arXiv:2303.05594v1 [math.AP] 9 Mar 2023

海森堡群上的非线性索博列夫型方程的瞬时爆破解

MEIIRKHAN B. BORIKHANOV、MICHAEL RUZHANSKY 和 BERIKBOL T. TOREBEK

Abstract. 本文研究海森堡群上的非线性 Sobolev 型方程。我们采用非线性容量方法，证明这些问题不存在非平凡的局部弱解，即会发生“瞬时爆破”。具体而言，通过选取适当的测试函数，我们将证明，对于满足 $q \le \frac{Q}{Q-2}$ 的任意初始条件 u_0, $u_1 \in L^q(\mathbb{H}^n)$，都会发生瞬时爆破。

1. 引言

我们考虑海森堡群上的以下非线性 Sobolev 型方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta_{\mathbb{H}} u + \Delta_{\mathbb{H}} u + |u|^q = 0, \quad (t,\eta) \in (0,T)\times \mathbb{H}^n, \\ u(0,\eta) = u_0(\eta), \ \eta \in \mathbb{H}^n, \end{cases} \tag{1.1}$$

and

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_{\mathbb{H}} u + \Delta_{\mathbb{H}} u + |u|^q = 0, \quad (t,\eta) \in (0,T)\times \mathbb{H}^n, \\ u(0,\eta) = u_0(\eta), \ \frac{\partial}{\partial t}u(0,\eta) = u_1(\eta), \ \eta \in \mathbb{H}^n, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中 $q > 1$ 和 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 是海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 上的次拉普拉斯算子。

许多作者研究过瞬时爆破问题。我们先来介绍一些与（1.1）和（1.2）相关的著名问题。

首先，Brezis 和 Cabr´e 在 [2] 中分别研究了奇异非线性抛物方程和椭圆方程局部解的不存在性

$$\begin{cases} u_t - \Delta u \ge |x|^{-2}u^2 \ \text{ in } \ (0,\infty)\times(\Omega\setminus\{0\}), \\ u(0,x) = u_0(x) \ \text{ in } \ \Omega, \end{cases} \tag{1.3}$$

and

$$\begin{cases} -\Delta u \ge |x|^{-2}u^2 \ \text{ in } \ \Omega\setminus\{0\}, \\ u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是边界光滑的区域。

2020年数学主题分类：35R03、35B33、35B44。关键词与短语：非线性索博列夫型方程、瞬时爆破、海森堡群。

随后，在 [21, 3] 中，作者们研究了半线性热方程的局部存在性问题

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |u|^{p-1}u \quad \text{in} \ \ (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \ \ (0,T)\times\partial\Omega, \\ u\,(0,x) = u_0\,(x) \quad \text{in} \ \ \Omega, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是边界光滑的区域，且 $p > 1$。

随后，对于具有奇异势的线性抛物方程

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = a(x)u \quad \text{in} \ \ (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 \quad \text{on} \ \ (0,T)\times\partial\Omega, \\ u\,(0,x) = u_0\,(x) \quad \text{in} \ \ \Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是光滑有界区域，且 $a(x) \geq 0$，文献 [4] 得到了“瞬时爆破”现象。

值得注意的是，上述相关文献中已使用比较方法证明解不存在。另一方面，对于关于时间的高阶算子，标准比较原理往往会失效。因此，许多作者采用非线性容量方法来克服这一困难（参见 [16] 及其中的参考文献）。该方法可在充分条件下证明时间高阶方程的解不存在。特别是，文献 [7, 8] 使用该方法研究了多种非线性演化方程的瞬时爆破，包括高阶拟线性演化偏微分方程以及具有奇异系数的不等式。

在[5], 带状区域上的非经典索ոբ列夫方程中,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u_{xtx}, \\ u(0,x) = u_0(x), \ u(t,0) = u(t,l) = 0, \ l > 0, \end{cases} \tag{1.7}$$

首次发现了瞬时爆破。在条件 $l \in (0,\pi]$下，得出了关于该问题在无限短时间内不存在有界解的主要结果。

此外，Korpusov 还研究了若干类非线性索博列夫型方程中的瞬时爆破，其中包括 1.1 问题和 1.2 问题，定义在 $\mathbb{R}^n$ 上，参见[12]。具体而言，研究表明，若 u_0，$u_1 \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 且

$$1 < q \leq q_c := \begin{cases} +\infty, & \text{if} \quad n = 1,2, \\ \dfrac{n}{n-2}, & \text{if} \quad n \geq 3, \end{cases} \tag{1.8}$$

那么，问题（1.1）和（1.2）不存在非平凡的局部弱解。此外，我们需要指出，作者在 [13]-[15]中研究了瞬时爆破解。

最近，Jleli 等人研究了问题（1.2）在完备非紧黎曼流形上定义势的情形下局部弱解的不存在性 [9], ，以及外部区域中的一些索博列夫型微分不等式 [10]。

一般而言，索博列夫型问题，例如（1.1）-（1.2），已在以下空间中得到广泛研究： $\mathbb{R}^N$ 在 [10, 12, 13] 以及完备非紧黎曼流形上，参见 [9]。

我们还注意到，李群上半线性演化方程的藤田型指数已在 [11, 17, 18, 22]，中得到研究；次黎曼流形和一般幺模李群上的相关研究见 [20]。

受上述工作的启发，本文的主要目标是研究海森堡群上的瞬时爆发现象，参见 $\mathbb{H}^n$、 $n \geq 1$。

我们的主要结果如下。

定理 1.1。设 $u_0 \in L^q$（$\mathbb{H}^n$）。若

$$1 < q \leq q_c = \frac{Q}{Q-2},$$

那么问题 (1.1) 对任意 $T > 0$ 都不存在局部弱解，即柯西问题 (1.1) 的局部弱解发生瞬时爆破。

定理 1.2. 设 $u_0 \in L^q(\mathbb{H}^n)$ 且 $u_1 \in L^q(\mathbb{H}^n)$。若

$$1 < q \leq q_c = \frac{Q}{Q-2},$$

那么问题 (1.2) 对任意 $T > 0$ 均不存在非平凡局部弱解，即柯西问题(1.2) 的局部弱解发生瞬时爆破。

注 1.3. 注意，临界指数 $q_c = \frac{Q}{Q-2}$ 是最优的。事实上，若

$$q > q_c = \frac{Q}{Q-2},$$

那么问题 (1.1) 和问题 (1.2 都有平稳超解，即存在函数 $v(\eta) > 0$，它是方程的一个正解（见 [1]）

$$\Delta_{\mathbb{H}} v + v^q = 0,\ \eta \in \mathbb{H}^n,$$

当 $q > q_c = \frac{Q}{Q-2}$.

因此，对于足够小的初始数据，函数 v 是问题(1.1)和(1.2)的上解，即

$$u(t,\eta) \leq v(\eta),\ t \geq 0,\ \eta \in \mathbb{H}^n.$$

这意味着，问题(1.1)和(1.2)的解对于所有$t \geq 0$ 和 $\eta \in \mathbb{H}^n$.

2. Preliminaries

2.1. 海森堡群。本小节将简要回顾海森堡群背景下所需的概念。更多详情请参阅 [6],[19]。

海森堡群 $\mathbb{H}^n$ 的元素为 $\eta=(x,y,\tau)$，其中 x、$y\in\mathbb{R}^n$ 和 $\tau\in\mathbb{R}$，它是一个二步幂零李群 $(\mathbb{R}^{2n+1},\circ)$，其群乘法定义如下：

$$\eta\circ\eta'=(x+x',y+y',\tau+\tau'+2(\langle x,y'\rangle-\langle x',y\rangle)),$$

其中 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中通常的内积。

从 $\eta=(x,y,\tau)\in\mathbb{H}^n$ 到原点的距离为

$$|\eta|_{\mathbb{H}}=\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)\right)^2+\tau^2\right)^{1/4}=\left(\left(|x|^2+|y|^2\right)^2+\tau^2\right)^{1/4}. \tag{2.1}$$

关于群运算的海森堡群上的膨胀运算为

$$\delta_\lambda(\eta)=(\lambda x,\lambda y,\lambda^2\tau)\ \text{ for }\ \lambda>0,$$

其雅可比行列式为 λ^Q，其中 $Q=2n+2$ 是 $\mathbb{H}^n$ 的齐性维数。

海森堡群上关于 $1\le i\le n$ 的左不变向量场的李代数 $\mathfrak{h}$ $\mathbb{H}^n$ 由以下元素张成

$$X_i:=\frac{\partial}{\partial x_i}+2y_i\frac{\partial}{\partial\tau},$$
$$Y_i:=\frac{\partial}{\partial y_i}-2x_i\frac{\partial}{\partial\tau},$$

及其（非零）对易子

$$[X_i,Y_i]=-4\frac{\partial}{\partial\tau}.$$

次拉普拉斯算子定义为

$$\Delta_{\mathbb{H}}=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2+Y_i^2\right).$$

经过显式计算可得表达式

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathbb{H}}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\partial^2_{x_ix_i}+\partial^2_{y_iy_i}+4y_i\partial^2_{x_i\tau}-4x_i\partial^2_{y_i\tau}+4(x_i^2+y_i^2)\partial^2_{\tau\tau}\right)\\&=\Delta_{(x,y)}+4|(x,y)|^2\partial^2_{\tau\tau}+4\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\partial^2_{x_i\tau}-x_i\partial^2_{y_i\tau}\right),\end{aligned} \tag{2.2}$$

其中，$\Delta_{(x,y)}$ 和 $|(x,y)|^2$ 分别表示拉普拉斯算子和 $\mathbb{R}^{2n}$ 中 (x,y) 的欧几里得范数。

此外，若 $u(\eta)=\varphi(|\eta|_{\mathbb{H}})$，则

$$\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(r)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)}{r^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{Q-1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right), \tag{2.3}$$

其中，$r=|\eta|_{\mathbb{H}}$，$Q=2n+2$ 是 $\mathbb{H}^n$ 的齐性维数。

该算子 $\Delta_{\mathbb{H}}$ 满足以下基本性质：

(a)：它在群的左乘下保持不变：对于所有η、 $\eta' \in \mathbb{H}^n$ ，我们有

$$(\Delta_{\mathbb{H},\eta'} u)(\eta \circ \eta') = (\Delta_{\mathbb{H}} u)(\eta \circ \eta').$$

(b)：它关于群中的膨胀是齐次的：对所有 $\lambda > 0$，有

$$\Delta_{\mathbb{H}}(u(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 \tau)) = \lambda^2 (\Delta_{\mathbb{H}} u)(\lambda x, \lambda y, \lambda^2 \tau).$$

由于 $(-\Delta_{\mathbb{H}})$ 是自伴算子，对所有 $u, v \in H^2(\mathbb{H}^n)$

$$\int_{\mathbb{H}^n} (-\Delta_{\mathbb{H}} u)(\eta) v(\eta) d\eta = \int_{\mathbb{H}^n} u(\eta)(-\Delta_{\mathbb{H}} v)(\eta) d\eta. \tag{2.4}$$

2.2. 测试函数。本小节将讨论一些测试函数及其性质。此外，我们将建立一些涉及测试函数的估计。

我们考虑满足下列条件的测试函数

$$\varphi(t, \eta) = \varphi_1(t)\varphi_2(\eta) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\ell} \Phi\left(\frac{|\eta|_{\mathbb{H}}^2}{R^2}\right), \quad t > 0, \eta \in \mathbb{H}^n, \tag{2.5}$$

其中 T， $R > 0$， $\ell > \frac{q+1}{q-1}$ 且 $|\eta|_{\mathbb{H}}$ 是由（2.1）定义的距离。

函数 $\Phi \in C^2(\mathbb{R}_+)$ 是标准截断函数，其定义如下：

$$\Phi(z) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad 0 \le z \le \frac{1}{2}, \\ \searrow & \text{if} \quad \frac{1}{2} < z < 1, \\ 0 & \text{if} \quad z \ge 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

此外，假设 $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ 满足以下条件：

$$\int_{\mathbb{H}^n} \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta < +\infty.$$

引理 2.1. 设 $T > 0$。当 T、 R 充分大时，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1|^{q'} dt = C_1 T, \\ \mathcal{I}_2 &= \int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1'|^{q'} dt = C_2 T^{1-q'}, \\ \mathcal{I}_3 &= \int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1''|^{q'} dt = C_3 T^{1-2q'} \end{aligned}$$

and

$$\mathcal{I}_4 = \int_{\mathbb{H}^n} \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta \le C_4 R^{Q-2q'}.$$

引理的证明2.1。 由（2.5）可知， $\ell > \frac{q+1}{q-1}$，我们得到

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1|^{q'} dt = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\ell} dt = C_1 T,$$

$$\mathcal{I}_2 = \int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1'|^{q'} dt = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-\frac{\ell}{q-1}} \left| \ell T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\ell-1} \right|^{q'} dt = C_2 T^{1-q'},$$

$$\mathcal{I}_3 = \int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1''|^{q'} dt = \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{-\frac{\ell}{q-1}} \left| \frac{\ell(\ell-1)}{T^2} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\ell-2} \right|^{q'} dt = C_3 T^{1-2q'},$$

其中 C_1、C_2 和 C_3 是由.....确定的正系数

$$C_1 = \frac{1}{\ell+1}, \quad C_2 = \frac{(q-1)\ell^{\frac{q}{q-1}}}{\ell(q-1)-1}, \quad C_3 = \frac{(q-1)(\ell(\ell-1))^{\frac{q}{q-1}}}{\ell(q-1)-q-1}.$$

此外，由于（2.3）和（2.6），可得

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2 &= \frac{|x|^2+|y|^2}{r^2} \left(\frac{4r^2}{R^4} \Phi'' \left(\frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{(Q-1)2+2}{R^2} \Phi' \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \right) \\ &= \frac{|x|^2+|y|^2}{r^2} \left(\frac{4}{R^2} \Phi'' \left(\frac{r^2}{R^2} \right) + \frac{2Q}{R^2} \Phi' \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \right) \\ &\leq \frac{C}{R^2} \left(\left| \Phi'' \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \right| + \left| \Phi' \left(\frac{r^2}{R^2} \right) \right| \right), \end{aligned} \tag{2.7}$$

根据估计 $|x|^2+|y|^2 \leq \left(\tau^2 + (|x|^2+|y|^2)^2\right)^{\frac{1}{2}} = r^2$。

因此，通过作如下变量替换

$$\tilde{x} = \frac{x}{R}, \tilde{y} = \frac{y}{R}, \tilde{\tau} = \frac{\tau}{R^2}, \quad \tilde{\eta} = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\tau}),$$

并回顾前一个估计，我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_4 &= \int_{\mathbb{H}^n} \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta \\ &\leq R^{Q-2q'} \int_{\frac{1}{2} \leq |\tilde{\eta}|_{\mathbb{H}}^2 \leq 1} \Phi^{-\frac{1}{q-1}}(\tilde{\eta}) ||\Phi''(\tilde{\eta})| + |\Phi'(\tilde{\eta})||^{q'} d\tilde{\eta} \\ &= C_4 R^{Q-2q'}, \end{aligned}$$

其中

$$C_4 = \int_{\frac{1}{2} \leq |\tilde{\eta}|_{\mathbb{H}}^2 \leq 1} \Phi^{-\frac{1}{q-1}}(\tilde{\eta}) ||\Phi''(\tilde{\eta})| + |\Phi'(\tilde{\eta})||^{q'} d\tilde{\eta},$$

至此证明完成。 □

Ne接下来，对于足够大的 $0 < T$、$R < \infty$，我们考虑另一个测试函数，

$$\psi(t,\eta) = \psi_1(t)\psi_2(\eta) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\ell} \Psi^{\kappa} \left(\frac{\ln\left(\frac{|\eta|_{\mathbb{H}}}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right), \quad t > 0, \, \eta \in \mathbb{H}^n, \tag{2.8}$$

其中 $\ell > \frac{q+1}{q-1}$ 和 $\kappa > \frac{2q}{q-1}$.
令函数 $\Psi \in C^2(\mathbb{R})$ 为函数 $\Psi : \mathbb{R} \to [0,1]$，它是由下式定义的标准截断函数

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } -\infty < z \le 0, \\ \searrow & \text{if } 0 < z < 1, \\ 0 & \text{if } z \ge 1, \end{cases} \tag{2.9}$$

with

$$|\Psi'(z)| \le C, \ |\Psi''(z)| \le C. \tag{2.10}$$

引理 2.2. 设 $T > 0$ 和 $q = \dfrac{Q}{Q-2}$。对于充分大的 T, R，有

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_1 &= \int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \psi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi|^{\frac{q}{q-1}} dt = C_1 T \left[(\ln R)^{-Q} + (\ln R)^{-\frac{Q}{2}} \right], \\
\mathcal{J}_2 &= \int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \psi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi_t|^{\frac{q}{q-1}} dt = C_2 T^{\frac{2-Q}{2}} \left[(\ln R)^{-Q} + (\ln R)^{-\frac{Q}{2}} \right], \\
\mathcal{J}_3 &= \int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \psi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi_{tt}|^{\frac{q}{q-1}} dt = C_3 T^{1-Q} \left[(\ln R)^{-Q} + (\ln R)^{-\frac{Q}{2}} \right].
\end{aligned}$$

引理的证明 2.2。由以下恒等式

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{Q-1}{r} \frac{d}{dr} \right] \psi_2 = {} & \frac{\kappa(\kappa-1)}{r^2 \ln^2 \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-2} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \left[\Psi' \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \right]^2 \\
& + \frac{\kappa}{r^2 \ln^2 \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-1} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \Psi'' \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \\
& + \frac{\kappa(Q-2)}{r^2 \ln \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-1} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \Psi' \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right)
\end{aligned}$$

并注意到对于函数 2.3) Ψ （2.10）可得

$$\begin{aligned}
|\Delta_{\mathbb{H}} \psi_2| &\le \frac{(|x|^2 + |y|^2)}{r^2} \frac{C}{r^2} \left[\frac{1}{\ln^2 \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-2} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) + \frac{1}{\ln \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-1} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \right] \\
&\le \frac{C}{r^2} \left[\frac{1}{\ln^2 \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-2} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) + \frac{1}{\ln \sqrt{R}} \Psi^{\kappa-1} \left(\frac{\ln\left(\frac{r}{\sqrt{R}}\right)}{\ln\left(\sqrt{R}\right)} \right) \right],
\end{aligned}$$

这里我们用到了 $|x|^2 + |y|^2 \le \left(\tau^2 + (|x|^2 + |y|^2)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = r^2$。

此时，利用施瓦茨不等式和

$$(a+b)^m \le 2^{m-1}(a^m + b^m), \ a \ge 0, \ b \ge 0, \ m = \frac{q}{q-1},$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}\psi_2^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\psi_2|^{q'}d\eta \le C\int_{\mathbb{H}^n}\psi_2^{-\frac{1}{q-1}}\left[\frac{1}{|\eta|_{\mathbb{H}}^2\ln^2\sqrt{R}}\left|\psi_2^{\frac{\kappa-2}{\kappa}}\right|\right]^{\frac{q}{q-1}}d\eta\\ +C\int_{\mathbb{H}^n}\psi_2^{-\frac{1}{q-1}}\left[\frac{1}{|\eta|_{\mathbb{H}}^2\ln\sqrt{R}}\left|\psi_2^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right|\right]^{\frac{q}{q-1}}d\eta.\end{aligned} \tag{2.11}$$

因此，注意到 $\kappa>\frac{2q}{q-1}$ 以及（2.9），我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}\psi_2^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\psi_2|^{q'}d\eta \le C\int_{\mathbb{H}^n}\left[\frac{1}{|\eta|_{\mathbb{H}}^2\ln^2\sqrt{R}}\right]^{\frac{q}{q-1}}d\eta\\ +C\int_{\mathbb{H}^n}\left[\frac{1}{|\eta|_{\mathbb{H}}^2\ln\sqrt{R}}\right]^{\frac{q}{q-1}}d\eta.\end{aligned}$$

由于 $q=\dfrac{Q}{Q-2}$，可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{H}^n}\left[\frac{1}{|\eta|_{\mathbb{H}}^2\ln^2\sqrt{R}}\right]^{\frac{q}{q-1}}d\eta &= (\ln R)^{-\frac{2q}{q-1}}\int\limits_{1<|\eta|_{\mathbb{H}}<R}|\eta|_{\mathbb{H}}^{-\frac{2q}{q-1}}d\eta\\ &\overset{|\eta|_{\mathbb{H}}=r}{=}(\ln R)^{-\frac{2q}{q-1}}\int\limits_{1<r<R}r^{-\frac{2q}{q-1}+Q-1}dr\\ &\le C\,(\ln R)^{-\frac{2q}{q-1}}\,R^{-\frac{2q}{q-1}+Q}\\ &\le C\,(\ln R)^{-Q},\end{aligned} \tag{2.12}$$

由于 $\frac{2q}{q-1}=\frac{\frac{2Q}{Q-2}}{\frac{2}{Q-2}}=Q.$

类似地，我们推得

$$\int_{\mathbb{H}^n}\left[\frac{1}{|\eta|_{\mathbb{H}}^2\ln\sqrt{R}}\right]^{\frac{q}{q-1}}d\eta\le C\,(\ln R)^{-\frac{Q}{2}}. \tag{2.13}$$

最后，结合引理 2.1 与（2.12）-（2.13），我们得到关于 $\mathcal{J}_1$、$\mathcal{J}_2$ 和 $\mathcal{J}_3$ 的所需估计，从而完成证明。□

3. The proof of main results

本节将推导本文的主要结果。

定义 3.1. 设 $u_0\in L^q(\mathbb{H}^n)$。函数 $u\in L^q{}_{\mathrm{loc}}([0,T];\ L^q{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n))$ 称为问题（1.1）的局部弱解，当且仅当

$$\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}(|u|^q\varphi+u\Delta_{\mathbb{H}}\varphi-u\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t)d\eta dt=\int_{\mathbb{H}^n}u_0\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(0,\eta)d\eta, \tag{3.1}$$

对任意 $\varphi\in C^{1,\,2}_{t,\,\eta}([0,T];\,\mathbb{H}^n)$，若 $\mathrm{supp}(\varphi)\subset[0,T]\times\mathbb{H}^n$，$\varphi(T,\eta)=0$，均成立 .

定义 3.2。 设 u_0, $u_1 \in L^q(\mathbb{H}^n)$。 若函数 $u \in L^q{}_{\mathrm{loc}}([0,T];\ L^q{}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n))$ 是方程 (1.2) 的局部弱解，则

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} (|u|^q\varphi + u\Delta_{\mathbb{H}}\varphi + u\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_{tt})d\eta dt = &\int_{\mathbb{H}^n} u_1\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(0,\eta)d\eta \\ &- \int_{\mathbb{H}^n} u_0\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t(0,\eta)d\eta,\end{aligned} \tag{3.2}$$

对任意 $\varphi \in C^{2,\ 2}_{t,\ \eta}([0,T];\ \mathbb{H}^n)$，若 $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [0,T]\times\mathbb{H}^n$，则 $\varphi(T,\eta) = \varphi_t(T,\eta) = 0$。

定理 *1.1* 的证明。 我们将分别讨论次临界情形和临界情形。

- 次临界情形 $q < \dfrac{Q}{Q-2}$。 在 (¨3.1) 的左侧应用 Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} u\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t d\eta dt &\le \int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|\varphi^{\frac{1}{q}}\varphi^{-\frac{1}{q}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t| d\eta dt \\ &\le \left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t|^{q'} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}}\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} u\Delta_{\mathbb{H}}\varphi d\eta dt &\le \int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|\varphi^{\frac{1}{q}}\varphi^{-\frac{1}{q}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi| d\eta dt \\ &\le \left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q\varphi d\eta dt\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{q'} d\eta dt\right)^{\frac{1}{q'}}.\end{aligned}$$

因此，利用 ε-Young 不等式

$$XY \le \frac{\varepsilon}{q}X^q + \frac{1}{q'\varepsilon^{q'-1}}Y^{q'},\ \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1,\ X, Y, \varepsilon > 0,$$

在最后一个不等式的右端，结合 $\varepsilon = \dfrac{q}{4}$，我们可以将（3.1）改写为以下形式

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q\varphi d\eta dt \le\ & 2C(q)\left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t|^{q'} d\eta dt\right) \\ &+ 2C(q)\left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi|^{q'} d\eta dt\right) \\ &+ 2\int_{\mathbb{H}^n} u_0\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_2 d\eta,\end{aligned} \tag{3.3}$$

其中 $C(q) = \left(\frac{q}{4}\right)^{1-q} \frac{1}{q'}$.

选取函数 φ如式（2.5）所示，可得

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_t| d\eta dt = \underbrace{\left(\int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1'|^{q'} dt \right)}_{\mathcal{I}_2} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{H}^n} \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta \right)}_{\mathcal{I}_4},$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \varphi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi| d\eta dt = \underbrace{\left(\int_0^T \varphi_1^{-\frac{1}{q-1}} |\varphi_1|^{q'} dt \right)}_{\mathcal{I}_1} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{H}^n} \varphi_2^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta \right)}_{\mathcal{I}_4}.$$

利用引理 2.1，可推得

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \varphi_1 \varphi_2 d\eta dt \le C_5(q) T^{1-q'} R^{Q-2q'} + C_6(q) T R^{Q-2q'} + 2 \int_{\mathbb{H}^n} u_0 \Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2 d\eta,$$

其中 $C_5(q) = 2C(q)C_1C_4$ 和 $C_6(q) = 2C(q)C_2C_4$分别成立。

由于 $u_0 \in L^q(\mathbb{H}^n)$ 并在最后一项中使用 H¨older 不等式，同时考虑式（2.7），可得

$$\left| \int_{\mathbb{H}^n} u_0 \Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2 d\eta \right| \le \left(\int_{\mathbb{H}^n} |u_0|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta \right)^{\frac{1}{q'}},$$

with

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta \le R^{Q-2q'} \int_{\frac{1}{2} \le |\tilde{\eta}|_{\mathbb{H}}^2 \le 1} |\Phi''(\tilde{\eta})| + |\Phi'(\tilde{\eta})||^{q'} d\tilde{\eta} \le C R^{Q-2q'}, \tag{3.4}$$

其中 C 与 $R > 0$无关。

因此，我们得到

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \varphi_1 \varphi_2 d\eta dt \le C_5(q) T^{1-q'} R^{Q-2q'} + C_6(q) T R^{Q-2q'} + C R^{Q-2q'} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |u_0|^q d\eta \right)^{\frac{1}{q}}.$$

最后，将 $R \to +\infty$ 代入关于 $Q - 2q' < 0$的最后一个不等式，我们推得

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \varphi_1(t) d\eta dt \le 0 \text{ for all } T > 0.$$

因此，对于 $\eta \in \mathbb{H}^N$和 $t \in [0, T]$，几乎处处有 $u(t, \eta) = 0$。由于此时刻 $T > 0$ 是任意的，我们得出结论：非平凡局部弱解不存在，也就是说，解会发生瞬时爆破。

- 临界情形 $q = \frac{Q}{Q-2}$。此时，我们选择的测试函数与（2.8）中的相同。因此，

我们将使用相同的方法推导出下列不等式，而非（3.3）

与前一种情形中的步骤相同

$$\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}|u|^q\psi d\eta dt \le 2C(q)\underbrace{\left(\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}\psi^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\psi_t|^{q'}d\eta dt\right)}_{\mathcal{J}_2}$$
$$+2C(q)\underbrace{\left(\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}\psi^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\psi|^{q'}d\eta dt\right)}_{\mathcal{J}_1} \tag{3.5}$$
$$+2\int_{\mathbb{H}^n}u_0\Delta_{\mathbb{H}}\psi_2 d\eta.$$

在最后一项中应用 H¨older 不等式（3.5）可得,

$$\left|\int_{\mathbb{H}^n}u_0\Delta_{\mathbb{H}}\psi_2 d\eta\right| \le \left(\int_{\mathbb{H}^n}|u_0|^q d\eta\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{H}^n}|\Delta_{\mathbb{H}}\psi_2|^{q'}d\eta\right)^{\frac{1}{q'}}$$

并结合 2.11）和 $\kappa > \frac{2q}{q-1} > 2$，可得

$$\int_{\mathbb{H}^n}|\Delta_{\mathbb{H}}\psi_2|^{q'}d\eta \le C\left[(\ln R)^{-Q}+(\ln R)^{-\frac{Q}{2}}\right],$$

其中 C 是常数。

最后，利用引理 2.2 以及结合 $u_0 \in L^q$（$\mathbb{H}^n$）所得的最后一个不等式，可得

$$\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}|u|^q\psi_1\psi_2 d\eta dt \le \left[\mathcal{C}_1(q)T^{\frac{2-Q}{2}}+\mathcal{C}_2(q)T+2C\right]\left[(\ln R)^{-Q}+(\ln R)^{-\frac{Q}{2}}\right], \tag{3.6}$$

其中 $\mathcal{C}_1(q) = 2C(q)$ 以及 $\mathcal{C}_2(q) = 2C(q)C_2$.

因此，在 $R \to +\infty$ 式（3.6）中令其趋于极限，可得

$$\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}|u|^q\psi_1 d\eta dt \le 0 \text{ for all } T>0,$$

这证明了方程（1.1）不存在局部弱解。 □

定理*1.2*的证明。 • 次临界情形 $q < \dfrac{Q}{Q-2}$。在这种情形下，我们选用与定理1.1第一部分中相同的测试函数。

重复上述过程，我们得到不等式

$$\int_0^T\int_{\mathbb{H}^n}|u|^q\varphi_1\varphi_2 d\eta dt \le 2C(q)\underbrace{\left(\int_0^T\varphi_1^{-\frac{1}{q-1}}|\varphi_1''|^{q'}dt\right)}_{\mathcal{I}_3}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{H}^n}\varphi_2^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_2|^{q'}d\eta\right)}_{\mathcal{I}_4}$$
$$+2C(q)\underbrace{\left(\int_0^T\varphi_1^{-\frac{1}{q-1}}|\varphi_1|^{q'}dt\right)}_{\mathcal{I}_1}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{H}^n}\varphi_2^{-\frac{1}{q-1}}|\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_2|^{q'}d\eta\right)}_{\mathcal{I}_4} \tag{3.7}$$
$$+2\int_{\mathbb{H}^n}\Big(u_1\Delta_{\mathbb{H}}\varphi(0,\eta)-u_0\Delta_{\mathbb{H}}\varphi_t(0,\eta)\Big)d\eta,$$

where $C(q) = \left(\dfrac{q}{4}\right)^{1-q'}\dfrac{1}{q'}$.

因此，由引理2.1，并在（¨3.7）的最后一项中使用 H $u_0$older 不等式，取 $u_1 \in L^q$ $(\mathbb{H}^n)$，可得

$$\left|\int_{\mathbb{H}^n} u_1 \Delta_{\mathbb{H}} \varphi(0,\eta) d\eta\right| \leq \left(\int_{\mathbb{H}^n} |u_1|^q d\eta\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$\left|\int_{\mathbb{H}^n} u_0 \Delta_{\mathbb{H}} \varphi_t(0,\eta)\right| \leq T^{-1} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |u_0|^q d\eta\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \varphi_2|^{q'} d\eta\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

因此，利用（3.4），可得如下结论。

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \varphi_1 \varphi_2 d\eta dt \leq C R^{Q-2q'} \left(T^{1-2q'} + T + 1 + T^{-1}\right),$$

其中， $C > 0$ 是与 T 和 R.无关的任意常数

最后，将 $R \to +\infty$ 代入关于 $Q - 2q' < 0$的最后一个不等式，得到

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \varphi_1 d\eta dt \leq 0 \ \text{ for all } \ T > 0,$$

whic这证明问题（1.2）对于任意 $T > 0$均不存在局部弱解。

• 临界情形 $q = \dfrac{Q}{Q-2}$。选取与定理1.1 第二种情形中相同的测试函数，并重复上述方法，可得如下结果

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \psi_1 \psi_2 d\eta dt \leq 2C(q) &\underbrace{\left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \psi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi_{tt}|^{q'} d\eta dt\right)}_{\mathcal{J}_3} \\ &+ 2C(q) \underbrace{\left(\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} \psi^{-\frac{1}{q-1}} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi|^{q'} d\eta dt\right)}_{\mathcal{J}_1} \\ &+ 2 \int_{\mathbb{H}^n} \Big(u_1 \Delta_{\mathbb{H}} \psi(0,\eta) - u_0 \Delta_{\mathbb{H}} \psi_t(0,\eta)\Big) d\eta,\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $C(q) = \left(\dfrac{q}{4}\right)^{1-q'} \dfrac{1}{q'}$.

此外，考虑引理 2.2 的结果，回顾 u_0， $u_1 \in L^q(\mathbb{H}^n)$，并在（3.8）的最后一项中使用 H¨older 不等式，我们得到

$$\left|\int_{\mathbb{H}^n} u_1 \Delta_{\mathbb{H}} \psi(0,\eta) d\eta\right| \leq \left(\int_{\mathbb{H}^n} |u_1|^q d\eta\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi_2|^{q'} d\eta\right)^{\frac{1}{q'}},$$

and

$$\left|\int_{\mathbb{H}^n} u_0 \Delta_{\mathbb{H}} \psi_t(0,\eta)\right| \leq T^{-1} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |u_0|^q d\eta\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi_2|^{q'} d\eta\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

此外，根据引理 2.2 及 $\kappa > 2q$ 可得

$$\int_{\mathbb{H}^n} |\Delta_{\mathbb{H}} \psi_2|^{q'} d\eta \leq C \left[(\ln R)^{-Q} + (\ln R)^{-\frac{Q}{2}}\right].$$

因此，我们得到以下不等式

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \psi_1 \psi_2 d\eta dt \leq C \left[T^{1-Q} + T + 1 + T^{-1}\right] \left[(\ln R)^{-Q} + (\ln R)^{-\frac{Q}{2}}\right],$$

其中， $C > 0$ 是与 T 和 R.无关的任意常数

然后，令 $R \to +\infty$趋于.....，我们推得

$$\int_0^T \int_{\mathbb{H}^n} |u|^q \psi_1 d\eta dt \leq 0 \text{ for all } T > 0,$$

这证明（1.2）对于任意 $T > 0$都没有局部弱解。 □

Declaration of competing interest

作者声明不存在利益冲突。

Data Availability Statements

该手稿没有相关数据。

Acknowledgments

本研究获哈萨克斯坦共和国教育与科学部科学委员会资助（资助编号：AP14869090）、FWO Odysseus 1 资助 G.0H94.18N：分析与偏微分方程，以及根特大学特别研究基金（BOF）的 Methusalem 计划资助（资助编号：01M01021）。Michael Ruzhansky 还获得英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号为 EP/R003025/2 和 EP/V005529/1。

References

[1] I. Birindelli, I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutri. 海森堡群上半线性方程的刘维尔定理. 法国科学院院报 Henri Poincar´e. 14:3, 295–308 (1997).[2] H. Brezis, X. Cabr´e. 一些没有解的简单非线性偏微分方程. 意大利数学联合会通报 Sez. B Artic. Ric. Mat. Vol. 1, No. 2. P. 223–262. (1998).[3] H. Brezis, T. Cazenave. 一种具有奇异初始数据的非线性热方程. 数学分析杂志 Vol. 68. P. 277–304. (1996).[4] X. Cabr´e, Y Martel. 具有奇异势的线性热方程的存在性与瞬时爆破. 法国科学院院报 - S. I - Math. Vol. 329, No. 11. P. 973–978. (1999).[5] B. D. Coleman, R. J. Duffin, V. J. Mizel. 带状区域上方程的 不稳定性、唯一性与不存在性定理 $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$. 理性力学与分析档案 Vol. 19. P. 100–116. (1965).[6] V. Fischer, M. Ruzhansky. 幂零李群上的量子化. 数学进展 Vol. 314. Birkh¨auser, 巴塞尔. (2016).[7] E. I. Galakhov. 关于某些演化方程局部解的不存在性. 数学札记 Vol. 86. P. 314–324. (2009).[8] E. I. Galakhov. 关于某些拟线性演化方程解的瞬时爆破. 微分方程 Vol. 46. P. 329–338. (2010).[9] M. Jleli, B. Samet. 黎曼流形上具有势的非线性索博列夫型方程的瞬时爆破. 纯粹与应用分析通讯 Vol. 21, No. 6. P. 2065–2078. (2022).[10] M. Jleli, M. Kirane, B. Samet. 关于外部区域中某些索博列夫型微分不等式整体弱解的不存在性. 数学方法与应用科学 Vol. 41. P. 5293– 5307. (2018).

[11] A. Kassymov, N. Tokmagambetov, B. Torebek, 分次李群上双曲型方程的不存在性结果. 马来西亚数学科学学会通报 Vol. 43, P. 4223–4243. (2020年)[12] M. O. Korpusov. Sobolev 型非线性方程的瞬时爆破或局部可解性的临界指数. 俄罗斯科学院通报：数学辑 Vol. 79, No. 5. P. 103–162. (2015).[13] M. O. Korpusov, A. A. Panin, A. E. Shishkov. 关于Sobolev 型模型方程柯西问题中“瞬时爆破”与“局部可解性”的临界指数. (俄文) 俄罗斯科学院通报：数学辑 Vol. 85, No. 1. P. 118–153. (2021).[14] M. O. Korpusov. 半直线上等离子体理论问题弱解的瞬时爆破. 微分方程 Vol. 55, No. 1. P. 60–67. (2019).[15] M. O. Korpusov. 关于半直线上演化问题解的瞬时爆破. (俄文) 俄罗斯科学院通报：数学辑 Vol. 82, No. 5. P. 61–77. (2018).[16] E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev. 关于 $\mathbb{R}^n$ 上拟线性椭圆问题正解的不存在性. 斯捷克洛夫数学研究所论文集 Vol. 227. P. 192–222. (1999).[17] A. Pascucci. 幂零李群上的半线性方程：解的整体存在性与爆破. 《数学》Vol. 53, No 2, P. 345–357. (1998).[18] S. I. Pohozaev, L. V´eron. 海森堡群上半线性微分不等式解的不存在性结果. 《数学手稿》Vol. 102, P. 85–99. (2000).[19] M. Ruzhansky, D. Suragan. 齐性群上的Hardy 不等式. 数学进展 Vol. 314. Birkh¨äuser, 巴塞尔. (2019).[20] M. Ruzhansky, M. Yessirkegenov. 次黎曼流形上半线性热方程及不等式整体解的存在与不存在，以及幺模李群上的藤田指数. 《微分方程杂志》Vol. 308, P. 455–473, (2022).[21] F. B. Weissler, 半线性抛物方程在 L^p中的局部存在性与不存在性. 《印第安纳大学数学杂志》Vol. 29. P. 79–101. (1980).[22] Q. S. Zhang, 某些李群上反应扩散方程的临界指数，《数学杂志》Vol. 228. P. 51–72. (1998).

Meiirkhan B. Borikhanov
Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh–Turkish University
Sattarkhanov ave., 29, 161200 Turkistan, Kazakhstanand
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling125 Pushkin str.,
050010 Almaty, Kazakhstan电子邮件地址:
meiirkhan.borikhanov@ayu.edu.kzMichael Ruzhansky
Department of Mathematics: Analysis, Logic and Discrete Mathematics
Ghent University, BelgiumandSchool of Mathematical Sciences
Queen Mary University of LondonUnited Kingdom电子邮件地址:
michael.ruzhansky@ugent.be

Berikbol T. Torebek
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling125 Pushkin str.,
050010 Almaty, KazakhstanandDepartment of Mathematics: Analysis,
Logic and Discrete MathematicsGhent University, Belgium电子邮件地址:
berikbol.torebek@ugent.be