偶图的大小相同；广义欧拉公式表明，如果将 G 嵌入欧拉亏格为 g 的曲面，且 $G^\star$ 是一个有 n 个顶点的简单图，那么 G 的大小为 $O(n+g)$。

同调

我们需要先介绍一些同调理论中的简单定义。

• 0-链是顶点的形式和，其系数为整数；0-链构成一个自由阿贝尔群 $C_0(G)$。对于一个0-链 b 和一个顶点 v，令 $b[v]$ 表示 v处的系数，并令$|b| = \sum_{v\in V(G)} |b[v]|$。

• 1-链 是一个形式和 $K = \sum_{h\in \vec{}\mathrm{hes}(G)} c_h \cdot h$，其系数为整数；也就是说，1-链构成由 $\vec{}\mathrm{hes}(G)$生成的自由阿贝尔群 $C_1(G)$。对于半边 h，我们定义 $K[h] = c_h$：若 $h \in \vec{}\mathrm{hes}(G)$，则取该值；否则取 $K[h] = -c_{\mathrm{opp}(h)}$。注意，

$$K[\mathrm{opp}(h)] = -K[h]. \tag{1}$$

$\vec{}$我们将每个半边 $h \in \mathrm{hes}(G) \setminus \mathrm{hes}(G)$视为 1-链 $-\mathrm{opp}(h)$。例如，有向游走 W经过半边 h_1、.....、 h_m，对应于 1-链 $K = h_1 + \cdots + h_m$；对于每个半边 h， $K[h]$是 W 经过 h 的次数减去经过 opp(h) 的次数。我们还定义 $|K| = \sum_{h\in \vec{}\mathrm{hes}(G)} |K[h]|$。

• 2-链是图 G 的面以整数系数构成的形式和。令$C_2(G)$表示 2-链的自由阿贝尔群。对于 2-链 A 和面x，令 $A[x]$表示 x 在 A中的系数。

现在来定义边界算子:

• 对于面 $x \in F(G)$，令

$$\partial_2 x = \sum_{h\in \mathrm{hes}(G):\mathrm{left}(h)=x} h.$$

x 的边界由沿 x逆时针方向的关联半边构成，示例见图4(a)。我们将 ∂_2 线性地扩展到 2-链上。

• 对于每条半边 h，我们赋予一个 0-链 $\partial_1 h = \mathrm{tgt}(h) - \mathrm{tgt}(\mathrm{opp}(h))$，并将映射 ∂_1 线性地扩展到所有 1-链上。例如，如果 W 是对应于从顶点 u 出发并以顶点 v结束的游走的 1-链，那么 $\partial_1 W = v - u$。

• 对于每个 0-链 $b = \sum_{v\in V(G)} b_v \cdot v$，我们定义 $\partial_0 b = \sum_{v\in V(G)} b_v$。

现在，对于 $i \in \{0, 1\}$,

• 一个 i-边界 是属于 $C_i(G)$ 的子群 $B_i(G) = \{\partial_{i+1} a : a \in C_{i+1}(G)\}$ 中的一个 i-链，并且

• 一个 i-圈 是属于子群 $Z_i(G) = \{K \in C_i(G) : \partial_i K = 0\}$ 的一个 i-链。例如，如果 W 是对应于闭游走的 1-链，那么 W 就是一个 1-圈。

注意,

- 每个 i-边界都是一个 i-圈，因此 $B_i(G)$ 是 $Z_i(G)$ 的子群；
- 由于 G是连通的，每个 0-圈都是一个 0-边界，因此 $B_0(G) = Z_0(G)$；并且
- 对于 G中的任意可缩圈 C，相应的 1-链是一个 1-边界，因为它可以表示为开圆盘内所画的各个面 x 对应的 $\partial_2 x$ 之和，而该开圆盘由 C围成。

第一同调群 (*first*) 同调群 $H_1(G)$ 定义为商群 $Z_1(G)/B_1(G)$。例如，假设 W_1 和 W_2 是闭游走，且 W_2 与 W_1自由同伦。那么，可以通过一系列操作从 W_1 得到 W_2：添加绕一个面的游走，并删除由沿某条边走过后立即沿原路返回所构成的子游走。因此，对于相应的 1-链，存在某个 1-边界 Q，使得 $W_2 = W_1 + Q$，于是 W_1和 W_2 对应于 $H_1(G)$中的同一个元素。

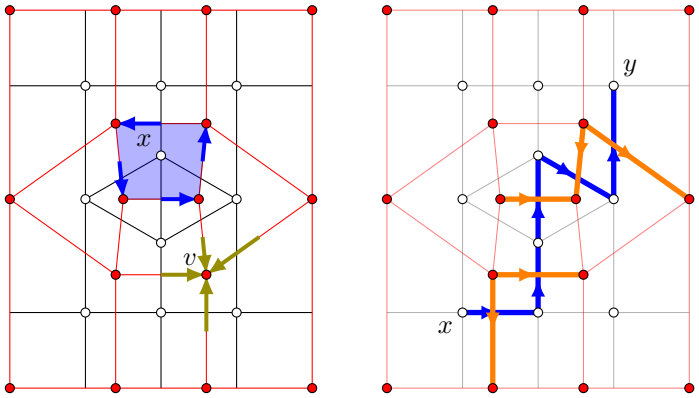
我们还定义对偶（上同调）算子：
- 对于顶点 v，令 $\partial_2^\star v = \sum_{h \in \mathrm{hes}(G):\mathrm{tgt}(h)=v} h$，并将 $\partial_2^\star$ 线性地扩展到 0-链，示例见图4(a)。
- 对于半边 h，令 $\partial_1^\star h = \mathrm{left}(h) - \mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))$，并将 $\partial_1^\star$ 线性地扩展到所有 1-链。
- 对于 2-链 $d = \sum_{x \in F(G)} d_x \cdot x$，令 $\partial_0^\star d = \sum_{x \in F(G)} d_x$。

And,

- 一个 余边界 是属于子群 $B^\star(G) = \{\partial_2^\star a : a \in C_0(G)\}$ （属于 $C_1(G)$）的 1-链，
- 一个余循环 是属于子群 $Z^\star(G) = \{K \in C_1(G) : \partial_1^\star K = 0\}$的 1-链，并且
- 同调群 $H^\star(G) = Z^\star(G)/B^\star(G)$.

注意，余边界对应于 G中的边割，这与 1-边界对应于分离圈的方式类似。对偶图 $G^\star$ 是 G 的一个图，其顶点集为 $F(G)$，并且 G 的每条边 e 都对应于$G^\star$ 的一条边 $e^\star$，该边连接与 e关联的面。注意，与其定义对偶边界算子，我们也可以使用对偶图中的链；不过，让原图和对偶图的边界算子作用于相同的集合可以简化记号。对于 G的两个面 x 和 y，从 x 到 y 的一条余路径 是一个 1-链 P，其中 $\partial_1^\star P = y - x$；示意见图4(b)。我们指出，余循环是从任意一个面到其自身的余路径。

对于 G 中的 1-链 f，若 $h \in \mathrm{hes}(G)$，定义 $\tau_f(h) = f[h]$，并将函数 τ_f 线性地扩展到 G 中的所有 1-链 K。基于（1）的以下观察将在后续计算中有所帮助。



(a) (b)

图4: （a）图 G 中面 x 和顶点 v 的 $\partial_2 x$ 与 $\partial_2^\star v$ 示例（红色）。（b）对偶图（蓝色）中从面 x 到面 y 的一条路径，以及 G 中对应的余路径（橙色）。

观察10。设 G 是一个在可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图，且 f 和 K 是 G 中的 1-链。那么

$$\tau_f(K) = \sum_{h \in \vec{\text{hes}}(G)} f[h]K[h] = \sum_{h \in \text{hes}(G): K[h] > 0} f[h]K[h].$$

在典型应用中，我们将 f 视为一种流，它在图$[v]$ 的每个顶点 v 处都有盈余（$\partial_1 f$）（详情见下一节），并将 K 视为余循环。在这种情况下，τ_f（K）给出了流 f 沿 K传输的流量。特别地，正如预期的那样，当 K 由进入某个顶点的半边组成时，以下关系成立。

观察11. 设 G 是一个可定向曲面上的2-胞腔嵌入图，设 f 是 G中的一个1-链，设 v 是 G的一个顶点，并设 $K = \partial_2^\star v$。那么

$$\tau_f(K) = (\partial_1 f)[v].$$

此外，如果 f 是一个1-圈，那么对于每个余边界 R，都有 $\tau_f(R) = 0$ 。

证明。 由于 $K = \partial_2^\star v = \sum_{h \in \text{hes}(G): \text{tgt}(h) = v} h$，因此我们有

$$\begin{aligned}\tau_f(K) &= \sum_{h \in \text{hes}(G): \text{tgt}(h) = v} \tau_f(h) = \sum_{h \in \text{hes}(G): \text{tgt}(h) = v} f[h] \\ &= \sum_{h \in \vec{\text{hes}}(G)} f[h] \cdot (\partial_1 h)[v] = (\partial_1 f)[v].\end{aligned}$$

如果 f是一个 1-圈，即 $\partial_1 f = 0$，那么这意味着对每个顶点 v都有 $\tau_f(\partial_2^\star v) = 0$，并且我们可以将这一结论线性地推广到所有余边界。 □

我们来看看这一观察的对偶形式。

观察 12. 设 G 是一个图，在可定向曲面上有一个 *2*-胞腔嵌入；设 x 是 G 的一个面， K 是 G 中的一个1-链，并设 $f = \partial_2 x$。那么

$$\tau_f(K) = (\partial_1^\star K)[x].$$

此外，若 K 是余循环，则对每个 *1*-边界 b，都有 $\tau_b(K) = 0$ 。

我们还指出以下广为人知的事实，它说明了如何求得可定向曲面上嵌入的图的第一同调群的一组基。

观察13. 设 G 是一个图，在欧拉亏格为 g 的可定向曲面 Σ 上有一个 *2*-胞腔嵌入。 G 的同调群和上同调群都同构于 $\mathbb{Z}^g$。此外，存在一种算法，能在与 G 的大小呈线性关系的时间内，返回它们的基 $M = \{f_e : \ e \in Y\}$ 和 $Q = \{K_e : e \in Y\}$ ；这些基由大小为 g 的集合 Y 编号，使得对于 e 、 $e' \in Y$，有

$$\tau_{f_e}(K_{e'}) = \begin{cases} 1 & \text{if } e = e' \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

证明概要。基可按如下方式得到（示意见图5）：令 T 为 G 的一棵生成树，并令 $X = \{e^\star : e \in E(T)\}$。注意到 $G^\star - X$ 连通，令 T' 为 $G^\star - X$ 的一棵生成树，并令 S 为 G 的子图，其中 $V(S) = V(G)$ 且 $E(S) = \{e : e^\star \in E(T')\}$。注意到集合 $Y = E(G) \setminus (E(T) \cup E(S))$ 的大小为 g。对于每个 $e \in Y$，从构成 e 的半边 h_e 中选取一个，令 f_e 为 $C_1(T + e)$ 中满足 $f_e[h_e] = 1$ 的唯一 1-圈，并令 K_e 为 $C_1(S + e)$ 中满足 $K_e[h_e] = 1$ 的唯一余循环。则 $M = \{f_e : e \in Y\}$ 是 $H_1(G)$ 的一组基，而 $Q = \{K_e : e \in Y\}$ 是 $H^\star(G)$ 的一组基，且满足 (2)。

□

推论 14. 设 G 是可定向曲面上的一个具有 *2*-胞腔嵌入的图。当且仅当对每个 $K \in H^\star(G)$，都有$\tau_f(K) = 0$ 时，1-圈 f 才是1-边界。

证明。 根据观察 12，对于每个 1-边界 f 和余循环 K，都有 $\tau_f(K) = 0$ 。反过来，假设对于每个 $K \in H^\star(G)$，都有$\tau_f(K) = 0$。令 Y，$M = \{f_e : e \in Y\}$ 以及 $Q = \{K_e : e \in Y\}$ 如观察13所述。由于 f 是一个 1-圈，且M 是 $H_1(G)$的一组基，因此对于某个 1-边界 b 以及整数 α_e （ $e \in Y$），有 $f = b + \sum_{e \in Y} \alpha_e f_e$。对于每个 $e' \in Y$，由线性性和 (2) 得

$$0 = \tau_f(K_{e'}) = \tau_b(K_{e'}) + \sum_{e \in Y} \alpha_e \tau_{f_e}(K_{e'}) = \alpha_{e'},$$

因此， $f = b$ 是一个 1-边界。 □

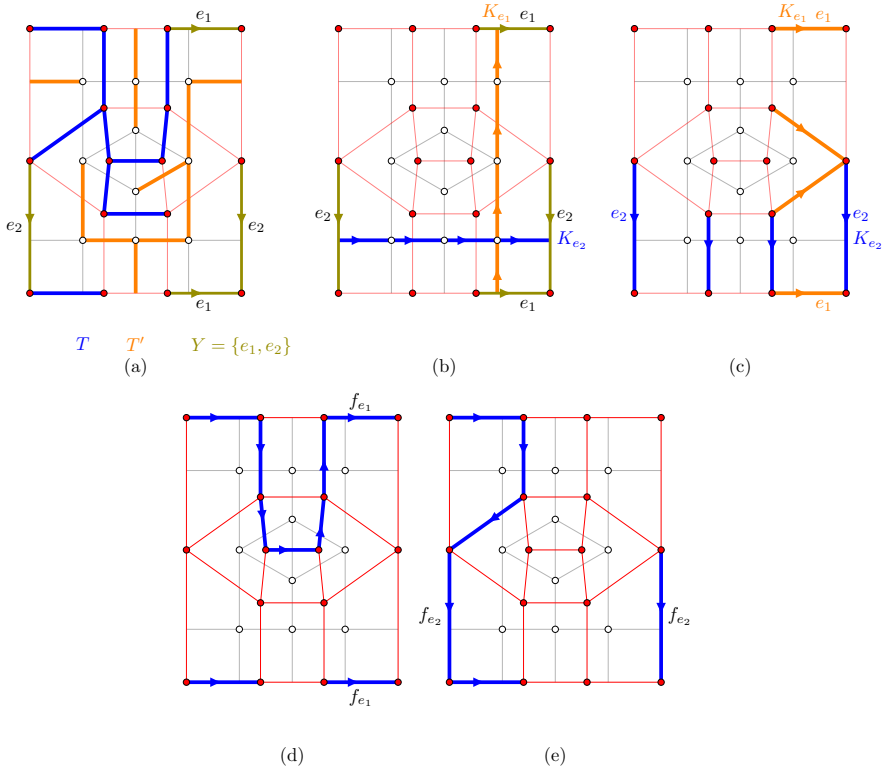


图5：如观察13所述，如何得到第一同调群的一组基的示例。(a) 描绘图 G 的一棵生成树 T （蓝色）、图 $G^\star - X$ 的一棵生成树T'（橙色）以及集合 $Y = \{e_1, e_2\}$ （绿色）；(b) 描绘图$T' + e_1^\star$（橙色）和图 $T' + e_2^\star$（蓝色）中的圈；(c) 描绘相应的余循环 K_{e_1}和 K_{e_2} ，它们构成图 $H^\star(G)$ 的一组基；(d) 和 (e) 描绘图 $T + e_1$ 和图 $T + e_2$ 中的圈 f_{e_1} 和 f_{e_2}，它们构成图 $H_1(G)$ 的一组基。

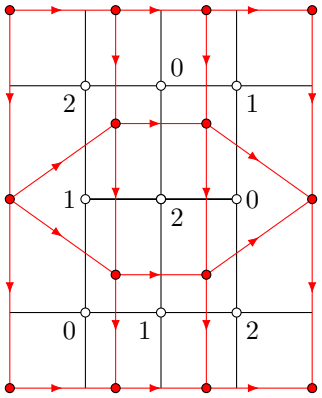


图 6：到一个三角形的图同态，以及相应的 f 中的无零流 G。

流-着色对偶

若 1-链 f满足对每个 $h \in$都有 $f[h] \in \{-1, 0, 1\}$ hes(G)，则称其为流；我们将 f 视为沿 h的方向发送数值为 $f[h]$ 的流量。注意，对每个$v \in V(G)$，($\partial_1 f)[v]$ 是图 v中流 f的盈余；我们考虑具有源点和汇点的流，因此一般不要求 $\partial_1 f = 0$。若流 f 对每个 $h \in$ 都满足 $f[h] \neq 0$ hes(G)，则称其为无零 。若 0-链 d 对每个 $v \in V(G)$都满足 $k|d[v]$ ，则称其可被 k 整除。

流与着色之间的对偶性由 Tutte [25], 发现，而到圈的同态版本则由 Goddyn 等人 [16]发现。我们给出证明，以说明术语上的差异。我们将长度为 m的圈 C的顶点集定义为 $\{0, \ldots, m-1\}$，其中每个顶点 v都与$v-1$ 和 $v+1$ （模 m）相邻。图 6 展示了一个到三角形的同态，以及对偶图中相应的无零流。

引理 15。设 G 是一个在可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图，设 S 是 $F(G)$ 的非空子集，设 C 是一个长度为 m 的圈，并设 $\psi: S \to V(C)$ 是任意函数。设 x 是 S 的任意一个元素，并且对每个 $y \in S \setminus \{x\}$，设 P_y 是从 x 到 y 的余路径。设 Q 是 $H^\star(G)$ 的一个基。那么下列命题等价:

(i) ψ 可扩展为从 $G^\star$ 到 C 的同态。

(*ii*) 存在一个无零流 f，使得

- $\partial_1 f$ *is divisible by* m,
- $\tau_f(K)$ *is divisible by* m *for every* $K \in Q$, *and*
- *for each* $y \in S \setminus \{x\}$, *we have* $\tau_f(P_y) \equiv \psi(y) - \psi(x) \pmod m$.

证明。假设 $\varphi\colon F(G) \to V(C)$ 是一个从 $G^\star$ 出发并延拓 ψ 的同态，并令我们将 φ 线性地延拓到 G 中的 2-链。令 f 为G中的无零流，使得对于每个 $h \in \mathrm{hes}(G)$，$f[h]$ 是满足以下条件的 $\{-1,1\}$ 中唯一的元素

$$f[h] \equiv \varphi(\partial_1^\star h) = \varphi(\mathrm{left}(h)) - \varphi(\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))) \pmod m;$$

这样的元素存在，因为 φ 是到 C的同态。对于任意1-链 K，我们有

$$\tau_f(K) = \sum_{h \in \vec{\mathrm{hes}}(G)} K[h] f[h] \equiv \sum_{h \in \vec{\mathrm{hes}}(G)} K[h] \varphi(\partial_1^\star h) = \varphi(\partial_1^\star K) \pmod m$$

根据线性性。特别地，若 K是余循环，即 $\partial_1^\star K = 0$，则$\tau_f(K) \equiv 0$（模 m）。因此，

对于每个 $K \in Q$，都有• $\tau_f(K) \equiv 0$（模 m），并且

根据观察11，对于每个顶点 $v \in V(G)$，我们有•

$$(\partial_1 f)[v] = \tau_f(\partial_2^\star v) \equiv 0 \pmod m,$$

因此 $\partial_1 f$ 可被 m整除。

最后，对于每个 $y \in S \setminus \{x\}$，我们有

$$\begin{aligned}\tau_f(P_y) &\equiv \varphi(\partial_1^\star P_y) = \varphi(y - x) \\ &= \varphi(y) - \varphi(x) = \psi(y) - \psi(x) \pmod m.\end{aligned}$$

因此，(i) 蕴含 (ii)。

反过来，假设 f 是满足 (ii) 中所列条件的无零流。令 $Q' = \{\partial_2^\star v\colon v \in V(G)\}$。根据假设和观察 11，对于每个 $K_0 \in Q \cup Q'$，我们有 $m | \tau_f(K_0)$。由于 Q 生成 $H^\star(G)$，且 Q' 生成 $B^\star(G)$，所以 $Q \cup Q'$ 生成 $Z^\star(G)$，因此对于每个余循环 K，都有 $m | \tau_f(K)$。对于每个 $y \in F(G) \setminus (S \setminus \{x\})$，令 P_y 为一条从 x 到 y 的任意余路径。对于每个 $y \in F(G)$，我们定义

$$\varphi(y) = (\psi(x) + \tau_f(P_y)) \bmod m.$$

我们声称 φ 是从 $G^\star$ 到 C 的一个同态，且扩展了 ψ。事实上，假设 $y,\ y' \in F(G)$ 是 $G^\star$ 的相邻顶点，并令 h 为 G 的一条半边，使得 $\mathrm{left}(h)$ 为 $= y$，且 $\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))$ 为 $= y'$。那么

$$\partial_1^\star(P_y - h - P_{y'}) = (y - x) - (y - y') - (y' - x) = 0,$$

因此，$P_y - h - P_{y'}$ 是一个余循环，并且 $m | \tau_f(P_y - h - P_{y'})$。因此，

$$\begin{aligned}\varphi(y) - \varphi(y') &\equiv \tau_f(P_y) - \tau_f(P_{y'}) \\ &= \tau_f(h) + \tau_f(P_y - h - P_{y'}) \\ &\equiv f[h] = \pm 1 \pmod m,\end{aligned}$$

因为 f 处处非零。因此， φ 是从 $G^\star$ 到 C的同态。此外，对于任意 $y \in S$，我们有

$$\varphi(y) \equiv \psi(x) + \tau_f(P_y) \equiv \psi(y) \pmod{m},$$

若 $y \neq x$ （由假设可知），且若 $y = x$ （因为 P_x 是余循环）。因此，对于每个 $y \in S$，$\varphi(y) = \psi(y)$，故 (ii) 蕴含 (i)。 □

对于 1-链 K 和 K'，若对每个满足 $K'[h] \geq 0$ 的半边 h，都有 $0 \leq K[h] \leq K'[h]$，我们记作 $K \preceq K'$。对于图 G 中的 1-链 f， f-循环流 是图 G 中的 1-圈 $c \preceq f$；特别地， c 只能沿着与 f 相同的方向发送流。循环流可用于在边界相同的任意两个无零流之间进行转换。

观察 16。设 f_0 是图 G 中的无零流，并令 $d = \partial_1 f_0$。

- 若 c 是一个 f_0-循环流，则 $f_0 - 2c$ 是图 G 中满足 $\partial_1(f_0 - 2c) = d$ 的无零流。
- 若 f 是 G 中满足 $\partial_1 f = d$ 的无零流，则 $(f_0 - f)/2$ 是一个 f_0-循环流。

推论 17. 设 G 是一个图， d 是一个0-边界，且 f_0 是 G 中满足 $\partial_1 f_0 = d$ 的无零流。设 Q 是由若干对组成的系统 (K, a)，其中 K 是一个1-链， a 是一个整数。以下各项等价：

- 存在一个 G 中的无零流 f，使得 $\partial_1 f = d$ 且对于每个 $(K, a) \in Q$，$\tau_f(K) = a$。
- 存在一个 f_0-循环流 c，使得对于每个$(K, a) \in Q$，$\tau_c(K) = \frac{1}{2}(\tau_{f_0}(K) - a)$。

注意，对于固定的 0-边界 d，推论 17 将验证引理 15 的条件 (ii) 拆分为两个独立的步骤。

(A) 判定在 G 中是否存在满足 $\partial_1 f_0 = d$的无零流 f_0。

(B) 判定是否存在 c，使其为一个 f_0-循环流，并在固定余路径和余圈上对 τ_c 取给定值（模 m）。

如以下引理所示，利用任何高效的最大流算法，都可以在多项式时间内轻松解决第一部分 (A)。我们称图 G 中的 0-边界 d 为奇偶相容 的，如果对于每个 $v \in V(G)$， $d[v]$ 与 G 中 v 的度具有相同的奇偶性。

引理 18。设 G 为一个图， d 为一个0-边界。以下断言等价。

(i) 存在一个无零流 f_0，位于 G 中，且满足 $\partial_1 f_0 = d$。

(ii) 0-边界 d 是奇偶相容的，并且存在一个流 f_1，位于 G 中，且满足$\partial_1 f_1 = d$。

此外，给定 *(ii)* 中的 f_1，可在线性时间内找到满足 $\partial_1 f_0 = d$ 的无零流 f_0。

证明。假设 f_0 存在；由于对于每个半边 h，$|f_0[h]| = 1$ $d[v] = (\partial_1 f_0)[v] = \tau_{f_0}(\partial_2^\star v)$ 与 v 的度具有相同的奇偶性，对每个 $v \in V$（G）均成立。因此，d 是奇偶相容的，我们可以令 $f_1 = f_0$。

反过来，假设 (ii) 成立。考虑无向图 T，其顶点集为 $V(G)$，边集由满足以下条件的边 $e \in E(G)$ 组成：对于 e 的两个半边 h 中任意一个（或等价地，两个都），$f_1[h] = 0$。由于 $d = \partial_1 f_1$ 是奇偶相容的，T 中每个顶点的度都是偶数，因此在 T 的每个连通分量中，都存在一条闭游走，恰好经过该连通分量的每条边一次。对于每条这样的游走，选定一个方向，并令 $f_1' \in C_1(G)$ 为 T 中方向与包含该半边的游走所选方向一致的半边之和。于是，f_1' 是 G 中的一个流，且满足 $\partial_1 f_1' = 0$；对于每个半边 h，$|f_1[h]|$ 和 $|f_1'[h]|$ 中恰有一个为 1，另一个为 0。因此，$f_0 = f_1 + f_1'$ 是 G 中的一个无零流，且满足 $\partial_1 f_0 = \partial_1 f_1 = d$。此外，使用寻找欧拉回路的标准算法，可在线性时间内找到流 f_1'。

□

因此，(A) 简化为寻找任意一个具有给定奇偶相容边界 d 的流。众所周知，这可以改述为在相应的网络（容量有界、指定两个顶点分别为源点和汇点的有向图）中寻找流。

引理 19. 设 G 是一个图，d 是一个0-边界。设 H 是按如下方式构造的网络：从 G 开始，将每条边替换为一对方向相反、容量为 1 的有向边。添加一个顶点 s，并对每个满足$d[v] < 0$的 $v \in V(G)$，添加一条从 s 到 v、容量为 $|d[v]|$ 的边；再添加一个顶点 t，并对每个满足 $d[v] > 0$ 的 $v \in V(G)$，添加一条从 v 到 t、容量为 $d[v]$ 的边。当且仅当网络 H 中存在一条从 s 到 t、流量大小为 $|d|/2$ 的流时，G 中存在流 f_1，使得 $\partial_1 f_1 = d$。

证明。注意，通过将 $v \in V(G)$ 与 s 或 t 之间每条边上的流设为 $|d[v]|$，可以将 f_1 转化为 H 中的一个大小为 $|d|/2$ 的流。

反过来，由于 H 具有整数容量，我们可以假设 H 包含一个从 s 到 t、大小为 $|d|/2$ 且取整数值的网络流 g。由于 g 的大小为$|d|/2$，$v \in V(G)$ 与 s 或 t 之间每条边上的流都等于 $|d[v]|$。因此，按照自然方式将 G 的半边解释为 $H - \{s,t\}$ 的有向边，并定义 $f_1 = \sum_{h \in \vec{E}_{\mathrm{hes}(G)}} (g(h) - g(\mathrm{opp}(h))) \cdot h$，我们得出结论：$f$ 是一个满足 $\partial_1 f_1 = d$的流。 □

最后，我们指出一个需要测试的可能边界数量的上界。若图 G 中的 0-边界 d 满足奇偶相容，且对于每个 $v \in V$（G），$|d[v]|$ 不大于 v 的度，则称其为相关的。

观察 20。 设 G 为画在可定向曲面上的图，$H = G^\star$ 为其对偶图。对于 G中的任意无零流 f，其0-边界 $\partial_1 f$是相关的。此外，若 C 是一个圈，则 G 中可被 $|C|$整除的相关0-边界至多有 $q^\star_C(H)$ 个，并且每个这样的0-边界 d 都满足 $|d|+1 \leq b^\star_C(H)$。

为了解决第二部分（B），我们使用下一节中描述的算法。

3 具有指定同调的循环流

对于 1-链 f 和 K，我们定义

$$\tau^+_f(K) = \sum_{h\in \mathrm{hes}(G): f[h],K[h]>0} f[h]K[h].$$

直观地说，如果 K是余循环，那么 $\tau^+_f(K)$ 是任意满足 $f' \preceq f$的流 f'通过 K所能输送的流量上界。下面我们说明这一概念的一些基本性质。

观察 21. 对于任意 1-链 f 和 K，我们有

$$\tau^+_f(K) = \tau^+_{-f}(-K)$$

and

$$\tau_f(K) = \tau^+_f(K) - \tau^+_{-f}(K),$$

并且如果 f 是无零流，那么

$$|K| = \tau^+_f(K) + \tau^+_{-f}(K).$$

证明。 第一个结论成立，因为对于每个 $h \in \mathrm{hes}(G)$，都有 $(-f)[\mathrm{opp}(h)] = f[h]$、$(-K)[\mathrm{opp}(h)] = K[h]$，且 opp 是一个对合。第二个结论成立，因为

$$\begin{aligned}\tau_f(K) &= \sum_{h\in \mathrm{hes}(G): K[h]>0} f[h]K[h] \\ &= \sum_{h\in \mathrm{hes}(G): K[h]>0} (\max(f[h],0) - \max(-f[h],0))K[h] = \tau^+_f(K) - \tau^+_{-f}(K).\end{aligned}$$

对于最后一个结论，我们假设 f 是无零流，即对于每个半边 h，都有 $|f[h]| = 1$。因此，

$$\begin{aligned}|K| &= \sum_{h\in \mathrm{hes}(G): K[h]>0} K[h] \\ &= \sum_{h\in \mathrm{hes}(G): K[h]>0} (\max(f[h],0) + \max(-f[h],0))K[h] = \tau^+_f(K) + \tau^+_{-f}(K).\end{aligned}$$

□

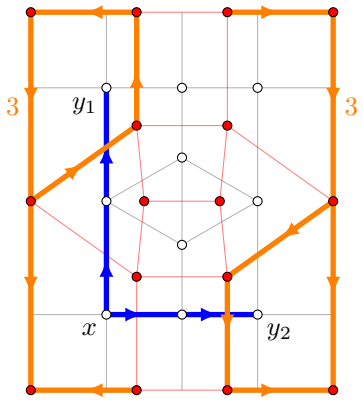


图 7：引理 23 的示例，其中 $S = \{x, y_1, y_2\}$, $a'(x) = 0$, $a'(y_1) = 1$,$a'(y_2) = 1$, $a(K_{e_1}) = 0$, $a(K_{e_2}) = 2$；基的选取见图5。余路径 P_{y_1} 和 P_{y_2} 在 $G^\star$ 中以蓝色表示。所需的 1-圈 b 为橙色，它由 $b = 2f_{e_2} + 3\partial_2 y_1 + \partial_2 y_2$得到。 b 的一条边的系数为 3，其余边的系数均为 1。

对于图 G 中的 1-链 K，令 $\tau_f^+(K + B^\star(G))$ 表示对所有余边界 R 取 $\tau_f^+(K + R)$ 的最小值。此定义的动机是关于 f-循环流的以下必要条件。

引理 22. 设 f 和 K 是图 G中的 1-链。对于每个 f-循环流 c,

$$\tau_c(K) \le \tau_f^+(K + B^\star(G)).$$

证明. 设 R 为一个余边界，使得令 $K' = K + R$后，我们有 $\tau_f^+(K + B^\star(G)) = \tau_f^+(K')$。由观察11可得 $\tau_c(R) = 0$。由于 c是一个 f-循环流，我们有

$$\begin{aligned}\tau_c(K) &= \tau_c(K') - \tau_c(R) = \tau_c(K') \\ &= \sum_{h \in \mathrm{hes}(G): c[h] > 0} c[h]K'[h] \le \sum_{h \in \mathrm{hes}(G): c[h], K'[h] > 0} c[h]K'[h] \\ &\le \sum_{h \in \mathrm{hes}(G): f[h], K'[h] > 0} f[h]K'[h] = \tau_f^+(K') = \tau_f^+(K + B^\star(G)).\end{aligned}$$

□

在（B）中，我们要求一个 f_0-循环流 c，使其在固定余路径和余圈上的 τ_c 取值为指定值。我们首先证明，总是至少存在一个 1-圈 b，使其在相关余路径和余圈上的 τ_b 取值为指定值。这直接源于 $H_1(G)$ 与 $H^\star(G)$ 的基的正交性。

引理 23。设 G 是一个大小为 n 的图，在欧拉亏格为 g的可定向曲面上有一个 2-胞腔嵌入。设 $a:\ H^\star(G)\ \to \mathbb{Z}$ 是一个同态。设 S是 $F(G)$ 的一个非空子集，设 x 是 S的一个元素；对每个 $y \in S$，设P_y 是从 x 到 y的一条余路径；并设 $a':\ S \to \mathbb{Z}$ 是一个任意函数，满足 $a'(x)\ = 0$。那么存在一个 1-圈 b，使得对每个 $K \in H^\star(G)$，均有 $\tau_b(K)\ = a(K)$；并且对每个 $y \in S$，均有 $\tau_b(P_y)\ = a'(y)$。此外，b 可以在 $O(g+1)\,|S|n$时间内构造出来。

证明。令 $Y, M = \{f_e :\ e \in Y\}$ 和 $Q = \{K_e :\ e \in Y\}$ 如观察13所述。1-圈 b 由基M 中元素的线性组合得到，该组合的选取使得对于每个 $e \in Y$，都有 $\tau_b(K_e) = a(K_e)$；因此，对于每个 $K \in H^\star(G)$，也有 $\tau_b(K) = a(K)$。为确保对于每个 $y \in S$都有 $\tau_b(P_y) = a'(y)$，我们将 $\partial_2 y$ 的适当倍数加到 b上；根据观察 12，这不会影响 $K \in H^\star(G)$ 的 $\tau_b(K)$ 值。示例见图 7。

更准确地说，对于每个 $y \in S \setminus \{x\}$，令 $\gamma_y \in \mathbb{Z}$ 为

$$\gamma_y = a'(y) - \sum_{e \in Y} a(K_e)\tau_{f_e}(P_y). \tag{3}$$

令 1-圈 b 为

$$b = \sum_{e \in Y} a(K_e) f_e + \sum_{y \in S \setminus \{x\}} \gamma_y \partial_2 y. \tag{4}$$

考虑任意余循环 $K \in H^\star(G)$，其中 $K = \sum_{e \in Y} \alpha_e K_e$，且 α_e为某些整数。注意，对于 $y \in F(G)$，根据观察 12，有 $\tau_{\partial_2 y}(K) = 0$；由 (2) 可得

$$\begin{aligned}\tau_b(K) &= \sum_{e \in Y} a(K_e) \sum_{e' \in Y} \alpha_{e'} \tau_{f_e}(K_{e'}) = \sum_{e \in Y} a(K_e)\alpha_e \\ &= a\left(\sum_{e \in Y} \alpha_e K_e\right) = a(K),\end{aligned}$$

因为 a 是一个同态。此外，对于每个 $y \in S\setminus\{x\}$ 和一个面 $y' \notin \{x, y\}$，我们有 $\tau_{\partial_2 y'}(P_y) = (\partial_1^\star P_y)[y'] = 0$，且 $\tau_{\partial_2 y}(P_y) = (\partial_1^\star P_y)[y] = 1$，这意味着

$$\tau_b(P_y) = \left(\sum_{e \in Y} a(K_e)\tau_{f_e}(P_y)\right) + \gamma_y = a'(y)$$

根据 γ_y的选取。

计算 (3) 中的 γ_y 需要时间 $O(1+gn)$。随后，根据 (4) 计算 b 需要时间 $O(gn + |S|((gn+1)+n)) = O((g+1)|S|n)$。 □

我们要指出，对于引理 23 陈述中提到的算法，同态 a 应由它在利用观察13得到的 $H^\star(G)$ 的基 Q 上的取值给出。当然，这并非实质性限制，因为如果同态是在其他基下给出的，我们只需对其进行转换即可；此外，在所有应用中，a 实际上都是以这种方式表示的。

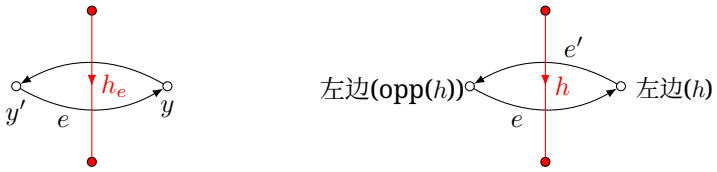


图 8：定理 24 中的记号。

以下定理的证明是我们方法的基石，其灵感来自 Chambers 等人 [4, 5]。若对于每条半边 h，1-链 K 都满足 $|K[h]| \leq 1$，则称其为简单的。

定理 24. 设 G 是一个大小为 n 的图，在欧拉亏格为 g的可定向曲面上有一个 2-胞腔嵌入。设 $a: H^\star(G) \to \mathbb{Z}$ 是一个同态。设 S 是 $F(G)$的一个非空子集，设 x 是 S 的一个元素；对于每个 $y \in S$，设 P_y是从 x 到 y的一条余路径；再设 $a': S \to \mathbb{Z}$ 是一个满足 $a'(x) = 0$的任意函数。设 f 是 G中的一个 1-链。以下命题等价：

(i) 存在一个 f-循环流 c，使得对每个 $K \in H^\star(G)$，有 $\tau_c(K) = a(K)$；并且对每个 $y \in S$，有 $\tau_c(P_y) = a'(y)$。

(ii) 对每个 y、$y' \in S$ 和 $K \in H^\star(G)$，

$$a(K) + a'(y') - a'(y) \leq \tau_f^+(K + P_{y'} - P_y + B^\star(G)).$$

(iii) 对于每个 y、$y' \in S$、$K \in H^\star(G)$ 以及余边界 R，如果余路径 $D = K + P_{y'} - P_y + R$ 是简单的，那么

$$a(K) + a'(y') - a'(y) \leq \tau_f^+(D).$$

此外，存在一种算法，可在时间 $O(n^2 + (g+1)|S|n)$ 内，要么找到一个满足 *(i)* 中描述的 f-循环流 c，要么找到一条简单余路径 $D = K + P_{y'} - P_y + R$，对应某些 y、$y' \in S$、余边界 R 和余循环 $K \in H^\star(G)$，使得 $a(K) + a'(y') - a'(y) > \tau_f^+(D)$。

证明。 根据引理 22，(i) 蕴含 (ii)，因为 $\tau_c(K + P_{y'} - P_y) = a(K) + a'(y') - a'(y)$ 和 $\tau_f^+(D) \geq \tau_f^+(K + P_{y'} - P_y + B^\star(G))$。此外，(ii) 显然蕴含 (iii)，因为 $B^\star(G)$。因此，只需证明 (iii) 蕴含 (i)。为此，我们描述一种算法，它要么生成一个满足 (i) 的 f-循环流，要么生成一条简单余路径 D，以此说明 (iii) 不成立。

根据引理 23，总存在一个 1-圈 b，满足对每个 $K \in H^\star$，$\tau_b(K) = a(K)$，且对每个 $y \in S$，$\tau_b(P_y) = a'(y)$；然而，b 不一定是一个 f-循环流。为了得到一个 f-循环流 c，我们通过添加 $\partial_2 L$ 来修改 b，其中 L 是经过适当选择的 2-链，使得对每个 $y \in S$都有 $L[y] = 0$；根据观察 12，

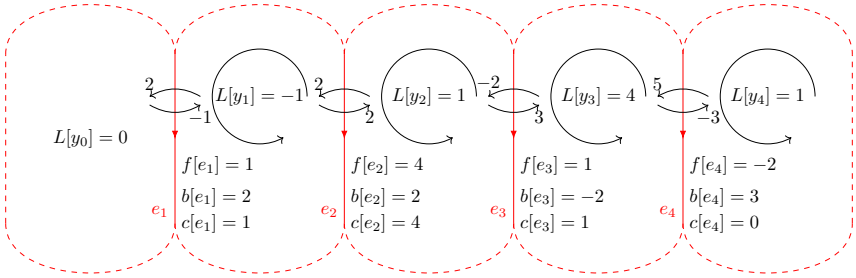


图9：定理 24 中的情形。图中展示了 5 个面 y_0、……、y_4，其中 $y_0 \in S$和 e_i 是边，满足 $\mathsf{left}(e_i) = y_i$ 且 $\mathsf{left}(\mathsf{opp}(e_i)) = y_{i-1}$，并标出了每条对应半边的 f、b、c 值。穿过 e_i的黑色边是对偶图的边，并标出了这些边在式 (5) 中的长度 ℓ。每个面中都描绘了 $L[y_i]$ 的值，有向弧则显示了 $\partial_2 y_i$ 的方向。

这确保了对于每个 $P \in H^\star(G) \cup \{P_y : y \in S\}$，$\tau_c(P) = \tau_b(P)$。2-链 L 的选取满足：对于每个 $y \in F(G)$，$L[y]$ 是从 S 到 y 的距离，该距离是在由 G 的对偶图导出的有向图中计算的；其中边的长度经过精心选取，以确保对于每个满足 $f[h] \geq 0$ 的 $h \in \mathsf{hes}(G)$，$0 \leq (b + \partial_2 L)[h] \leq f[h]$。现在让我们详细阐述这个思路。

我们将 G 的对偶图 $G^\star$ 视为一个对称定向图，并令 ℓ 为一个函数，按如下方式为其有向边赋予长度：对于任意边 $e = (y', y) \in E(G^\star)$，令 h_e 为 G 中与 e 对偶的半边，使得 $\mathsf{left}(h_e) = y$，参见图 8(a)。令

$$\ell(e) = \begin{cases} f[h_e] - b[h_e] & \text{if } f[h_e] > 0 \\ -b[h_e] & \text{if } f[h_e] \leq 0. \end{cases} \tag{5}$$

值得一提的是，ℓ （通常）既非对称，也非反对称，参见图9。

我们先考虑这样的情形：赋予这些长度后，$G^\star$ 包含一个长度为负的有向圈 C，因此 ℓ 不能用于定义度量。令$D = \sum_{e \in E(C)} h_e$，并注意到 D 是一个简单余圈。于是

$$\begin{aligned} \tau_f^+(D) - \tau_b(D) &= \sum_{e \in E(C): f[h_e] > 0} f[h_e] - \sum_{e \in E(C)} b[h_e] \\ &= \sum_{e \in E(C): f[h_e] > 0} (f[h_e] - b[h_e]) + \sum_{e \in E(C): f[h_e] \leq 0} (-b[h_e]) \\ &= \sum_{e \in E(C)} \ell(e) < 0. \end{aligned}$$

此外，由于 D 是一个余循环，对于某个 $K \in H^\star(G)$ 和一个余边界 R，我们有 $D = K + R$。根据观察11，

$$\tau_f^+(D) < \tau_b(D) = \tau_b(K) = a(K).$$

这表明 (iii) 是错误的，其中 $y = y' = x$。

因此，我们可以假设 $G^\star$ 中不存在负长度圈。现在假设存在一条有向路径 P，从某个 $y \in S$ 到某个 $y' \in S$，且位于 $G^\star$ 中，长度为负；令 $D = \sum_{e \in E(P)} h_e$。那么 D 是一条从 y 到 y' 的简单余路径，并且我们有

$$\begin{aligned}\tau_f^+(D) - \tau_b(D) &= \sum_{e \in E(P): f[h_e] > 0} (f[h_e] - b[h_e]) + \sum_{e \in E(P): f[h_e] \le 0} (-b[h_e]) \\ &= \sum_{e \in E(P)} \ell(e) < 0.\end{aligned}$$

注意，$D - P_{y'} + P_y$ 是一个余循环，因此对于某个 $K \in H^\star(G)$ 以及一个余边界 R，有 $D - P_{y'} + P_y = R + K$。因此，$D = K + P_{y'} - P_y + R$，并利用观察11，

$$\tau_f^+(D) < \tau_b(D) = \tau_b(K) + \tau_b(P_{y'}) - \tau_b(P_y) = a(K) + a'(y') - a'(y).$$

这再次表明 (iii) 是错误的。

因此，我们可以假设 $G^\star$ 中不存在连接 S 的元素且长度为负的路径。令 L 为如下的 2-链：对于每个 $y \in F(G)$，$L[y]$ 是在边长为 ℓ 的 $G^\star$ 中从 S 到 y 的距离；由于不存在负长度圈，该距离有定义。并且对于每个 $y \in S$，都有 $L[y] = 0$，因为连接 S 中各元素的负长度路径不存在。令 $c = b + \partial_2 L$，见图9。我们要证明 c 是满足 (i) 的所需 f-循环流。由于 $\partial_2 L$ 是一个 1-边界，而 b 是一个 1-圈，因此 c 是一个 1-圈。根据观察 12，对于任意余循环 K，我们有 $\tau_{\partial_2 L}(K) = 0$，因此对于每个 $K \in H^\star(G)$，$\tau_c(K) = \tau_b(K) = a(K)$。对于 $y \in S$，我们有

$$\begin{aligned}\tau_{\partial_2 L}(P_y) &= \sum_{y' \in F(G)} L[y'] \tau_{\partial_2 y'}(P_y) = \sum_{y' \in F(G)} L[y'](\partial_1^\star P_y)[y'] \\ &= L[y] - L[x] = 0,\end{aligned}$$

因为 $x, y \in S$。因此，$\tau_c(P_y) = \tau_b(P_y) = a'(y)$。

现在考虑半边 $h \in \mathsf{hes}(G)$，其中 $f[h] \ge 0$ 不失一般性，设 e 为 $G^\star$ 向左的对应边(h)，并设 e' 为与 e相对的边，见图8(b)。我们有

$$c[h] = b[h] + (\partial_2 L)[h] = b[h] + (L[\mathrm{left}(h)] - L[\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))]).$$

由于 $L[\mathsf{left}(h)]$ 和 $L[\mathsf{left}(\mathsf{opp}(h))]$ 是从 S 到 $\mathsf{left}(h)$ 和 $\mathsf{left}(\mathsf{opp}(h))$ 的距离，根据三角不等式可得

$$L[\mathrm{left}(h)] \le L[\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))] + \ell(e) = L[\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))] + f[h] - b[h]$$

and

$$L[\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))] \le L[\mathrm{left}(h)] + \ell(e') = L[\mathrm{left}(h)] - b[-h] = L[\mathrm{left}(h)] + b[h].$$

因此,

$$-b[h] \le L[\mathrm{left}(h)] - L[\mathrm{left}(\mathrm{opp}(h))] \le f[h] - b[h],$$

因此 $0 \le c[h] \le f[h]$。所以， c 是一个 f-循环流，(i) 得证。

使用 Bellman-Ford 算法，可以在 $O(|V(G^\star)| \cdot |E(G^\star)|) = O(n^2)$ 的时间内找到从 S 出发的单源最短路径（或一个负环）。加上引理 23 中算法的复杂度，我们得出，所述过程可在时间复杂度为 $O(n^2 + (g+1)|S|)n)$ 的时间内实现。 □

下面给出流分解推论。

推论 25. 设 G 是一个在可定向曲面上具有 *2*-胞腔嵌入的图。设 c_0 和 c 是图中的 *1*-循环，且 k 是一个正整数。若 $c - kc_0 \in B_1(G)$，则存在 c-循环流 c_1，. . .，c_k，使得 $c = c_1 + \ldots + c_k$ 且 $c_i - c_0 \in B_1(G)$ 对所有 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 均成立。

证明。我们对 k 使用归纳法来证明该断言。若 $k = 1$，则可以令 $c_1 = c$。因此，我们可以假设 $k \ge 2$。只需证明存在一个 c-循环流 c_k such that$c_k - c_0 \in B_1(G)$，由归纳假设应用于 $k-1$ and the 1-圈 $c - c_k$，即可推出该断言。

定义一个同态 $a : H^\star(G) \to \mathbb{Z}$，令每个 $K \in H^\star(G)$ 对应 $a(K) = \tau_{c_0}(K)$。注意，根据观察 12， $\tau_c(K) = \tau_{kc_0}(K) = ka(K)$。令 $S = \{x\}$ 表示 G 的任意一个面 x，并定义 $a' : S \to \mathbb{Z}$ 为 $a'(x) = 0$。由于 c 是一个 c-循环流，引理 22 蕴含，对于任意 $K \in H^\star(G)$，我们有

$$ka(K) = \tau_c(K) \le \tau_c^+(K + B^\star(G)).$$

由于右侧非负且 $k \ge 1$，因此可得

$$a(K) \le \tau_c^+(K + B^\star(G)).$$

因此，定理 24 表明存在一个 c-循环流 c_k，使得对于每个 $K \in H^\star(G)$， $\tau_{c_k}(K) = a(K) = \tau_{c_0}(K)$。因此，对于每个 $K \in H^\star(G)$， $\tau_{c_k - c_0}(K) = 0$，故由推论 14 可得 $c_k - c_0 \in B_1(G)$。 □

实际上，我们需要这个推论的对偶形式。所谓 K-余循环流，是指一个余圈 $K' \preceq K$。

推论 26。 设 G 是一个在可定向曲面上具有 *2*-胞腔嵌入的图。设 K_0 和 K 是 G 中的余圈，并设 k 是一个正整数。若 $K - kK_0 \in B^\star(G)$，则存在 K-余循环流 K_1、.....、 K_k，使得 $K = K_1 + \ldots + K_k$ 且 $K_i - K_0 \in B^\star(G)$ 对 $i \in \{1, \ldots, k\}$成立。

现在，我们来提出一些观察，这些观察对于处理定理24中的条件(ii)很有用。

观察 27. 设 G 是一个在可定向曲面上具有 *2*-胞腔嵌入的图，并设 f 是 G中的一条 *1*- 链。 G 中的所有 1- 链 K 和 K' 都满足

$$\tau_f^+(K+K'+B^\star(G)) \le \tau_f^+(K+B^\star(G)) + \tau_f^+(K'+B^\star(G)).$$

证明。 设 $R, R' \in B^\star(G)$ 满足 $\tau_f^+(K+B^\star(G)) = \tau_f^+(K+R)$ 且$\tau_f^+(K'+B^\star(G)) = \tau_f^+(K'+R')$。由于 $R+R' \in B^\star(G)$,

$$\begin{aligned}\tau_f^+(K+K'+B^\star(G)) &\le \tau_f^+(K+K'+R+R') \\ &= \sum_{h\in \mathrm{hes}G: f[h]>0} f[h]\max(0,(K+K'+R+R')[h]) \\ &\le \sum_{h\in \mathrm{hes}G: f[h]>0} f[h](\max(0,(K+R)[h]) + \max(0,(K'+R')[h])) \\ &= \tau_f^+(K+R) + \tau_f^+(K'+R').\end{aligned}$$

□

此外，推论 26 表明 τ_f^+ 关于余圈具有乘法性。

引理 28。 设 G 是一个在可定向曲面上具有 *2*-胞腔嵌入的图，且 f 是 G 中的一个 *1*-链。对于每个正整数 k 和一个余循环 K，有

$$\tau_f^+(kK+B^\star(G)) = k\cdot\tau_f^+(K+B^\star(G)).$$

证明。 不等式 $\tau_f^+(kK+B^\star(G)) \le k\cdot\tau_f^+(K+B^\star(G))$ 由观察 27 得出。反向不等式方面，考虑一个余循环 K'，使得 $K'-kK \in B^\star(G)$ 且 $\tau_f^+(K') = \tau_f^+(kK+B^\star(G))$。由推论 26，存在 K'-余循环流 $K_1,\ldots,K_k$，使得 $K' = K_1+\ldots+K_k$ 且 $K_i-K \in B^\star(G)$，其中$i \in \{1,\ldots,k\}$。注意，由于 $K_i \preceq K'$，对于每个 $h \in \mathsf{hes}(G)$，若 $K'[h] > 0$，则 $K_i[h] \ge 0$；若 $K_i[h] > 0$，则 $K'[h] > 0$，因此 $\tau_f^+(K') = \sum_{i=1}^k \tau_f^+(K_i)$。因此,

$$\tau_f^+(kK+B^\star(G)) = \tau_f^+(K') = \sum_{i=1}^k \tau_f^+(K_i) \ge k\cdot\tau_f^+(K+B^\star(G)).$$

□

4 允许同调的多面体

定理 24 中的条件 (ii) 和 (iii) 可视为约束函数 a 和 a' 的线性不等式，这意味着 f-循环流的可能同调构成一个有界维数空间中的多面体。本节将这一直观想法精确化。

设 G 是可定向曲面上的一个 2-胞腔嵌入图， Q 是 $H^\star(G)$ 的一个基， f 是 G 中的一条 1-链。设 S 是一个非空子集

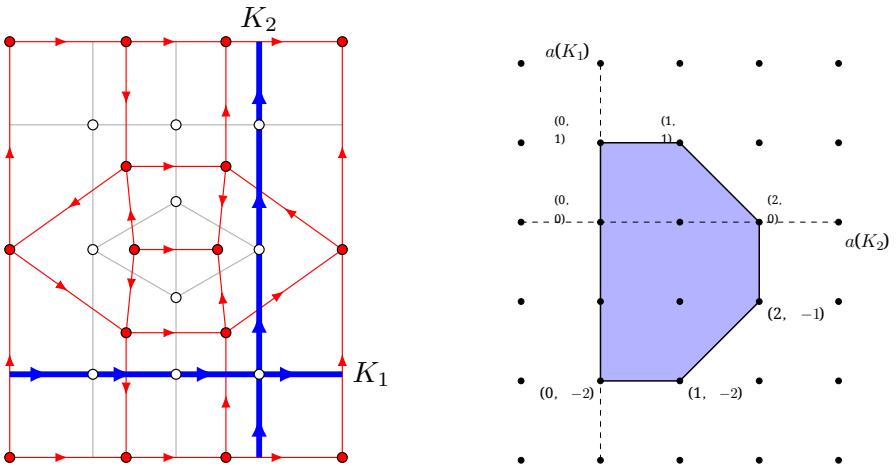


图1：一个图 G，其上有无零流 f 绘制在环面上、其上同调群的基$Q = \{K_1, K_2\}$，以及对应的多面体 $\mathcal{P}_{G,\ F,\ Q}$，该多面体表示 f-循环流所允许的同调。

属于 $F(G)$，设 x 是 S 的一个元素，并设 P 是一个函数，它为每个 $y \in S$ 指定一条从 x 到 y 的余路径 $P(y)$，其中 $P(x) = 0$。对于 $a \in \mathbb{R}^Q$ 和 $z \in \mathbb{Z}^Q$，设 $\langle z, Q\rangle = \sum_{K\in Q} z(K)K$ 且 $\langle z, a\rangle = \sum_{K\in Q} z(K)a(K)$。定义

$$\mathcal{P}_{G,f,Q,P} = \left\{ \begin{array}{l} (a, a') \in \mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^S : a'(x) = 0, \\ \langle z, a\rangle + a'(y') - a'(y) \le \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G)) \\ \qquad\qquad \text{for every } z \in \mathbb{Z}^Q \text{ and } y, y' \in S \end{array} \right\};$$

and

$$\mathcal{P}_{G,f,Q} = \{a \in \mathbb{R}^Q : \langle z, a\rangle \le \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) \text{ for every } z \in \mathbb{Z}^Q\}.$$

根据定理 24，存在一个 f-循环流 c，使得对于每个$K \in Q$，$\tau_c(K) = a(K)$；并且当且仅当 $(a,\ a') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$ 时，对于每个 $y \in S$，$\tau_c(P(y)) = a'(y)$。图10展示了环面上的一个图，它具有无零流，以及对应的多面体 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ \{K_1,K_2\}}$。我们还展示了如何得到约束 $a(K_1) + a(K_2) \le 2$，适用于 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ \{K_1,K_2\}}$。我们先固定 $z = (1,\ 1)$。这给出约束

$$a(K_1) + a(K_2) \le \tau_f^+(K_1 + K_2 + B^\star(G)).$$

我们找到一个特定的 $R \in B^\star(G)$，如图 11 左侧所示。这给出了$\tau_f^+(K_1 + K_2 + B^\star(G)) \le \tau_f^+(K_1 + K_2 + R) = 2$。

由于 $\mathcal{P}_{G、\ f、\ Q、\ P}$ 和 $\mathcal{P}_{G、\ f、\ Q}$ 均由无限不等式系统给出，因此它们确实是多胞体（而非更一般的凸形状）这一点并非显而易见。我们将在以下引理中证明这一点，并给出其他有用性质。

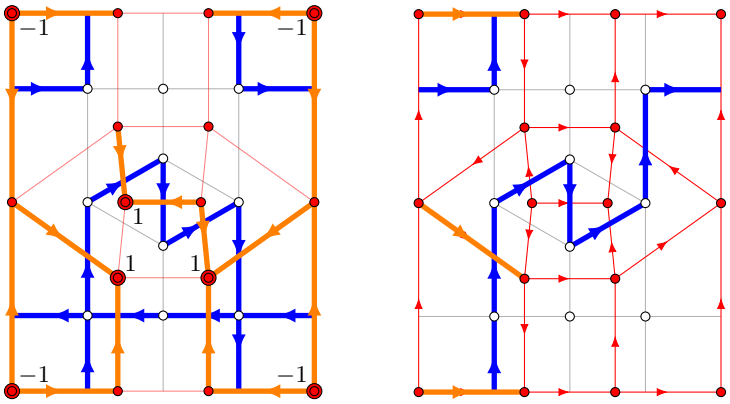


图 11：在左侧将余边界 $R \in B^\star(G)$ 加到 K_1 和 K_2 上，得到右侧的余循环。左侧顶点处的系数给出 0-链 d，使得 $R = \partial_2^\star d$；橙色边表示 R，蓝色边是图 $G^\star$中对应的边。右侧橙色边是计入 $\tau_f^+(K_1 + K_2 + R) = 2$的那些边。

引理29。 设 G 是一个在可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图，Q 是 $H^\star(G)$的一个基，f 是 G中的一个1-链。设 S 是 $F(G)$的一个非空子集，x 是 S的一个元素，并设 P 是一个函数，为每个 $y \in S$ 指定一条从 x 到 y的余路径 $P(y)$，其中 $P(x) = 0$。那么

(a) $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$ 和 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 是由有限不等式组确定的多胞体，

(b) 对每个 $K \in Q$ 和 $y \in S$，若 $a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 或 $(a, a') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$，则

$$-\tau_f^+(-K) \le a(K) \le \tau_f^+(K) \text{ and}$$
$$-\tau_f^+(-P(y)) \le a'(y) \le \tau_f^+(P(y)),$$

(c) $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 的顶点具有整数坐标，且

(d) 对每个 $z \in \mathbb{Z}^Q$，

$$\tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) = \max\{\langle z, a\rangle : a \in \mathcal{P}_{G,f,Q}\}.$$

证明。对于任意 y，$y' \in S$以及任意从 y到 y'的余路径 D，注意到 $D - (P(y') - P(y))$是一个余循环，因此存在 $z_D \in \mathbb{Z}^Q$ 使得 $D - (P(y') - P(y)) - \langle z_D, Q\rangle \in B^\star(G)$。类似地，对于任意余循环 D，令 $z_D \in \mathbb{Z}^Q$ 满足 $D - \langle z_D, Q\rangle \in B^\star(G)$。注意

$$\mathcal{P} = \{a \in \mathbb{R}^Q : \langle z_D, a\rangle \le \tau_f^+(D) \text{ for every simple cocycle } D\}$$

and

$$\mathcal{P}_P = \left\{ \begin{array}{l} (a,a') \in \mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^S : a'(x) = 0, \\ \langle z_D, a\rangle + a'(y') - a'(y) \le \tau_f^+(D) \\ \qquad\qquad \text{for every } y, y' \in S \text{ and a simple copath } D \text{ from } y \text{ to } y' \end{array} \right\}$$

它们是由有限不等式组确定的多胞体，因为 G中只有 $3^{|E(G)|}$个简单 1-链。此外，根据定理 24 中 (ii) 与 (iii) 的等价关系，我们有 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q} = \mathcal{P}$ 以及 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P} = \mathcal{P}_P$。因此 (a) 成立。

对于每个 $K \in Q$，$\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 的定义给出

$$a(K) \le \tau_f^+(K + B^\star(G)) \le \tau_f^+(K)$$

and

$$-a(K) = a(-K) \le \tau_f^+(-K + B^\star(G)) \le \tau_f^+(-K)$$

对于每个 $a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 或 $(a,\ a') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$（考虑 $y = y' = x$ 的情形）；对于 $(a,\ a') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$，我们同样得到（将 y 与 x 和 $K = 0$ 一起考虑）

$$a'(y) \le \tau_f^+(P(y) + B^\star(G)) \le \tau_f^+(P(y))$$

and

$$-a'(y) \le \tau_f^+(-P(y) + B^\star(G)) \le \tau_f^+(-P(y)).$$

因此 (b) 成立。

现在考虑任意 $z \in \mathbb{Z}^Q$，并令 $m = \max\{\langle z, a\rangle : a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}\}$。注意到 $m \le \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G))$，因为 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 的定义包含不等式$\langle z, a\rangle \le \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G))$。若 $m < \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G))$，则由法卡斯引理和 (a)，不等式 $\langle z, a\rangle < \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G))$ 可由定义$\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$的约束的非负有理系数线性组合推出；也就是说，存在一个函数 $\lambda : \mathbb{Z}^Q \to \mathbb{Z}_0^+$，其支撑有限，且有一个正整数 D 使得

$$\sum_{z' \in \mathrm{supp}(\lambda)} \frac{\lambda(z')}{D} z' = z$$

and

$$\sum_{z' \in \mathrm{supp}(\lambda)} \frac{\lambda(z')}{D} \tau_f^+(\langle z', Q\rangle + B^\star(G)) < \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)).$$

然而，根据引理 28 和观察 27，我们有

$$\begin{aligned} D \cdot \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) &= \tau_f^+(\langle Dz, Q\rangle + B^\star(G)) \\ &= \tau_f^+\left(\left\langle \sum_{z' \in \mathrm{supp}(\lambda)} \lambda(z') z', Q \right\rangle + B^\star(G)\right) \\ &\le \sum_{z' \in \mathrm{supp}(\lambda)} \lambda(z') \tau_f^+(\langle z', Q\rangle + B^\star(G)), \end{aligned}$$

这与矛盾相矛盾。因此，$m = \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G))$ 成立，(d) 也成立。

由于对每个 $z \in \mathbb{Z}^Q$，$\max\{\langle z, a\rangle : a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}\}$ 都是整数，因此 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 的所有顶点都具有整数坐标，且 (c) 成立。 □

请注意，定义 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$ 的最小不等式系统可能具有指数规模，因此出于算法目的，我们无法承担显式表示该多面体的代价。多面体 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ 的分离预言机是一种算法，对于输入 $u \in \mathbb{Q}^d$，它要么判定 $u \in \mathcal{P}$，要么返回 $z \in \mathbb{Q}^d$，使得对每个 $a \in \mathcal{P}$，z 的二进制编码长度关于 u 和 $\langle z, a\rangle < \langle z, u\rangle$ 的二进制编码长度为多项式。定理 24 可用于为 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$ 构造一个分离预言机。

引理 *30*。设 G 是一个规模为 n 的图，其在欧拉亏格为 g 的可定向曲面上有一个 *2*-胞腔嵌入；设 Q 是 $H^\star(G)$ 的一个基，且 f 是 G 中的一个 *1*-链。设 S 是 $F(G)$ 的一个非空子集，x 是 S 的一个元素，且 P 是一个函数，它为每个 $y \in S$ 指定一条余路径 $P(y)$，从 x 到 y，其中$P(x) = 0$。存在一个针对 $\mathcal{P}_{G,f,Q,P}$ 的分离预言机，其时间复杂度为$O(n^2 + (g+1)|S|n)$。

证明。考虑输入 $(u, u') \in \mathbb{Q}^Q \times \mathbb{Q}^S$。如果 $u'(x) \neq 0$，我们可以返回 $(0, z')$，使得 $z'(x) = \mathrm{sgn}(u'(x))$，并且对于所有 $y \in S \setminus \{x\}$，$z'(y) = 0$。因此，假设 $u(x) = 0$。我们找到一个正整数 μ，使得 $(a_0, a_0') = \mu \cdot (u, u')$ 属于 $\mathbb{Z}^Q \times \mathbb{Z}^S$。注意，$a_0$ 可以扩展为从 $H^\star(G)$ 到$\mathbb{Z}$的同态。我们对 G、路径 $P_y = P(y)$（其中 $y \in S$、a_0 和 a_0'），以及 1-链 μf应用定理 24 中的算法。

若结果是一个 μf-循环流 c，使得对于每个 $K \in H^\star(G)$，都有 $\tau_c(K) = a_0(K)$，且对于每个 $y \in S$，都有 $\tau_c(P_y) = a_0'(y)$，那么根据引理 22，对于任意 $z \in \mathbb{Z}^Q$和 y，$y' \in S$，我们有

$$\langle z, a_0\rangle + a_0'(y') - a_0'(y) = \tau_c(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y)) \leq \tau_{\mu f}^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G)),$$

因此

$$\langle z, u\rangle + u'(y') - u'(y) \leq \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G))$$

且 $(u,\ u') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$。

否则，结果是一个简单余路径 $D = P(y') - P(y) + \langle z, Q\rangle + R$，其中某个 y，$y' \in S$, $z \in \mathbb{Z}^Q$，以及一个余边界 R，满足

$$\tau_{\mu f}^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G)) \leq \tau_{\mu f}^+(D) < \langle z, a_0\rangle + a_0'(y') - a_0'(y).$$

因此，令 $z'(y') = 1$，$z'(y) = -1$（或者当 $y = y'$ 时令 $z'(y) = 0$），并令 $z'(t) = 0$，其中 $t \in S \setminus \{y, y'\}$，对于任意 $(a,\ a') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$，我们有

$$\langle (z, z'), (a, a')\rangle \leq \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G)) < \langle (z, z'), (u, u')\rangle,$$

因此我们可以返回（z，z'）。 □

值得指出的是，虽然我们在引理 30 的证明中加入了按 μ 缩放的步骤，以使其与定理 24 的表述相符，但很容易验证，定理 24 中的算法也可以直接用于（可能非整数的）u 和 u'。

设 G 是一个图，它在欧拉亏格为 g 的可定向曲面上有一个 2-胞腔嵌入；设 Q 是 $H^\star(G)$ 的一个基，且 f 是 G 中的一个 1-链。设 S 是 $F(G)$ 的一个非空子集，x 是 S 的一个元素，并设 P 是一个函数，它为每个 $y \in S$ 指定一条从 x 到 y 的余路径 $P(y)$，其中 $P(x) = 0$。当我们处理无界数量顶点的预着色时，$|S|$ 可能无界，因此多面体 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$ 的维数无界，无法应用一般的整数规划结果。为处理这一问题，固定一个 $a \in \mathbb{R}^Q$，我们定义

$$\mathcal{P}_{G,f,Q,a,P} = \left\{ \begin{array}{l} a' \in \mathbb{R}^S : a'(x) = 0, \\ a'(y') - a'(y) \le \min_{z \in \mathbb{Z}^Q} \tau_f^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G)) - \langle z, a\rangle \\ \qquad\qquad \text{for every } y, y' \in S \end{array} \right\}.$$

显然，当且仅当 $a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 且 $a' \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ a,\ P}$ 时，$(a,\ a') \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ P}$。$\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 的维数为 g，而多面体 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ a,\ P}$ 由多项式数量的不等式定义，且这些不等式可按以下引理所示高效枚举。

引理 *31.* 设 Σ 是欧拉亏格为 g 的可定向曲面。存在一个算法，给定一个在 Σ 中具有 2-胞腔嵌入、规模为 n 的图 G，$H^\star(G)$ 的一个基 Q，G 中的一个 1-链 f，$F(G)$ 的一个非空子集 S，S 的一个元素 x，一个函数 P，它为每个 $y \in S$ 指定一个从 x 到 y 的余路径 $P(y)$（其中 $P(x) = 0$），以及一个向量 $a \in \mathcal{P}_{G,f,Q} \cap \mathbb{Z}^Q$，并在 $O(n^2 + |S|n \log n)$ 时间内计算定义 $\mathcal{P}_{G,f,Q,a,P}$ 的所有不等式的右端项。

证明。考虑任意 $y,\ y' \in S$；我们需要确定以下各项的最小值 $\beta_{y,\ y'}$

$$\tau_f^+(\langle z, Q\rangle + P(y') - P(y) + B^\star(G)) - \langle z, a\rangle$$

遍历所有 $z \in \mathbb{Z}^Q$。在定理 24 中应用 (i) 与 (ii) 的等价关系，其中 $\{y, y'\}$ 扮演 S 的角色，并取从 y 到 y' 的余路径 $P(y') - P(y)$，可知 $\beta_{y,\ y'}$ 是满足下述条件的最大值：存在一个 f-循环流 c，使得对每个 $z \in \mathbb{Z}^Q$，都有 $\tau_c(\langle z, Q\rangle) = \langle z, a\rangle$，且 $\tau_c(P(y') - P(y)) = \beta_{y,\ y'}$。

令 b 为满足以下条件的 1-圈：对于每个 $z \in \mathbb{Z}^Q$，$\tau_b(\langle z, Q\rangle) = \langle z, a\rangle$。该圈是应用引理 23 得到的，其中 $\{x\}$ 扮演 S 的角色。注意，对于任意整数 β，若定义 $b_\beta = b + \beta\partial_2 y'$，则对于每个 $z \in \mathbb{Z}^Q$，都有 $\tau_{b_\beta}(\langle z, Q\rangle) = \langle z, a\rangle$，且 $\tau_{b_\beta}(P(y') - P(y)) = \tau_b(P(y') - P(y)) + \beta$。令 ℓ_β 为在定理 24 的证明中定义的、赋予对偶图 $G^\star$ 的对称定向各边的长度赋值，其中 b_β 扮演 b 的角色。注意，对于 $G^\star$ 中任何一条进入 y' 的边 e，令 h_e 为对应的对偶边，使得 $\mathsf{left}(h_e) = y'$，则

$$\ell_\beta(e) = \begin{cases} f[h_e] - b[h_e] - \beta & \text{if } f[h_e] > 0 \\ -b[h_e] - \beta & \text{if } f[h_e] \le 0. \end{cases}$$

由于带有长度赋值 ℓ_β 的 $a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$, $G^\star$ 不含任何负环，并且 $\beta_{y,\ y'}$ 是 $\tau_b($ $P(y') - P(y)) + \beta$ 的最大值，满足不存在从 y' 到 y 的负长度路径。记 $d_b(y,$ $y')$ 为根据 ℓ_0 从 y 到 y' 的距离，注意，根据 ℓ_β，从 y 到 y' 的距离为 d_b $(y,\ y') - \beta$，因此

$$\beta_{y,y'} = \tau_b(P(y')) - \tau_b(P(y)) + d_b(y, y').$$

因此，要确定所有 $y, y \in S$对应的右端项 $\beta_{y,y'}$，只需确定长度赋值 ℓ_0 中 S 的所有元素之间的两两距离，其中 $\beta = 0$。使用 Bellman-Ford 算法，再进行 Johnson 重赋权，并重复执行 Dijkstra 算法 $|S|$ 次，可在时间 $O(n^2 + |S|n$ $\log\ n)$内完成。我们可以使用引理 23 计算 b，并对每个$y \in S$ 计算 $\tau_b(P(y))$，总时间为 $O(n^2)$，从而得到一个具有所需时间复杂度的算法。

□

最后，我们需要进一步了解多面体 $\mathcal{P}_{G,f,Q}$，其中 f 是无零流。对于一个 0-链 d、一个余循环 K 和一个函数$t: V(G) \to \mathbb{Z}$，定义如下：

$$\begin{aligned}
\langle t, d\rangle &= \sum_{v \in V(G)} t(v)d(v) \\
\langle t, \partial_2^\star\rangle &= \sum_{v \in V(G)} t(v)\partial_2^\star v \\
\tau_d^+(K + B^\star(G)) &= \frac{1}{2} \min_{z' \in \mathbb{Z}^{V(G)}} |K + \langle z', \partial_2^\star\rangle| + \langle z', d\rangle \\
\mathcal{P}_{G,d,Q} &= \{a \in \mathbb{R}^Q : \langle z, a\rangle \le \tau_d^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) \text{ for every } z \in \mathbb{Z}^Q\}.
\end{aligned}$$

多面体$\mathcal{P}_{G,d,Q}$ 是以边界定义的 $\mathcal{P}_{G,f,Q}$ 的类比；正如接下来将要证明的，$\mathcal{P}_{G,f,Q}$ 是$\mathcal{P}_{G,\partial_1 f,Q}$的一个平移。也就是说，对于所有具有相同边界的无零流，多面体 $\mathcal{P}_{G,f,Q}$本质上相同。

我们还需要一个关于这些多胞体宽度的结果，定义如下。对于紧集 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ 和向量 $z \in \mathbb{Z}^d$，令

$$w(\mathcal{P}, z) = \max\{\langle z, a\rangle : a \in \mathcal{P}\} - \min\{\langle z, a\rangle : a \in \mathcal{P}\}.$$

令 $w(\mathcal{P}) = \min\{w(\mathcal{P},\ z) :\ z \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\}$。

引理 *32.* 设 G 是可定向曲面上的一个具有 *2*-胞腔嵌入的图，设 Q 是 $H^\star(G)$ 的一个基，设 f 是图 G 上的一个无零流，并设 $d = \partial_1 f$。则 $\mathcal{P}_{G,f,Q}$ 是 $\mathcal{P}_{G,d,Q}$ 的一个平移。此外，存在一个余循环 $K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)$ 和一个余边界 R，使得 $w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) = (|K| + |K + R| - \tau_f(R))$ $/2$。

证明。 注意，对于任意余循环 K_0，观察 21 给出

$$\tau_f^+(K_0) = (|K_0| + \tau_f(K_0))/2.$$

此外，根据观察11，$\tau_f(\langle z', \partial_2^\star\rangle) = \langle z', d\rangle$ 对任意 $z' \in \mathbb{Z}^{V(G)}$均成立。因此，

$$\begin{aligned}
\tau_f^+(K_0 + B^\star(G)) &= \min_{z' \in \mathbb{Z}^{V(G)}} \tau_f^+(K_0 + \langle z', \partial_2^\star\rangle) \\
&= \frac{1}{2} \min_{z' \in \mathbb{Z}^{V(G)}} |K_0 + \langle z', \partial_2^\star\rangle| + \tau_f(K_0 + \langle z', \partial_2^\star\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\tau_f(K_0) + \frac{1}{2} \min_{z' \in \mathbb{Z}^{V(G)}} |K_0 + \langle z', \partial_2^\star\rangle| + \langle z', d\rangle \\
&= \frac{1}{2}\tau_f(K_0) + \tau_d^+(K_0 + B^\star(G)). \qquad (6)
\end{aligned}$$

对于任意 $a \in \mathbb{R}^Q$，定义 $a' \in \mathbb{R}^Q$，令对每个 $K \in Q$，$a'(K) := a(K) - \frac{1}{2}\tau_f(K)$。对于任意 $z \in \mathbb{Z}^Q$，令式 (6) 中的 $K_0 = \langle z, Q\rangle$，可得

$$\begin{aligned}
\tau_f^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) - \langle z, a\rangle &= \frac{1}{2}\tau_f\langle z, Q\rangle + \tau_d^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) - \langle z, a\rangle \\
&= \tau_d^+(\langle z, Q\rangle + B^\star(G)) - \langle z, a'\rangle.
\end{aligned}$$

因此，$a \in \mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 当且仅当 $a' \in \mathcal{P}_{G,\ d,\ Q}$，从而$\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 是 $\mathcal{P}_{G,\ d,\ Q}$的平移。

令 $z \in \mathbb{Z}^Q \setminus \{0\}$ 满足 $w(\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}) = w(\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ z})$，令 $K_0 = \langle z, Q\rangle$，并令 $R_1,\ R_2 \in B^\star(G)$ 满足 $\tau_f^+(K_0 + B^\star(G)) = \tau_f^+(K_0 + R_1)$ 且$\tau_{-f}^+(K_0 + B^\star(G)) = \tau_{-f}^+(K_0 + R_2)$。由引理 29(d)和观察 21可得

$$\begin{aligned}
\max\{\langle z, a\rangle : a \in \mathcal{P}_{G,f,Q}\} &= \tau_f^+(K_0 + B^\star(G)) = \tau_f^+(K_0 + R_1) \\
&= (|K_0 + R_1| + \tau_f(K_0 + R_1))/2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{最小值}\{\langle z, a\rangle :\ a \in \mathcal{P}_{G,f,Q}\} &= -\text{最大值}\{\langle -z, a\rangle :\ a \in \mathcal{P}_{G,f,Q}\} \\
&= -\tau_f^+(-K_0 + B^\star(G)) = -\tau_{-f}^+(K_0 + B^\star(G)) \\
&= -\tau_{-f}^+(K_0 + R_2) = -(|K_0 + R_2| - \tau_f(K_0 + R_2))/2,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) &= (|K_0 + R_1| + \tau_f(K_0 + R_1) + |K_0 + R_2| - \tau_f(K_0 + R_2))/2 \\
&= (|K_0 + R_1| + |K_0 + R_2| + \tau_f(R_1 - R_2))/2.
\end{aligned}$$

因此，对于余循环 $K = K_0 + R_1$ 和余边界 $R = R_2 - R_1$，有$w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) = (|K| + |K + R| - \tau_f(R))/2$。注意，$K \notin B^\star(G)$，因为 $z \neq 0$。 □

5 指定模数的循环流

到目前为止，我们考虑的是这样一个问题：是否存在一个循环流，使其在给定的余路径和余圈上取指定值。然而，

对于检验是否存在到某个奇圈的同态这一应用，我们需要知道是否存在一个循环流，使其在模某个奇数的意义下取给定值。下面的引理通过多面体 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q,\ a,\ P}$ 来处理预着色顶点。

引理 33. 存在一种算法，给定有限集 S、一个元素$x \in S$、一个正整数 m、一个函数 $d:\ S^2 \to \mathbb{Z}$，以及一个函数 $r:\ S \to\{0,1,\ldots,m-1\}$，满足 $r(x) = 0$，可在 $O(|S|^3)$ 时间内判定是否存在函数 $\ell:\ S \to \mathbb{Z}$，使得

- $\ell(x) = 0$,
- 对每个 $y, y' \in S$, $\ell(y') - \ell(y) \le d(y, y')$，并且
- 对每个 $y \in S$, $\ell(y) \equiv r(y)$（模 m）。

如果存在这样的函数，算法将返回一个。

证明。对每个 $y, y' \in S$，令 $d'(y, y')$ 为满足条件 $d'(y, y') \le d(y, y')$ 且 $d'(y, y') \equiv r(y') - r(y)$（模 m）的最大整数。显然，如果 $a \equiv r(y)$（模 m）且$b \equiv r(y')$（模 m），那么 $b - a \le d(y, y')$ 当且仅当 $b - a \le d'(y, y')$。因此，只需解决将 d 替换为 d' 后的问题。如果对任意 $y \in S$都有 $d'(y, y) < 0$，那么 ℓ 不存在；因此，假设对每个 $y \in S$ 都有 $d'(y, y) \ge 0$。

考虑完全对称定向图 K，其顶点集为 S，且每条边 $(y,\ y') \in E(K)$ 的长度为 $d'(y,\ y')$。若 K包含一条长度为负的圈$y_0 y_1 y_2 \ldots y_k$，其中 $y_0 = y_k$，那么函数 ℓ不存在，否则我们将有

$$0 = \sum_{i=1}^{k} (\ell(y_i) - \ell(y_{i-1})) \le \sum_{i=1}^{k} d'(y_{i-1}, y_i) < 0.$$

否则，令 $\ell(y)$ 表示在 K中从 x 到 y 的距离。根据三角不等式，这确保对于每个 $y,\ y' \in S$，都有 $\ell(y') - \ell(y) \le d'(y,\ y')$。此外，若 $x =x_0,\ x_1,\ \ldots\ldots,\ x_t = y$是在 K 中从 x到 y的一条最短路径，则

$$\ell(y) = \sum_{i=1}^{t} d'(x_{i-1}, x_i) \equiv \sum_{i=1}^{t} (r(x_i) - r(x_{i-1})) = r(y) - r(x) = r(y) \pmod{m}.$$

因此，可以对 K应用 Bellman-Ford 算法，以找到 ℓ，或者判定其不存在，时间复杂度为 $O(|S|^3)$。 □

另外，注意以下简单观察；由于引理29，它与此相关。

观察 34. 对于多面体 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$、正整数 m 和向量$r \in \{0,\ldots,m-1\}^d$，存在一个点 $p \in \mathbb{Z}^d \cap \mathcal{P}$使得 $p(i) \equiv r(i) (\mathrm{mod}\ m)$ 对 $1 \le i \le n$ 成立，当且仅当多面体 $(\mathcal{P} - r)/m$ 包含一个具有整数坐标的点。

为利用这一观察结果，我们采用 Dadush [6] 关于整数规划的以下结论。

定理 35 (Dadush [6, 算法 7。2])。 存在一个函数 $\gamma_0(d) = d^{(1+o(1))d}$ 以及一种算法：给定由分离预言机描述的凸集 $\mathcal{P} \subseteq [-n, n]^d$，且该预言机的时间复杂度为 T，算法可在 $O(\gamma_0(d)T$多对数 $n)$时间内返回 $\mathbb{Z}^d \cap \mathcal{P}$ 中的一个点，或者判定不存在这样的点。

现在，我们可以结合前几节的结果，得到以下关键算法。

引理 *36.* 设 Σ 是欧拉亏格为 g的可定向曲面。存在一个函数 γ 和一种算法，对于一个在 Σ上的 *2*-胞腔嵌入所对应的、大小为 n 的图 G，由简单余圈构成的 $H^\star$*(G)*的一个基 Q，一个正奇数 m，*F(G)*的一个非空子集 S，一个元素 $x \in S$，一个函数 P（它为每个 $y \in S$ 指定一条从 x 到 y的$y($ $P)$余路径，其中 $P(x) = 0$），一个函数r：$S \setminus \{x\} \to \{0, \dots, m-1\}$，以及一个可被 m整除的 *0*-边界 b，可在 $O((|b|+1)n + \min(n^g(n^2+|S|^3)\ \gamma(|S|)n^2\ \mathrm{polylog}\ n))$时间内，要么

- 找到一个无零流 f，使得对于每个 $K \in Q$，$\partial_1 f = b$, $m|\tau_f(K)$，并且对于每个 $y \in S \setminus \{x\}$，$\tau_f(P(y)) \equiv r(y)$（模 m），要么
- 判定不存在这样的无零流。

证明。 注意，亏格 g 是一个固定常数，且 $|S| \le n$，因此定理 24 和引理 30 中算法的时间复杂度为 $O(n^2)$。令 γ_0 为定理 35 中的函数，并定义 $\gamma(s) = \gamma_0(g+s)$。

首先，利用 Ford-Fulkerson 算法和引理 18 和 19 中的算法，我们可以在 $O((|b|+1)n)$ 时间内找到一个无零流 f_0 使得$\partial_1 f_0 = b$，或者判定不存在这样的流。

假设我们找到了这样的流 f_0。对于 $K \in Q$，令 $r_0(K) = \frac{m+1}{2}\tau_{f_0}(K)$；对于 $y \in S \setminus \{x\}$，令 $r_0'(y) = \frac{m+1}{2}(\tau_{f_0}(P(y)) - r(y))$；并令 $r_0'(x) = 0$。根据推论 17，当且仅当存在一个 f_0-循环流 c，使得对于 $K \in Q$，$\tau_c(K) \equiv r_0(K)$（模 m），且对于$y \in S$，$\tau_c(P(y)) \equiv r_0'(y)$（模 m），才存在满足引理陈述中所述性质的无零流 f。

根据定理 24 和观察 34，这样的 f_0-循环流 c 存在，当且仅当该多面体

$$\frac{\mathcal{P}_{G,f_0,Q,P} - (r_0, r_0')}{m}$$

包含一个具有整数坐标的点。根据引理 30、定理 35 以及引理 29(b)中的界，我们可以在时间 $O(\gamma_0(g+|S|)n^2 \operatorname{polylog} n) = O(\gamma(|S|)n^2 \operatorname{polylog} n)$ 内判定是否存在这样的点 (u, u')（若存在，则将其找出）。给定该点后，我们便可应用定理 24 中的算法，使用将 Q 映射到 $mu + r_0$ 且将$a' = mu' + r_0'$ 映射到相应对象的同态 a，来找到所需的 f_0-循环流 c。

或者，我们也可以不使用整数规划，而是遍历满足引理 29(b) 给出的界的 u 个点 $O(n^g)$，使得 $u - r_0$ 能被 m 整除，并对每个点使用定理 24 中的算法，判断 u 是否属于 $\mathcal{P}_{G,\ f_0,\ Q}$。对于每个属于 $\mathcal{P}_{G,\ f_0,\ Q}$ 的点 u，我们

随后可以根据引理 31，在时间 $O(n^2 + |S|n\log\ n)$ 内求出定义 $\mathcal{P}_{G、\ f、\ Q、\ u、\ P}$ 的不等式的右端项，然后使用引理 33，在时间 $O(|S|^3)$ 内求出 $u' \in \mathcal{P}_{G、\ f、\ Q、\ u、\ P}$，使得 $u' - r'_0$ 能被 m 整除。每个点的时间复杂度为 $O(n^2+|S|n\log\ n+|S|^3) = O(n^2+|S|^3)$。如果找到这样的点 u'，我们就按照上一段所述，继续执行 $(u, u') \in \mathcal{P}_{G,f_0,Q,P}$。□

这很容易推出我们的主要算法结果。

定理 5 的证明。令 $m = |C|$，并令 G 为 H的对偶图。不失一般性，我们可以假设 S 非空（否则，将 G 的任意一个面加入S，并为其任意着色）；令 x 为 S中的任意元素。对于每个 $y \in S \setminus \{x\}$，令 $r(y) = (\psi(y) - \psi(x)) \bmod m$。令 Q 为通过观察13得到的 $H^\star(G)$的一组基。通过从 x出发在 H 中进行深度优先搜索，我们为每个 $y \in S \setminus \{x\}$找到一条从 x 到 y 的简单余路径 $P(y)$，并令 $P(x) = 0$。

根据引理 15 和观察 20，只需遍历所有（至多 $q^\star_C(H)$个）可被 m 整除的相关 0-边界 b，并对每个边界检验是否存在无零流 f，使得对每个 $K \in Q$都有 $\partial_1 f = b$, $m|\tau_f(K)$，且对每个 $y \in S \setminus \{x\}$都有$\tau_f(P(y)) \equiv r(y)$（mod m）；这可以使用引理 36 中的算法完成。□

6 无整数点的多胞体

为了得到关于 3-可着色性的充分条件，观察 34 表明，我们需要一个能确保多面体包含整数点的充分条件。不包含任何整数点的多面体称为空心多面体。直观而言，空心多面体必须足够狭窄，才能夹在整数点之间。Kannan 和 Lov´asz [20], 对此给出了严格表述，并提出了一个改进的界；我们在下文陈述 Rudelson [24], 给出的结果，以及 Hurkens [18]在二维情形下给出的最优界。

定理 37. 对于每个正整数 d，都存在 $\mu_d = O(d^{4/3})$，使得若有界多胞体 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ 是空心的，则 $w(\mathcal{P}) < \mu_d$。此外，$\mu_2 = 1 + 2/\sqrt{3}$。

如果存在一个点 p使得 $\mathcal{P} = p - \mathcal{P}$，则集合 $\mathcal{P}$是中心对称的。对于中心对称多胞体，已知有更好的界。

定理 38 (Banaszczyk [2])。对每个正整数 d，存在 $\mu_d = O(d\log\ d)$，使得若有界中心对称多胞体 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^d$ 是空心的，则 $w(\mathcal{P}) < \mu_d$。

我们将需要关于格基变换的以下标准观察结果。

引理 39. 设 $Z \subseteq \mathbb{R}^d$ 为一个紧集，$A \in \mathbb{Z}^{d\times d}$ 为一个满足$|$ 行列式 $A| = 1$的矩阵。那么，当且仅当 $A^T Z$为空心时，Z也为空心；并且 $w(Z) = w(A^T Z)$。此外，对于任意 $c \in \mathbb{Z}^d$，有 $w(A^T Z, A^{-1}c) = w(Z, c)$。

证明. 由于 $|\det A| = 1$，根据克拉默法则可知 $A^{-1} \in \mathbb{Z}^{d\times d}$。因此，如果$x \in A^T Z$ 具有整数坐标，那么点 $A^{-1T}x \in Z$ 也具有整数坐标。反之，如果 $p \in Z$ 具有整数坐标，那么点$A^T p \in A^T Z$也具有整数坐标。因此，当且仅当 $A^T Z$ 为空心时， Z 也为空心。

对于任意 $z \in \mathbb{R}^d$，我们有 $\langle c, z\rangle = \langle A^{-1}c, A^T z\rangle$，因此 $w(A^T Z,\ A^{-1}c) = w(Z,\ c)$。因此，

$$\begin{aligned} w(Z) &= \min\{w(Z, c) : c \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\} \\ &= \min\{w(A^T Z, A^{-1}c) : c \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\} \\ &= \min\{w(A^T Z, c') : c' \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}\} = w(A^T Z). \end{aligned}$$

□

若多面体 $\mathcal{P}$ 的每个顶点 $\mathcal{P}$ 的坐标都是 $1/3$的整数倍，则称其为$\frac{1}{3}$-整点的 。根据观察 34，在考虑 3-可着色性时，我们关注多面体 $(\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q} - r)/3$；根据引理 29(c)，它是$\frac{1}{3}$-整点的。对于$\frac{1}{3}$-整点多胞体，定理 37 的二维情形所给出的界可以进一步改进；当我们考虑画在环面上的图（欧拉亏格为 2 的曲面）时，这一点很重要。

引理 40。 如果有界$\frac{1}{3}$-整点多面体 $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^2$ 是空心的，那么 $w(\mathcal{P}) < 2$。

证明。 假设结论不成立，从而 $w(\mathcal{P}) \geq 2$。根据定理 37，存在$c \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0,0)\}$，使得 $w(\mathcal{P}, c) < 1 + 2/\sqrt{3} < 2.1548$；又因为 $w(\mathcal{P}, c)$ 是 $1/3$ 的倍数，且 $w(\mathcal{P}) \geq 2$，所以我们得出 $w(\mathcal{P},\ c) = 2$。

我们首先将 $\mathcal{P}$ 变换为一个$\frac{1}{3}$-整点空心多面体 $\mathcal{P}'$，使得 $w(\mathcal{P}') = w(\mathcal{P}',(1,0)) = 2$，也就是说， $\mathcal{P}$ 中所有点的 x 坐标都包含在一个长度为二的区间内。接下来，我们进一步将其变换为一个空心

$\frac{1}{3}$-整点多面体，$\mathcal{P}'' \subseteq [0, 2 + 2/3] \times [0, 4 + 1/3]$，使得 $w(\mathcal{P}'') = 2$。包含在$[0, 2+2/3] \times [0, 4+1/3]$中的$\frac{1}{3}$-整点多面体只有有限多个；我们通过计算机辅助枚举证明，它们的宽度都小于二，从而得到矛盾。

令 $c = (m,\ n)^T$。注意， m 和 n 互素，否则我们就会有 $w(\mathcal{P},\ c/\gcd(m,\ n)) < 2$。因此，存在整数 α 和 β，使得$\alpha m + \beta n = 1$。令

$$A = \begin{pmatrix} m & -\beta \\ n & \alpha \end{pmatrix},$$

使得 $\det A = 1$ 和 $A^{-1}c = (1,\ 0)^T$。令 $\mathcal{P}' = A^T\mathcal{P}$。根据引理 39，多面体 $\mathcal{P}'$ 是空心的，且 $w(\mathcal{P}') = w(\mathcal{P}',\ (1,\ 0)^T) = 2$。此外， $\mathcal{P}'$ 显然是一个$\frac{1}{3}$-整数多面体。

令 $l = (l_1, l_2)$ 和 $r = (r_1, r_2)$ 为 $\mathcal{P}'$ 的顶点，其中 l_1 最小且 r_1 最大；$r_1 - l_1 = w(\mathcal{P}', (1, 0)^T) = 2$。令 b 为满足 $-1 \leq r_2 - l_2 + 2b < 1$ 的整数，并令

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

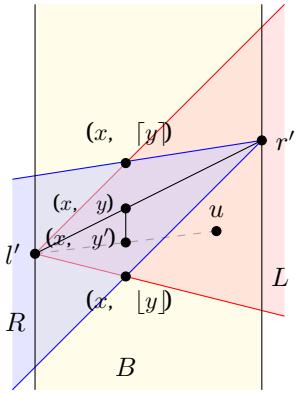


图12：引理 40 中的情形。

注意，$\det B = 1$ 和 $B^{-1}(1,0)^T = (1,0)^T$，因此令 $\mathcal{P}'' = B^T\mathcal{P}'$，我们有 $w(\mathcal{P}'', (1,0)^T) = w(\mathcal{P}', (1,0)^T) = 2$。令

$$l' = (l'_1, l'_2)^T = B^T(l_1, l_2)^T = (l_1, l_2 + bl_1)^T \text{ and}$$
$$r' = (r'_1, r'_2)^T = B^T(r_1, r_2)^T = (r_1, r_2 + br_1)^T,$$

并注意到 $r'_2 - l'_2 = r_2 - l_2 + b(r_1 - l_1) = r_2 - l_2 + 2b$，因此我们有$|l'_2 - r'_2| \le 1$。

由于 $r_1 - l_1 = 2$、l_1 和 r_1 都是 $1/3$ 的倍数，因此存在一个整数 x，使得 $l_1 < x < r_1$、$x - l_1 \ge 2/3$ 和 $r_1 - x \ge 2/3$。设 (x, y) 为连接 l' 与 r' 的直线上第一坐标为 x 的点；由于 $\mathcal{P}''$ 是空心的，y 不是整数。设 L 和 R 分别为顶点为 l' 和 r'、射线经过点 $(x, \lfloor y \rfloor)$ 和 $(x, \lceil y \rceil)$ 的开锥。设 B 为带状区域 $\{(u_1, u_2) : l_1 \le u_1 \le r_1, u_2 \in \mathbb{R}\}$，见图12。我们声称 $\mathcal{P}'' \subseteq (L \cup R) \cap B$。事实上，任取一点 $u = (u_1, u_2) \in \mathcal{P}''$。显然 $u \in B$。不失一般性，可以假设 $u_1 \ge x$。设 (x, y') 为连接 l' 与 u 的直线上第一坐标为 x 的点。根据凸性，(x, y)、(x, y') 以及它们之间的整条线段都位于 $\mathcal{P}''$ 中。由于 $\mathcal{P}''$ 是空心的，这条线段不包含任何整数坐标点，因此$\lfloor y \rfloor < y' < \lceil y \rceil$，这意味着 (x, y')，从而 u 也位于开锥 L 中。

令 $\delta = \lceil y \rceil - y$，并注意到 $y - \lfloor y \rfloor = 1 - \delta$。观察可知，$\sup\{\langle (0, 1)^T, z \rangle : z \in L \cap B\}$ 要么是 l'_2，要么

$$r'_2 + \frac{r_1 - l_1}{x - l_1}(\lceil y \rceil - y) = r'_2 + \frac{2\delta}{x - l_1}.$$

类似地，$\sup\{\langle (0,1)^T, z \rangle : z \in R \cap B\}$ 要么是 r'_2，要么是$l'_2 + \frac{2\delta}{r_1 - x}$。因此，

$$\max\{\langle (0,1)^T, z \rangle : z \in \mathcal{P}''\} < \max\left(r'_2 + \frac{2\delta}{x - l_1}, l'_2 + \frac{2\delta}{r_1 - x}\right).$$

类似地,

$$\min\{\langle (0,1)^T, z\rangle : z \in \mathcal{P}''\} > \min\left(r_2' - \frac{2(1-\delta)}{x-l_1}, l_2' - \frac{2(1-\delta)}{r_1-x}\right).$$

因此,

$$\begin{aligned} w(\mathcal{P}'', (0,1)^T) < \max\Big(&\frac{2\delta}{x-l_1} + \frac{2(1-\delta)}{x-l_1}, \frac{2\delta}{r_1-x} + \frac{2(1-\delta)}{r_1-x}, \\ &r_2' - l_2' + \frac{2\delta}{x-l_1} + \frac{2(1-\delta)}{r_1-x}, \\ &l_2' - r_2' + \frac{2\delta}{r_1-x} + \frac{2(1-\delta)}{x-l_1}\Big). \end{aligned}$$

由于 $x - l_1 \geq 2/3$ 和 $r_1 - x \geq 2/3$，最大值中的前两项小于或等于 3。由对称性，不妨设 $x - l_1 \leq r_1 - x$；于是第三项关于 δ单调不减，因此

$$r_2' - l_2' + \frac{2\delta}{x-l_1} + \frac{2(1-\delta)}{r_1-x} < r_2' - l_2' + \frac{2}{x-l_1} \leq 1 + 3 = 4.$$

类似地，第四项小于 4。由于 $w(\mathcal{P}'', (0, 1)^T)$ 是 $1/3$的倍数，我们得出 $w(\mathcal{P}'', (0, 1)^T) \leq 4 - 1/3$。

如有必要，我们可以将 $\mathcal{P}''$ 平移一个整数向量，以确保对于每个 $(u_1, u_2) \in \mathcal{P}''$，都有 $0 \leq u_1 \leq 2 + 2/3$ 和 $0 \leq u_2 \leq 4 + 1/3$。然而，具有这一性质的 $1\ 3$-整点多胞体只有有限多个；通过计算机辅助枚举，我们验证了它们全都满足以下二者之一： $w(\mathcal{P}'') < 2$，或者 $\mathcal{P}''$ 包含一个整数点[1]。这是一个矛盾。 □

为了应用这些结果，我们需要用图 $G^\star$的边宽来估计多面体$\mathcal{P}_{G,f,Q}$的宽度。首先，给出若干辅助结果。设 G 是可定向曲面 Σ上的一个具有 2-胞腔嵌入的图。对于 $G^\star$中的一个闭有向游走 W，令 $\circ W$ 表示相应的余循环。对于 G中的余循环 K，K 的支撑 K 是一个有向图，其顶点集为{left(h) : $h \in$ hes(G) $K[h] \neq 0$}，并且对每个满足 $K[h] > 0$的半边 h，都包含从 left(opp(h)) 到 left(h) 的 $K[h]$ 条边。 K 的无向支撑 $\overrightarrow{K}$是一个无向图，其顶点集与 K 相同，并且对每个满足 $K[h] > 0$的半边 h，都包含边{left(opp(h)),left(h)}；因此，K 是 $G^\star$的一个子图。我们将 K 和 K 都视为嵌入在 Σ中，其嵌入继承自 $G^\star$。嵌入在 Σ中的（有向）圈若从 Σ 中删除后会使曲面不连通，则称为分离的；否则称为非分离的。

观察 41. 设 G 是一个在可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图。若有向圈 C 位于 $G^\star$ 中，则它是分离的，当且仅当对应的余循环 $\circ C$ 是一个余边界。

[1]我们使用 SageMath 和 C++编写了两个相互独立的程序。用于此项验证的程序可在本文 arXiv 发布页面的附加文件中找到。

观察 42. 设 G 是一个在可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图。若余循环 K 不是余边界，则存在一个非分离有向圈 C 位于 $G^\star$ 中，使得 $\circ C \preceq K$。

证明。由于 K 是余循环，有向图 K 是欧拉的，因此它可以表示为有向圈 C_1、.....、 C_m的边不相交并。由于$K = \circ C_1 + \cdots + \circ C_m$不是余边界，我们可以假设 $\circ C_1$不是余边界；根据观察 41， C_1 是非分离圈。显然，我们有 $\circ C_1 \preceq K$。 □

对于欧拉亏格非零的可定向曲面 g上的图 G 的 2-胞腔嵌入中的余循环 R，令 $\nu(R)$ 表示 $E(G^\star)$ 的最小子集 X 的大小，使得 $R + X$ 包含一个以子图形式出现的非分离圈。根据观察13，群 $H^\star(G)$ 同构于 $\mathbb{Z}^g$，因此非平凡。因此，G 中存在一个不是余边界的余循环。观察 42 表明， $G^\star$ 包含一个非分离圈，因此 $\nu(R)$ 有限。对于 1-链 f，令 $\mu_f(R) = 2\nu(R) + |R| - \tau_f(R)$。在下面的引理中，我们将说明，引理 32 给出的 $\mathcal{P}_{G,f,Q}$ 宽度界可以用这一概念简化。

引理 43。设 G 是一个在非球面的可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图，且 R 是一个余边界。那么

$$\min\{|K| + |K + R| - |R| : K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)\} = 2\nu(R).$$

因此，若 f 是图 G 上的无零流，且 Q 是 $H^\star(G)$ 的一个基，则存在一个余边界 R，使得 $w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) \geq \frac{1}{2}\mu_f(R)$。

证明。注意，任意实数 a 和 b 都满足 $|a| + |a + b| - |b| \geq 0$，且若 $b = 0$，则 $|a| + |a + b| - |b| = 2|a|$。因此，

$$\begin{aligned} |K| + |K + R| - |R| &= \sum_{h \in \vec{\text{hes}}(G)} |K[h]| + |(K + R)[h]| - |R[h]| \\ &\geq 2 \sum_{h \in \vec{\text{hes}}(G), R[h]=0} |K[h]| \geq 0 \end{aligned}$$

对任意余循环 K。考虑一个余循环 $K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)$，设 C'_K 是 $G^\star$ 中的一个非分离有向圈，满足 $\circ C'_K \preceq K$，它由观察 42 得出；再设 C_K 是 C'_k 的底层无向圈。那么

$$|K| + |K + R| - |R| \geq 2 \sum_{h \in \vec{\text{hes}}(G), R[h]=0} |K[h]| \geq 2|E(C_K) \setminus E(\overline{R})| \geq 2\nu(R).$$

因此，$\min\{|K|+|K+R|-|R| : K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)\} \geq 2\nu(R)$，只需证明存在 $K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)$，使得 $|K| + |K + R| - |R| = 2\nu(R)$。

¬若 R 包含一个作为子图的有向非分离圈 C，则令$K' = \circ C$。注意，根据观察 41， K' 不是余边界，并且$K' \preceq R$。令 $K = K' - R$，我们有

$$|K| + |K + R| - |R| = |K' - R| + |K'| - |R| = |R - K'| + |K'| - |R| = 0 = 2\nu(R).$$

¬因此，我们可以假设 R 中的所有有向圈都是分离的。

现在假设 X 是 $G^\star$ 的边集中最小的一个，使得 $R + X$包含一个非分离圈作为子图；令 C 为这样一个圈，并任选两个可能方向之一为其定向。我们将 X 的边视为沿着 C定向，并令 Y 为由 G中相应半边之和构成的 1-链。根据观察 41， $Q = \circ C$ 不是余边界。令 W 为如下由 C 得到的闭游走：对于 $C - X$ 中每条定向与 $\vec{R}$中对应边 e' 相反的边 e，取$\vec{R}$ 中一个包含 e' 的圈 C_e（这样的圈存在，因为 $\vec{R}$ 是欧拉的），并用游走$C_e - e'$替换 e。注意，这对应于将 $\circ C_e$ 加到 Q上。由于 $\vec{R}$ 中的所有有向圈都是分离的，观察 41 表明， $Q' = \circ W$ 可由 Q 加上若干余边界得到，因此 Q' 不是余边界。根据观察 42，存在一个有向非分离圈 C'，令$K' = \circ C'$，则有 $K' \preceq Q'$。根据 X的极小性，有 $X \subseteq E(C')$。注意， $W - X$ 是 $\vec{R}$中若干游走的并，因此对于满足 $Q'[h] > 0$的每条半边 $h \notin X$，都有 $R[h] > 0$。由于 C' 是一个圈且 $K' = \circ C' \preceq Q'$，对于每条这样的边 h，都有$0 \leq K'[h] \leq 1 \leq R[h]$，因此 $K' - Y \preceq R$。令$K = K' - R$，则有

$$\begin{aligned} |K| + |K + R| - |R| &= |K' - R| + |K'| - |R| \\ &= (|Y| + |R - (K' - Y)|) + (|K' - Y| + |Y|) - |R| \\ &= 2|Y| = 2|X| = 2\nu(R). \end{aligned}$$

由此得出 $\min\{|K| + |K + R| - |R| : K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)\} = 2\nu(R)$。

现在考虑图 G 中的无零流 f 和 $H^\star(G)$的一组基 Q。根据引理 32，存在余循环 $K \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)$和余边界 R，使得

$$\begin{aligned} 2w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) &= |K| + |K + R| - \tau_f(R) \\ &= (|K| + |K + R| - |R|) + |R| - \tau_f(R) \\ &\geq 2\nu(R) + |R| - \tau_f(R) = \mu_f(R). \end{aligned}$$

□

我们还需要关于非分离圈的以下标准拓扑观察。

引理 44。设 G 是可定向曲面 Σ上的一个 2-胞腔嵌入，令 C 为 $G^\star$中的一个分离圈， Σ_1 和 Σ_2 为$\Sigma - C$的连通部分。对于 $G^\star$中的每个非分离圈 Q，都存在一个非分离圈 Q'，使得 $E(Q') \subseteq E(Q) \cup E(C)$，且满足 $Q' \subseteq \Sigma_1$或 $Q' \subseteq \Sigma_2$。

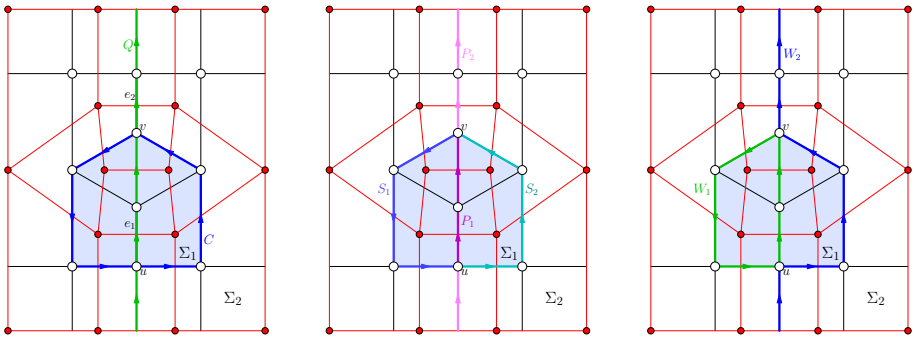


图 13：引理 44 中的情形。

证明。我们对 $|E(Q) \setminus E(C)|$进行归纳，以证明该结论。可以假设存在边 $e_1 \in E(Q) \cap \Sigma_1$ 和 $e_2 \in E(Q) \cap \Sigma_2$，否则可以令 $Q' = Q$。我们任意选择两个可能方向中的一个，给圈 Q 和 C 定向。存在互不相同的顶点 $u, v \in V(C) \cap V(Q)$，使得 Q 是从 u 到 v 的路径 P_1 与从 v到 u的路径 P_2 拼接而成，其中 $e_1 \in E(P_1)$ 且 $e_2 \in E(P_2)$。此外，C 是从 v 到 u 的路径 S_1 与从 u 到 v的路径 S_2 拼接而成。对于 $i \in \{1, 2\}$，令 W_i 为由 P_i 和 S_i拼接得到的闭游走，见图 13。根据观察 41，$\circ Q$ 不是余边界而 $\circ C$ 是，并且由于 $\circ W_1 + \circ W_2 = \circ Q + \circ C$，我们可以假设 $\circ W_2$ 不是余边界。根据观察 42，存在一个非分离圈 Q_2，使得 $\circ Q_2 \preceq \circ W_2$。这意味着$E(Q_2) \subseteq E(P_2) \cup E(S_2) \subseteq (E(Q) \cup E(C)) \setminus \{e_1\}$，因此 $|E(Q_2) \setminus E(C)| \lhd E(Q) \setminus E(C)|$。根据归纳假设，存在一个非分离圈$Q'$，满足 $E(Q') \subseteq E(Q_2) \cup E(C) \subseteq E(Q) \cup E(C)$，使得 $Q' \subseteq \Sigma_1$ 或 $Q' \subseteq \Sigma_2$，如所需。 □

设 $R = \sum_{v \in V(G)} \alpha_v \partial_2^\star v$ 是余边界。R的跨度 为 $\max\{\alpha_v \colon v \in V(G)\} - \min\{\alpha_v \colon v \in V(G)\}$。值得指出的是，$R$的跨度与 R的表达方式无关，因为如果 R也可以表示为 $\sum_{v \in V(G)} \alpha'_v \partial_2^\star v$，那么存在一个整数 δ，使得对于每个 $v \in V(G)$，都有 $a'_v = a_v + \delta$。

引理 45. 设 G 是一个在非球面的可定向曲面 Σ上具有 2-胞腔嵌入的图，且 R 是一个余边界。若 R 的跨度至少为三，则存在一个余边界 $R' \preceq R$，使得 $R' \neq 0$ 和 $\nu(R - R') = \nu(R)$。

证明。令 $R = \sum_{v \in V(G)} \alpha_v \partial_2^\star v$。由于 $\sum_{v \in V(G)} \partial_2^\star v = 0$，且 R的跨度至少为三，不失一般性，假设 $\min\{\alpha_v : v \in V(G)\} \leq -1$，且 $\max\{\alpha_v \colon v \in V(G)\} \geq 2$。对于整数 $k \geq -1$，令 $R_k = \sum_{v \in V(G) : \alpha_v > k} \partial_2^\star v$；注意 $R_k \preceq R$，因为若对于半边 h有 $R_k[h] > 0$，则$R_k[h] = 1$、$\alpha_{\mathrm{tgt}(h)} > k$、$\alpha_{\mathrm{tgt}(\mathrm{opp}(h))} \leq k$，且 $R[h] = \alpha_{\mathrm{tgt}(h)} - \alpha_{\mathrm{tgt}(\mathrm{opp}(h))} \geq 1$。此外，对于 $k \in \{-1, 0, 1\}$，有 $0 \neq R_k \neq R$，因为 R 的跨度至少为三。若 R_0包含一个非分离圈，则 $\nu(R) = \nu(R_0) = 0$，因此我们可以令$R' = R - R_0$。于是，假设 R_0 中的所有圈都是分离的。

令 X 为 $G^\star$ 的边集，使得 $|X| = \nu(R)$，且 $R + X$ 包含一个非分离圈 Q。选取这样一个圈 Q，使得 $|E(Q) \setminus E(R_0)|$ 取到最小值。考虑 R_0中的任意圈 C。我们断言， $E(Q) \setminus E(R_0)$的所有边都画在 $\Sigma - C$的同一个连通部分中；事实上，否则，由引理 44得到的圈 Q' 将与 $|E(Q) \setminus E(R_0)|$的极小性矛盾。由于此断言对 R_0 中的所有圈都成立，我们得出存在 R_0的一个面 x，使得 $E(Q) \setminus E(R_0)$的所有边都画在 x中。注意，对于画在 x中的每个 $v \in V(G)$，要么 $\alpha_v \leq 0$，要么对于画在 x中的每个 $v \in V(G)$，有 $\alpha_v > 0$；因为任何满足 $\alpha_{v'} \leq 0$ 且 $\alpha_{v''} > 0$ 的顶点 v'、$v'' \in V(G)$必然画在 R_0的不同面中。由对称性，不妨假设前者成立。因此，$(E(Q) \setminus E(R_0)) \cap E(R_1) = \emptyset$，从而 $\nu(R - R_1) = \nu(R)$。因此，我们可以令 $R' = R_1$。

□

推论 46. 设 G 是一个图，在球面以外的可定向曲面上有一个 2-胞腔嵌入，并设 f 是 G中的无零流。若 R 是一个余边界，其 $\mu_f(R)$ 取最小值，且在此条件下 $|R|$ 取最小值，则 R 的跨度至多为二。

证明. 否则，令 $R' \preceq R$ 为由引理 45 得到的非零余边界。我们有

$$\begin{aligned}\mu_f(R - R') &= 2\nu(R - R') + |R - R'| - \tau_f(R - R') \\ &= 2\nu(R) + |R| - |R'| - (\tau_f(R) - \tau_f(R')) \\ &= \mu_f(R) + \tau_f(R') - |R'| \leq \mu_f(R),\end{aligned}$$

又由于 $|R - R'| < |R|$，这与 R的极小性矛盾。 □

最后，我们可以用 G的边宽来界定$\mathcal{P}_{G、f和Q}$ 的宽度。

推论 47. 设 G 是一个图，在球面以外的可定向曲面上有一个 2-胞腔嵌入，设 Q 是 $H^\star(G)$的一组基，并设 f 是 G中的无零流。则 $w(\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}) \geq \mathrm{ew}(G^\star) - |\partial_1 f|/2$。

证明。根据引理 43，存在一个余边界 R，使得 $w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) \geq \frac{1}{2}\mu_f(R)$。令 R_0为满足 $\mu_f(R_0)$ 取最小值的余边界；根据推论 46，我们可以假设 R_0 的跨度至多为二。因此，我们可以写成 $R_0 = \sum_{v \in V(G)} \alpha_v \partial_2^\star v$，其中对每个 $v \in V(G)$，$-1 \leq \alpha_v \leq 1$。根据引理 43，存在一个余循环 $K_0 \in Z^\star(G) \setminus B^\star(G)$，使得 $2\nu(R_0) = |K_0| + |K_0 + R_0| - |R_0|$。由于 K_0 不是余边界，观察 42 意味着 K_0 包含一个非分离圈。任何非分离圈都是不可缩的，因此$|K_0| \geq \mathrm{ew}(G^\star)$。类似地，$|K_0 + R_0| \geq \mathrm{ew}(G^\star)$。结合这些关系

并运用观察11，我们得出

$$\begin{aligned} w(\mathcal{P}_{G,f,Q}) &\geq \frac{1}{2}\mu_f(R) \geq \frac{1}{2}\mu_f(R_0) \\ &= \frac{1}{2}(2\nu(R_0) + |R_0| - \tau_f(R_0)) \\ &= \frac{1}{2}(|K_0| + |K_0 + R_0| - \tau_f(R_0)) \\ &= \frac{1}{2}\left(|K_0| + |K_0 + R_0| - \sum_{v \in V(G)} \alpha_v(\partial_1 f)[v]\right) \\ &\geq \frac{1}{2}(|K_0| + |K_0 + R_0| - |\partial_1 f|) \geq \mathrm{ew}(G^\star) - |\partial_1 f|/2. \end{aligned}$$

□

现在我们可以证明关于没有奇数长度面的图的 3-可着色性结果。

定理 *9* 的证明。 假设 H 的边宽至少为 $3\mu_g$，并令 G 为 H的对偶图。由于 H 的每个面长度均为偶数，对偶图 G 是欧拉的，因此它包含一个无零流 f_0，满足 $\partial_1 f_0 = 0$；该流通过沿 G中的一条欧拉回路发送单位流量得到。

令 Q 为 $H^\star(G)$的一个基，并回忆 $|Q| = g$。对于每个 $K \in Q$，令$r(K) = 2\tau_{f_0}(K) \bmod 3$。由于 $|\partial_1 f_0| = 0$，推论 47 蕴含 $w(\mathcal{P}_{G,f_0,Q}) \geq \mathrm{ew}(H) \geq 3\mu_g$，因此多面体 $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_{G,f_0,Q} - r)/3$ 的宽度至少为 $\mathrm{ew}(H)/3 \geq \mu_g$。根据引理 32，$\mathcal{P}_{G,f_0,Q}$ 是多面体$\mathcal{P}_{G,\mathbf{0},Q}$的一个平移。注意到$\mathcal{P}_{G,\mathbf{0},Q} = -\mathcal{P}_{G,\mathbf{0},Q}$，因此多胞体$\mathcal{P}_{G,\mathbf{0},Q}$, $\mathcal{P}_{G,f_0,Q}$和 $\mathcal{P}$ 都是中心对称的。根据定理 38，这意味着 $\mathcal{P}$ 包含一个整数点。

由定理 24 和观察 34 可得，存在一个 f_0-循环流 c，使得对于每个 $K \in Q$，$\tau_c(K) \equiv r(K)$（模 3）。由推论 17，存在一个无零流 f，它在 G 中且边界为 0，并且对于每个 $K \in Q$，$\tau_c(K) \equiv 0$（模 3）。由引理 15，这意味着 H 是 3-可着色的。

□

7 局部 3-可着色性

最后，我们来研究大边宽图的局部 3-可着色性。首先，注意以下观察：它可由最大流最小割对偶性，以及对偶图中的边割与圈（或圈的边不相交并）之间的对应关系推出。设 Σ 为球面以外的可定向曲面，或平面。对于嵌入在 Σ中的图 H 、图 H 的对偶图 G 中的 0- 边界 d，以及围成圆盘 $\Delta \subseteq \Sigma$ 的可缩圈 K（位于 H 中），令

$$\tau_d(K) = \sum_{v \in V(G) \text{ drawn in } \Delta} d[v].$$

值得指出的是，若 f 是 G 中满足 $\partial_1 f = d$ 的一个流，并且我们以自然方式将 K 视为 G 中的余循环，那么$\tau_f(K) = \tau_d(K)$。

观察 48. 设 H 是一个图，其在球面以外的可定向曲面或平面上有一个 2-胞腔嵌入。设 G 是 H 的对偶图，且 d是 G中的一个0-边界。若 H 并非嵌入在平面上，则进一步假设$\mathrm{ew}(H) \geq |d|/2$。存在一个流 f 属于 G，满足 $\partial_1 f = d$，当且仅当 H 中的每个可缩圈 K 都满足 $|\tau_d(K)| \leq |K|$。

设 H 是一个嵌入在非零亏格可定向曲面上的图，并设$D(H)$是 H 中长度不为四的面的集合。对于非空集合$L \subseteq D(H)$，若 H 中的一个可缩圈 K 围住 L，我们称之为围住 L，如果 L 恰好是 H 中长度不为四且嵌入在圆盘 $\Delta \subseteq \Sigma$ 内的面的集合，该圆盘由 K围成。设

$$b(L) = \min\Big(\sum_{x\in L} b(|x|),\ \sum_{x\in D(H)\setminus L} b(|x|)\Big),$$

并注意到

$$b(L) \leq \frac{b^\star(H) - 1}{2}. \tag{7}$$

若 L 被 H 中的一个长度小于 $b(L)$的圈围住，则称 L 是危险的；此时，令 K_L 为任意选取的围住 L的最短圈，并令 H_L 为 H 中嵌入在由 K_L围成的闭圆盘内的子图。若不存在包含 x 的危险集合，则称单元素子集 $L = \{x\} \subseteq D(H)$为半危险的；此时，令 K_L 为对应于 x 和 $H_L = K_L$的面的面边界游走。局部3-可着色性见证 是该子图

$$U = \bigcup_{L\subseteq D(H)\text{: } L \text{ dangerous or semi-dangerous}} H_L$$

图 H （命名缘由见下文引理 51）。我们需要证明，边宽足够大的图中的局部3-可着色性见证都是平坦的。

引理 49. 设 H 是一个在非零亏格可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的简单图，且 $U \subseteq H$ 是一个局部3-可着色性见证。若$\mathrm{ew}(H) \geq b^\star(H)$，则 U 是平坦的。

证明。 若图 U 中的闭游走 W 可以表示为游走 $W_1, \ldots, W_m$ 的拼接，其中，对于 $i \in \{1, \ldots, m\}$， W_i 是图 H_{L_i} 中的游走，那么我们称该闭游走由危险集或半危险集 $L_1, \ldots, L_m$ 覆盖（这些集合不一定两两不同）。反设 U 含有一条不可缩游走W，并从所有可由危险集或半危险集 $L_1, \ldots, L_m$ 覆盖的此类游走中，选取使 m 尽可能小的一条。

设 C为一个圈，其顶点依次为 $1, \ldots, m$。考虑 C中任意两个不相邻的指标 $i < j$。我们声称 $L_i \cap L_j = \emptyset$。事实上，若 $x \in L_i \cap L_j$，则 x 的面边界游走同时包含在 H_{L_i} 和 H_{L_j} 中；由于这些子图是连通的，存在一条路径 W_0，从 W_i 中的一个顶点 z_i 通到W_j 中的一个顶点 z_j，使得 W_0 是 H_{L_i} 中的一条路径与 H_{L_j}中的一条路径的拼接。对于

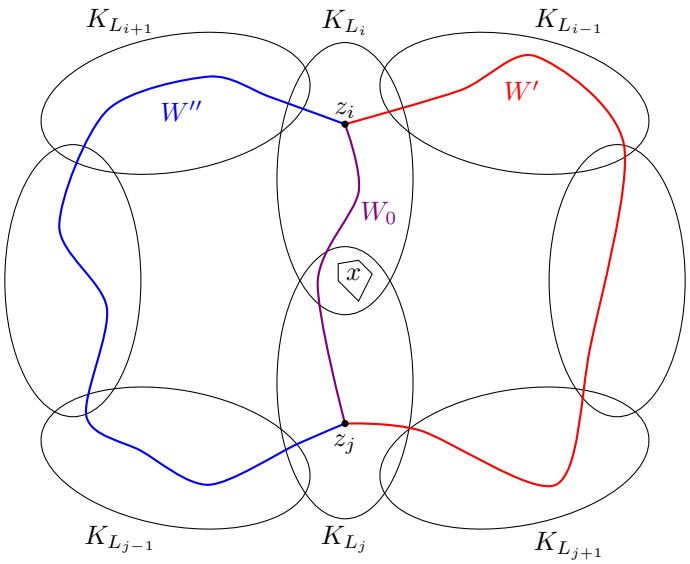


图14：引理 49 中 W' 和 W'' 的构造。

$a \in \{i, j\}$，将 W_a 表示为游走 W'_a 和 W''_a 的拼接，它们分别以 z_a 中的顶点为终点和起点。令 W' 为 W''_j、W_{j+1}、. . .、W_m、W_1、. . .、W_{i-1}、W'_i 和 W_0 的拼接。令 W'' 为 W''_i、W_{i+1}、. . .、W_{j-1}、W'_j 与 W_0 的反向游走的拼接，见图14。由于闭游走 W 不可缩，根据 W' 和 W'' 之间的对称性，不妨设闭游走 W'' 不可缩。然而，W'' 被 L_i、L_{i+1}、. . .、L_j 覆盖，这与 W 的选取矛盾。

由于 W 不可缩，我们有 $W \not\subseteq H_{L_1}$，因此 $m > 1$。令 Y 为游走 Y_1、.....、Y_m 拼接而成的闭游走，构造如下：我们先为每个 i 设定 $Y = W$ 和 $Y_i = W_i$。然后，对于 $i = 1$、.....、m：

- 将 Y_i 替换为包含在 H_{L_i} 中的 Y 的最长子游走，并相应地缩短 Y_{i-1} 和 Y_{i+1}（注意，由于根据 W 的选择，m 具有极小性，它们仍然非空）。注意，Y_i 的两个端点 x_i 和 y_i 都包含在 K_{L_i} 中。

- 将 Y_i 替换为 K_{L_i} 中连接 x_i 和 y_i 的两条游走中较短的一条，见图15。注意，由于 Y_i 包含在 K_{L_i} 围成的圆盘内，Y 与 W 仍然同伦等价。

最后，Y 是 H 中的一条不可缩闭游走，并且对于每个 i，Y_i 的长度至多为 K_i 长度的一半。由于 Y 是不可缩的，H 的边宽界给出 $|Y| \geq \mathsf{ew}(H) \geq b^\star(H)$。

令 $S \subseteq D(H)$ 由满足 $\{x\}$ 为半危险的面 $x \in D(H)$ 组成，

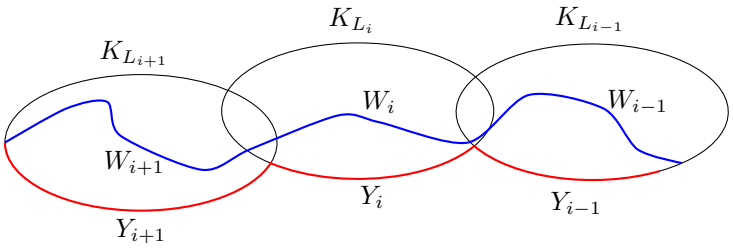


图15：每条游走 W_i 都沿着圈 K_{L_i} 被替换为一条游走 Y_i。

并令

$$\sigma = \sum_{x \in S} b(|x|).$$

对于任意危险集 L，都有 $L \cap S = \emptyset$，因此

$$b(L) \le \sum_{x \in L} b(|x|) \le b^\star(H) - \sigma - 1.$$

结合（7），可得对于每个 i,

$$|Y_i| \le \left\lfloor \frac{|K_i|}{2} \right\rfloor \le \begin{cases} \frac{b(L_i)}{2} \le \min\left(\frac{b^\star(H)-1}{4}, \frac{b^\star(H)-1-\sigma}{2}\right) & \text{if } L_i \text{ is dangerous} \\ \lfloor |x|/2 \rfloor \le b(|x|) & \text{if } L_i = \{x\} \text{ is semi-dangerous.} \end{cases}$$

注意，对于每个 $x \in D(H)$，若 $\{x\}$ 是半危险的，则至多存在一个指标 i 使得 $x \in L_i$，并且对于这个指标有 $L_i = \{x\}$（若对于 $j \ne i$ 有 $x \in L_j$，则 j 在 C 和 $L_j = \{x\} = L_i$ 中将与 i 相邻，这与 m 的极小性矛盾）。因此，

$$\sum_{i: L_i \text{ semi-dangerous}} |Y_i| \le \sum_{i: L_i = \{x_i\} \text{ semi-dangerous}} b(|x_i|) \le \sigma.$$

根据 L_i 是否对所有 $i \in \{1, \dots, m\}$ 都是危险的，分两种情况讨论，可得若 $m \le 3$，则

$$|Y| = \sum_{i=1}^{m} |Y_i| \le \max\left(m \cdot \frac{b^\star(H)-1}{4}, (m-1) \cdot \frac{b^\star(H)-1-\sigma}{2} + \sigma\right) < b^\star(H).$$

这就产生了矛盾，因此 $m \ge 4$。由于当 i 和 j 在 C 中不相邻时，$L_i \cap L_j = \emptyset$，对于每个 $x \in D(H)$ 且 $\{x\}$ 不是半危险的情形，至多存在两个指标 i 使得 $x \in L_i$。因此，

$$\begin{aligned} |Y| = \sum_{i=1}^{m} |Y_i| &\le \sigma + \sum_{i: L_i \text{ dangerous}} |Y_i| \le \sigma + \frac{1}{2} \sum_{i: L_i \text{ dangerous}} b(L_i) \\ &\le \sigma + \frac{1}{2} \sum_{i: L_i \text{ dangerous}} \sum_{x \in L_i} b(|x|) \le \sigma + \frac{1}{2} \sum_{x \in D(H) \setminus S} 2 \cdot b(|x|) = b^\star(H) - 1. \end{aligned}$$

这又是一个矛盾。 □

设 U 是在曲面上绘制的图 H 的平坦子图。若子图 $U_0 \subseteq H$ 是通过在 H 中反复添加连接不同连通分量的路径，直到 U_0 连通而从 U 得到的，则称其为 U 的 合并子图。注意， U_0 中的每个圈也是 U 中的圈，因此 U_0 也是平坦的。

考虑 H 的一个连通平坦子图 U，设 U' 是 U 的一个平面四边形剖分扩张，且设 θ 是从平面四边形剖分扩张的定义中将 U 映射到 U' 的一个子图的同胚。设 U 外面边界上的闭游走为 W，并设 U' 中对应的闭游走为 $W' = \theta(W)$。若游走 P 位于 U' 中，且其端点在 W' 上， P 的所有其他顶点和边都画在 $\theta(U)$ 的外面中，并且 P 的所有顶点（端点除外）两两不同（也就是说， P 要么是两个端点都在 W' 上的路径，要么是与 W' 恰好相交于一个顶点的圈），则称 P 为一条 弦。平面图 $\theta(U) + P$ 恰有一个不是 $\theta(U)$ 的面的内部面；该面的面边界游走由 P 和 W 的一个子游走 B_P （或 W 的逆向游走）组成。我们称 B_P 为这条弦的 基。若 U 的平面四边形剖分扩张 U' 中的每条弦至少与其基一样长，则称该扩张为 一般的。

注意，如果可以对连通平坦子图的外面进行四边形剖分，从而得到平面四边形剖分扩张，那么也可以采用这种方式，使所得的平面四边形剖分扩张是一般的。

观察 50。 设 H 是一个在非零亏格可定向曲面上具有 2-胞腔嵌入的图， U 是 H的一个连通平坦子图。则以下命题等价：

- 的外面具有偶数长度，
- U 具有一般平面四边形剖分扩张，
- U 具有平面四边形剖分扩张。

现在我们来给出局部3-可着色性见证的关键性质。

引理 51. 设 H 是一个简单图，在一个非零亏格的可定向曲面上具有2-胞腔嵌入，且边宽至少为 $b^\star(H)/2$；设 G 是H的对偶图， $U \subseteq H$ 是一个捕获 H的非4边形面的平坦子图。

- 若 H 是3-可着色的，则 U 的合并子图 U_0 的每个一般平面四边形剖分扩张 U_1 都是3-可着色的。
- 若 U 是一个局部3-可着色性见证，且 U 的一个平面四边形剖分扩张是3-可着色的，则存在 G 中的无零流 f，使得$3|\partial_1 f$。

证明。 回顾一下， $D(H)$是 H 中长度不为四的面所组成的集合，并设 I 是 G中对应顶点的集合。由于 U 捕获了H的非四边形面， $D(H)$中的每个面也都是 U的内部面。

对于第一个结论，我们利用引理 15 将 H 的一个 3-着色转化为 G 中的一个无零流 f_0，并将其边界 d_0 复制到 d_1 中的一个边界

$U_1^\star$。然后，我们利用观察 48 证明 $U_1^\star$ 中存在一个边界为 d_1 的流 f_1，将 f_1 扩展为一个无零流 f_1'，最后利用引理 15 将 f_1' 转化为 U_1 的一个 3-着色。现在我们精确地陈述这一论证。

令 θ 为一个同胚，将 U_0 映射到平面四边形剖分扩张定义中的 U_1 的一个子图。稍微滥用一下记号，我们也将 θ 视为把 I 的顶点映射到 U_1的平面对偶图 $U_1^\star$ 中相应的顶点。由于 H 是 3-可着色的，引理 15 表明，在 G 中存在一个无零流 f_0，其边界 $d_0 = \partial_1 f_0$ 可被 3 整除。令 d_1 为 $U_1^\star$ 中定义的 0-边界，如下所示:

$$d_1 = \sum_{v \in I} d_0[v] \cdot \theta(v).$$

任取 U_1中的一个圈 K，并令 M 为在平面中由 K围成的圆盘内绘制的 $\theta(I)$ 的顶点集。如果 $M = \theta(I)$ 或 $M = \emptyset$，那么由于 d_1 是一个 0-边界，我们有 $\tau_{d_1}(K) = 0 \leq |K|$。否则，注意到 K 必与 $\theta(U_0)$ 相交。令 K' 为由 K 将所有弦替换为其基后得到的闭游走；由于 U_1 是一般的，我们有 $|K'| \leq |K|$。注意，$K' \subseteq \theta(U_0)$，并且根据弦的基的定义，绘制在 K'围成的区域内的 $\theta(I)$ 的顶点集与 K的相同，即 M。注意，$\theta^{-1}(M)$ 恰好是绘制在 $\theta^{-1}(K')$ 围成的 Σ 部分中的 I 的顶点集。因此，将 $\theta^{-1}(K')$ 视为 G中的一个余循环，我们有

$$\tau_{d_1}(K) = \sum_{v \in M} d_1[v] = \sum_{u \in \theta^{-1}(M)} d_0[u] = \tau_{f_0}(\theta^{-1}(K')) \leq |K'| \leq |K|.$$

由于这对每个圈 K 都成立，观察 48 表明存在一个流 f_1，它属于 $U_1^\star$ 且满足 $\partial_1 f_1 = d_1$。由引理 18 可知 d_0 是奇偶相容的，因此 d_1 也奇偶相容；于是引理 18 表明存在一个无零流 f_1'，它属于 $U_1^\star$ 且满足 $\partial_1 f_1' = d_1$。由于 $3|d_0$，我们还有 $3|d_1$，因此引理 15 表明 U_1 是 3-可着色的。

现在假设 U 是一个局部 3-可着色性见证，且 U 的一个平面四边形剖分扩张 U_2 是 3- 可着色的。为证明第二个断言，我们利用引理 15 得到一个无零流 f'，它属于 $U_2^\star$，且其边界 d' 可被 3 整除。接着，我们将 d' 转换为 G 中的一个 0-边界 d，并通过观察 50 用反证法证明存在一个流 f，它属于 G 且满足 $\partial_1 f = d$。

更确切地说，设 θ 是一个同胚映射，它将 U 映射到平面四边形剖分扩张定义中的 U_2 的一个子图。由于 U_2 是 3-可着色的，根据引理 15，存在 $U_2^\star$ 中的一个无零流 f'，其边界 $d' = \partial_1 f'$ 可被 3 整除。由于 U 是一个局部3-可着色性见证，U 的所有内部面也是 H 的面，而 H 的所有其他面长度均为四。令

$$d = \sum_{v \in I} d'[\theta(v)] \cdot v;$$

那么，d 是 G 中的一个奇偶相容的零边界，满足 $3|d$，因此根据引理 18，只需证明 G 包含一个满足 $\partial_1 f = d$的流。反设情况并非如此。注意，$|d|/2 < b^\star(H)/2 \leq \mathsf{ew}(H)$，因此

根据观察 48，存在 H 中的一个圈 K，它围成一个圆盘 $\Delta \subseteq \Sigma$，满足

$$\tau_d(K) > |K|. \tag{8}$$

对于 H 中长度不为四的任意面 x，若 $v \in I$ 是 G 中对应的顶点，则 $\theta(v)$ 是 $U_2^\star$ 中度为 $\deg v = |x|$ 的顶点。由流 f' 的存在，以及 $3|d'$ 和 d' 奇偶相容这一事实，可得 $|d[v]| = |d'[\theta(v)]| \le b(\deg v) = b(|x|)$。

令 L 为 H 中绘于 Δ 且长度不为四的面的集合，并令$L^\star$ 为 G 中对应顶点的集合。注意到

$$|\tau_d(K)| = \Big|\sum_{v\in L^\star} d[v]\Big| \le \sum_{x\in L} b(|x|),$$

且由于 d 是一个 0-边界，我们也有

$$|\tau_d(K)| = \Big|\sum_{v\in I\setminus L^\star} d[v]\Big| \le \sum_{x\in D(H)\setminus L} b(|x|).$$

因此，$|\tau_d(K)| \le b(L)$，而由 (8) 可得 $|K| < b(L)$。也就是说，L 是危险的。由于 U 是一个局部3-可着色性见证，U 中存在一个围绕 L、长度至多为 $|K|$ 的圈 K'。然而，注意到 $\theta(L)$ 恰好是 U_2 中绘于圈 $\theta(K') \subseteq U_2$ 内且长度不为四的面的集合，并且

$$\tau_{d'}(\theta(K')) = \tau_d(K) > |K| \ge |\theta(K')|.$$

根据观察 48，这与流 f' 的存在相矛盾。 □

我们现在可以证明大边宽图的 3-可着色性刻画。

定理 6 的证明。 如果 H 是 3-可着色的，那么根据观察 50，任何捕获非四边形面的平坦子图的合并子图都具有一般平面四边形剖分扩张 U_1；根据引理 51，U_1 是 3-可着色的。因此，H 是局部 3-可着色的。

反过来，假设 H 局部 3-可着色，且其边宽至少为$b^\star(H) - 1 + 3\mu_g$。令 U为局部 3-可着色性见证；由引理 49，U是平坦的。此外，由于 H 中每个长度不为四的面，要么构成一个半危险集，要么包含于一个危险集中，因此 U 涵盖了 H 的非四边形面。令 G 为 H的对偶图。由于 H 局部 3-可着色，存在 U的一个 3-可着色平面四边形剖分扩张；由引理 51，存在 G 中的一个无零流 f_0，满足 $3|\partial_1 f_0$。令 Q 为 $H^\star(G)$ 的一个基，并回顾 $|Q| = g$。对每个 $K \in Q$，令 $r(K) = 2\tau_{f_0}(K)$ 模 3。由推论 47，得到 $w(\mathcal{P}_G, f, Q) \ge \mathrm{ew}(H) - |\partial_1 f_0|/2 \ge \mathrm{ew}(H) - (b^\star(H) - 1) \ge 3\mu_g$。因此，多面体 $(\mathcal{P}_G, f_0, Q - r)/3$ 的宽度至少为 μ_g，故由定理 37，它包含一个整数点。由定理 24 和观察 34，存在一个f_0-循环流 c，使得对每个 $K \in Q$，$\tau_c(K) = r(K)$（模 3）。由引理 15 和推论 17，这意味着 H 是 3- 可着色的。 □

环面的改进界可用类似的方法证明。

推论 *8* 的证明。我们完全按照定理 6 证明的第二部分进行。由于多面体（$\mathcal{P}_{G,\ f_0,\ Q} - r$）/3 是$_{1\ 3}$-整数的，且 $g = 2$，由引理 40，只需证明其宽度至少为二；假设 ew（H）$\geq b^{\star}$（H）$+5$即可推出这一点。

□

8 结语

请注意，目前尚无关于定理 37 中常数 μ_d 的超线性下界，事实上，有人猜想该常数为 $\mu_d = O(d\log\ d)$，甚至可能为 $\mu_d = O(d)$。任何对当前 $O(d^{4/3})$ 界的改进，都将直接转化为定理 6 的界的改进。

自然会想到，我们的技巧是否也适用于不可定向曲面。虽然在某种程度上看来确实如此，但由于欧拉亏格为 g 的不可定向曲面的同调群是 $\mathbb{Z}^{g-1}\times\mathbb{Z}_2$，还会面临额外的挑战，这会带来可定向情形中不会出现的奇偶性考量。Dvo˘r´ak、Moore 和 Sereni（私人通信）针对射影平面和克莱因瓶解决了这些问题，并为这些曲面设计了简单高效的算法。

在引理 32 中，我们证明多面体 $\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 是多面体 $\mathcal{P}_{G,\ \partial_1 f,\ Q}$ 的一个平移，因此，除其固定边界外，它实际上与初始无零流的具体选择无关。事实上，我们可以消除对边界的依赖，使其与着色的联系更加直接。令 L 为 G 中度数不等于四的顶点集。我们定义

$$\mathcal{P}_{G,Q} = \left\{ \begin{array}{c} (a,d)\in\mathbb{R}^{Q}\times\mathbb{R}^{L} : \langle d,1\rangle = 0, \\ \langle z,a\rangle + \langle z',d\rangle \leq \min_{z''\in\mathbb{Z}^{V(G)\setminus L}} |\langle z,Q\rangle + \langle (z',z''),\partial_2^{\star}\rangle| \\ \text{for every } (z,z')\in\mathbb{Z}^{Q}\times\mathbb{Z}^{L} \end{array} \right\}.$$

对于 $K\in Q$，若 $|K|$ 为奇数，则令 $a_0(K) = 3$；若 $|K|$ 为偶数，则令 $a_0(K) = 0$。对于 $v\in L$，若 deg v 为奇数，则令 $d_0(v) = 3$；若 deg v 为偶数，则令 $d_0(v) = 0$。应用本文发展的理论，很容易看出，当且仅当 $(\mathcal{P}_{G,\ Q}-(a_0,\ d_0))/6$ 包含一个整数点时，$H = G^{\star}$ 才是 3-可着色的。因此，利用有界维数下的整数规划，我们实际上得到了一个多项式时间算法，只要非四边形面的数量有界（对其长度没有任何限制），就能对画在固定可定向曲面上的图进行 3-着色。然而，当 H 是近似四边形剖分时，遍历至多$q^{\star}(H)$个可能的边界，并对多胞体$\mathcal{P}_{G,\ f,\ Q}$ 应用整数规划，可能比对更高维的多胞体 $\mathcal{P}_{G,\ Q}$应用整数规划更快。

此外，多面体 $\mathcal{P}_{G,\ Q}$ 是中心对称的；人们或许可以结合定理 38 利用这一事实来改进定理 6 中的界。然而，问题在于，无法根据 G的边宽对$\mathcal{P}_{G,\ Q}$ 的宽度给出下界，因为它可能在某个方向 $(0,\ z')$ 上很窄——对于某个 $z'\neq 0$而言，在这种情况下，约束只受余边界影响。

参考文献

[1] Dan Archdeacon、Joan Hutchinson、Atsuhiro Nakamoto、Seiya Negam 和 Katsuhiro Ota。《闭曲面上四边形剖分的色数》。《图论杂志》，37(2):100–114，2001。doi:10.1002/jgt.1005。[2] Wojciech Banaszczyk。《R^n 中凸体与极对偶格的不等式》。II. K-凸性的应用。《离散与计算几何》，16(3):305–311，1996。doi:10.1007/BF02711514。[3] Oleg V. Borodin。《平面图的着色：综述》。《离散数学》，313(4):517–539，2013。doi:10.1016/j.disc.2012.11.011。[4] Erin W. Chambers、Jeff Erickson 和 Amir Nayyeri。《同调流、上同调割》。载于 STOC'09——2009年 ACM国际计算理论研讨会论文集，第273–281页。ACM，纽约，2009。[5] Erin W. Chambers、Jeff Erickson 和 Amir Nayyeri。《同调流、上同调割》。《SIAM计算杂志》，41(6):1605–1634，2012。doi:10.1137/090766863。[6]Daniel Nicolas Dadush。《整数规划、格算法与确定性体积估计》。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2012。博士论文——佐治亚理工学院。网址：http://gateway.proquest.com/openurl?url_ver=Z39.88-2004&rft_val_fmt=info:ofi/fmt:kev:mtx:dissertation&res_dat=xri: pqm&rft_dat=xri:pqdiss:3531709。[7] Zdeněk Dvořák、Daniel Kráľ 和 Robin Thomas。《曲面上无三角形图的三着色 VI：四边形剖分的3-可着色性》。arXiv，1509.01013，2015。[8] Zdeněk Dvořák、Daniel Kráľ 和 Robin Thomas。《曲面上无三角形图的三着色 IV：4-临界图的面大小界》。《组合理论杂志B辑》，150:270–304，2021。doi:10.1016/j.jctb.2020.09.001。[9] Zdeněk Dvořák、Daniel Kráľ 和 Robin Thomas。《曲面上无三角形图的三着色 VII：线性时间算法》。《组合理论杂志B辑》，152:483–504，2022。[10] Zdeněk Dvořák 和 Bernard Lidický。《利用预着色的8-圈对无三角形平面图进行3-着色》。《图论杂志》，80(2):98–111，2015。doi: 10.1002/jgt.21842。[11]Zdeněk Dvořák 和 Jakub Pekárek。《不可约的4-临界无三角形环面图》。《欧洲组合学杂志》，88:103112，14，2020。doi:10.1016/ j.ejc.2020.103112。

[12] Zden˘ek Dvo˘r´ak 和 Jakub Pek´arek。《圆柱面和环面上的近四边形剖分着色》。《欧洲组合学杂志》，93：论文编号 103258，共 22 页，2021 年。doi:10.1016/j.ejc.2020.103258.[13] Zden˘ek Dvo˘r´ak 和 Jakub Pek´arek。《4-临界无三角形环面图的刻画》。《组合理论杂志B辑》，154：336–369，2022 年。doi: 10.1016/j.jctb.2022.01.008.[14] Michael R. Garey 和 David S. Johnson。《计算机与难解性：数学科学丛书》。W. H. Freeman and Co.，旧金山，加利福尼亚州，1979 年。NP完全性理论指南。[15] John Gimbel 和 Carsten Thomassen。《固定亏格和围长的图的着色》。《美国数学会汇刊》，349(11)：4555–4564，1997 年。doi:10.1090/S0002-9947-97-01926-0.[16] Luis A. Goddyn、Michael Tarsi 和 Cun-Quan Zhang。《关于(k, d)-着色和分数无零流》。《图论杂志》，28(3)：155–161，1998 年。doi:10.1002/(SICI)1097-0118(199807)28:3<155::AID-JGT5>3. 0.CO;2-J.[17] Herbert Gr¨otzsch。《离散结构理论。VII. 球面上无三圈网络的三着色定理》。《马丁·路德大学哈雷-维滕贝格数学与自然科学系列科学杂志》，8：109–120，1958/59。[18] Cor A. J. Hurkens。《平面上凸集的膨胀》。《线性代数及其应用》，134：121–128，1990 年。doi:10.1016/0024-3795(90) 90010-A.[19] Joan P. Hutchinson。《嵌入曲面且所有面边数均为偶数的图的三着色》。《组合理论杂志B辑》，65(1)：139–155，1995 年。doi: 10.1006/jctb.1995.1047.[20] Ravi Kannan 和 L´aszl´o Lov´asz。《覆盖极小值与无格点凸体》。《数学年刊》(第二辑)，128(3)：577–602，1988 年。doi:10.2307/ 1971436.[21] Daniel Kr´al’ 和 Robin Thomas。《环面和克莱因瓶上的偶面图着色》。《Combinatorica》，28(3)：325–341，2008 年。doi:10.1007/ s00493-008-2315-z.[22]Jan Kratochv´ıl 和 Andr´as Seb˝o。《预着色完美图的着色》。《图论杂志》，25(3)：207–215，1997 年。doi:10.1002/(SICI) 1097-0118(199707)25:3<207::AID-JGT4>3.0.CO;2-P.[23] J´erˆome Monnot。《关于无三角形平面图中预着色扩展着色问题的NP完全性的注记》。《计算与决策科学基金会》，31(2)：169–173，2006 年。

[24] Mark Rudelson。《非对称凸体之间的距离与MM^*-估计》。《Positivity》，4:2:161–178，2000 年。[25] William T. Tutte。《对色多项式理论的贡献》。《加拿大数学杂志》，6：80–91，1954 年。doi:10.4153/cjm-1954-010-9.[26] A. Vince。《星色数》。《图论杂志》，12(4)：551–559，1988 年。doi:10.1002/jgt.3190120411。