arXiv:2303.05604v1 [math.AP] 9 Mar 2023

LSI 的尖锐稳定性

EMANUEL INDREI

Abstract. Brigati、Dolbeault 和 Simonov 提出的问题得到了解答。

1. Introduction

以下定量对数 Sobolev 不等式在 [11] 中得到证明：存在一个无量纲的 $\kappa > 0$，使得在假设 $u \in H^1(e^{-\pi|x|^2}dx)$ 的条件下，

(1.1)
$$\pi\delta_*(u) := \int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \pi\int |u|^2 \ln\Big(\frac{|u|^2}{||u||^2_{L^2}}\Big)e^{-\pi|x|^2}dx \geq \kappa \inf_{a,c}\int |u - ce^{a\cdot x}|^2 e^{-\pi|x|^2}dx.$$

在 [6, 第 5] 页中，提出了关于更强范数的稳定性问题：

“ [23], 中证明了高斯对数 Sobolev 不等式的一个稳定性结果，尽管距离仅通过一个 $L^2(\mathbb{R}^n, d\gamma)$ 范数来度量。因此，在极限情形 $p = 2$ 下，是否能够得到更强的估计（最终也许是在某些限制条件下），迄今仍是一个悬而未决的问题。”

作者们怀疑，与 L^2-稳定性（1.1）不同，对所有的 H^1，在更强范数下的定量稳定性可能并不成立。事实确实如此。定理 H^1 确定了实现1.1收敛的最优条件。此外，在矩假设下存在一个显式的 H^1 界。此外，定理1.1证明了（1.2）是尖锐的。

日期：2023年3月13日。

定理 1.1. 1. 设 $\{u_k\}$ 在 $L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)$ 中归一化且中心化，并假设$\delta_*(u_k) \to 0$ 当 $k \to \infty$ 时，则

$$|u_k| \to 1$$

当且仅当其属于 $H^1(e^{-\pi|x|^2}dx)$

$$m_2(u_k) := \int |x|^2|u_k(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx \to \int |x|^2e^{-\pi|x|^2}dx = m_2(1).$$

2. 如果 u 在 $L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)$ 中经过归一化并居中，且

$$m_4(u) := \int |x|^4|u(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx \leq \alpha,$$

then

$$\big|\big||u| - 1\big|\big|_{H^1(e^{-\pi|x|^2}dx)} \leq a_\alpha\Big(\delta_*^{\frac{1}{2}}(u) + \delta_*(u)\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$a_\alpha > 0$。

3. 存在 经过归一化并居中的密度函数 $\{u_k\}$，属于 $L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)$、 $\delta_*(u_k) \to 0$，并且

$$||u_k||_{H^1(e^{-\pi|x|^2}dx)} \to \infty.$$

定理 1.2。 (1.1) 具有最优速率。

(1.1) 的一个简单版本见下一个引理。请注意，得益于这一化简，在定理 1.1 中，可以不失一般性地假设这些函数是中心化且标准化的。

引理 1.3。 (1.1) 等价于

$$\int |\nabla w|^2e^{-\pi|x|^2}dx - \pi\int |w|^2\ln|w|^2e^{-\pi|x|^2}dx \geq \kappa\int \big|w-1\big|^2e^{-\pi|x|^2}dx$$

在满足以下条件的非负函数空间中

$$||w||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} = 1$$

$$\int x|w|^2e^{-\pi|x|^2}dx = 0.$$

(1.1) 的一个完全等价版本，在附加矩假设和模函数 ω 的条件下，已在 [19] 中通过结合最优传输理论与傅里叶分析得到了证明。另请注意，Carlen 在证明等号情形 [7]时也采用了非负性假设。不失一般性，假设

$$||u||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} = 1$$

$$\int x|u|^2e^{-\pi|x|^2}dx = 0.$$

现在令 $dm = 2^{\frac{n}{2}}e^{-2\pi|x|^2}dx$, $d\gamma = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{2}}dx$,

$$w(x) = u(\sqrt{2}x)$$

$$f(x) = |u|^2(\frac{x}{\sqrt{2\pi}})$$

并观察

$$\int |w|^2 dm = \int |u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx = \int f d\gamma$$

$$\int x f d\gamma = 0 = \int x|w|^2 dm.$$

假设

$$\int |x|^2 |u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx \le M_\alpha,$$

$M_\alpha \ge \frac{n}{2\pi}$。注意 $|\nabla|w|| = |\nabla w|$ 几乎处处成立，因此假设 $w \ge 0$。应用[19, 推论 1。21]可推出存在一个模函数 ω 使得

$$\int |w-1|^2 dm \le a\omega(\delta_c(w)) = a\omega(\delta_*(u))$$

其中 $a = a(M_\alpha) > 0$,

$$\delta_c(w) := \frac{1}{2\pi}\int |\nabla w|^2 dm - \int |w|^2 \ln |w|^2 dm.$$

得益于

$$\int |w-1|^2 dm = \int |u-1|^2 e^{-\pi|x|^2} dx,$$

$$\omega\Big(\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \pi\int |u|^2 \ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx\Big) \ge \frac{1}{\bar{a}}\int |u-1|^2 e^{-\pi|x|^2} dx,$$

$\bar{a} > 0$。此外，若 $n = 1$,

$$\delta(f) := \frac{1}{2}\mathrm{I}(f) - \mathrm{H}(f) = \frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\gamma - \int f \ln f d\gamma,$$

[19,定理 1.1] 得出

$$\int |f-1| d\gamma \le \overline{a}_1 \delta^{\frac{1}{4}}(f),$$

其中 $\overline{a}_1 = \overline{a}_1(M_\alpha) > 0$。因此，假设 $u \ge 0$,

$$\begin{aligned}\int |u-1|^2 e^{-\pi|x|^2} dx &= \int |\sqrt{f}-1|^2 d\gamma \\ &\le \int |f-1| d\gamma \\ &\le \overline{a}_1 \delta^{\frac{1}{4}}(f) = \overline{a}_1 \delta_*^{\frac{1}{4}}(u).\end{aligned}$$

此外，[13, 19, 20]中还出现了包含显式模函数的高维定量不等式。

通过定理1.2 得到的最优不等式为

$$||u-1||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} \lesssim \delta_*^{\frac{1}{2}}(u),$$

以及更一般的稳定性

$$||\nabla u||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} \leq a_1\delta_*^{\frac{1}{2}}(u) \tag{1.2}$$

具有尖锐指数 $1\ 2$ 的结果已在 [20] 中得到证明，适用于相对于高斯测度 $d\gamma$ 绝对连续的概率测度，且其密度 $f(x) = |u|^2(\frac{x}{\sqrt{2\pi}})$ 满足对数-$C^{1,1}$ 假设。该结果是通过最优传输理论得出的 [20, 定理 1.1，备注 4.3]：在这些假设下，存在 $\alpha \in (0, 1\ 2)$，使得

$$\int f\ln f d\gamma \leq \alpha\int \frac{|\nabla f|^2}{f}d\gamma.$$

因此

$$\delta(f) = \frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}d\gamma - \int f\ln f d\gamma \geq (\frac{1}{2}-\alpha)\int \frac{|\nabla f|^2}{f}d\gamma,$$

从而通过简单的变量替换证明了 (1.2)。一个出人意料的 Ornstein-Uhlenbeck 半群证明使得能够显式计算尖锐的 a_1，并对 ́施加 Poincar $f d\gamma$, f 假设： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ [13]。注意，Poincar ́e 假设蕴含对数-$C^{1,1}$ 假设，其中对数-$C^{1,1}$ 假设的其中一个不等式不成立。特别是，这是少数能够体现尖锐指数和比例常数的不等式之一。然而， 4^{th} 定理 1.1中的矩假设包含 Poincar ́e 假设，并逼近最优矩假设。存在一个序列 $\{u_k\}$ 其中

$$\delta_*(u_k) \to 0$$

$$\int |x|^2|u_k(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx \to \infty.$$

结合 Wasserstein 度量与熵，得到了一个更一般的稳定性不等式，适用于相对于高斯测度绝对连续的概率测度。文[13, 14, 19, 20] 所用的技术涉及最优传输、半群理论、傅里叶分析和概率论。近期对1.1的证明[11] 是一项基础性成就。一个有趣之处在于，通过 Bianchi-Egnell 方法证明1.1时，无需附加假设。关于对数 Sobolev 不等式的首个度量稳定性结果发表于[20]。

由于对数 Sobolev 不等式已出现在不同领域，例如最优传输理论、概率论、统计力学、量子场论、黎曼几何、热力学和信息论，因此已有许多证明，近期也有大量文章探讨了类似不等式的各种稳定性表述：例如参见 [1–5, 7, 8, 10, 12–18, 20–24]。

2. Proofs

引理 *1.3* 的证明。 假设

$$||u||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} = 1$$

$$\int x|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx = 0;$$

set

$$u = ce^{a\cdot x};$$

然后注意到 $a = 0, c = 1$ （通过 $u \geq 0$）。特别地， $u = 1$ 是唯一的归一化且中心化的极小化子。此外，假设类似的

$$\int |\nabla w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \pi \int |w|^2 \ln |w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx \geq \kappa \int |w-1|^2 e^{-\pi|x|^2}dx, \tag{2.1}$$

若 $w \geq 0$,

$$||w||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} = 1,$$

$$\int x|w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx = 0,$$

还可得到（1.1）： 令

$$||u|| = ||u||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)}$$

$$\alpha := \int x|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx$$

$$w(x) := \frac{u(x + \frac{\alpha}{||u||^2})e^{-\frac{\pi}{||u||^2}(\alpha\cdot x + \frac{|\alpha|^2}{2||u||^2})}}{||u||}$$

并观察

$$||w|| = ||w||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)} = 1$$

$$\int x|w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx = 0$$

$$\begin{aligned}
\int |w-1|^2 e^{-\pi|x|^2}dx &= \frac{1}{||u||^2}\int \left|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})e^{-(\frac{\pi\alpha}{||u||^2}\cdot x + \frac{\pi|\alpha|^2}{2||u||^4})} - ||u||\right|^2 e^{-\pi|x|^2}dx \\
&= \frac{1}{||u||^2}\int \left|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2}) - e^{(\frac{\pi\alpha}{||u||^2}\cdot x + \frac{\pi|\alpha|^2}{2||u||^4} + \ln||u||)}\right|^2 e^{-2(\frac{\pi\alpha}{||u||^2}\cdot x + \frac{\pi|\alpha|^2}{2||u||^4})} e^{-\pi|x|^2}dx \\
&= \frac{1}{||u||^2}\int \left|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2}) - e^{(\frac{\pi\alpha}{||u||^2}\cdot x + \frac{\pi|\alpha|^2}{2||u||^4} + \ln||u||)}\right|^2 e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx \\
&= \frac{1}{||u||^2}\int \left|u(x) - e^{(\frac{\pi\alpha}{||u||^2}\cdot x - \frac{\pi|\alpha|^2}{2||u||^4} + \ln||u||)}\right|^2 e^{-\pi|x|^2}dx. \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

(2.3)

$$\begin{aligned}
&\int |\nabla w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\\
&= \frac{1}{||u||^2}\int \Big|\nabla u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})e^{-\frac{\pi}{||u||^2}(\alpha\cdot x+\frac{|\alpha|^2}{2||u||^2})} - \frac{\pi\alpha}{||u||^2}u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})e^{-\frac{\pi}{||u||^2}(\alpha\cdot x+\frac{|\alpha|^2}{2||u||^2})}\Big|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\\
&= \frac{1}{||u||^2}\Big(\int \Big|\nabla u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})\Big|^2 e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx - \Big\langle\frac{2\pi\alpha}{||u||^2},\int \nabla u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx\Big\rangle\\
&+ \frac{\pi^2|\alpha|^2}{||u||^4}\int \Big|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})\Big|^2 e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx\Big)\\
&= \frac{1}{||u||^2}\Big(\int |\nabla u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \Big\langle\frac{2\pi\alpha}{||u||^2},\int \nabla u(x)u(x)e^{-\pi|x|^2}dx\Big\rangle + \frac{\pi^2|\alpha|^2}{||u||^4}\int |u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big).
\end{aligned}$$

此外,

$$\int \nabla u(x)u(x)e^{-\pi|x|^2}dx = -\int \nabla u(x)u(x)e^{-\pi|x|^2}dx + 2\pi\int x|u(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx$$

得出

$$\int \nabla u(x)u(x)e^{-\pi|x|^2}dx = \pi\int x|u(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx = \pi\alpha.$$

注意

$$\Big\langle\frac{2\pi\alpha}{||u||^2},\int \nabla u(x)u(x)e^{-\pi|x|^2}dx\Big\rangle = \frac{2\pi^2|\alpha|^2}{||u||^2},$$

因此（2.3）意味着

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{||u||^2}\Big(\int |\nabla u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \Big\langle\frac{2\pi\alpha}{||u||^2},\int \nabla u(x)u(x)e^{-\pi|x|^2}dx\Big\rangle + \frac{\pi^2|\alpha|^2}{||u||^4}\int |u(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx\Big)\\
&= \frac{1}{||u||^2}\Big(\int |\nabla u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \frac{\pi^2|\alpha|^2}{||u||^2}\Big) = \int |\nabla w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx.
\end{aligned}$$

(2.4)

类似地,

$$\begin{aligned}
&\int |w|^2\ln|w|^2 e^{-\pi|x|^2}dx = \frac{1}{||u||^2}\Big(\int \Big|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})\Big|^2\ln\Big(\frac{|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})|^2}{||u||^2}\Big)e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx\\
&- \Big\langle\frac{2\pi\alpha}{||u||^2},\int x\Big|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})\Big|^2 e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx\Big\rangle - \frac{\pi|\alpha|^2}{||u||^2}\Big);
\end{aligned}$$

$$\int x\Big|u(x+\frac{\alpha}{||u||^2})\Big|^2 e^{-\pi\left|x+\frac{\alpha}{||u||^2}\right|^2}dx = \int\Big(x-\frac{\alpha}{||u||^2}\Big)|u(x)|^2e^{-\pi|x|^2}dx = 0;$$

thus

$$\int |w|^2 \ln |w|^2 e^{-\pi|x|^2} dx = \frac{1}{||u||^2}\Big(\int |u(x)|^2 \ln \Big(\frac{|u(x)|^2}{||u||^2}\Big) e^{-\pi|x|^2} dx - \frac{\pi|\alpha|^2}{||u||^2}\Big). \tag{2.5}$$

注意到（2.5）和（2.4）可推出

$$\int |\nabla w|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \pi \int |w|^2 \ln |w|^2 e^{-\pi|x|^2} dx = \frac{1}{||u||^2}\Big(\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \pi \int |u|^2 \ln \Big(\frac{|u|^2}{||u||^2}\Big) e^{-\pi|x|^2} dx\Big) \tag{2.6}$$

因此（2.6）与（2.2）结合（2.1）：

$$\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \pi \int |u|^2 \ln \Big(\frac{|u|^2}{||u||^2_{L^2}}\Big) e^{-\pi|x|^2} dx \geq \kappa \inf_{a,c} \int |u - ce^{a\cdot x}|^2 e^{-\pi|x|^2} dx.$$

□

定理 *1.1* 的证明。 **1.** 注意，令 $dm = 2^{\frac{n}{2}} e^{-2\pi|x|^2} dx$ 和 $f \in L^2(dm)$ 归一化，并设

$$f = u(\sqrt{2}x),$$
$$\int |f|^2 dm = \int |u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx = 1$$

&

$$\frac{1}{2\pi} \int |\nabla f|^2 dm - \int |f|^2 \ln |f|^2 dm = \frac{1}{\pi} \int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \int |u|^2 \ln |u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx.$$

因此 [19, 定理 1.17]推出

$$\begin{aligned} &\pi \int |x|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \pi \int |x|^2 |u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2} dx + \frac{1}{\pi} \int |\nabla u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2} dx \\ &\leq \sqrt{2n}\Big(\frac{1}{\pi} \int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \int |u|^2 \ln |u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \Big(\frac{1}{\pi} \int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \int |u|^2 \ln |u|^2 e^{-\pi|x|^2} dx\Big). \end{aligned} \tag{2.7}$$

注意，假设

$$\Big(\int |x|^2 e^{-\pi|x|^2} dx - \int |x|^2 |u_k(x)|^2 e^{-\pi|x|^2} dx\Big) \to 0,$$

& $\delta_*(u_k) \to 0$，由（2.7）可得

$$\int |\nabla u_k(x)|^2 e^{-\pi|x|^2} dx \to 0$$

这就意味着 $H^1(e^{-\pi|x|^2} dx)$ 收敛。反过来，假设 $\sqrt{f} \in W^{1,\,2}(\mathbb{R}^n, d\gamma)$，其中 $d\gamma = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$ 表示高斯测度，证明 [19, 的结尾

命题 C.1]意味着

$$\frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}d\gamma - \int f\ln f d\gamma \geq \frac{1}{4n}\Big(2\int f\ln f d\gamma + (m_2(\gamma) - m_2(fd\gamma))\Big)^2.$$

因此令

$$f_k = |u_k|^2(\frac{x}{\sqrt{2\pi}}).$$

Then

$$\int f_k e^{-\frac{|x|^2}{2}}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}dx = \int |u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx = 1,$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f_k|^2}{f_k}d\gamma - \int f_k\ln f_k d\gamma = \frac{1}{\pi}\int |\nabla u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u_k|^2\ln|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx.$$

特别是

$$\begin{aligned}(2.8)\quad &\frac{1}{4n}\Big(2\int |u_k|^2\ln|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx + 2\pi\int |x|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - 2\pi\int |x|^2|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big)^2\\ &\leq \frac{1}{\pi}\int |\nabla u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u_k|^2\ln|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx.\end{aligned}$$

注意，由于 $H^1(e^{-\pi|x|^2}dx)$ 收敛以及对数 Sobolev 不等式，

$$\int |u_k|^2\ln|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx \to 0,$$

因此，多亏了

$$\delta_*(u_k) = \Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u_k|^2\ln|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big) \to 0,$$

(2.8) 可得

$$\Big(\int |x|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |x|^2|u_k|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big) \to 0.$$

2.

$$\int |x|^4|u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx \leq A$$

意味着

$$\begin{aligned}&\Big|\pi\int |x|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \pi\int |x|^2|u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big| = \pi\Big|\int |x|^2[1-|u|][1+|u|]e^{-\pi|x|^2}dx\Big|\\ &\leq \pi\Big[\int |x|^4|1+|u||^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big]^{1/2}\Big[\int |1-|u||^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big]^{1/2}\\ &\leq \pi\Big[2(A+\int |x|^4 e^{-\pi|x|^2}dx)\Big]^{1/2}\Big[\int |1-|u||^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big]^{1/2}.\end{aligned}$$

特别是 [19, 定理 1。17], 引理 1.3 ($|u| \geq 0$, $|\nabla|u|| = |\nabla u|$ 几乎处处)，以及 [11,定理 2] 推出

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\pi}\int |\nabla u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx \\
&\le \Big|\pi\int |x|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \pi\int |x|^2|u(x)|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big| + \sqrt{2n}\Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big) \\
&\le \pi\Big[2(A+\int |x|^4 e^{-\pi|x|^2}dx)\Big]^{1/2}\Big[\int |1-|u||^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big]^{1/2} + \\
&\sqrt{2n}\Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big) \\
&\le \pi\Big[2(A+\int |x|^4 e^{-\pi|x|^2}dx)\Big]^{1/2}\sqrt{\frac{\pi}{\kappa}}\Big[\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big]^{1/2} + \\
&\sqrt{2n}\Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\frac{1}{\pi}\int |\nabla u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx - \int |u|^2\ln|u|^2 e^{-\pi|x|^2}dx\Big).
\end{aligned}
$$

3. 设 $fd\gamma$ 是一个概率测度，并令 $T=\nabla\Phi$ 为之间的 Brenier 映射 n
$fd\gamma$ 并且 $d\gamma$。接着，由通过最优传输证明 LSI 的过程可得 [9]：

$$\int |T(x)-x+\nabla\ln f|^2 f d\gamma \le 2\delta(f).$$

论证如下：定义 $\theta := \Phi - \frac{1}{2}|x|^2$。注意，

$$f(x)e^{-|x|^2/2} = \det(I+D^2\theta(x))e^{-|x+\nabla\theta(x)|^2/2}.$$

接下来，取对数并积分：

$$
\begin{aligned}
\int f\ln f d\gamma &\le \int f\Big[\Delta\theta - x\cdot\nabla\theta\Big]d\gamma - \frac{1}{2}\int |\nabla\theta|^2 f d\gamma \\
&= -\int \nabla\theta\cdot\nabla f d\gamma - \frac{1}{2}\int |\nabla\theta|^2 f d\gamma \\
&= -\frac{1}{2}\int \Big|\nabla\theta + \frac{\nabla f}{f}\Big|^2 f d\gamma + \frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}d\gamma.
\end{aligned}
$$

因此

$$\frac{1}{2}\int \frac{|\nabla f|^2}{f}d\gamma - \int f\ln f d\gamma \ge \frac{1}{2}\int \Big|T-x+\nabla\ln f\Big|^2 f d\gamma.$$

于是，由詹森不等式可得

$$2\delta(f) \ge \int |T(x)-x+\nabla\ln f|^2 f d\gamma \ge \Big(\int |T(x)-x+\nabla\ln f| f d\gamma\Big)^2;$$

特别是

$$\int |T(x) - x + \nabla \ln f| f d\gamma \leq \sqrt{2\delta(f)}.$$

注意， T 是 Brenier 映射；然而，若考虑蒙日代价，它会给出 W_1 的一个上界（在一维情形下，该不等式取等号）：

$$W_1(f d\gamma, \gamma) \leq \int |T(x) - x| f d\gamma.$$

由此可得

$$\begin{aligned} W_1(f d\gamma, \gamma) &\leq \sqrt{2\delta(f)} + \int |\nabla f| d\gamma \\ &\leq \sqrt{2\delta(f)} + \Big(\int \frac{|\nabla f|^2}{f} d\gamma \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

因此，设 $\{f_k d\gamma\}$ 是一个满足以下条件的概率测度序列

$$0 < \liminf_k W_1(f_k d\gamma, \gamma)$$
$$\delta(f_k) \to 0;$$

thus

$$0 < \liminf_k \int \frac{|\nabla f_k|^2}{f_k} d\gamma.$$

Set

$$f_k = |u_k|^2 (\frac{x}{\sqrt{2\pi}}).$$

于是有

$$\int f_k e^{-\frac{|x|^2}{2}} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} dx = \int |u_k|^2 e^{-\pi|x|^2} dx = 1$$
$$\int \frac{|\nabla f_k|^2}{f_k} d\gamma = \frac{2}{\pi} \int |\nabla u_k|^2 e^{-\pi|x|^2} dx.$$

因此

$$0 < \liminf_k \int |\nabla u_k|^2 e^{-\pi|x|^2} dx$$

这直接意味着

$$||u_k||_{H^1(e^{-\pi|x|^2} dx)} \nrightarrow 0$$
$$\delta(u_k) \to 0.$$

此外，存在一列概率测度，使得

$$W_1(f_k d\gamma, d\gamma) \to \infty,$$

见 [21], 因此，上述论证完成了证明。

□

注 2.1. 注意， H^1 收敛等价于 W_2 收敛（当$\delta(u_k) \to 0$时）。第一个 W_2 界是在[20]中得到的。

定理的证明1.2。若 $a>0$，定义

$$u_a(x)=(2a+1)^{\frac{n}{4}}e^{-a\pi|x|^2}.$$

Now

$$||u_a||_{L^2(e^{-\pi|x|^2}dx)}=1,$$
$$\int x|u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx=0,$$

$$\begin{aligned}&\frac{\Big(\int|\nabla u|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u|^2\ln|u|^2e^{-\pi|x|^2}dx\Big)}{\int|u-1|^2e^{-\pi|x|^2}dx}\\&=\pi\Big(\frac{\frac{2na^2}{2a+1}-\frac{n}{2}\ln(2a+1)+\frac{na}{2a+1}}{2-2\frac{(2a+1)^{\frac{n}{4}}}{(a+1)^{\frac{n}{2}}}}\Big)\\&=\frac{\pi}{2}\frac{2na^2-\frac{n}{2}(2a+1)\ln(2a+1)+na}{2a+1-\frac{(2a+1)^{\frac{n+4}{4}}}{(a+1)^{\frac{n}{2}}}},\end{aligned}$$

$$\lim_{a\to0^+}\frac{\Big(\int|\nabla u|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u|^2\ln|u|^2e^{-\pi|x|^2}dx\Big)}{\int|u-1|^2e^{-\pi|x|^2}dx}$$
$$\lim_{a\to0^+}\frac{\pi}{2}\frac{4na-n\ln(2a+1)}{2-\Big(\frac{n+4}{2}\frac{(2a+1)^{\frac{n}{4}}}{(a+1)^{\frac{n}{2}}}-\frac{n}{2}\frac{(2a+1)^{\frac{n+4}{4}}}{(a+1)^{\frac{n}{2}+1}}\Big)}$$
$$\lim_{a\to0^+}-\pi\frac{2n-n\frac{1}{2a+1}}{\Big(\Big(\frac{(a+1)^{\frac{n}{2}}\frac{n}{2}\frac{n+4}{2}(2a+1)^{\frac{n-4}{4}}-(2a+1)^{\frac{n}{4}}\frac{n+4}{2}\frac{n}{2}(a+1)^{\frac{n-2}{2}}}{(a+1)^n}\Big)-\Big(\frac{(a+1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{n}{2}\frac{n+4}{2}(2a+1)^{\frac{n}{4}}-(2a+1)^{\frac{n+4}{4}}\frac{n}{2}(a+1)^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2}+1)}{(a+1)^{n+2}}\Big)\Big)}$$
$$=2\pi.$$

特别地，反设

$$\omega\Big(\int|\nabla u|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u|^2\ln|u|^2e^{-\pi|x|^2}dx\Big)\geq\kappa\int|u-1|^2e^{-\pi|x|^2}dx$$

当 u 经过归一化且中心化时，满足

$$\omega(a)=o(a).$$

因此

$$\begin{aligned}\kappa&\leq\frac{\omega\Big(\int|\nabla u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u_a|^2\ln|u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx\Big)}{\int|u_a-1|^2e^{-\pi|x|^2}dx}\\&=\frac{\omega\Big(\int|\nabla u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u_a|^2\ln|u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx\Big)}{\int|\nabla u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u_a|^2\ln|u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx}\frac{\int|\nabla u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx-\pi\int|u_a|^2\ln|u_a|^2e^{-\pi|x|^2}dx}{\int|u_a-1|^2e^{-\pi|x|^2}dx}\\&\to0\end{aligned}$$

如 $a \to 0^+$；因此这与 $\kappa > 0$ 矛盾。 □

致谢 我在意大利盖埃塔举行的“椭圆与抛物型偏微分方程解的定性性质及相关主题”专题研讨会期间（2019年5月）完成了部分内容。谨此感谢那里卓越的学术环境。

References

[1] Zoltan M. Balogh、Sebastiano Don 和 Alexandru Kristaly，通过最优传输理论及其应用研究加权 Gagliardo-Nirenberg 不等式，arXiv（2022年）。[2] Neal Bez、Shohei Nakamura 和 Hiroshi Tsuji，超收缩性、对数 Sobolev 不等式及 Talagrand 代价不等式的稳定性，arXiv（2022年）。[3] S. G. Bobkov、N. Gozlan、C. Roberto 和 P.-M. Samson，对数 Sobolev 不等式亏损量的界，《函数分析杂志》第267卷（2014年），4110–4138。[4] Francois Bolley、Ivan Gentil 和 Arnaud Guillin，对数 Sobolev、Talagrand 和 Brascamp-Lieb 不等式的维数改进，《概率年刊》第46卷（2018年），261–301。[5] Matteo Bonforte、Jean Dolbeault、Bruno Nazaret 和 Nikita Simonov，Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式的稳定性：流、正则性与熵方法，arXiv（2020年）。[6] Giovanni Brigati、Jean Dolbeault 和 Nikita Simonov，关于高斯插值不等式，arXiv（2023年）。[7] Eric A. Carlen，Fisher 信息的超可加性与对数 Sobolev 不等式，《函数分析杂志》第101卷（1991年），第1期，194–211。MR 1132315[8] Cristian Cazacu、Joshua Flynn、Lam Nguyen 和 Guozhen Lu，Caffarelli-Kohn-Nirenberg 恒等式、不等式及其稳定性，arXiv（2022年）。[9]Dario Cordero-Erausquin，质量传输在高斯型不等式中的若干应用，《理性力学与分析文献》第161卷（2002年），第3期，257–269。MR 1894593[10] Jean Dolbeault 和 Maria J. Esteban，Hardy-Littlewood-Sobolev 不等式及相关不等式：稳定性，Elliott Lieb 的物理学与数学——90周年纪念。第1卷，EMS Press，柏林，[2022] ©2022年，第247–268页。MR 4529870[11] Jean Dolbeault、Maria J. Esteban、Alessio Figalli、Rupert L. Frank 和 Michael Loss，Sobolev 不等式和对数 Sobolev 不等式的尖锐稳定性及最优维数依赖，arXiv（2022年）。[12] Ronen Eldan、Joseph Lehec 和 Yair Shenfeld，通过 F ¨ollmer 过程研究对数 Sobolev 不等式的稳定性，《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》第56卷（2020年），第3期，2253–2269。MR 4116725[13] Max Fathi、Emanuel Indrei 和 Michel Ledoux，定量对数 Sobolev 不等式与稳定性估计，《离散与连续动力系统》第36卷（2016年），第12期，6835–6853。MR 3567822[14] F. Feo、E. Indrei、M. R. Posteraro 和 C. Roberto，关于高斯测度下对数 Sobolev 不等式稳定性的若干评述，《位势分析》第47卷（2017年），第1期，37–52。MR 3666798[15] Nathael Gozlan，高斯对数 Sobolev 不等式的亏损量与逆 Santal ´o 不等式，《国际数学研究通知》（2022年），第17期，13396–13446。MR 4475270[16] Emanuel Indrei，多边形等周亏损量的一个尖锐下界，《美国数学会会刊》第144卷（2016年），第7期，3115–3122。MR 3487241[17] ———, 关于晶体的平衡形状，arXiv:2008.02238v4，审稿中（2021年）。[18] ———, 凸锥中的加权相对等周不等式，《应用分析方法》第27–28卷（2021年），第1期，001–014。[19] Emanuel Indrei 和 Daesung Kim，对数 Sobolev 不等式的亏损量估计，《微分与积分方程》第34卷（2021年），第7–8期，437–466。[20] Emanuel Indrei 和 Diego Marcon，双参数函数族的定量对数 Sobolev 不等式，《国际数学研究通知》（2014年），第20期，5563–5580。MR 3271181[21] Daesung Kim，对数 Sobolev 不等式的不稳定性结果及其在相关不等式中的应用，《离散与连续动力系统》第42卷（2022年），第9期，4297–4320。MR 4455233

[22] Cong Hung Mai 和 Shin-ichi Ohta，Bakry-Ledoux 等周不等式的定量估计，《Comment. Math. Helv.》第96卷（2021年），第4期，693–739。MR 4368350[23] ———，Bakry–Ledoux 等周不等式 II 的定量估计，《伦敦数学会通报》第55卷（2023年），第1期，224–233。[24] Shin-ichi Ohta 和 Asuka Takatsu，对数 Sobolev 不等式中的等号情形，《Manuscripta Math.》第162卷（2020年），第1–2期，271–282。MR 4079808

Department of Mathematics, Purdue University, 150 N. University Street, West Lafayette, IN 47907-2067, USA