arXiv:2303.05608v1 [physics.flu-dyn] 9 Mar 2023

极高瑞利数下的湍流对流与弱非线性理论

Katepalli R. Sreenivasan[1] 和 Joseph J. Niemela[2]

[1] *Department of Physics, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, and the Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University**
[2] *The Abdus Salam International Center for Theoretical Physics*†

为了深入理解湍流对流这一棘手问题，Jack Herring 使用了一个大幅截断的完整 Boussinesq方程版本，其中只包含一个水平波数。鉴于后来观察到在高瑞利数下，大尺度环流强劲地席卷对流腔体，因此，或许可以从这一视角重新审视高瑞利数数据。本文将过去关于高瑞利数下对流热输运的实验数据与 Herring模型的预测进行比较，结果发现二者高度吻合。该模型只有一个未知参数，而最低阶最小二乘幂律拟合中则有两个自由参数。我们将讨论，为何这一简化的物理图景——原本旨在适用于略高于数千这一临界值的瑞利数——在修正其中唯一的自由参数后，能够与跨越约十一个数量级的瑞利数数据相符，其范围从约一百万延伸至约 10^{17}。

I. 引言

湍流热对流是一个重大课题：如果我们对它有足够深入的了解，或许能够更好地认识太阳和类太阳恒星的动力学，以及类地行星的长期演化。它在核反应堆冷却等工程应用中的重要性显而易见，无需特别强调。热对流的科学范式是所谓的瑞利-贝纳德对流（RBC），即两块光滑水平板之间的一层黏性流体，底部受热，顶部冷却。实际情况下，流体受到不导热侧壁的约束，因此输入底板的热量完全通过流体层传递至顶板。对由此产生的流动进行理论分析时，通常会采用所谓的 Boussinesq近似 [1]。考虑非Boussinesq效应后，问题会涉及许多尚未充分理解的特征 [1–4]。

我们此前着手测量湍流对流产生的热传递，实验使用一台高 1 米、直径与高度之比为 $\Gamma = 1/2$的装置，并以低温氦气作为工作流体 [5]。使用低温氦气旨在实现极高的瑞利数（最高达 10^{17}），同时使条件近似满足 Boussinesq近似（详见 [2] 的评估），并利用低温环境为实验装置带来的热隔离。实验及其实施细节见 [2, 5] ，并将在下一节中概述。本文篇幅较短，旨在将 Herring [6, 7] 的分析与高瑞利数湍流对流中测得的热输运实验结果进行比较。尽管 Herring公式是针对对流刚进入超临界状态、非线性效应较弱的情形推导的，我们发现，它在跨越 11 个数量级的瑞利数范围内都与实验数据吻合——且这些数据全部处于湍流状态。

有必要简要介绍一下瑞利-贝纳德对流（RBC）的传统框架。驱动流动的热源是上下两块板之间的温差，通常用瑞利数来衡量，其定义为

$$Ra = \frac{g\alpha \Delta T H^3}{\nu\kappa}, \tag{1}$$

其中， g 是重力加速度， α 是等压热膨胀系数， ΔT 是高度为 H的垂直流体层两侧的温差，而 ν和 κ 分别是流体的运动黏度和热扩散率。流动的响应是穿过流体层高度的热输运，通常用所谓的努塞尔数 Nu来衡量；它表示对流实际实现的热输运量与仅靠热传导所能实现的热输运量之比（两者的 ΔT相同）。还可以考虑 Nu对普朗特数 $Pr = \nu/\kappa$的依赖关系，因此，热对流的一个基本问题是确定 Nu对 Ra和 Pr的函数依赖关系。流动的另一种响应是对流运动的雷诺数，但我们在此不予讨论。

* krs3@nyu.edu
† niemela@ictp.it

与大多数其他湍流问题（以及所有三维多体问题）一样，从理论上说，也无法彻底求解瑞利-贝纳德对流，因此只能建立标度理论。目前有两种学派。Malkus [8] 和Spiegel [9] 提出的观点认为

$$Nu = 0.073 Ra^{1/3}, \tag{2}$$

与 Pr 无关。其背后的物理机制是所谓的顶部和底部边界层的边际稳定性（见 [10]）。另一方面，Kraichnan [11] 认为，在极高的 Ra 下，边界层将变得无关紧要，并得出了明确公式

$$Nu = C Pr^{-1/4} \{ Ra / log(Ra)^3 \}^{1/2}. \tag{3}$$

该公式基于对顶部和底部边界层的分析（当时人们对这些边界层的认识尤其不充分）。尽管 Kraichnan 努力求得常数 C，但相关细节并不充分，因此至少就我们的目的而言，将其视为未知常数也无妨。另见 [12, 13]，其中也对瑞利数依赖关系作出了类似预测，但没有深入讨论边界层细节。

由于 Kraichnan公式要求瑞利数 Ra 极高，因此人们认为，对 Ra 的 $_{1\,2}$ 次幂依赖关系（带有对数修正），包括明确的普朗特数依赖关系，代表了瑞利-贝纳德对流的“最终态”或“渐近态”。正如 Spiegel [12] 所指出的，公式 (2) 和 (3) 之间的差异亟待解决，因为这将揭示高 Ra 下起作用的正确物理机制。我们很快就会继续探讨这一问题。

从另一个角度来看，Herring的弱非线性理论由Busse [14], 概述，其渊源悠久，涉及Lou Howard、Willem Malkus、Paul Roberts和Fritz Busse，给出

$$Nu = D \{ Ra^{3/2} ln(Ra)^{3/2} \}^{1/5}, \tag{4}$$

其中，常数 $D = 0.24$ 是通过最大化单一波数所实现的热输运而从理论上计算得出的。现在，我们利用下文所述的实验数据，考察公式（2）至（4）各自的适用性。我们强调， [5] 的数据已在 [15], 中部分重复，但若能开展完全独立的研究则更为理想。

II. 关于实验数据的简要评论

如上所述，我们在参考文献 [5] 所述实验中的目标，是尽可能提高可达到的瑞利数，并使所有高瑞利数都处于湍流状态，以获得稳健的标度关系。如前所述，选用低温氦气作为工作流体，主要有两个原因：（1）它的运动黏度在所有已知物质中最低；（2）通过使实验在临界点附近运行，比热 C_P的发散意味着 $Ra \sim \alpha \rho^2 C_P$（在热力学上与 C_P 相关）可达到极大值。引用 [16] 中的论述，其中对这些因素作了更详细的讨论：“对于非相互作用气体， $\alpha = 1/T$，因此低温本身对浮力驱动流具有特别的优势。.....总之，决定瑞利数的是 $\alpha/\nu\kappa$ 的组合.....”使用低温氦还有两个优点：与其他流体相比，它能在达到极高 Ra的同时更接近Boussinesq近似，而且可以实现优异的热隔离。

III. 幂律拟合与Herring公式

[5] 的实验数据表明，幂律的标度指数略小于 $1/3$。我们在 [5] 中指出，对整个湍流区间（$10^6 < Ra < 10^{17}$）内的数据进行最小二乘拟合，结果为

$$Nu = 0.124 Ra^{0.309}. \tag{5}$$

这确实是用两个参数能做出的最简单拟合：对 log(Nu) 与 log(Ra) 进行线性拟合时的振幅和斜率。该拟合（见图1中的红色虚线）与全部数据吻合得非常好。需要注意的是，数据明确表明，指数与 1/3 的微小差异是真实存在的，或许可视为某种间歇性修正；不过，这种轻微偏离也可能有其他合理原因。事实上，在高Ra 下，对细长对流胞 [18] 进行的数值模拟显示，指数似乎更接近 1/3。但它显然与 Ra中的二分之一次幂相去甚远。事实上，目前没有令人信服的实验结果支持Kraichnan公式。

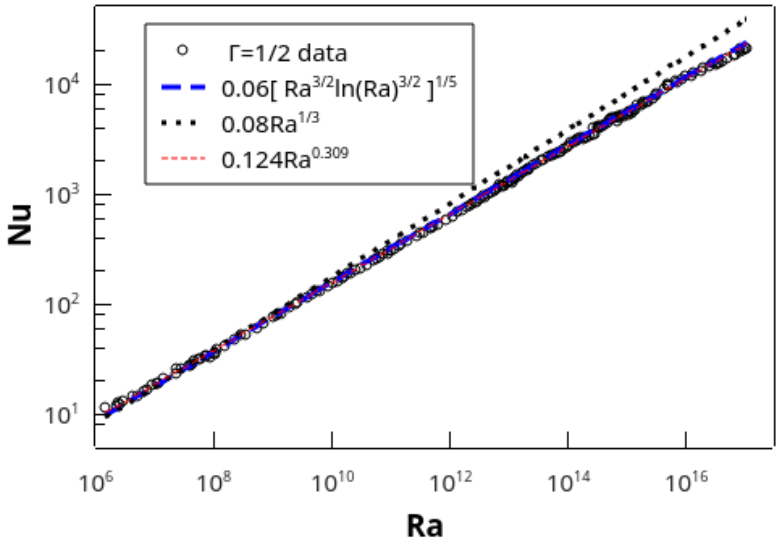

图1. 圆圈：使用高1米、长宽比为1/2的实验获得的数据。蓝色虚线：Herring模型，方程（4）中取 D=0.06，这是该理论中唯一的自由参数（参见相关正文，尤其是第5节）。红色虚线：对原始数据进行的最小二乘拟合（方程（5））。点线： $Nu \sim Ra^{1/3}$，以供比较。

图1中还以蓝色虚线展示了 Herring 对刚性边界间湍流对流的预测，该预测由式（4）给出，前因子为 $D = 0.06$。这个前因子是该表达式中唯一的自由参数，通过将函数拟合到数据上得到。我们注意到，式（4）中的指数 0.3 也应用于 ln(Ra) 项，因此有效指数略大；事实上，正如图2所示，Herring公式对数据的拟合效果与幂律拟合式（5）同样出色。我们强调，与幂律中的两个常数不同，Herring公式中只有振幅是可调参数。

事实上，图2展示了分别用两种拟合结果归一化后的原始数据，很明显，总体而言两者效果同样出色、令人满意。我们还注意到，数据中存在显著的子结构，这可能意味着流动发生了各种变化，正如图2图注中所提示的那样，同时整体趋势仍保持不变。我们将在第5节简要阐释方程4中经验确定的前因子。

IV. 关于最终态的评述

图3比较了Kraichnan公式与另外两种公式的表现。为了将它们全部绘于同一张图中，我们在Kraichnan公式中取 $C = 0.04$，并将纵轴尺度压缩约5倍。在这个尺度下，底部的两条拟合曲线掩盖了图2中显而易见的子结构，几乎成为完美的水平直线，表明从整体视角看，方程（4）和方程（5）都非常有效。显然，Kraichnan公式未能成功地将数据拟合成一条水平线，因此很明显，与另外两种公式不同，它不具有整体相关性。然而，对于较高的 Ra，曲线似乎趋于平缓，令人颇感期待地暗示了趋近最终态的可能性。我们将在下文讨论这一推测。

图 4 展示了过去大约一个半数量级内努塞尔数随 Ra变化的放大图。对这些数据进行最佳拟合得到的幂律指数为 0.317，仅比整体指数 0.309 略大（约 2.5% ），且与 [18] 中的结果相当接近。理性的人都不会认为斜率正趋近于二分之一。从略有不同的角度来看，图 5 展示了图 3 中数据的高-Ra 端；显然，图 3 中可能让人推断出的变平趋势，只是由压缩的刻度造成的错觉。图 5 中归一化数据应呈现何种函数形式尚不明确；不过，如果对 Ra最后两个数量级的数据进行幂律拟合，得到的幂律指数为 -0.033。

最终态支持者有时会提出一个未明说的论据：在过去大约二十年对 [5] 的测量中，普朗特数并非常数。 [2] 对这一现象进行了详细讨论，相关结果也在图 6 中重现。然而，在此处涉及的中等普朗特数范围内，努塞尔数随普朗特数的变化非常微弱（例如参见 [19]）。因此，不能认为普朗特数升高是数据未趋近二分之一次幂的原因。如果能够有精确理论说明热输运如何依赖于普朗特数，我们的结论可能会

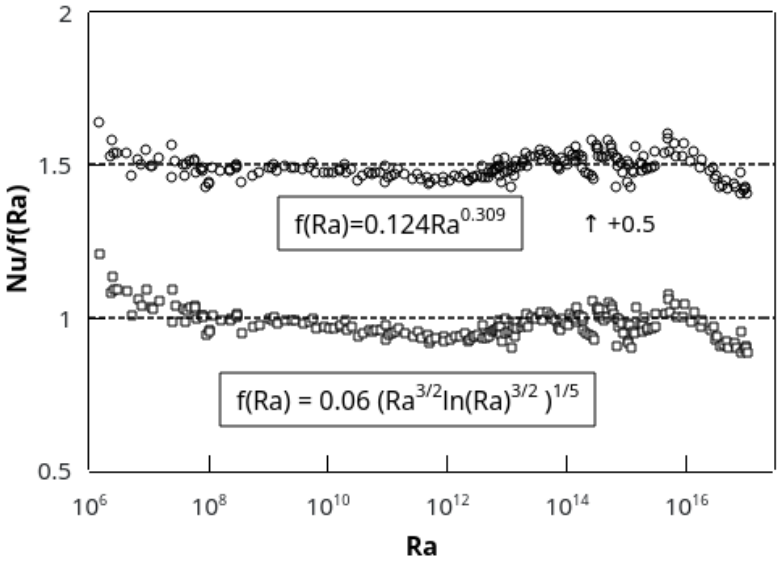

图 2. Nu 按方程 (4) 和 (5) 归一化。方块表示按 Herring公式（方程 (4)）归一化的 Nu 。圆圈表示依据原始数据的最小二乘拟合（方程 (5)）归一化的 Nu ，为清晰起见，纵向平移 $+0.5$。对于较低的 $Ra < 10^{10}$，例如，其斜率小于 0.309，让人想起 [17] 中讨论的 2/7斜率。我们估计， [5] 实验装置中的边界层在约 $Ra = 10^{13}$ 时发生转变。最近一个数量级的数据可能受普朗特数非常数（见下一节）和/或中等非 Boussinesq效应的影响。这些特征在 [2] 中有较详细的讨论。

如果能够借助精确理论来解释数据，明确热输运如何依赖普朗特数，情况就会有所不同。

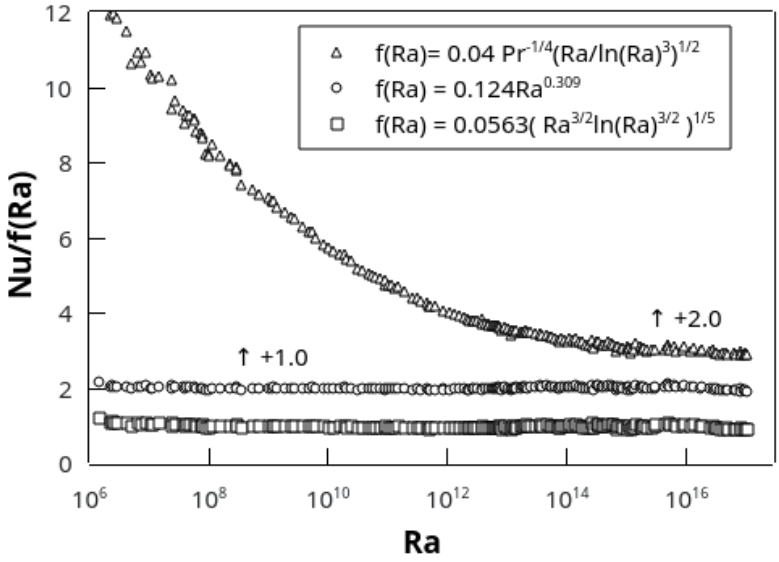

图 3. Nu 按方程 (4) 和 (5) 归一化，与图 2 相同，但压缩了纵轴尺度，以便在同一图中显示按 Kraichnan公式归一化的结果。尺度：方块表示按 Herring公式（方程 (4)）归一化的努塞尔数。圆圈表示依据原始数据的最小二乘拟合（方程 (5)）归一化的 Nu ，为清晰起见，纵向平移 $+1.0$。三角形表示按照 Kraichnan公式针对高 Ra 和中等普朗特数进行归一化的 Nu （方程 (3)，其中 $C = 0.04$），为清晰起见，纵向平移 $+2.0$（见正文）。此处以及图 5 中，方程 (3) 中的记号 f(Ra) 隐含了对普朗特数的依赖。

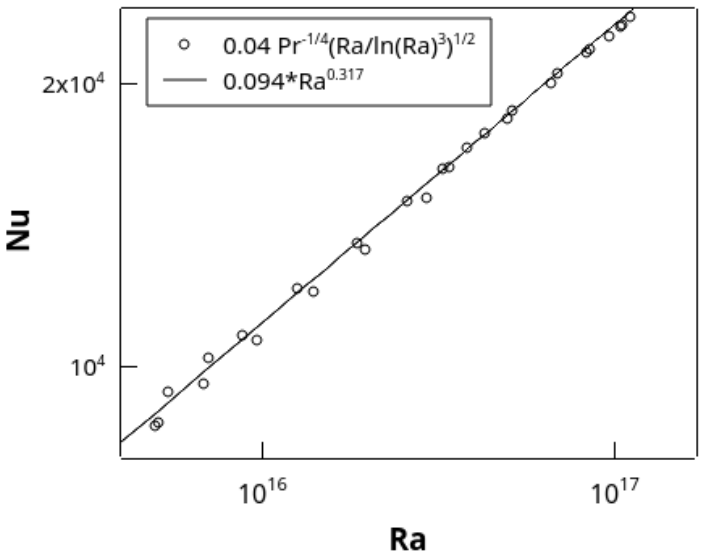

图 4. Nu 与 Ra 的关系，针对 Ra中最高的一个半数量级。符号：使用 Kraichnan公式（式（3），其中$C = 0.04$）计算的 Nu 。实线：对数据进行最小二乘拟合，得到斜率 0.317。

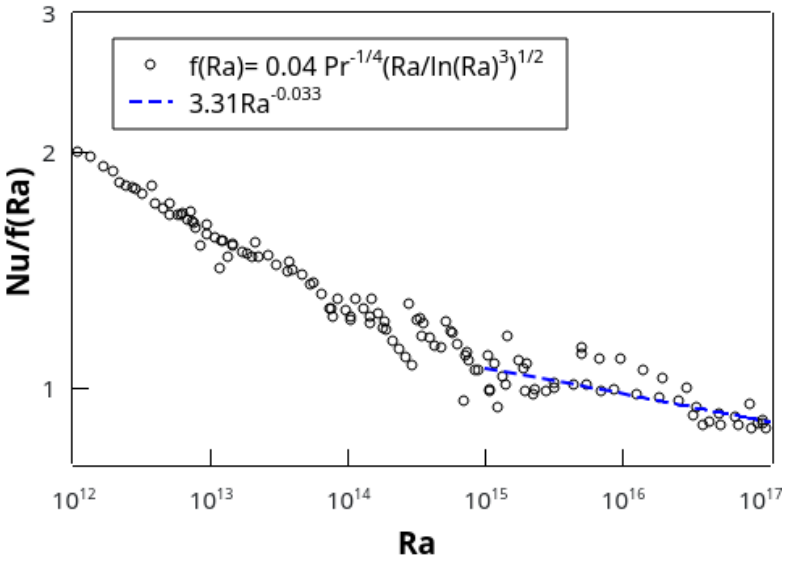

图 5. Nu/f(Ra) 与 Ra的关系。使用 Kraichnan公式（式（3），其中 C=0.04）中的 f(Ra) 对数据进行归一化。虚线：对 $Ra > 10^{15}$的归一化数据进行最小二乘拟合。最后两个数量级范围内的斜率为 -0.033，表明实验数据不符合 Kraichnan公式。前因子 3.31 取决于式（3）中 $C = 0.04$ 的取值。

V. 讨论

这里的讨论主要围绕两个问题展开。第一个问题是：Herring公式是在弱非线性超临界区通过优化单一水平波数下的热输运推导出来的，为什么它在瑞利数高达 10^{17}时仍然适用？需要注意的是，瑞利-贝纳德对流的临界瑞利数为 1708；对于这一长宽比，临界值可能更高，约为几千。然而，该公式似乎适用于极其宽广的瑞利数范围，在此范围内，流动显然已处于湍流状态，且被激发的波数连续分布。

或许可以说，赫林公式的这一特定成功纯属巧合，但这种看法未免缺乏想象力（考虑到这种吻合跨越了 Ra 许多个数量级）。因此，我们将尝试探寻这一发现可能蕴含的意义。其原因或许与 Krishnamurti 和 Howard [20] 后来观察到的现象有关：在高 Ra下会形成大尺度流动；这一现象已在湍流

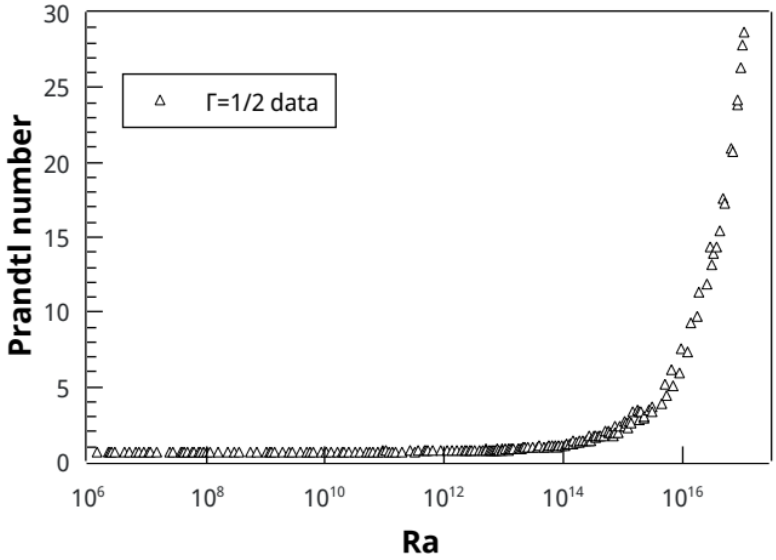

图 6. 参考文献 [5], 中实验的普朗特数与瑞利数关系图，显示在高 Ra 下普朗特数有显著变化。这种变化是为了获得越来越高的瑞利数而逐渐接近低温氦气临界点所造成的假象。如果在更小的实验装置中追求高 Ra ，这种效应会更加明显。

对流中得到广泛观察。引述 Herring 在其 1966年 [7], 论文中的说法（针对自由边界）：“模型所预测的自由边界对流过程，其物理图景是：大尺度运动主导着导热板之间的中央区域。这种大尺度运动裹挟着温度涨落场，其主要变化发生在垂直延伸尺度为 1/努塞尔数的薄边界层中。主导运动和温度涨落场的水平尺度均与导热板之间的距离相当。”实际上，这相当准确地描述了高 Ra下刚性边界之间观察到的流动。

现在我们进一步探讨这种可能性。众所周知，各种湍流中的大尺度结构与演化的超临界非线性阶段中的结构相似。圆柱体后方的尾流就是一个例子。即使在已测得的最高雷诺数下 [21], ，高雷诺数时的大尺度结构也与刚超过临界雷诺数时脱落的涡旋非常相似。我们可以推测，大尺度结构保持不变，但随着小尺度湍流涨落的出现，输运系数的有效振幅会变为一个新的有效值。还可以进一步推测，对流也具有相同的特征。如果确实如此，那么有理由认为，适用于弱非线性阶段的方程函数形式在湍流状态下仍然成立，只是两种状态下的前因子有所不同。从某种意义上说，这就是重整化在发挥作用，不过这一说法尚待精确定义。迄今为止，唯一已定量完成这一重整化方案的流动，是由大尺度强迫产生的各向同性均匀流 [22]。如果同一方案也适用于对流，那么原则上也应能够确定对流问题中的有效扩散率。

第二个问题涉及最终态。我们知道，在存在粗糙度的情况下[23], 、在开口管中发生对流时 [24], 、流体受到辐射等体力加热时[25], , 等等，都会出现 1/2 次幂。只要连续介质方程仍然成立且边界层保持完整，在我们看来，它们对对流的重要性就不会消失；而不考虑黏度和热扩散率的理论，将会遗漏流动的一个关键因素。据我们所知，迄今为止，无论是实验还是数值研究，都没有令人信服的证据支持 Kraichnan公式。我们已针对当前数据明确指出了这一点。

VI. 结论

Jack Herring采用了大幅截断的完整Boussinesq方程版本，其中只包含一个水平波数，并由此得出一个公式，用于计算略高于临界瑞利数时弱非线性超临界态下的努塞尔数。只要适当替换数值前因子，同一公式在跨越十一个数量级的完全湍流态中也适用。从这个意义上说，与需要通过实验确定两个常数的单一幂律相比，该公式所包含的经验成分较少。我们讨论了这种简单化的物理图景为何可能成立。我们也简要考察了Kraichnan的渐近公式，并阐述了它为何不适用于我们的实验。我们承认，二分之一次幂定律

存在于标准瑞利-贝纳德对流之外、对流条件各异的情形中。

VII. 致谢

多年来，在各种场合，我们有机会与Jack Herring进行有趣的讨论，其中最令人难忘的一次是他提出的高瑞利数对流模型。Jack待人接物始终温文尔雅。KRS记得，从1977年他在美国国家大气研究中心第一次与Jack相识，直到最后一次联系，Jack始终如一。我们都很庆幸曾与他相识，并欣然将这篇短文献给他的纪念。我们还要感谢Ladislav Skrbek在完成 [5]中所报告的测量工作时发挥的重要作用。

---

[1] D. J. Tritton， *Physical Fluid Dynamics.* 牛津科学出版社，克拉伦登出版社，1988年。[2] J. J. Niemela，K. R. Sreenivasan。受限湍流对流。 *J. Fluid Mech.* **2003**，481，355–384。[3] A. Pandey，J. Schumacher，K. R. Sreenivasan，热扩散率随温度变化的低普朗特数非布oussinesq对流。 *Astrophys. J.* **2021**，907，56。[4] A. Pandey，J. Schumacher，K. R. Sreenivasan，与太阳相关的低普朗特数非布oussinesq对流。*Phys. Rev. Fluids* **2021**，6，100503。[5] J. J. Niemela，L. Skrbek，K. R. Sreenivasan，R. J. Donnelly，极高瑞利数下的湍流对流。 *Nature* **2000** 837 840 ，404，–。

[6] J. R. Herring，热对流问题研究。 *J. Atmos. Sci.* **1962**，20，325–338。[7] J. R. Herring，热对流理论的一些分析结果。 *J. Atmos. Sci.* **1966**，23，672–677。[8] W. V. R. Malkus，热湍流的热输运与谱。 *Proc. R. Soc. Lond. A* **1954**，225，196–212。[9] E. A. Spiegel，论Malkus湍流理论，载于 *Proc. 1961 Marseille meeting on turbulence*，1962年，181–201。[10] L. Howard，高瑞利数下的对流。载于1964年德国慕尼黑举行的第11届国际应用力学大会论文集，1109–1115。[11] R. H. Kraichnan，任意普朗特数下的湍流热对流。 *Phys. Fluids.* **1962**，5，1374–1389。[12] E. A. Spiegel，恒星中的对流，I. 基本布oussinesq对流。 *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **1971**，9，323–352。[13] X. Chavanne，F. Chilla，B. Castaing，B. H´ebral，B. Chabaud，J. Chaussy，瑞利-贝´纳德对流中终极态的观测。 *Phys. Rev. Lett.* **1997**，79，3648–3651。[14] F. H. Busse，热对流的非线性性质。 *Rep. Prog. Phys.* **1978**，41，1929–1966。[15] J. J. Niemela，S. Babuin，K. R. Sreenivasan，高瑞利数和泰勒数下的湍流旋转对流。 *J. Fluid* ，649，-。 *Mech.* **2010** 509 522

[16] J. J. Niemela，K. R. Sreenivasan，低温氦在经典湍流研究中的应用：前景与挑战。 *J. Low* ，-。[17] *Temp. Phys.* **2006** *143* 163 212

B. Castaing，G. Gunaratne，F. Heslot，L. Kadanoff，A. Libchaber，S. Thomae，X-Z. Wu，S. Zaleski，G. Zanetti，瑞利-贝´纳德对流中强热湍流的标度律。 *J. Fluid. Mech.* **1989**，204，1–30。[18] K. P. Iyer，J. D. Scheel，J. Scumacher，K. R. Sreenivasan，经典 1 3 $Ra = 10^{15}$ *Proc.* /标度律 *Natl. Acad. Sci. USA* **2020** *117* 7594 7598

在对流中一直成立，直至。，，-。[19] L. Grossmann，D. Lohse，大普朗特数下的热对流。 *Phys. Rev. Lett.* **2001**，86，3316–3319。[20] R. Krishnamurti，L. N. Howard，湍流对流中的大尺度流动生成。 *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **1981**，78 1981 1985，–。[21] A. Roshko，极高雷诺数下的圆柱绕流实验。 *J. Fluid Mech.* **1961**，10，345 356-。[22] K. R. Sreenivasan，V. Yakhot，纳维–斯托克斯方程所描述的三维湍流动力学。 *Phys. Rev. Fluids*，2021 6 104604，。[23] S. Toppaladoddi，S. Succi，粗糙度作为热对流达到终极态的途径。 *Phys.* ，。[24] J. *Rev. Lett.* **2017** *118* 074503

H. Arakeri，F. E. Avilla，J. M. Dada，R. O. Tovar，不稳定分层导致的长垂直管内对流——一种新型湍流？ *Curr. Sci.* **2000**，79，859-866。[25] S. Lepot，S. Aumaitre，B. Gallet，辐射加热使热对流达到终极态。 *Phys. Rev. Lett.* ，，-。 **2018** *115* 8937 8941