arXiv:2303.05610v1 [math.AG] 9 Mar 2023

阿贝尔簇的完美空间覆盖与权重-单值猜想

Peter Wear

Abstract. Deligne 的权-单值猜想控制着坏约化处簇的 L-函数局部因子的极点。其在特征 p下的证明，是他证明广义韦伊猜想的一步。Scholze 发展了完美空间理论，将 Deligne 的证明推广到特征 0，并证明了环面簇中完全交的猜想。借助 Scholze 的方法，我们证明了阿贝尔簇中完全交的权-单值猜想。

1. Introduction

1.1. 权-单值猜想。本文旨在借鉴 Scholze 发展的方法，证明 Deligne 的权-单值猜想的一些新情形。在引言中，我们将阐明猜想的动机并陈述猜想，概述 Scholze 的思路，最后介绍本文的结构。为简化引言的论述，我们将在 $\mathbb{Q}$ 上进行讨论，但所述内容对任意数域均成立。

设 X 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的一个维数为 d的簇。 X 的 L函数是一个狄利克雷级数，定义为对每个素数对应的局部 ζ 因子取乘积，是朗兰兹纲领研究中的基本对象。关于 L函数有许多重要猜想：它们应当来自自守表示，满足函数方程，并包含大量关于簇 X的信息。例如，伯奇-斯温纳顿-戴尔猜想指出，椭圆曲线 E 上的有理点群的秩，应当等于与 E 在 $s = 1$ 处相关联的 ζ 函数 $L(E, s)$ 的零点阶数。该猜想的一个更强版本，则用 E 的基本不变量来解释泰勒级数在 1 处的首项系数。

当 X 在素数 p处有良约化时，韦伊猜想给出了 p处的局部因子。黎曼假设意味着，在这类素数处， i次局部因子的极点实部为 $i/2$。但通常会有有限多个素数，使得 X在这些素数处有坏约化，因此我们也希望理解这些素数处的局部因子。Deligne 的权-单值猜想意味着，即使在坏约化的素数处，局部 ζ 函数的 i次部分的所有极点实部也至多为 $i/2$。

现在我们将说明如何通过 ´étale 上同调构造这些局部 ζ 因子，并准确陈述权-单值猜想。请注意，这里仅作引入之用：只对新论证感兴趣的读者可以直接跳到猜想1.1.1的陈述。令 ℓ 为一个不同于 p的素数，令 i 为介于 0 和 $2d$之间的整数。第 i个 ℓ-adic 上同调群 $V := H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是一个

有限维 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-向量空间。绝对伽罗瓦群 $G_{\mathbb{Q}_p}$:=Gal($\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$) 作用于$X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$。这诱导出在 V 上的作用，从而得到一个伽罗瓦表示

$$\rho : G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathrm{GL}(V).$$

粗略地说，这个表示由两个部分控制：Frobenius 的作用和单值算子。Frobenius 来自 $G_{\mathbb{F}_p}$，即剩余域的伽罗瓦群，用于定义表示的权；而伽罗瓦群中的惯性则导出单值性。作为初步理解，权-单值猜想指出，这两个表示的侧面会以良好的方式相互作用。

$G_{\mathbb{Q}_p}$ 的惯性子群$I_{\mathbb{Q}_p}$ 由以下短正合列定义

$$1 \to I_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{F}_p} \to 1.$$

固定一个映到几何弗罗贝尼乌斯的元素 $\Phi \in G_{\mathbb{Q}_p}$ ： 映射 $\overline{\mathbb{F}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$ ， 将$x \mapsto x^{1/p}$送到。 X 在 p 处的局部 ζ 因子定义为 det$(1 - p^{-s}\Phi | V^{I_{\mathbb{Q}_p}})$。

在良约化情形下， X 在 $\mathbb{Z}_p$ 上有一个真光滑模型 $\mathfrak{X}$ ， 其特殊纤维为$\sim\mathfrak{X}/\mathbb{F}_p$。根据真光滑基变换，有一个伽罗瓦等变同构

$$H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \cong H^i_{\text{ét}}(\widetilde{\mathfrak{X}}_{\overline{\mathbb{F}}_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell),$$

其中右侧带有 $G_{\mathbb{F}_p}$ 的作用。在这种情况下，惯性群在 V 上的作用是平凡的，因此局部 ζ 因子现在是 det$(1 - p^{-s}\Phi | V)$。韦伊猜想告诉我们，这是一个以 T 为变量的多项式：$= p^{-s}$ ，其根是权重为 i 的韦伊数：代数整数，且在嵌入到 $\mathbb{C}$ 的任何嵌入下，其绝对值均为 $p^{i/2}$ 。

在坏约化的情况下，惯性群在 V 上的作用非平凡。Grothendieck 证明，$G_{\mathbb{Q}_p}$ 的温和惯性的 pro-ℓ 部分的作用导出一个幂零算子 N： $V \to V(-1)$，称为单值算子（这里 $V(-1)$ 表示 V 的 Tate 扭曲）。该算子给出 V 上的单值滤过：一个有限递增滤过 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$，满足 $N(V_j) \subset V_{j-2}$，并且 N^j 在此滤过的第 $(i - j)$ 个和第 $(i + j)$ 个分次部分之间诱导一个同构。

图景的另一半是权滤过。我们的几何弗罗贝尼乌斯提升 Φ 在 ρ 下的像是一个矩阵 $\rho(\Phi) \in \mathrm{GL}(V)$，我们可以用它给出一个广义特征空间分解

$$V = \oplus_{j=0}^{2i} W'_j.$$

这里， Φ 作用于 W'_j 的特征值是权为 j的韦伊数。如果我们选择了不同的 Frobenius 提升，就会得到 V的不同分解。不过，权和维数保持不变，权滤过也保持不变，其定义为

$$W_m := \oplus_{j=0}^{m} W'_j.$$

对于 Φ的任意选择，我们都有 $N\Phi = p\Phi N$，因此单值算子与权滤过有良好的相互作用：$NW_m \subset W_{m-2}$。

猜想 1.1.1 (Deligne， [Del71])。 对于局部域上的真光滑簇，权滤过与单值滤过相同。

Deligne 在特征 p 局部域上证明了他的猜想（基于一个简化假设；该假设后来在 [Ter98] 和 [Ito05]中被去除）。在混合特征下，许多特殊情形已得到证明——概述见 [Sch12] 的引言——但一般情形的猜想仍未解决。在他的博士论文 [Sch12], 中，Scholze 引入完美空间，作为连接特征 0 与 p的桥梁。他利用完美空间，将环面簇中完全交的权-单值猜想归约到 Deligne 已解决的特征 p情形，从而证明了该猜想。本文旨在将 Scholze 的技术从环面簇推广到阿贝尔簇，由此得到我们的主定理。

定理 1.1.2. 设 k 是剩余特征为 p 的局部域。设 A 是 k 上的阿贝尔簇， Y 是几何连通的真光滑簇，且作为集合论意义下的完全交嵌入 A。则权-单值猜想对 Y 成立。

当 Y 的维数至少为 3 时，定理 1.1.2 可证明适用的簇不同于 Scholze 定理可证明适用的簇：参见注 6.2.6。

1.2. Scholze 借助完美空间的方法。 我们对定理 1.1.2 的证明遵循 Scholze 在 [Sch12, 定理 96]中证明环面簇时采用的思路。我们在此简述他在超曲面 Y 嵌入射影空间 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}_p}$这一特殊情形下的证明。该论证更详细、更一般的版本见第 6节。

令 K 表示完美拟域 $\widehat{\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})}$，将基变换到 Y_K，并考虑其在 $\acute{}$上 étale 上同调对应的 G_K-表示。这不会改变权，因为 G_K 中几何弗罗贝尼乌斯的任意提升，在 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 中都有一个对应的提升。它保留单值算子，因为它不会影响伽罗瓦群的 pro-ℓ 部分。因此，进行这次基变换后，我们便可证明权-单值猜想。

倾斜 $K^\flat := \varprojlim_{x\mapsto x^p} \widehat{K} \cong \widehat{\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))}$ 的 $\widehat{K}$ 是一个特征为 p 的完美拟域。完美空间理论的出发点是 Fontaine-Wintenberger 伽罗瓦群同构。Deligne 证明了，对于来自 $K^\flat$ 上簇的 $\acute{}$étale 上同调的 $G_{K^\flat}$-表示，权-单值猜想成立。这个伽罗瓦群同构使我们能够将这一结果推广到我们希望研究的 G_K-表示。

考虑 adic 空间的映射 $\varphi\colon \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_K \to \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_K$，它在点上的定义是将 $(x_0 : \cdots : x_n)$ 映射到 $(x_0^p : \cdots : x_n^p)$。对该映射进行迭代以得到一个逆系统，我们得到一个完美空间

$$\mathbb{P}^{n,\mathrm{perf}}_K \sim \varprojlim_{\varphi} \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_K.$$

空间 $\mathbb{P}^{n,\mathrm{perf}}_K$ 不是 adic 空间的逆极限，但若限制到其底层拓扑空间或 $\acute{}$étale 拓扑，则可以得到逆极限。这使得拓扑学和 $\acute{}$étale 上同调论证能够在此情形下成立。倾斜 $(\mathbb{P}^{n,\mathrm{perf}}_K)^\flat$ 由在 $K^\flat$ 上进行类似构造得到。这里的情况甚至更简单，因为映射 $\varphi_{K^\flat}\colon \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_{K^\flat} \to \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_{K^\flat}$ 诱导出拓扑空间之间的同胚以及 $\acute{}$étale 拓扑之间的同构。

综上所述，我们得到一个投影映射 $\pi : \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_{K^\flat} \to \mathbb{P}^{n,\mathrm{ad}}_K$，它作用于底层拓扑空间和 $\acute{}$étale 拓扑。该映射在 Fontaine-Wintenberger 同构下是伽罗瓦等变的。

这启发我们采用以下方法证明权-单值猜想：取一个定义在 K 上的簇，将其嵌入射影空间，再沿 π 拉回，得到一个定义在 $K^\flat$ 上的对象，然后应用 Deligne 的结果。问题在于，拉回所得的并非一个簇，而是一团超越性的分形混乱。Scholze 通过证明这种拉回可以用一个具有相同ℓ-进上同调的超曲面来近似，解决了超曲面情形下的这一问题。

1.3. 概要。 有了前面的概述，我们现在已掌握足够的背景来全面介绍本文的结构。在第 2 节，我们将介绍本文所用的非阿基米德几何的各种研究方法的背景。我们已经看到，定义完美空间需要 adic 空间，但实际工作大多将在更经典的刚性解析空间和形式概形范畴中进行。我们将回顾 Raynaud 对刚性空间的描述，即将其视为形式概形的一般纤维，并介绍他对非阿基米德域上阿贝尔簇的统一化。随后，我们将说明如何通过刚性空间的逆极限构造完美空间，这种构造所用的对象称为“F-塔”：某些形式概形的逆系统。

在第 3 节，我们将使用 F-塔构造阿贝尔簇的完美覆盖（更一般地说，构造阿贝洛簇的完美覆盖；阿贝洛簇是复环面的非阿基米德类比），并由此给出以下定理的另一种证明。

定理 1.3.1（Blakestad、Gvirtz、Heuer、Shchedrina、Shimizu、W.、Yao）。设 A 是剩余特征为 p、赋值群包含于 $\mathbb{Q}$ 的完美拟域 K 上的阿贝尔簇（或阿贝洛簇）。存在一个完美体群 A_∞，使得 $A_\infty \sim \varprojlim_{[p]} A$。

我们注意到，当 A 具有良约化时，这一定理早已为人所知，参见例2.4.5。文献 [BGH+18] 中的证明假设 K 是代数闭的，但对赋值群没有限制。 A 的覆盖 A_∞ 是我们对 $\mathbb{P}^n_K$ 的完美拟覆盖$\mathbb{P}^n_{K^{\mathrm{perf}}}$ 的类比。在射影空间的情形下，可以通过迭代 Frobenius 的一个提升 φ，利用显式的完美对象 K-代数构造完美拟覆盖。但对于阿贝尔簇，这种方法行不通：要写出它们的显式公式非常困难，而且 Frobenius 并不总有提升。对赋值群的限制使我们能够构造 A 的形式模型。

在第 4 节中，我们开始研究倾斜 。对于 K^{ad}，倾斜曾有一种自然的诠释，即位于 $\mathbb{P}^n_{K^\flat}$ 上方的完美空间 $\mathbb{P}^{n,\mathrm{perf}}_{K^\flat}$。同样，我们可以通过明确处理其中涉及的完美对象 K-代数来验证这一点。对于 $K^\flat$ 上的阿贝尔簇，却没有这样显而易见的候选对象能够导出 $A^\flat_\infty$。粗略地说，一个完美空间及其倾斜具有同构的特殊纤维。为了理解 $A^\flat_\infty$，我们取用于定义 A_∞ 的 F-塔的特殊纤维，并将其变形，从而得到阿贝洛簇 $A'/K^\flat$ 上的一个 F-塔。这给出了该定理的另一种证明

定理 1.3.2 (Heuer,W.)。 设 A 和 A_∞ 如定理 *1.3.1* 中所述。那么经过对 p 作 pro- K 扩张后，存在一个（不唯一的）阿贝洛簇 A'，定义在 $K^\flat$ 上，使得 $A^\flat_\infty \sim \varprojlim_{[p]} A'$.

[HW] 中的证明将这一构造与 Scholze 的完美空间Shimura簇联系起来。它不使用形式模型，而我们的应用将需要形式模型。

在第 5 节中，我们说明如何通过构造相关 A 的完美覆盖，将线丛从 A' 转移到合适选取的 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间。这使我们能够将前一个定理代数化：若从阿贝尔簇 A 出发，就可以将 A' 也选为阿贝尔簇。

在第 6 节中，我们证明了 Scholze 的逼近引理的一个类似版本，并用它证明定理 1.1.2。证明中的上同调方面与 Scholze 的论证类似，但有一处必要的补充。由于映射 $[p]: A' \to A'$ 不是同胚，也不诱导 ´étale 位点的同构，因此在有限层上没有 Scholze 的映射 $\pi: \mathbb{P}^n_{K^\flat} \to \mathbb{P}^n_K$ 的直接类似物。因此，我们的计算必须更明确地借助完美覆盖 $A^\flat_\infty$ 进行。

1.4. 致谢。本文基于我在加州大学圣迭戈分校的博士论文。我要感谢我的导师 Kiran Kedlaya 的建议与支持。本项目始于 2017年亚利桑那冬季学校。感谢组织者促成此事；感谢 Bhargav Bhatt 和 Matthew Morrow 提出构造阿贝尔簇完美拟覆盖这一问题；也感谢我的同组成员 Clifford Blakestad、Dami´an Gvirtz、Ben Heuer、Daria Shchedrina、Koji Shimizu 和 Zijian Yao。感谢 Gabriel Dorfsman-Hopkins、Ben Heuer、Sean Howe 和 Anwesh Ray 与我就本文内容进行了许多有益的讨论。本文写作获得了美国国家科学基金会资助项目 DMS-1502651 和美国国家科学基金会 RTG 资助项目 #1840190 的支持。

2. Background on non-archimedean geometry

本节汇集一些非阿基米德几何的结果。我们的总体目标是取一个阿贝尔簇 A，其定义在完美拟域 K 上，且剩余特征为 p，并构造一个完美空间 $A_\infty \sim \lim_{\longleftarrow [p]} A$。为此，我们回顾 Raynaud 关于刚性空间形式模型的理论，以及他对阿贝尔簇的统一化。随后，我们将 Scholze 通过形式模型构造 adic 空间逆系统的完美拟极限的方法公理化。最后，我们回顾 Shen 关于完美拟极限的伽罗瓦下降的一个结果；该结果将使我们可以假设 A 具有 Raynaud 统一化。关于这些结果的更多阐述和参考文献，可参见 [Wea20，第 2]章。

2.1. 通过形式模型构造刚性空间的逆极限。设 K 是一个非阿基米德域，其绝对值为 $|\cdot|$，剩余特征为 p，剩余域为 κ。对任意拓扑环 R，记 R° 为幂有界元素，记 $R^{\circ\circ}$ 为拓扑幂零元素，因此 K° 是 K 的整数环，且 $K^\circ/K^{\circ\circ} \cong \kappa$上的刚性空间范畴与 adic 空间范畴一般不具有逆极限。为了解决这一问题，我们使用形式模型。下面简要回顾其基本构造，详情见 [Bos14，第7,8] 章。

定义 2.1.1. 若 R^+ 是 K°-代数，且没有 K°-挠并且是拓扑有限型，则称其为容许的。固定任意满足 $|0| < |\varpi| < 1$ 的伪一致化元 $\varpi \in K^\circ$，则 A° 是 ϖ-进完备的。

没有 K°-挠等价于在 K° 上平坦。

定义 2.1.2. 刚性空间 X 的形式解析覆盖是由仿射刚开集 U_i =Sp(R_i) 构成的 X 的覆盖 $\{U_i\}$ ，满足

(1) 该覆盖在 G-拓扑下是容许的，其中 X （参见 *[Bos14*，第 *5]* 章），(2) 对每个代数 R_i，K°-代数 R_i° 如定义 *2.1.1* 所述是容许的，并且(3) 对每一对开集 U_i 和 U_j，交集 $U_i \cap U_j \subset U_i$ 是某个$\widetilde{\quad}$ $\tilde{\quad}$扎里斯基开子集在 MaxSpec(R_i) 之下经约化映射 $R_i^\circ \to R_i := R^\circ/R^{\circ\circ}$ 的原像。

现在我们可以陈述所需的精确构造。这基本上就是 [L¨ut16 的注记 3.2 的内容。5]。

命题 2.1.3。

(1) X 的形式解析覆盖的数据定义了一个容许形式概形 $\mathfrak{X}$，它由形式概形 Spf(R_i°) 粘合而成。形式概形 $\mathfrak{X}$ 是 X的一个形式模型。(2) 给定 $\mathfrak{X}$ 的任意形式仿射开集覆盖，其一般纤维是 X的形式解析覆盖。(3) 设 $\{U_i\}$ 是 X 的一个形式解析覆盖， $\{V_k\}$ 是Y的一个形式解析覆盖，并设 $\mathfrak{X}$ 和 $\mathfrak{Y}$ 是相应的形式模型。那么，刚性空间态射 φ: $X \to Y$ 可以延拓为形式模型态射 $\overline{\varphi}: \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ ，当且仅当对 X 的覆盖中的每个U_i ，都存在 Y的覆盖中的某个 V_i ，使得对所有 i, j， $\varphi(U_i) \subset V_i$ 且$\varphi(U_i \cap U_j) \subset V_i \cap V_j$。

例 2.1.4. 刚性解析仿射空间 $\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}_K$ 的一个形式解析覆盖可通过固定某个 $y \in K$ （满足 $|y| = c < 1$ ）来给出，并取单位圆盘 $D(1, 0)$ 以及对所有整数 $n \geq 0$ 的环域 An(c^{-n}, c^{-n-1})，沿边界圆粘合。圆盘的约化是 $\mathbb{A}^1_\kappa$，每个环域的约化则是两份 $\mathbb{A}^1_\kappa$ 在原点粘合而成。这些约化粘合后形成一条由 $\mathbb{P}^1_\kappa$ 构成的无限链，其指标为 $\mathbb{N}$。

例 2.1.5. 对我们而言，一个关键例子是仿射环面$\mathbb{G}_{m,K}$的刚性解析化。它就是去掉原点后的 $\mathbb{A}^1_K$ ，因此，一个形式解析覆盖可通过固定某个 $y \in K$ （满足 $|y| = c < 1$ ）来给出，并取对所有整数 n 的环域 An(c^{n+1}, c^n)，再沿边界圆粘合。此时的约化是一条由 $\mathbb{P}^1_\kappa$ 构成的双向无限链，其指标为 $\mathbb{Z}$。

用 adic 空间的术语来说，上述构造对应于将 X^{ad}/K 写成形式概形 $\mathfrak{X}/K^\circ$的 adic 泛纤维。也就是说， $X^{\mathrm{ad}} = \mathfrak{X}^{\mathrm{ad}}_\eta := \mathfrak{X}^{\mathrm{ad}} \times_{\mathrm{Spa}(K^\circ, K^\circ)} \mathrm{Spa}(K, K^\circ)$。在良好的情形下，形式概形范畴存在逆极限。

引理 2.1.6. 设 $\mathfrak{X}_i$ 是 K° 上的形式概形的一个逆系统，其转移映射为仿射映射。那么在 K°上的形式概形范畴中，逆极限 $\mathfrak{X} = \varprojlim \mathfrak{X}_i$ 存在。如果所有 $\mathfrak{X}_i$ 在 K°上都是平坦的，那么 $\mathfrak{X}$也是平坦的。

概述。 详情请参见 [Sta20，标记 01YX] 。由于过渡映射是仿射的，我们可以将问题化归为$\widehat{\quad}$所有 $\mathfrak{X}_i$ 均为仿射的情形。设 $\mathfrak{X}_i = \mathrm{Spf}(R_i)$，则有 $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(\varinjlim R_i)$，其中我们取直接极限的 ϖ-进完备化。平坦性等价于作为 K°上的模无挠，因此这一过程保持平坦性。 □

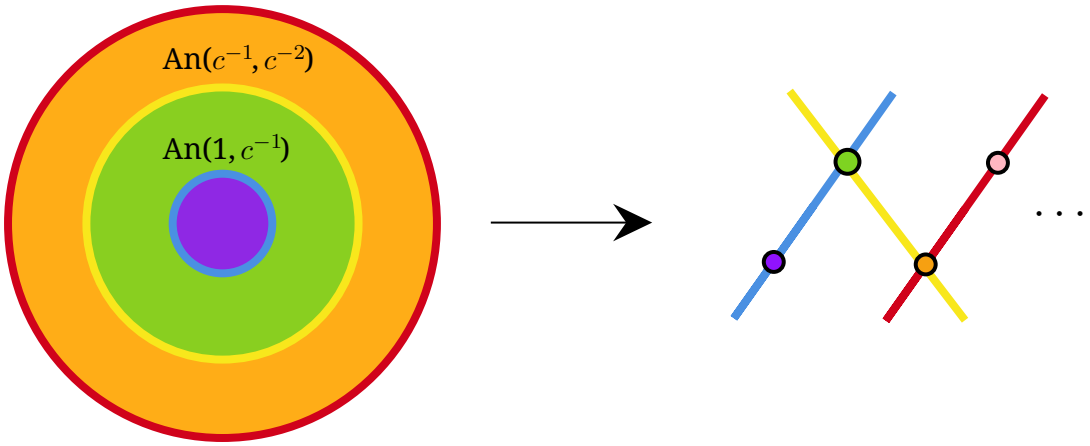


FIGURE 2.1.1. 一个具有特殊纤维的 $\mathbb{A}^1_K$ 形式解析覆盖

为了将这些逆极限转化到一般纤维上，我们回顾 [Sch12定义 7 中的波浪线极限的定义 14] 以及一些有用的性质。注意， [SW13第 2 节中给出了一个略有不同且更一般的定义4], ，但我们不需要用到它。

定义 2.1.7 ([Sch12, 定义 7.14])。 设 X_i 是一个诺特 adic 空间的滤过逆系统。设 X 是一个完美空间，并带有一族相容的态射ϕ_i： $X \to X_i$。那么记 $X \sim \lim_{\longleftarrow} X_i$，并称 X 为该逆系统的波浪极限，如果诱导的拓扑空间映射 $|X| \to \lim_{\longleftarrow} |X_i|$ 是一个同胚，并且对于每个 $x \in X$ 满足 $x_i := \phi_i(x) \in X_i$，剩余域的映射

$$\varinjlim k(x_i) \to k(x)$$

是稠密的。

命题 2.1.8 ([Sch12, 命题 7.16])。 给定 $X \sim \lim_{\longleftarrow} X_i$ 如定义 *2.1.7*所示，设 $Y_i \hookrightarrow X_i$ 是诺特阿得尔空间之间的一个开浸入，其中某个固定的 X_i 属于该逆系统。设 $Y_j := Y_i \times_{X_i} X_j$ 对于 $j \geq i$ 以及 $Y := Y_i \times_{X_i} X$。那么 $Y \sim \lim_{\longleftarrow_{j \geq i}} Y_j$。

为了构造刚性空间逆系统的波浪极限，我们构造这些空间的相应的、性质良好的形式模型逆系统，利用引理 2.1.6 得到形式概形范畴中的逆极限，然后取该极限的 adic 泛纤维。

引理 2.1.9。 设 $\mathfrak{X}_i$ 是定义在 K° 上的形式概形滤过逆系统，且其过渡映射为仿射映射。设 $\mathfrak{X}$ 是引理 *2.1.6*中构造的逆极限。设 $X_i = (\mathfrak{X}_i)_\eta$和 $X = \mathfrak{X}_\eta$ 是 adic 泛纤维。则 $X \sim \lim_{\longleftarrow} X_i$。

证明。 由于$\mathfrak{X} \cong \varprojlim \mathfrak{X}_i$，我们也有 $\mathfrak{X} \sim \varprojlim \mathfrak{X}_{i\circ}$ 现在可以将命题 2.1.8 应用于开浸入 $\mathrm{Spa}(K, K^\circ) \mapsto \mathrm{Spa}(K^\circ, K^\circ)$，因为逆系统 $\mathfrak{X}_i$ 定义在 $\mathrm{Spa}(K^\circ, K^\circ)$ 上。□

就我们的目的而言，一个关键结果是，波浪极限在 ´étale上同调上的行为如同逆极限。这使我们能够通过完美体波浪极限，在不同特征之间传递上同调结果。

命题 2.1.10 ([Sch12，定理 7。17])。 在定义 *2.1.7* 的情形下，´étale 拓扑 $X_{\acute{e}t}^{\sim}$ X 是以下 ´étale 拓扑 $(X_i)_{\acute{e}t}^{\sim}$ 的射影极限。

更具体地展开这一陈述，我们有

推论 2.1.11 ([Sch12，推论 7。18])。 在定义 *2.1.7* 的情形下，若 F_i 是定义在 X_i 上的阿贝尔群层， F_j 则对于 X_j ，其上的原像 $j \geq i$，以及 F 在其上的原像X，我们有双射

$$\varinjlim_j H^n(X_{j,\acute{e}t}, F_j) \to H^n(X_{\acute{e}t}, F)$$

对所有 $n \geq 0$。

2.2. Raynaud 扩张。 任意一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的、维数为 d 的阿贝尔簇，都可以表示为 $\mathbb{C}^d$ 除以一个格所得的商。基于 Tate 的工作，Raynaud 在非阿基米德情形下给出了类似的结果。设 A 是定义在非阿基米德域 K上的阿贝尔簇，并将其视为一个 adic 空间。本节回顾 Raynaud 对 A 的均匀化：将其表示为具有良约化的半阿贝尔簇 E 除以一个格所得的商。关于完整构造的精彩讲解，请参阅 [L¨ut16，第 6] 节；原始论文见 [BL91]。

我们首先需要了解一些刚性环面和形式环面的背景知识。

记号 2.2.1。 维数为 r 的分裂刚性环面为 $(\mathbb{G}_m^{an})^r$，通常记作T。将例 2.1.5 的构造取乘积，可得到一个形式模型 $\mathfrak{T}$，它是 T 的形式模型：这是一个定义在 K° 上、具有 $\mathfrak{T}_\eta \cong T$ 的形式概形。一般而言，我们用正体字母表示定义在 K 上的空间，用花体字母表示空间的形式模型 K。需要强调的是， $\mathfrak{T}$ 并不是形式环面。一维形式环面为 $\overline{\mathbb{G}}_{m,\ K^\circ} = \mathrm{Spf}(K^\circ\langle T, T^{-1}\rangle)$。其一般纤维是单位圆 $\mathrm{An}(1,1)$，因此一般有一个嵌入 $(\overline{T})_\eta \hookrightarrow T$。形式环面记作 $\overline{T}$。其上方带直线的空间是“自然地”定义在 $\sim$ $\sim K^\circ$ 上的空间。正如我们所见，特殊纤维 $\mathfrak{T}$ 与特殊纤维 T 非常不同。在一维情形下， $\widetilde{\mathfrak{T}}$ 是由 $\mathbb{P}^1$ 个组成的无限链，而 $\widetilde{T} = \mathrm{Spec}(\widetilde{K}[T, T^{-1}]) = \mathbb{G}_{m,\ \widetilde{K}}$。特殊纤维一律用上方带波浪号的符号表示。

设 $\overline{B}$ 是 K° 上的形式阿贝尔概形，使得

$$\overline{B} := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_n$$

其中 $\widetilde{B}_n = \overline{B} \times_{K^\circ} K^\circ/\varpi^{n+1}$ 是 K°/ϖ^{n+1} 上的阿贝尔概形。固定 K° 上的一个严格正合形式群序列

$$1 \to \overline{T} \to \overline{E} \xrightarrow{\overline{\pi}} \overline{B} \to 1 \tag{2.2.1}$$

（严格是指诱导的切丛序列也正合，但我们不会明确使用这一概念。）

令 E 为嵌入 $\overline{T}_\eta \hookrightarrow T$ 对 $\overline{E}_\eta$ 的推前。我们得到一个由刚性群的短正合列组成的交换图。

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{T}_\eta & \longrightarrow & \overline{E}_\eta & \xrightarrow{\overline{\pi}_\eta} & \overline{B}_\eta & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & T & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & B & \longrightarrow & 1 \end{array} \tag{2.2.2}$$

定义 2.2.2。图表 E 中的刚性解析群簇 *2.2.2* 是一个Raynaud 扩张。

正如复阿贝尔簇通过对 $\mathbb{C}^r$ 取格商而实现一致化，刚性阿贝尔簇也通过对某个 Raynaud 扩张 E 取格商而实现一致化。为了更精确地说明这一点，我们定义 E 中的格。这需要进一步了解上述短正合列的几何性质。

映射 $\overline{\pi}$ （2.2.1）存在局部截面 $\overline{s}$： $\overline{V}_i \to \overline{E}$，其中 $\{\overline{V}_i\}$ 是 $\overline{B}$的某个开覆盖，因此我们可以用形如 $\overline{T} \times \overline{V}_i$的形式开子概形覆盖 $\overline{E}$。这些形式开集在交叠处通过映射粘合

$$\overline{\phi}_{ij} : \overline{T} \times (\overline{V}_i \cap \overline{V}_j) \to \overline{T} \times (\overline{V}_i \cap \overline{V}_j)$$

使得 $\overline{\phi}_{ij}(t, v) = (\overline{\psi}_{ij}(v)t, v)$，其中某些映射 $\overline{\psi}_{ij}: (\overline{V}_i \cap \overline{V}_j) \to \overline{T}$ 满足此条件。

$\overline{\pi}$ 的局部截面可延拓为 π 的局部截面，因此 E 可由同构于 $T \times V_i$ 的开集覆盖，其中 $V_i := (\overline{V}_i)_\eta$。粘合数据等价于以下映射

$$\psi_{ij} : V_i \cap V_j = (\overline{V}_i \cap \overline{V}_j)_\eta \to \overline{T}_\eta.$$

K 上的赋值给出一个群同态 $\ell : T(K) \cong (K^\times)^r \to \mathbb{R}^r$，它将点 $(x_1, \ldots, x_r)$ 映到 $(v(x_1) \ldots, v(x_r)) = (-\log(|x_1|) \ldots, -\log(|x_r|))$。我们将映射 $\ell : T(K) \to \mathbb{R}^r$ 延拓为映射 $\ell : E(K) \to \mathbb{R}^r$，如下所示。在 K-点上局部地看，这就是映射 $T \times V_i \xrightarrow{pr_1} T \xrightarrow{\ell} \mathbb{R}^r$。在交集上，粘合映射来自 T 上的 $\overline{T}_\eta$-作用。映射 ℓ 在此作用下保持不变，因为 ℓ 将 $\overline{T}_\eta$ 映到 $\mathbb{R}$ 中的原点。因此，我们可以将这些局部映射粘合起来，得到所需的群同态 $\ell : E(K) \to \mathbb{R}^r$。

定义 2.2.3. E 中的格是一个子群 $M \subset E(K)$，使得 ℓ 在 M 上的限制构成到 $\mathbb{R}^r$中的格 Λ 的双射。M 的秩就是 Λ的秩；若 M 的秩为 r，则称其具有满秩。

定理 2.2.4 ([L¨ut16，定理 6.4。8])。设 A 是定义在 K上的阿贝尔簇。经过适当的有限可分扩张 L/K 后，存在唯一的 Raynaud 扩张 E，定义在 L 上，并且存在 M，它是 E 中的满秩格，使得 $A_L \cong E/M$。

在刚性空间范畴中， E 是拓扑单连通的（参见 [FvdP04，例 7.4.9(1)] 或 [BL91，定理 1。2]），因此这一结果已尽可能强。

更一般地，将真、光滑、连通的刚性群簇定义为阿贝洛簇。这是复环面的非阿基米德类比。

定理 2.2.5 ([L¨ut16,定理 7.6。4])。 任意 K 上的阿贝洛簇，在对 K作适当的有限可分扩张后，都存在 Raynaud 统一化。

例 2.2.6。取一个满足 $|q| = c < 1$ 的元素 $q \in K^\times$ 。商 $\mathbb{G}_{m,\,K}^{an}/q^{\mathbb{Z}}$ 是一个具有坏约化的椭圆曲线的解析化，称为 Tate 曲线。如有需要，将基域扩张后，我们假设 q 在 K 中有一个平方根。于是，我们可以沿边界圆粘合环域 $\mathrm{An}(c^{1/2}, 1)$ 和 $\mathrm{An}(c, c^{1/2})$。内圆 $\mathrm{An}(c/2, c/2)$ 通过恒等映射粘合，而外圆则沿着映射 $\mathrm{An}(1, 1) \to \mathrm{An}(c, c)$ 粘合，该映射在点上由乘以 q 给出。

这是一个形式解析覆盖，因此它给出了 Tate 曲线的一个形式模型。更一般地，对于区间 $[c, 1] \subset \mathbb{R}$ 的任意一种分解，只要各闭区间的端点属于 K的赋值群，我们就能得到一个形式模型。图2.2.1 展示了其中两个模型。

2.3. 完美空间背景知识。这部分内容的原始参考文献是[Sch12]。其他优秀的入门读物包括 [BCC+19] 和 [Bha17]。固定一个素数 p。

定义 2.3.1. 设 K 是一个剩余特征为 p 的非阿基米德域，关于范数 $|\cdot|$完备。固定一个伪一致化元 $\varpi \in K$，满足 $|p| < |\varpi| < |1|$。若 $|\cdot|$ 非离散，且 K°/ϖ 上的 Frobenius 映射为满射，则称域 K 为完美对象。

例 2.3.2. 完美拟域的例子包括赋予 p-进赋值并取完备化的 $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$，以及赋予 t-进赋值并取完备化的 $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$。任何代数闭的非阿基米德域都是完美对象。在特征 p 下，完美拟域恰好是非离散的完美域。

给定一个完美拟域，其倾斜定义为 $K^\flat := \varprojlim_{x \mapsto x^p} K$，因此 $K^\flat$ 的元素是由 K 的元素组成、满足 $x_n^p = x_{n-1}$ 的序列 $(x_0, x_1, \dots)$。这是一个特征为 p 的完美对象域，其中乘法律由逐分量相乘给出，而加法律由 $(x_n) + (y_n) = (z_n)$ 给出，其中

$$z_n = \lim_{m \to \infty} (x_{m+n} + y_{m+n})^{p^m}.$$

As 特征为 p 的完美对象域是完美域，因此对于这样的域，我们有 $K^\flat = K$ 。

存在一个投影映射 $\sharp : K^\flat \to K$ ，它将 $(x_n) \mapsto x_0$ 映射到此处：该映射是乘法的，但不是加法的。其像是 K 中对所有 n 都有 p^n 次方根的元素。 $K^\flat$ 上的绝对值由 $|x|_{K^\flat} = |x^\sharp|_K$. 给出。域 K 和 $K^\flat$ 具有相同的赋值群。因此，我们可以选择 K 的伪一致化元 ϖ 属于 $\sharp$ 的像，并选择 $K^\flat$ 的伪一致化元为 $K^\flat$ 中满足 $(\varpi^\flat)^\sharp = \varpi$ 的元素 $\varpi^\flat$ 。 K 与 $K^\flat$ 之间的一个关键关系是同构

$$K^\circ/\varpi \cong K^{\flat\circ}/\varpi^\flat \tag{2.3.1}$$

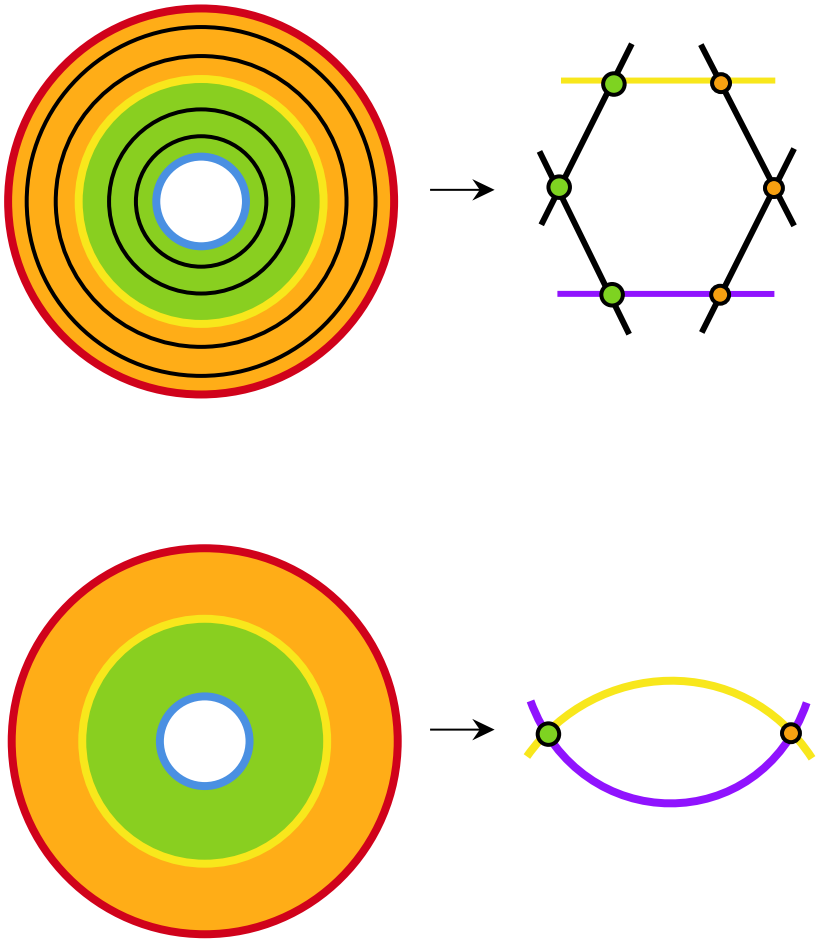


FIGURE 2.2.1. 粘合红色和蓝色圆圈，就得到 Tate 曲线的形式解析覆盖。相应形式模型的特殊纤维是两个 $\mathbb{P}^1$，它们相交两次。细化形式解析覆盖对应于对特殊纤维进行爆破。

例 2.3.3。 $K = \mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ 的倾斜同构于 $\mathbb{F}_p((t^{1/p^\infty}))$，其中元素 $(p, p^{1/p}, \dots) \in K^\flat$ 被视为伪一致化元 t。那么 $t^\sharp = p$，并且我们有

$$K^{\flat\circ}/\varpi^\flat \cong \mathbb{F}_p[\widehat{[t^{1/p^\infty}]}]/t \cong \mathbb{F}_p[t^{\frac{1}{p^\infty}}]/t \cong K^\circ/\varpi$$

正如预期。

就本文的目的而言，我们不需要完美拟环和 adic 空间的完整一般性。我们的目标是处理来自刚性几何、性质良好的空间的显式极限。因此，我们可以固定一个完美拟域 K，并将注意力限制在以下尼斯情形。

定义 2.3.4。完美对象 K-代数是一个完备的 K-代数 R，满足 R° 是开且有界的，并且 R°/ϖ 上的 Frobenius 映射是满射。仿射完美空间是一个 adic 空间 $\mathrm{Spa}(R, R^+)$，其中 R 是完美对象。K 上的完美空间是一个局部仿射完美的 adic 空间。

完美对象 K-代数和仿射完美空间也可以再次进行倾斜，其中

$$(R, R^+) \mapsto (R^\flat, R^{\flat+}) := (\varprojlim_{x\mapsto x^p} R, \varprojlim_{x\mapsto x^p} R^+).$$

映射 $\sharp: R^\flat \to R$ 及 $R^\flat$ 上的拓扑与域的情形类似地定义，并且还有一个关键同构 $R^+/\varpi \cong R^{\flat+}/\varpi^\flat$。这一倾斜过程可以粘合，因此一般而言，完美空间都可以进行倾斜。

例 2.3.5。完美空间 Tate 代数 $K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}\rangle$ 是一个完美对象 K-代数，其幂有界元素为 $K^\circ\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}\rangle$，特殊纤维为 $K^\circ/\varpi[T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}]$。仿射完美空间 $\mathrm{Spa}(K\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}\rangle, K^\circ\langle T_1^{1/p^\infty}, \dots, T_n^{1/p^\infty}\rangle)$ 称为 n 维完美空间闭圆盘。在 K 上的完美空间 Tate 代数的倾斜是 $K^\flat$ 上的完美空间 Tate 代数。

定理 2.3.6 ([Sch12])。倾斜在以下范畴对之间诱导出等价：

(1) 完美对象 K-代数与完美对象 $K^\flat$-代数；(2) K 和 $K^\flat$上的仿射完美空间；(3) 完美对象 K-代数 R 上的有限 étale 代数与$R^\flat$上的有限 étale 代数；(4) $\mathrm{Spa}(K, K^\circ)$ 和 $\mathrm{Spa}(K^\flat, K^{\flat\circ})$上的完美空间；(5) 完美空间 X 及其倾斜 $X^\flat$的（有限） étale 覆盖。

2.4. 通过 F-塔构造完美拟覆盖。我们的总体目标是将簇的 étale 上同调信息从特征 p 转移到特征 0。定理 2.3.6 使我们能够对完美空间进行这种转移，因此我们需要将簇的上同调与完美空间的上同调联系起来。命题 2.1.10 指出，tilde-逆极限在 étale 拓扑斯上的作用类似于逆极限，因此也适用于 étale 上同调。遵循 Scholze 的做法，我们的方法是构造具有完美 tilde-极限的簇的逆系统。在 [Sch12], 中，Scholze 对通过在环面簇上迭代 Frobenius 提升构造的逆系统实现了这一点。由于我们通常没有阿贝尔簇的 Frobenius 提升，因此需要更一般的框架。粗略地说，我们需要确保塔顶端的环模 p^n都具有 th 次方根 ϖ，对所有 n均如此。在塔的每一层，我们都通过要求映射经由相对 Frobenius 分解，来添加更多 p次方根。

以下形式体系仿照了 Scholze 在 [Sch15，III。2]中的 Shimura簇完美覆盖构造。

定义 2.4.1. 设 X 是 K 上的刚性解析空间。X 上的 F 塔由一个形式概形的逆系统 $\{\mathfrak{X}_n\}_{n\geq 1}$ 构成，并满足以下条件：

(1) $\mathfrak{X}_1$ 的一般纤维是 X，

(2) 形式概形 $\mathfrak{X}_n$ 都在 K° 上平坦；(3) 过渡态射 $\mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}_{n-1}$ 是仿射的，并且在模 ϖ 特殊纤维上经由相对弗罗贝尼乌斯映射分解

$$F_{\widetilde{\mathfrak{X}}_n/(K^\circ/\varpi)} : \widetilde{\mathfrak{X}}_n \to \widetilde{\mathfrak{X}}_n^{(p)}.$$

~为简化记号，以下我们将此相对 Frobenius 映射记作 F_n 。

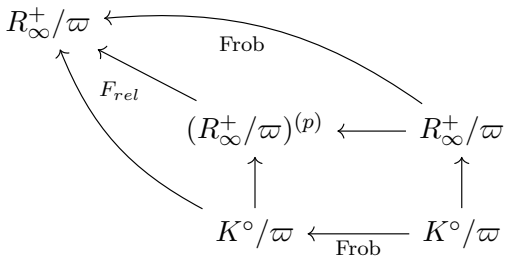
我们将 $\{X_n\}$ 记为该 F塔的 adic 泛纤维。若所有形式概形均为容许的（如定义 *2.1.1*中所述），则这是一个定义在 X上的刚性空间逆系统，且均视为 adic 空间。

命题 2.4.2. 给定刚性空间 X 的一个 F-塔 $\{\mathfrak{X}_n\}$，存在唯一的完美空间 $X_\infty \sim \varprojlim X_n$。我们有 $X_\infty = (\varprojlim \mathfrak{X}_n)^\eta$。

证明。 根据引理 $\mathfrak{X}_\infty := \varprojlim \mathfrak{X}_n$ 在形式概形范畴中存在2.1.6，且一般纤维 X_∞ 根据引理 $\{X_n\}$ 是 2.1.9的波浪极限。

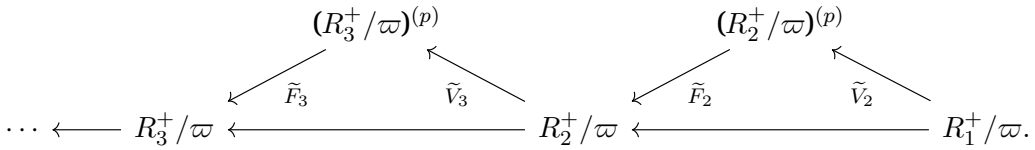
我们局部检验 X_∞ 的完美性。只需用仿射形式概形 Spf(R_∞^+) 覆盖 $\mathfrak{X}_\infty$，其中 R_∞^+ 是平坦 K° 代数，且绝对弗罗贝尼乌斯映射 $R_\infty^+/\varpi \to R_\infty^+/\varpi$ 是满射。取一个形式仿射开集 Spf(R_1^+) $\subset \mathfrak{X}_1$。由于我们的 F-塔的过渡映射是仿射的，且所有形式概形都是平坦的，因此在 $\mathfrak{X}_n$ （分别在 $\mathfrak{X}_\infty$）中的原像是一个平坦的形式仿射开集 Spf(R_n^+)（分别为 Spf(R_∞^+)）。我们有以下图表，它用绝对弗罗贝尼乌斯映射定义相对 Frobenius

(2.4.1)



其中该方块是笛卡尔的。

根据条件 2.4.1(3)，我们有如下图表



~其中映射 F_n 是相对 Frobenius 映射，且 R_n^+/ϖ 的直接极限为 R_∞^+/ϖ。~根据图表（2.4.1），R_n^+/ϖ 中的任意元素只要属于 F_n 的像，也属于绝对弗罗贝尼乌斯映射 $R_n^+/\varpi \to R_n^+/\varpi$的像，因此它有一个 p次根。 R_∞^+/ϖ中的每个元素都来自有限层，所以它们都通过某个相对 Frobenius 映射分解。因此，它们都有 p次根，故绝对 Frobenius 是满射，正如所需。

根据 [SW13，命题 2.4，5], 任意逆系统至多有一个完美体波浪极限（尽管它可能有多个波浪极限），因此 X_∞ 是 F-塔 $\{\mathfrak{X}_n\}$的唯一完美体波浪极限。□

例 2.4.3. 设 $\mathbb{P}^1_K$ 为射影直线的解析化。沿边界圆将 Spf($K^\circ\langle T\rangle$) 与 Spf($K^\circ\langle T^{-1}\rangle$) 粘合，即可得到一个形式模型。将 $T \mapsto T^p$ 和 $T^{-1} \mapsto T^{-p}$ 映过去的形式模型之间的映射模 ϖ 约化为相对 Frobenius，并满足定义 2.4.1 的所有条件。因此，我们可以迭代此映射，得到一个 F-塔 $\mathbb{P}^1_K$。这对应于沿完美体单位圆粘合两个完美体闭单位圆盘 Spa($K\langle T^{1/p^\infty}\rangle$, $K^\circ\langle T^{1/p^\infty}\rangle$) 和 Spa($K\langle T^{-1/p^\infty}\rangle$, $K^\circ\langle T^{-1/p^\infty}\rangle$)（如例 2.3.5 所示）。在点上，这相当于迭代映射 $(z_0 : z_1) \mapsto (z_0^p : z_1^p)$。如 Sch12 第 8] 节所述，这种构造更一般地适用于环面簇。

记号 2.4.4. 在本文中，我们将应用这一构造来构造各种刚性解析群的 F-塔 $G_\circ$。在这种情况下，在一般纤维上，我们的逆系统总是由反复迭代乘法映射 $[p] : G \to G$ 得到的。因此，我们将塔的第 n 个过渡映射记为 $[\mathfrak{p}]_n : \mathfrak{G}_{n+1} \to \mathfrak{G}_n$。但请注意，形式模型通常并不是群概形。

当 G 是具有良约化的阿贝尔簇时，我们可以应用这一形式体系。

例 2.4.5 ([PS16，引理 A。16])。 设 B 是一个在 K 上具有良约化的阿贝尔簇（的解析化），因此存在一个形式阿贝尔概形 $\overline{B}/K^\circ$，其刚性一般纤维为 B。反复迭代乘法映射 $\overline{[p]}$: $\overline{B} \to \overline{B}$ 可得一个 F-塔。特别地，$\sim$模 ϖ 特殊纤维是一个特征为 p 的阿贝尔概形，因此映射 $[p]$ 分解为 Frobenius 和 Verschiebung。由此我们得到一个完美拟覆盖 $B_\infty \sim \lim_{\longleftarrow [p]} B_\circ$。

我们注意到，这一构造具有函子性，因此 G_∞ 是一个完美体群。

命题 2.4.6 ([BGH+18，引理 2。10])。设 G 是一个刚性交换群，具有一个完美拟覆盖 $G_\infty \sim \lim_{\longleftarrow [p]} G_\circ$。则存在唯一的方法，使 G_∞ 成为完美空间范畴中的群对象，且所有投影 $G_\infty \to G$ 都是群同态。给定另一个刚性群 H 及其完美体波浪极限 $H_\infty \sim \lim_{\longleftarrow [p]} H$，以及一个群同态 $H \to G$，则存在唯一的群同态$H_\infty \to G_\infty$ 与所有投影映射相交换。

证明。由该构造的函子性以及完美体波浪极限的唯一性可直接得到。□

为了在特征 0 和 p之间传递有限层的信息，我们需要理解 F-塔如何与倾斜相互作用。由定理 2.3.6，我们有如下结论：

引理 2.4.7。 设 $\{\mathfrak{X}_n\}$ 是一个 F-塔，对应于刚性空间 X，设 X_∞ 是由命题 X 2.4.2给出的 X_∞ 的完美拟覆盖。则 ϖ 特殊$\widetilde{\text{纤维}}$ $\mathfrak{X}_\infty$ 可重构 F-塔。

证明。 倾斜等价 [Sch12，定理 52] 给出了完美对象 K-代数与完美对象 $K^{\circ a}/\varpi$-代数之间的范畴等价，其中 a 表示我们处于几乎数学的范畴中，正如 [GR03]所述。用于构造 K°/ϖ-~代数的实际 $\mathfrak{X}_\infty$ 给出 $K^{\circ a}/\varpi$-代数；在范畴等价下，它们提升为 K-代数。根据 [Sch12，命题 617], ，这一过程可以粘合，因此我们得到了所需的重构。 □

这意味着不同的阿贝尔簇将具有相同的完美对象覆盖，我们将在第5 节中利用这一事实来倾斜线丛。更多详情见 [Heu21b]。

例 2.4.8. 设 B 和 B' 是 K上的具有良约化的阿贝尔簇，设$\overline{B}$ 和$\overline{B}'$ 是相应的 K°上的形式阿贝尔概形，设 B_∞ 和 B'_∞ 是例2.4.5中构造的完美对象覆盖。若 $\overline{B} \times_{K^\circ} K^\circ/\varpi \simeq \overline{B}' \times_{K^\circ} K^\circ/\varpi$，则有$B_\infty \simeq B'_\infty$。

通过在 $K^\flat$上构造一个适当的F-塔，我们可以据此理解 X 的完美拟覆盖的倾斜。

~引理 2.4.9. 设 $\{\mathfrak{X}_n\}$ 是刚性空间 X的一个 F-塔，令 $\{\mathfrak{X}_n\}$ 表示该塔模 ϖ的特殊纤维，设 X_∞ 是命题 2.4.2 给出的 X 的完美拟覆盖。设 $\{\mathfrak{X}'_n\}$ 是 $K^\flat$上的刚性空间 X' 的一个 F-塔，令 $\{\widetilde{\mathfrak{X}}'_n\}$ 表示该塔模 $\varpi^\flat$ 的特殊纤维，设 X'_∞ 是命题 2.4.2 给出的 X' 的完美拟覆盖。若同构$K^\circ/\varpi \cong K^{\flat\circ}/\varpi^\flat$ 诱导了这两个F-塔的特殊纤维之间的同构，则 $(X_\infty)^\flat \cong (X'_\infty)$。

证明。 这直接由定理 2.3.6 和引理2.4.7得出。参见 [Sch15，第 III.2 节。3] 其中给出了在 Shimura簇 情形下使用这一方法的例子。 □

问题 2.4.10. 刚性空间 X 是否普遍存在可容许 F-塔，目前尚不清楚。给定一个在 K 上的 F-塔，通常能否构造一个在 $K^\flat$ 上具有同构特殊纤维的 F-塔，也尚不清楚。本文针对阿贝尔簇（以及过程中涉及的其他一些群概形）回答了这些问题。回答更一般的簇的这些问题，应能使我们证明更多情形下的权重-单值猜想。

稍后我们还需要两个结果：

引理 2.4.11 （[BGH+18，引理 2.8]） 。设 (A_i,A_i^+) 和 (B_i, B_i^+) 是 (K, K°) 上仿射子域的直系统，其定义环相容，且带有 ϖ-进拓扑。若存在完美体波浪极限 $\mathrm{Spa}(A, A^+) \sim \varprojlim \mathrm{Spa}(A_i, A_i^+)$ 和 $\mathrm{Spa}(B, B^+) \sim \varprojlim \mathrm{Spa}(B_i, B_i^+)$，则

$$\mathrm{Spa}(A, A^+) \times_{\mathrm{Spa}(K,K^\circ)} \mathrm{Spa}(B, B^+) \sim \varprojlim (\mathrm{Spa}(A_i, A_i^+) \times_{\mathrm{Spa}(K,K^\circ)} \mathrm{Spa}(B_i, B_i^+))$$

也是一个完美体波浪极限。

命题 2.4.12 （ [She17，推论 2.3.5]）。设 L/K 是完美空间域的有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G。设 X_i 是 $\mathrm{Spa}(K,K^\circ)$ 上拟紧绝对值空间的滤过逆系统，且过渡映射有限；设 $X_{L,\,i}$ 是将 X_i 基变换至 $\mathrm{Spa}(L,L^\circ)$ 所得。假设存在 $\mathrm{Spa}(L,L^\circ)$ 上的完美空间 $X_{L,\,\infty}$，使得 $X_{L,\,\infty}\sim\varprojlim X_{L,\,i}$。则存在 $\mathrm{Spa}(K,K^\circ)$ 上的完美空间 X_∞，使得 $X_\infty\sim\varprojlim X_i$。

3. Perfectoid covers of abeloids

设 K 是一个赋值群为 $\Gamma=|K^\times|$ 且满足 $\Gamma\subset\mathbb{Q}$的完美拟域。例如，当 K 是 $\mathbb{C}_p$的完美子域时，这一条件成立。本节给出 [BGH+18]主定理的另一种证明：对于任意一个 A 上的阿贝洛簇 K，构造一个完美空间 $A_\infty\sim\varprojlim_{[p]}A$。这里我们概述证明思路。

经过 K的有限扩张后，我们可以根据定理 A 将 E/M 一致化为一个商 E，其中 2.2.4是一个 Raynaud 扩张。由命题 2.4.12可知，我们可以在这次扩张后构造完美拟覆盖，再将其下降，从而得到所需的覆盖。我们按照定义 构造一个 2.4.1 中所述的环面部分 T 的 E-塔，然后利用它为 F构造一个 E-塔，从而得到完美空间 $E_\infty\sim\varprojlim_{[p]}E$。我们选择的形式模型都带有 M的相容作用，因此可以对这一作用取商，得到 A的形式模型，并证明它们构成一个 F-塔，且其极限为 A。

为了构造秩为 T 的分裂环面的模型 r，我们使用由环域乘积构成的形式解析覆盖，对例 2.1.5作推广。条件 $\Gamma\subset\mathbb{Q}$ 保证只要选取足够小的环域，就能将 M 在 T 上的作用延拓到形式解析覆盖上。为了从 T 的模型过渡到 E的模型，我们按照图表 2.2.2取推出。这样做会保留格作用，从而可以对 M 的作用取商，得到所需的 A模型。

我们指出，可以运用热带几何中的技巧——即刚性环面中多面体域的理论，如 [Gub07] 所述——来获得更一般的环面模型（进而得到阿贝尔簇的模型）。更多参考文献及这一构造的细节，参见 [Wea20第 3] 章。结合多面体域理论与 [BGH+18]的证明，可以构造任意完美拟域 K上的阿贝尔簇完美覆盖。不过，这不会得到 A的形式模型，而这正是第 4节所必需的，因此这里不再详述。

3.1. 环面的形式模型。

设 T 是一个定义在 K 上、秩为 r 的分裂刚性解析环面，因此 $T\cong(\mathbb{G}_{m,an})^r$。设 M 是 T 中秩为 r 的格，如定义 2.2.3 所述：也就是说，对数映射 $\ell\colon T(K)\to\mathbb{R}^r$ 将 M 双射到一个格 Λ。固定 $T=\mathbb{G}_{m,an}^r$ 上的坐标 x_1、……、x_r，以及 $\mathbb{R}^r$ 上的坐标 u_1、……、u_r，使得对数映射将 x_i 映到 u_i。

在本小节中，我们构造一个 F-塔 $\{\mathfrak{T}_n\}$，使得 M 在 T 上的平移作用可扩展为对每个 $\mathfrak{T}_n$ 的作用，并且这些作用与态射 $[\mathfrak{p}]_n$ 相容。这将使我们能够为 T/M 构造一个 F-塔，不过我们将等到下一节，在 Raynaud 扩张这一更一般的情形下进行构造。

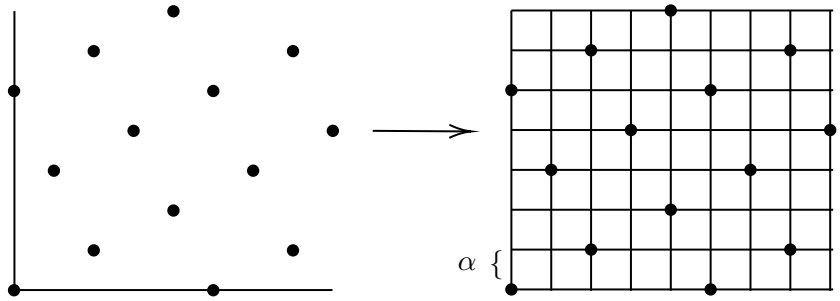


FIGURE 3.1.1. 构造将格划分为 $\mathbb{R}^2$的超立方体分解。

定义 3.1.1。对任意 $y \in K^\times$，令 $c := |y|$ 以及 $\alpha =: \ell(y) := -\log(c) > 0$。我们通过取例*2.1.5*中的形式模型的乘积，得到 $\mathfrak{T}_\alpha$ 的形式模型 $\mathbb{G}^r_{m,\,K}$。相应的形式解析覆盖对应于将 $\mathbb{R}^r$ 分解为边长为 α 的超立方体。

更精确地说，设 $\Delta_\alpha = [0,\alpha]^r \subset \mathbb{R}^r$。原像 $\ell^{-1}(\Delta_\alpha)$是 $\mathsf{An}(c,1)^r$。对于任意元组 $\mathbf{e} = (e_1,\dots,e_r) \in \mathbb{Z}^r$，平移 $\mathbf{e}\Delta_\alpha \subset \mathbb{R}^r$ 的原像为$U_{\mathbf{e}\Delta_\alpha} := \mathsf{An}(c^{e_1+1}, c^{e_1}) \times \cdots \times \mathsf{An}(c^{e_r+1}, c^{e_r})$。这些多重环域构成$\mathbb{G}^r_{m,\,K}$的形式解析覆盖，并由此得到形式模型 $\mathfrak{T}_\alpha$。

在我们的情形中，我们希望得到 T 的形式模型，使得对于所有格元素 $m \in M$，平移态射 $\tau_m : T \to T$都能延拓到该形式模型上。在 $\mathbb{R}^r$上，这些映射对 $\lambda \in \Lambda$诱导出平移映射 $+\lambda : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$。因此，我们将注意力限制在由这些平移作用保持不变的 $\mathbb{R}^r$ 的超立方体分解上。

定义 3.1.2. 给定一个格 $\Lambda \subset \mathbb{R}^r$，我们称 $\alpha \in \mathbb{R}$ 整除 Λ，如果 $\Lambda \subset \alpha\mathbb{Z}^r$。

若 $\Lambda \subset \mathbb{Q}^r$，我们总能找到 α 整除 Λ，只需令 α 等于 Λ任意一组生成元的分母的最大公因数的倒数。参见图 3.1.1，可视化这一过程。

我们得出：

命题 3.1.3. M 在 T 上的作用可延拓到形式模型 $\mathfrak{T}_\alpha$，只要 α 整除格 $\ell(M) = \Lambda \subset \mathbb{R}^r$。

任何这样的模型都会导出一个 T/M 的模型，方法是将我们覆盖中的任意开集 U_Δ 与开集 $U_{\lambda+\Delta}$ 对所有 $\lambda \in \Lambda$进行识别。示例见图 3.1.2 。

例 3.1.4. 例 $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$ 中 $|q| = c$ 的 Tate 曲线构造 2.2.6对应于将 $\mathbb{R}$ 分解为长度为 $c/2$的区间。参见图 3.1.3。

这些模型与乘以 p 映射相容，具体如下：

命题 3.1.5. 态射 $[p] : T \to T$ 可延拓为形式模型的态射 $[\mathfrak{p}]_n : \mathfrak{T}_{\alpha/p} \to \mathfrak{T}_\alpha$。该态射模 ϖ 约化后为相对 Frobenius：存在一个典范的

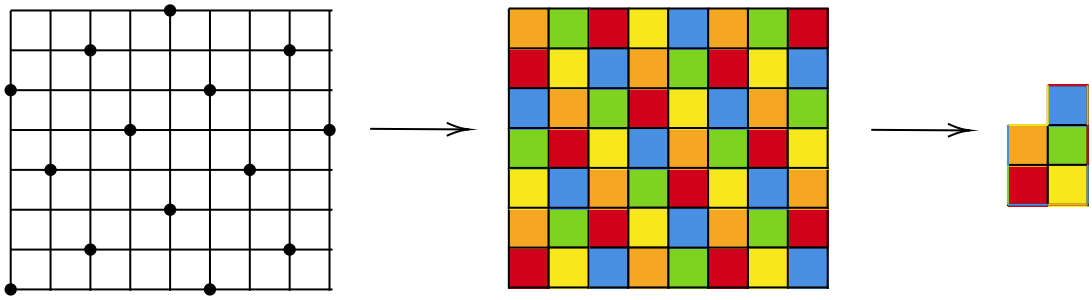


FIGURE 3.1.2. 将图3.1.1 中的分解按格取商，可将同色的正方形对应起来。超立方体分解给出了形式解析覆盖，因此得到一个 T/M 的模型，如命题3.1.3所述。

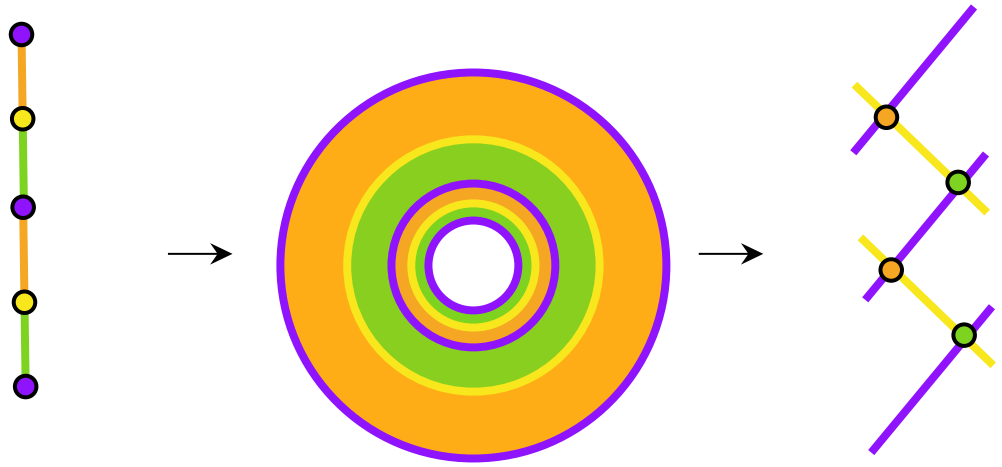


FIGURE 3.1.3. 左：与 Tate 曲线对应的 $\mathbb{R}$ 分解。中： $\mathbb{G}_m$对应的形式仿射覆盖。右：对应形式模型的特殊纤维。

同构 $\widetilde{\mathfrak{T}}_\alpha \cong \widetilde{\mathfrak{T}}^{(p)}_{\alpha/p}$，在此同一化下， $[\mathfrak{p}]_n$ 的约化为相对 Frobenius。

证明。这由[Gub07，命题 6.4a]，得出，其中表明 $[p]$可延拓到 $[\mathfrak{p}]_n$，并将超立方体上的态射局部描述为态射$U_{\Delta_{\alpha/p}} \to U_{\Delta_\alpha}$，它将$x_i \mapsto x_i^p$ 映至。□

推论 3.1.6. 数据 $\{\mathfrak{T}_{\alpha/p^n}\}$ 是 F 在 T 上的塔，因此产生一个完美空间 $T_\infty \sim \lim_{\longleftarrow [p]} T$。

我们注意到，这个塔中的所有模型都已定义在 K° 上（也就是说，无需扩张域），因为 K 的完美性意味着 $|K^\times|$ 是 p-可除的。形式环面 $\overline{T}_\eta$ （记号 2.2.1 中所述）的一般纤维对应于多重环带 $U_{\{0\}} \subset T$。因此，$\overline{T}$ 在 T 上的平移作用诱导出 $\mathbb{R}^r$ 上的零平移，故其保持任意超立方体分解不变。由此得到：

命题 3.1.7。 对于任意 $n \geq 1$，作用 $\overline{T}_\eta \times T \to T$ 可延拓为形式模型上的态射 $\overline{T} \times \mathfrak{T}_{\alpha/p^n} \to \mathfrak{T}_{\alpha/p^n}$。此作用与命题 $[p]$ 中的模型相容，*3.1.5* 即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \overline{T} \times \mathfrak{T}_{\alpha/p^{n+1}} & \longrightarrow & \mathfrak{T}_{\alpha/p^{n+1}} \\ \downarrow{\scriptstyle [p]\times[\mathfrak{p}]_n} & & \downarrow{\scriptstyle [\mathfrak{p}]_n} \\ \overline{T} \times \mathfrak{T}_{\alpha/p^n} & \longrightarrow & \mathfrak{T}_{\alpha/p^n}. \end{array}$$

证明。在一般纤维上，所有映射都有良好定义，且根据定义图表交换。在特殊纤维上，$\overline{T}$ 的作用是平凡的，因此由函子性可知图表交换。□

3.2. 阿贝洛簇的形式模型。 设 A 是定义在 K上的阿贝洛簇。根据定理2.2.5，经过 K的适当有限可分扩张后，存在一个 Raynaud 扩张

$$1 \to T \to E \xrightarrow{\pi} B \to 1 \tag{3.2.1}$$

以及一个满秩格 $M \subset E(K)$，使得 $A \cong E/M$。根据命题 2.4.12，如果我们在 A 的有限伽罗瓦扩张后构造一个完美体波浪极限 K，那么就可以下降，从而在 K上得到所需的完美体波浪极限。因此，我们可以假设 Raynaud 扩张和格已定义在 K上。

根据定义 2.2.3， M 在对数映射下的像是 Λ 中的一个格 $\mathbb{R}^r$。本节中，我们使用第 T 3.1 节构造的 T 形式模型 T 来构造 E 的形式模型，使其保留 M的作用。对该作用取商后，我们得到 A的形式模型，并用它们构造 F-塔 A。

回顾第 2.2 节， E 是作为推出构造的 $T \times^{\overline{T}_\eta} \overline{E}_\eta$。我们将 E 的模型构造成我们 T模型的推出 T。

命题 3.2.1。 设 α 是整除 Λ 的有理数，如定义 *3.1.2*所述。对任意整数 $n > 1$，令 $\mathfrak{T}_{\alpha/p^n}$ 为定义 *3.1.1*中对应的 T 模型。

(1) 形式概形 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n} := \mathfrak{T}_{\alpha/p^n} \times^{\overline{T}} \overline{E}$ 是刚性空间 E 的平坦形式模型。(2) 存在一个态射 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n} \to \overline{B}$ ，它是纤维丛，也是 $E \to B$ 的形式模型。(3) 对任意整数 $n > 1$，存在一个仿射态射 $[\mathfrak{p}]_n : \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n+1}} \to \mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ ，它是 $[p] : E \to E$ 的形式模型，且模 ϖ 约化后经由相对 Frobenius 分解。

因此，我们得到一个用于 E 的 F-塔 $\{\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}\}$，从而得到完美空间 $E_\infty \sim \varprojlim_{[p]} E$.

证明。 结合命题 3.1.5 和3.1.7 以及关于纤维丛的标准结果，并将其推广到 adic 空间范畴，即可得到此结论。这里不作详细说明，因为我们将在命题 3.2.2中更明确地证明这一切，但我们想指出，这一结果也可以通过更抽象的方法得到。

□

这些模型 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ 带有一个 M的作用，从而得到 A 的模型，并由此导出一个F-塔，用于 A。为此，我们显式构造 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ 的形式解析覆盖，并应用命题 2.1.3 证明这些覆盖导出了所需的模型。形式解析覆盖的具体要求总结如下:

命题 3.2.2。 对于每个整数 $n \geq 1$，都存在一个形式解析覆盖（定义 2.1.2意义下的）$\mathcal{U}_n = \{U_{i,n}\}_{i\in I_n}$，其覆盖 E，使得:

(1) 与 $\mathcal{U}_n$ 对应的 E 的形式模型是 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$。(2) 对所有 $m \in M$ 和 U_i，若 $_n$ 属于 $\mathcal{U}_n$，则存在某些 U_j、$_n$ 属于 $\mathcal{U}_n$，使得平移映射 $\tau_m : E \to E$ 限制为同构 U_i、$_n \to U_j$、$_n$。若 m 不是恒等元，则 U_i、$_n \cap U_j$、$_n = \emptyset$。(3) 对所有 $n \geq 1$ 和 U_i，若 $_{n+1}$ 属于 $\mathcal{U}_{n+1}$，则存在某些 U_j、$_n$ 属于 $\mathcal{U}_n$，使得映射$[p]$: $E \to E$ 限制为态射 U_i、$_{n+1} \to U_j$、$_n$。此外，该态射模 ϖ 约化经由相对 Frobenius 分解。

证明。我们首先构造覆盖 $\mathcal{U}_1$。映射 $\pi : E \to B$ 将每个 $m \in M$ 映到一个点$b_m \in B(K)$，该点可延拓为一个点 $\overline{b}_m \in \overline{B}(K^\circ)$。由于 $\overline{B}$ 是形式阿贝尔概形，我们得到一个同构 $\times\overline{b}_m : \overline{B} \to \overline{B}$。选取 $\overline{B}$ 的一个形式开覆盖 $\{\overline{V}_{j,1}\}$，使得对任意 $m \in M$，态射 $\times\overline{b}_m$ 都置换这些 $\overline{V}_j$,1。注意，只需选取 M 的生成元 m_1、 ..... 、 m_r，并确保相应的态射置换 $\overline{V}_j$,1。取一般纤维后，我们得到 B 的一个仿射概形覆盖；对任意 $m \in M$，该覆盖在乘以 b_m 的作用下保持不变。如有需要，对覆盖作细化后，可假设 π 在该覆盖上分裂，因此 E 局部具有 $T \times V_j$,1 的形式。现在，我们可以定义 E 的覆盖 $\mathcal{U}_1$，使其包含所有形如 $U_{\mathrm{e}\Delta_\alpha} \times V_j$,1 的开集，其中 $U_{\mathrm{e}\Delta_\alpha}$ 如定义 3.1.1 所述，且 V_j,1 属于我们的 B 覆盖。

现在构造 $\mathcal{U}_n$，我们首先用态射 $[p^n] : B \to B$ 下仿射刚开集$V_{j,\ 1}$的原像$V_{j,\ n}$ 覆盖 B。这仍是由态射 τ_{b_m}置换的仿射刚开集对 B 的一个覆盖。反复应用以下引理可知， π 在每个$V_{j,\ n}$上也分裂。

引理 3.2.3. 设 $\{V_j\}$ 是阿贝尔簇 B 的一个形式解析覆盖，且映射 $\pi : E \to B$ 在该覆盖上分裂。那么 π 也在覆盖 $\{[p]^{-1}(V_j)\}$上分裂。

证明。 参见[BGH+18命题 3 证明的后半部分。8]。 □

现在，我们定义 $\mathcal{U}_n$ of E 的覆盖，使其包含所有形如 $U_{\mathrm{e}\Delta_\alpha/p^n} \times V_{j,\ n}$ 的开集。注意，$\mathcal{U}_n$ 都是形式解析覆盖，因为每个开集都是形式概形中开集的乘积

解析覆盖 T 和 B。第（1）部分成立，因为覆盖 $\mathcal{U}_n$ 的构造使得相应的仿射形式概形是 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ 的子概形。

对于第（2）部分，我们看到 $\tau_m:\ E\to E$ 限制后是一个同构

$$\tau_m : U_{\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^n}\times V_{j,n}\xrightarrow{\simeq} U_{\ell(m)+\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^n}\tau_{b_m}V_{j,n},$$

且目标仍是 $\mathcal{U}_n$ 中的一个开集，因为 $p^n\ell(m)+\lambda\in\Lambda$ 和 $b_mV_{j,\ n}$ 仍属于我们对 B 的覆盖。若 m 不是恒等元，则超立方体 $\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^n$ 和 $\ell(m)+\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^n$ 不相交，因此 T 的相应开子集也不相交，进而 E 也不相交。

对于第（3）部分，我们看到 $[p]:\ E\to E$ 限制后是一个态射

$$[p] : U_{\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^n}\times V_{j,n}\to U_{\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^{n-1}}\times V_{j,n-1}$$

因为乘以 p 会将超立方体按比例缩放$\mathbf{e}\Delta_\alpha/p^n$，且我们选择了 B 的覆盖，使得 $[p](V_{j,n})=V_{j,n-1}$。因此，目标是 $\mathcal{U}_{n-1}$ 中的一个开集，正如所需。为证明约化可经由相对 Frobenius 分解，我们对环面部分使用命题 3.1.5 ，对阿贝尔部分使用例 2.4.5 。□

下面的定理现在可直接得出。

定理 3.2.4. 对每个整数 $n\geq 1$，令 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ 为命题3.2.1中构造的 E 模型。则

(1) 对每个 $m\in M$ 和 $n\geq 1$，态射 $\tau_m:\ E\to E$ 可延拓为态射$\tau_{\mathfrak{m}}:\ \mathfrak{E}_{\alpha/p^n}\to\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$。(2) 将 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ 对 M 在（1）中定义的作用取商，可得到模型$\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$，它们是 A 的模型，并且解析商映射 $E\to A$ 可延拓为模型之间的映射$\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}\to\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$。(3) 在（1）中的模型与命题 3.2.1 中的模型相容，因为交换图表

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau_m} & E \\ {\scriptstyle [p]}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [p]} \\ E & \xrightarrow{\tau_m^p} & E \end{array}$$

可延拓为交换图表

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n+1}} & \xrightarrow{\tau_{\mathfrak{m}}} & \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n+1}} \\ {\scriptstyle [\mathfrak{p}]_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [\mathfrak{p}]_n} \\ \mathfrak{E}_{\alpha/p^n} & \xrightarrow{\tau_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}} & \mathfrak{E}_{\alpha/p^n}. \end{array}$$

(4) $[p]:E\to E$ 的模型诱导出 $[p]:A\to A$ 的模型，因为交换图

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle [p]} & & \downarrow{\scriptstyle [p]} \\ E & \longrightarrow & A \end{array}$$

可延拓为形式模型的交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n+1}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{\alpha/p^{n+1}} \\ \downarrow{\scriptstyle [\mathfrak{p}]_n} & & \downarrow{\scriptstyle [\mathfrak{p}]_n} \\ \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{\alpha/p^{n}}. \end{array}$$

(5) $[\mathfrak{p}]_n$ 的模 ϖ 约化：$\mathfrak{A}_{\alpha/p^{n+1}} \to \mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$ 可经由相对 Frobenius 分解。

证明。第 (1)、(3) 和 (4) 部分都是命题 3.2.2 和命题 2.1.3 的形式推论，只需验证所涉及的所有映射都保持形式解析覆盖的数据。第 (2) 部分中的模型 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$ 由 A 的形式解析覆盖构造而成，该覆盖利用平移映射 $\tau_m : E \to E$ 来识别$\mathcal{U}_n$ 中映到 A同一位置的开集U_i、$_n$。对于第 (5) 部分，我们注意到，$[\mathfrak{p}]_n : \mathfrak{A}_{\alpha/p^{n+1}} \to \mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$在源空间上局部等同于 $[\mathfrak{p}]_n : \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n+1}} \to \mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$，而后一个映射可经由相对 Frobenius 分解。□

重述上述定理，我们便得到了 [BGH+18] 的主定理。

定理 3.2.5。我们有一个用于 A 的 F-塔 $\{\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}\}$，从而得到一个完美空间 $A_\infty \sim \varprojlim_{[p]} A$.

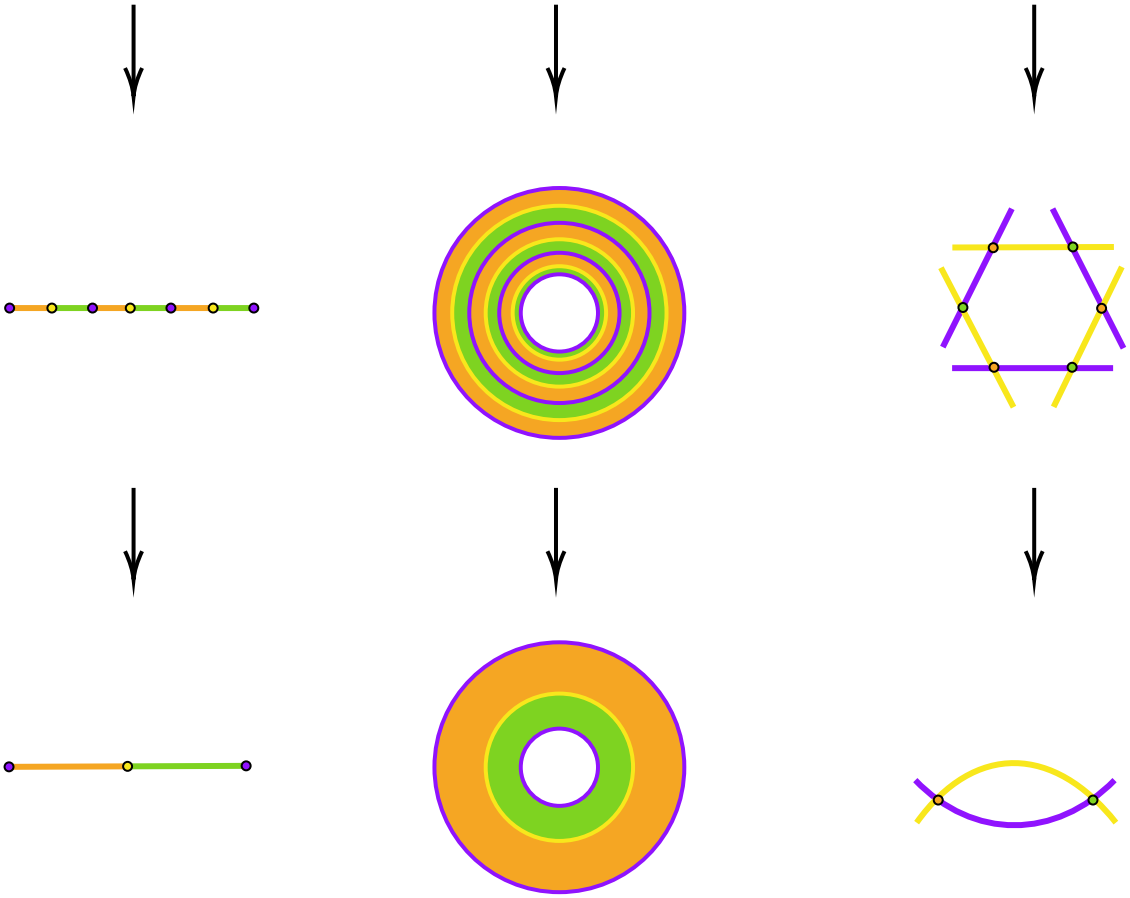


FIGURE 3.2.1. Tate 曲线的 F塔的前两层，扩展了图 2.2.1。左：由推论 3.1.6 中的分解取商 $c^{\mathbb{Z}}$得到的 $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$的超立方体分解塔。中：相应的 $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$形式仿射覆盖塔。右：相应的特殊纤维塔。这些映射保持着色，因此橙色环域的原像是三个互不相交的橙色环域，而特殊纤维上的紫色 $\mathbb{P}^1$ 的原像是上方三个互不相交的紫色 $\mathbb{P}^1$。

4. Tilting perfectoid covers of abeloids

我们继续假设 K 是赋值群为 $\Gamma \subset \mathbb{Q}$ 的完美拟域。给定一个定义在 K 上的阿贝洛簇 A，我们在定理 3.2.5 中为 A 构造了一个 F-塔，从而得到 A 的完美拟覆盖 A_∞。本节中，在对 K 取一个 pro-p 扩张之后，我们构造一个定义在 $K^\flat$ 上的阿贝洛簇 A'，使得相应的完美拟覆盖 $(A')_\infty$ 是 A_∞ 的倾斜 $A_\infty^\flat$。由引理 2.4.9 可知，如果一个完美空间是利用 K° 上的一个 F- 塔构造的，那么它的倾斜可以利用 $K^{\flat\circ}$ 上的一个 F- 塔构造，使得同构 $K^\circ/\varpi \cong K^{\flat\circ}/\varpi^\flat$ 诱导这两个 F-塔的特殊纤维之间的同构。

为了构造 A'，我们首先利用阿贝尔簇的变形理论构造一个 Raynaud 扩张 E'，使其位于 $K^\flat$ 之上，并且 $\overline{E}$ 与 $\overline{E}'$ 的特殊纤维相同。这意味着 $E_\infty^\flat = E'_\infty$。选取 M 的一组相容的 p 次根，便得到一个子群 $M_\infty \subset E_\infty(K)$。这正是我们需要 K 的 pro-p 扩张之处。这个子群倾斜为子群 $(M_\infty)^\flat \subset E_\infty^\flat(K^\flat) = E'_\infty(K^\flat)$，我们证明它向下投影到一个格 $M' \subset E'(K^\flat)$。取商后，我们得到所需的（非唯一的）阿贝洛簇$A' := E'/M'$。

在 [HW], 中，我们给出一种 A' 别具一格的构造，沿用 [BGH+18] 的思路，并解释其与 [Sch15] 的完美拟志村簇之间的关系。

4.1. 雷诺扩张的变形理论。 设 E 是一个定义在K上的 Raynaud 扩张。回顾第 2.2 节，这等价于定义在 K°上的形式群的一个严格正合序列。

$$1 \to \overline{T} \to \overline{E} \xrightarrow{\overline{\pi}} \overline{B} \to 1. \tag{4.1.1}$$

本节结合 Illusie 的变形理论结果与 Grothendieck 的一个定理，构造一个非唯一的 Raynaud 扩张 E'，使其定义在 $K^\flat$ 上，并且该序列（ϖ 4.1.1）模特殊纤维同构于 $\varpi^\flat$ 对应的序列在 E'上的模特殊纤维。

~命题 4.1.1。设 E 是定义在 Spec(K°/ϖ) 上的半阿贝尔概形。那么存在一个定义在 Spf(K°) 上的~半阿贝尔形式概形 $\overline{E}$，其模 ϖ 特殊纤维为 E。

证明。给定定义在 Spec(K°/ϖ) 上的群概形正合序列

$$1 \to \widetilde{T} \to \widetilde{E} \to \widetilde{B} \to 1,$$

~ ~ ~ ~我们将 E 通过先将 T 和 B变形。分裂环面 T 提升为形式环面~$\overline{T} \cong \mathbb{G}_{m,\,K^\circ}^r$。为了将 B 提升为形式阿贝尔概形$\overline{B}$，我们采用 [Oor71 定理 2.2 的论证，1], 但将其使用的余切丛 Θ_{X_0} 替换为 [Ill71] 或 [Sta20，标签 08P5]中定义的余切复形。

~剩下的工作是将 E提升为 Ext($\overline{B},\overline{T}$) 的一个元素 $\overline{E}$。根据 [L¨ut16，定理 A.2，8], Ext($\overline{B},\overline{T}$) 与 $(\overline{B}^\vee)^r$ 的 K°-值点集有典范同构，其中 $\overline{B}^\vee$ 是 $\overline{B}$ 的对偶~ ~阿贝尔概形。类似地, Ext(B,T) 与 $(B^\vee)^r$ 的 K°/ϖ-~值点集有典范同构。在这些同构下，约化映射 Ext($\overline{B},\overline{T}$) →

~ ~Ext(B,T) 是约化映射

$$\overline{B}^{\vee}(K^{\circ})^{r} \to \overline{B}^{\vee}(K^{\circ}/\varpi)^{r} \cong \widetilde{B}^{\vee}(K^{\circ}/\varpi)^{r}.$$

~由于此映射是满射，每个半阿贝尔 K°/ϖ簇 E 都能提升到一个形式半阿贝尔K°簇 $\overline{E}$。□

特别地，若我们从一个 E 上的 KRaynaud 扩张出发，就可以将其模ϖ 约化 $\widetilde{E}$ 视为 $\overline{E}$ 上的半阿贝尔概形。 $K^{\flat\circ}/\varpi^{\flat}$应用命题 4.1.1，我们将 $\widetilde{E}$ 变形为一个形式概形 $\overline{E'}$ ，该形式概形对应于一个 E' 上的 Raynaud 扩张 $K^{\flat}$。

定理 4.1.2. 按照前一段中的定义，设 E 和 E' ，则有 $E^{\flat}_{\infty}$ ≅$(E')_{\infty}$。

证明。由于$\overline{E}$ 和 $\overline{E'}$ 具有相同的特殊纤维， E 和 E'的环面部分 T 和 T' 必有相同的秩 r。因此， E/K 和 $E'/K^{\flat}$ 的对数映射 ℓ 和 ℓ' 都映到 $\mathbb{R}^{r}$。由于倾斜等价将赋值群 $|K^{\times}|$ 和 $|(K^{\flat})^{\times}|$对应起来， ℓ 和 ℓ' 在 $\mathbb{R}^{r}$ 中的像相同。因此，我们可以利用由同一格 Λ 构造的模型 $\mathfrak{E}'_{\alpha/p^{n}}$ ，为 E' 定义一个 F-塔；该格 Λ 和 α 均除以定义 3.1.1 中的 Λ ，正如我们对 E所用的那样。

这个 F-塔定义了 E' 的完美拟覆盖 $(E')_{\infty}$ 。根据引理 2.4.9，只需证明这个 F-塔的模 $\varpi^{\flat}$ 特殊纤维与命题 3.2.1 中构造的 F-塔的模 ϖ 特殊纤维同构。回忆一下，模型 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^{n}}$ 是通过推出 $\mathfrak{T}_{\alpha/p^{n}} \times^{\overline{T}} \overline{E}$ 定义的，而态射 $[\mathfrak{p}]_{n}$： $\mathfrak{E}_{\alpha/p^{n+1}} \to \mathfrak{E}_{\alpha/p^{n}}$ 由态射 $[\mathfrak{p}]_{n}$: $\mathfrak{T}_{\alpha/p^{n+1}} \to \mathfrak{T}_{\alpha/p^{n}}$、 $[p]:\overline{T} \to \overline{T}$ 和 $[p]$: $\overline{E} \to \overline{E}$ 确定。此外，这一构造与约化到模 ϖ 特殊纤维相容，因此只需检验这些态射的特殊纤维与$K^{\flat}$ 侧上的相应态射一致。

$\overline{T}$ 的模 ϖ 特殊纤维是 K°/ϖ 上秩为 r 的分裂环面，而 $\overline{T'}$ 的模 ϖ 特殊纤维是 $K^{\flat\circ}/\varpi^{\flat}$ 上秩为 r 的分裂环面。由于 $K^{\circ}/\varpi \cong K^{\flat\circ}/\varpi^{\flat}$，这些环面同构，并且$\overline{T}$ 和 $\overline{T'}$ 上乘以 p 的映射在特殊纤维上都约化为乘以 p 的映射，因此二者也一致。根据假设，$\overline{E}$ 和 $\overline{E'}$ 的特殊纤维也满足同样的结论。

~接下来，我们检验 r 秩的分裂环面 T 上的模型的模 ϖ 特殊纤维 $\mathfrak{T}_{\alpha/p^{n}}$ ，是否与相应的 r秩分裂环面 T' 上的模型的模 $\varpi^{\flat}$ 特殊纤维 $\widetilde{\mathfrak{T}'}_{\alpha/p^{n}}$ 一致。根据第3.1节的构造，这归结为一个简单的检验： K° 和 $K^{\flat,\circ}$ 上的形式环带 An(c^{n+1},c^{n})具有同构的特殊纤维。

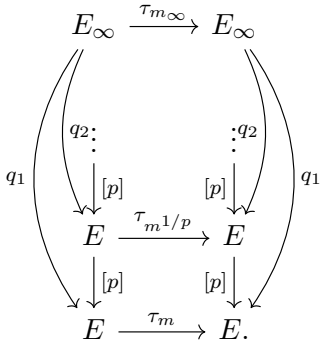
根据命题3.1.5，每个模型上的态射 $[\mathfrak{p}]_{n}$ 的约化都是相对 Frobenius。既然我们知道 K 和 $K^{\flat}$ 上的模型约化一致，便可得出这些态射的约化也一致。□

4.2. 倾斜 F-塔以得到 A。让我们总结目前的进展。给定一个 K 上的阿贝洛簇 A，将其一致化为商 E/M，我们通过构造一个 E 的 F-塔，构造了一个 A 的 F-塔，使得格 M 在 E 上的作用扩展为

对形式塔的作用。接着，我们构造了一个 $K^\flat$ 上的 Raynaud 扩张 E'，以及一个 E' 的 F-塔，使得 E 和 E' 的塔的模 ϖ 与模 $\varpi^\flat$ 特殊纤维相同，这意味着 $E^\flat_\infty \cong (E')_\infty$。在本节中，我们构造一个格 $M' \subset E'$，使得 M' 在 E' 上的作用扩展为对 E' 的形式塔的作用，并且这一作用的模 $\varpi^\flat$ 特殊纤维与 M 在 E 上的作用的模 ϖ 特殊纤维相同。令 $A' := E'/M'$ 为相应的 $K^\flat$ 上的阿贝洛簇，我们得出结论：$A^\flat_\infty \cong (A')_\infty$。

为构造 M'，我们固定格 $M^{1/p^n} \subset E$，使得对任意 $n \geq 1$，映射 $[p]\colon E \to E$限制后给出同构 $M^{1/p^n} \to M^{1/p^{n-1}}$。这等价于固定一个子群$M_\infty \subset E_\infty$，使投影映射 $E_\infty \to E$ 在逆系统底部限制后给出同构 $M_\infty \to M$。这要求我们作一个 pro-p 扩张 K，以确保这些格存在。我们在命题 2.4.6 中指出，E_∞ 是一个完美体群，因此对于点 $m_\infty \in M_\infty$，沿 m_∞ 平移诱导出同构 $\tau_{m_\infty} : E_\infty \to E_\infty$.此映射适合交换图

(4.2.1)



这里所有矩形都是纤维图表，包括顶行含有 E_∞ 的大矩形。因此，我们可以将选择 m 的 p 次方根，视为等价于固定一个同构 $E_\infty \simeq E \times_{\tau_m,\, E} E_\infty$。

根据倾斜等价，所有同构$E_\infty \xrightarrow{\tau_{m_\infty}} E_\infty$ 都对应于态射 $E^\flat_\infty \xrightarrow{\tau^\flat_{m_\infty}} E^\flat_\infty$。这里，$m^\flat_\infty$ 是 m_∞ 在同胚$E_\infty(K) \cong E^\flat_\infty(K^\flat)$下的像。在定理4.1.2中，我们构造了一个 Raynaud 扩张 E'，其定义在 $K^\flat$上，并带有一个同构

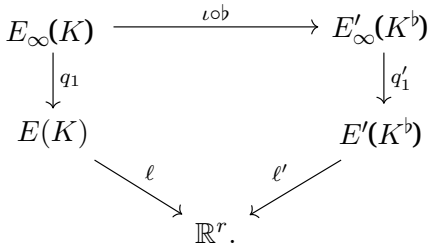
$$\iota : E^\flat_\infty \xrightarrow{\cong} (E')_\infty \sim \varprojlim_{[p]} E'.$$

令 $q' : E'_\infty \to E'$ 为到逆系统底部的诱导映射。现在可以通过沿这些映射追踪 M 来定义 $M' \subset E'$。令 $s_1 : M \to E_\infty$ 表示 $q_1|_M$ 的截面，它将 M 映射到 M_∞。

引理 4.2.1。格 $M \subset E$双射地映到格 $M' := q'_1 \circ \iota \circ \flat \circ s_1(M)$，该格位于 E'中，且满足 $\ell'(M') = \ell(M) \subset \mathbb{R}^r$。

证明。我们断言下图交换：

(4.2.2)



假设这一点成立，由于 $\ell\circ q_1$ 将 M_∞ 双射到 $\Lambda\subset\mathbb{R}^r$，引理显然成立，因此沿相反方向遍历图表时结论也成立。为证明图表的交换性，只需固定 $\mathbb{R}^r$ 中的一个点 c，并证明 $E_\infty(K)$中 c 的原像被映到 $E'_\infty(K^\flat)$中 c 的原像。根据我们的假设， K 的赋值群包含于 $\mathbb{Q}$ 中，因此可假设 c 属于 $\mathbb{Q}^r$。

我们可以细化用于构造 $\mathbb{R}^r$ 的超立方体分解 E_∞，而不改变图表4.2.2：这相当于选择 E和 E'更细的形式解析覆盖，它们对应于特殊纤维上的爆破，而这些爆破在一般纤维上不可见。因此，我们可以回到定义3.1.1，将有理数 α 除以 Λ 替换为某个 α'，其分母更大，并满足 c 是 $\mathbb{R}^r$相应分解的一个顶点。接下来，论证与定理4.1.2中的相同：位于 U_Δ 在 E 的形式覆盖中任意一点之上的完美空间仿射域，其倾斜就是位于 U'_Δ 在 E'的形式覆盖中相应点之上的完美空间仿射域；现在我们可以取 $\Delta=\{\mathbf{c}\}$。□

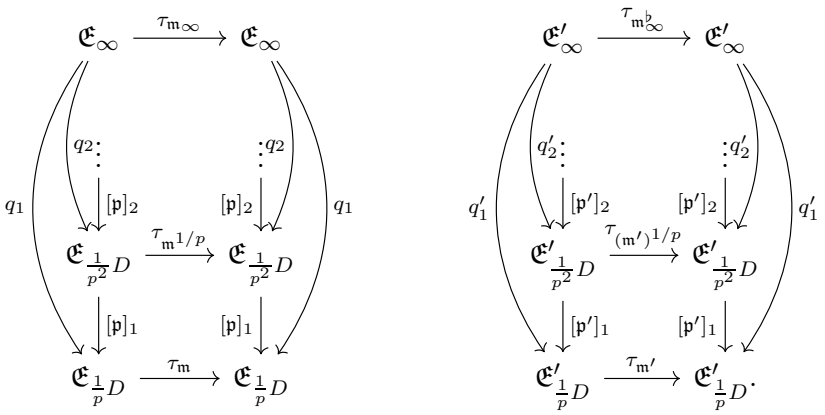
请注意，在上述引理中，固定映射 q_1 and q'_1 直至逆系统的最底层，并使用 $\mathbb{R}$ 的同一个分解来定义 E_∞ 和 E'_∞，这一点至关重要。若不这样做，我们的格 M 和 M' 就会相差一个 p^n 因子。

现在我们可以证明本节的主定理了。

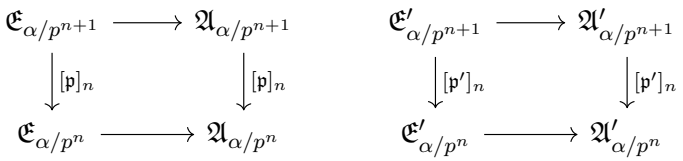
定理 4.2.2（Heuer, W. [HW]）。设 $A=E/M$ 是一个定义在完美拟域 K 上的阿贝洛簇，其赋值群包含于 $\mathbb{Q}$。设 A' 是 $K^\flat$ 上的阿贝洛簇 E'/M'，其中 E' 如定理 4.1.2 所述， M' 如引理 4.2.1 所述，并且是在对 K 作适当的 pro-p 扩张后定义的。按照定理 3.2.5 定义 A_∞ 和 $(A')_\infty$，则有 $A^\flat_\infty\cong(A')_\infty$。

证明。令 m为 M中的一个元素，令 m'为引理 M'中对应的元素，见4.2.1。根据定理3的第（3）部分，图表 4.2.1 以及对应于 m'的类似图表都可以扩展为形式模型的图表

(4.2.3)



我们断言，第一个图表的模 ϖ 特殊纤维与第二个图表的模 $\varpi^\flat$ 特殊纤维同构。由倾斜等价可知，对于映射 $\times\mathfrak{m}_\infty$和 $\times\mathfrak{m}_\infty^\flat$，此结论成立。根据构造，对所有竖直映射，此结论也成立。由于所有方块都是纤维图表，我们得出，其他所有水平映射也必然满足此结论。特别地，由于对于所有 $M' \subset M'^{1/p^n}$，都有 n，因此 M'在每个 $\mathfrak{E}'_{\alpha/p^n}$上的作用都与特殊纤维上 M 在 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$ 上的作用一致。应用定理 3.2.4的第（2）和第（4）部分，我们得到一个 F-塔，其对应于 A' 并满足引理 2.4.9中的条件：对于所有 $n \geq 1$，交换图为



具有同构的特殊纤维。由此得出 $A^\flat_\infty \cong A'_\infty$。

□

注 4.2.3。 在 [Heu21b], Heuer 确定了阿贝洛簇的完美覆盖之间的所有态射。这使他能够在 [Heu21b，定理 1 中4]。粗略地说，他证明了在 p-同源的意义下，Raynaud 扩张的特殊纤维必须一致，并且格必须“在 p-进意义下接近”。

5. 线丛

在本节中，我们将说明如何把阿贝洛簇上的线丛 L 转移到 A/K 某个适当阿贝洛簇上的线丛 L'，该阿贝洛簇 $A'/K^\flat$ 如定理4.2.2所构造。这个过程有两种应用。若 A 是阿贝尔簇，则它有一个丰沛线丛 L。我们将看到，对应的 L' 在 A' 上也必定是丰沛的，由此得到定理4.2.2的一个加强版本：若 A 是阿贝尔簇，我们也可以选取一个 A' 阿贝尔簇作为6，

我们将看到，把线丛从 A 移到 A'，是我们构造 Scholze 逼近引理类似版本的关键输入；而该引理本身又是权-单值猜想证明中的关键一步。

我们首先在第 5.1 节概述 Raynaud 扩张上线丛的分类。我们在第 5.2 节利用这一结果证明，存在由定理 $\mathfrak{A}_\alpha$ 中F-塔所构造的某个模型，使得 A 中构造的定理 3.2.5 满足 L 可扩张到 $\mathfrak{A}_\alpha$。这基于 Gubler 在全退化情形下的一个论证。有了这个模型，我们便能在 L上定义良好的度量，从而可以逼近 L的整体截面。

在第 5.3 节，我们通过发展完美空间上 $\mathbb{G}_{m,\infty}$- 主齐性空间的理论，将线丛转移到倾斜空间。这些结构产生线丛的 p 次方根系。特征为 p 的完美空间上的任意线丛都可扩张为一个 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间，随后我们可以将其反倾斜，从而得到一个特征 0 下的 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间。我们证明， A 上的每个线丛L 拉回到 A_∞ 后，都是以这种方式得到的线丛。

当我们尝试将线丛的数据从A 转移到 A'时，会遇到一个重要的微妙之处。当 L 是丰沛的，它定义了一个极化：一个同源 $\varphi_L : A \to A^\vee$。因此，倾斜 L将涉及构造一个同源 $\varphi_{L'} : A' \to (A')^\vee$。在定理4.2.2中构造 A' 时，有许多选择。如果对 A 随机做出这些选择，然后又对 $A^\vee$随机做出选择，那么没有理由认为由此得到的复数域上的阿贝尔簇 A'和$(A^\vee)'$互为对偶。要在 $K^\flat$上得到对偶簇，我们需要做出相容的选择。为此，我们使用$\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间，构造并倾斜 $B \times B^\vee$上的庞加莱线丛的完美拟覆盖，并证明这一过程中做出的选择会为 A和 $A^\vee$导出相容的选择。

5.1. Raynaud 扩张上的线丛。 我们先简要回顾一些关于 Raynaud 扩张的背景。设 A 是定义在非阿基米德域上的阿贝尔簇 K。如第 2.2 节所述，对 K作有限可分扩张后，存在刚性群的短正合列

$$1 \to T \to E \xrightarrow{\pi} B \to 1 \tag{5.1.1}$$

其中刚性环面 T 的秩为 r，阿贝尔簇 B 具有良约化，并且有一个格h： $M \hookrightarrow E$满足 $A \cong E/M$。设 $M^\vee := \mathrm{Hom}(T, \mathbb{G}_m)$ 表示该环面的特征群，因此 $M^\vee$ 是秩为 r的自由阿贝尔群。设 $B^\vee$ 表示 B的对偶阿贝尔簇，设 $P_{B\times B^\vee}$ 表示 $B \times B^\vee$上的 Poincar`e 线丛。我们将相应的 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间记为 $P^\times_{B\times B^\vee}$。

命题 5.1.1. Raynaud 扩张 $1 \to T \to E \xrightarrow{\pi} B \to 1$ 等价于一个群同态 $\phi^\vee : M^\vee \to B^\vee$。

证明。这由 [L¨ut16，定理 A.2。8] 以及 [L¨ut16定义 6.1 之前的讨论2]得出。我们简要介绍这一构造。对于任意特征 $m^\vee \in M^\vee$，对等式（5.1.1）取 $m^\vee$ 推出，可得交换图

$$\begin{array}{ccccc} T & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle m^\vee} & & \downarrow{\scriptstyle \langle\cdot,m^\vee\rangle} & & \| \\ \mathbb{G}_m & \longrightarrow & P^\times_{B\times\phi^\vee(m^\vee)} & \longrightarrow & B. \end{array} \tag{5.1.2}$$

该图表定义了像 $\phi^\vee(m^\vee) \in B^\vee$ 和映射 $\langle\cdot, m^\vee\rangle$，因为存在一个同构 $\mathrm{Ext}(B, \mathbb{G}_m) \cong B^\vee$。线丛 $\phi^\vee(m^\vee)$ 必须是平移不变的，这是由 E 上的群运算所决定的：任何群同态 $M^\vee \to \mathrm{Pic}_B$ 都会定义一个由 B 扩张 T 的扩张，但只有当该像落在 $\mathrm{Pic}^0(B) = B^\vee$ 中时，这个扩张才具有群运算。更多详情请参见 [Ser88，第 VII.3 节、定理 6] 及其前后内容，或 [L¨ut16，附录 A.2]。

为了反向构造，我们从一个群同态 $\phi^\vee : M^\vee \to B^\vee$ 开始。选取 $M^\vee$ 的一组基 $m_1^\vee, \ldots, m_r^\vee$，我们可以写成

$$E \cong P^\times_{B\times\phi^\vee(m_1^\vee)} \times_B \cdots \times_B P^\times_{B\times\phi^\vee(m_r^\vee)}. \tag{5.1.3}$$

□

一旦按（E 5.1.3）固定了一个分解，我们便可以更明确地描述映射 $\langle\cdot,\ m^\vee\rangle$如下。将 $m^\vee = e_1 m_1^\vee + \cdots + e_r m_r^\vee$按我们的基展开。给定$z \in E$，选取一个包含 B 的开集 $\pi($$z$，使得其上的 T-主齐性空间 E 平凡化，从而我们可以将 z 表示为 $t_1,\ldots,t_r$，即 T在 $\pi(z)$ 上的副本中的一个元素。于是

$$\langle z, m^\vee\rangle = t_1^{e_1} \cdots t_r^{e_r}$$

在 $\mathbb{G}_m$ 于 $\pi($$z$ 上的副本中，这是 $P^\times_{B\times\phi^\vee(m^\vee)}$ 的平凡化。如定义 2.2.3之前的讨论所述，改变平凡化不会改变 t_i的绝对值。因此，我们得到一个良定义的赋值映射

$$\ell : E(K) \to \mathbb{R}^r; (t_1, \ldots, t_r) \mapsto (-\log|t_1|, \ldots, -\log|t_r|).$$

上述描述表明，$\langle\cdot, m^\vee\rangle$ “经由 $\mathbb{R}$ 分解”，从而得到仿射函数 $F_{m^\vee}$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} E(K) & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{R}^r \\ \downarrow{\scriptstyle \langle\cdot,m^\vee\rangle} & & \downarrow{\scriptstyle F_{m^\vee}} \\ P^\times_{B\times\phi^\vee(m^\vee)} & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{R}. \end{array} \tag{5.1.4}$$

我们称 $F_{m^\vee}$ 为 $\langle\cdot, m^\vee\rangle$ 的热带化。

现在我们概述构造用于一致化对偶阿贝尔簇的 Raynaud 扩张 $A^\vee$ 的过程，该过程从一致化 $A \cong E/M$出发。将包含映射 $h : M \to E$ 与$\pi : E \to B$ 复合，得到一个群同态 ϕ: $M \to B$。由于（$B^\vee$）$^\vee \cong B$，命题 5.1.1 给出了一个 Raynaud 扩张

$$1 \to T^\vee \to E^\vee \xrightarrow{\pi^\vee} B^\vee \to 1 \tag{5.1.5}$$

其中，对偶环面 $T^\vee$ 仍是秩为 r的刚性环面。根据 [L¨ut16，命题 6.1。8],映射 h 等价于一个非退化双线性形式 $\langle\cdot,\ \cdot\rangle\colon M\times M^\vee\to P^\times_{B\times B^\vee}$ 定义在 $\phi\times\phi^\vee$上。也就是说，有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} & & P^\times_{B\times B^\vee} \\ & \overset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{\nearrow} & \downarrow \\ M\times M^\vee & \xrightarrow{\phi\times\phi^\vee} & B\times B^\vee \end{array} \tag{5.1.6}$$

使得对于任意固定的 $m^\vee\in M^\vee$，限制映射 $\langle\cdot,\ m^\vee\rangle\colon M\to P^\times_{B\times\phi^\vee(m^\vee)}$ 是 (5.1.2) 中间垂直箭头的限制，并且对称条件对 $m\in M$也成立。这里，非退化双线性形式是指热带化 $F\colon M\times M^\vee\to P^\times_{B\times B^\vee}\to\mathbb{R}^r$ 对任意固定的 $m^\vee\in M^\vee$ 限制为 $F_{m^\vee}$ 时，是一个非退化双线性形式。由对称性，我们可以从该双线性形式中提取一个包含映射 $h^\vee\colon M^\vee\hookrightarrow E^\vee$，从而得到对偶格。

根据[L¨ut16，定理 6.3。3] 对偶格一致化对偶阿贝尔簇 $A^\vee=E^\vee/M^\vee$。我们指出，记号 $E^\vee$ 可能有些容易引起误解：这并非与半阿贝尔簇 E相关联的某种典范对偶，它也取决于格$M\subset E$。

现在我们可以陈述 A上线丛的分类，汇集了 [L¨ut16第 6]章中的许多结果。每个 E 上线丛都是沿着 π 对某个 N 上的线丛 B作拉回而得。任意一个 L 上的线丛 A 都由一个线丛 M的 $\pi^*(N)$线性化给出，它定义在 E上：一族相容的同构

$$\{c_m:\pi^*N\to\tau_m^*\pi^*N:m\in M\}.$$

这里，τ_m 是乘以 m 的映射，相容条件为

$$\tau_{m_1}^*(c_{m_2})\cdot c_{m_2}=c_{m_1+m_2} \tag{5.1.7}$$

对所有 m_1、$m_2\in M$均成立。对于许多线丛 N和格 M的取值，不存在这样的同构——我们需要添加两个条件，以确定何时存在 c_m 族。

设 φ_N：$B\to B^\vee$是将 $b\mapsto\tau_b^*N\otimes N^{-1}$.映到.....的同态。关于 M 和 N 的第一个相容条件是，必须存在一个群同态 σ：$M\to M^\vee$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_N} \\ M^\vee & \xrightarrow{\phi^\vee} & B^\vee. \end{array} \tag{5.1.8}$$

第二个条件是一个平凡化 χ：$M\to\phi^*N$，它将 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 ϕ^*N 在 M 上平凡化，并满足

$$\chi(m_1+m_2)\otimes\chi(m_1)^{-1}\otimes\chi(m_2)^{-1}=\langle m_1,\sigma(m_2)\rangle \tag{5.1.9}$$

对所有的 $m_1,m_2\in M$。因子 $\langle m_1,\sigma(m_2)\rangle$ 是必要的，它使非平移不变丛上的平移能够相互匹配。它在

M 上定义了一个对称的双线性形式。取赋值后，我们得到一个双线性形式

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\sigma : M \times M \to \mathbb{R} \tag{5.1.10}$$

它延拓为一个双线性形式 F_σ： $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$。

我们将 c_m 写得更明确一些，以备后用。为 $M^\vee$ 选取一组基，从而得到 E 的坐标，如 (5.1.3) 所示，并展开 $\sigma(m) = e_1 m_1^\vee + \cdots e_r m_r^\vee$。在 $\pi^*(N)$ 的一个平凡化下， c_m 将 T 在 $\pi(z)$ 上的一份拷贝中、对应于坐标 $(t_1, \ldots, t_r)$ 的点 $z \in E$ 所在的纤维，平移到 $\tau_m(z)$ 上的纤维，并将 $\mathbb{G}_m$ 的这份拷贝按单位元 $r(m)t_1^{e_1}\cdots t_r^{e_r}$ 缩放，其中该单位元属于 $K^\times$。再次取赋值，我们得到一个仿射函数 $z_m : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ ，满足

$$z_m(\ell(z)) := \ell(c_m(z)) = \ell(r(m)) + F(\ell(z), \ell(\sigma(m))). \tag{5.1.11}$$

这是 c_m 的热带化。

这些数据足以分类 A 上的所有线丛：

命题 5.1.2 (定理 6.3.2、6.4.4 [L¨ut16])。 阿贝尔簇上的线丛 L 由以下数据确定：阿贝尔簇A 上的线丛 N、 B上的群同态 $\sigma : M \to M^\vee$，以及平凡化 $\chi: M \to \phi^*N$，使得图表 *5.1.8* 可交换，且等式 (*5.1.9*) 成立。此外，当且仅当 L 丰沛，且等式 (N 所对应的双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\sigma$ （见等式 (*5.1.10*）正定时，才是丰沛的。

推论 5.1.3。 给定一个线丛 L 在 A 上，它对应的数据为 (N, σ, r) ，如命题 *5.1.2*所述，则线丛 $L^{\otimes p}$ 对应的数据为 $(N^{\otimes p}, p\sigma, \chi^p)$。

例 5.1.4。 A 上的平移不变线丛对应于以下情形： N是 B 上的平移不变线丛，而 σ 是平凡态射。在这种情况下，ϕ_N 是平凡的，因此图表 5.1.8 可交换。等式 5.1.9 的右端此时为 0，因此 χ是群同态 $M \to \phi^*N$。选取 M的一组基 m_1、……、 m_r，我们得到$E^\vee \cong P_{\phi(m_1)}$ $\times_{B^\vee} \times_{B^\vee} \cdots \times_{B^\vee} P_{\phi(m_r)} \times_{B^\vee}$ 的坐标，如等式 (5.1.3) 所示，从而 χ确定了一个点 ($\chi(m_1)$……， $\chi(m_r)$) $\in E^\vee$。因此，正如预期的那样， $E^\vee$ 上的点通过满射 $E^\vee \to A^\vee$给出 A 上的平移不变线丛。

例 5.1.5. 我们将命题 5.1.2 专门应用于 Tate 曲线 $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$。Raynaud 扩张 $\mathbb{G}_m$ 的阿贝尔部分是平凡的，因此没有需要考虑的线丛 N （环面的 Picard 群是平凡的）。格是一维的，因此群同态 σ 和平凡化 χ 完全由生成元的像决定q。换言之，一旦我们选定 c_q 上平凡线丛的一个自同构 $\mathbb{G}_m$，其余一切便迎刃而解。

由于格是一维的， $M^\vee = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Z}$，其中恒等映射$m^\vee$ 映到 1。同态 σ 将 q 映到某个整数 d 对应的元素：该整数就是相应线丛的次数 L。映射 χ 可以将 q 映到$K^\times$中的任意元素 $\chi(q)$。当 $d = 0$ 且我们讨论 Pic^0, 时，线丛因此由 $K^\times$中的一个元素决定。当且仅当 $\chi(q) \in q^{\mathbb{Z}}$时，我们得到平凡线丛，从而得到预期的自对偶 $\mathrm{Pic}^0(\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}})$ $\cong \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$。

这些例子给出的启示是， χ 控制 Pic^0， σ 控制 N´éron-Severi 群中源自格 M 的部分，而 N 控制 N´éron-Severi 群中源自 B的部分。

5.2. 线丛的形式模型。 为了将线丛从A 移到 A'，我们首先需要将线丛 L 定义在 A 上的情形延拓为一个形式线丛 $\mathfrak{L}_n$ 定义在 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$上，其中 n为某个。定义在 B 上的任意线丛（因此 E也如此）都可以依照 [L¨ut16，引理 6.22]，延拓为相应形式（半）阿贝尔概形上的形式丛。我们还需要将 M-线性化延拓到形式模型上。Gubler 在全退化情形下对此给出了非常明确的构造，见 [Gub07，命题 66]。本节概述他的构造，并证明它可以推广到一般情形。我们首先精确定义在此语境下形式模型的含义。

定义 5.2.1. 设 $\mathfrak{L}$ 是命题 2.1.3 中所述容许形式概形 $\mathfrak{X}$ 上的一个线丛。那么， $\mathfrak{L}$ 在 $\mathfrak{X}$ 的某个由形式仿射开集 $\{\mathrm{Spf}(R_i^\circ)\}$ 构成的覆盖上是平凡的，其过渡映射由 $(R_{ij}^\circ)^\times$ 中的相容单位元 f_{ij} 给出。 $\mathfrak{L}$ 的一般纤维是 $X=(\mathfrak{X})^\eta$ 上的线丛 L，它在形式解析覆盖 $\mathrm{Sp}(R_i)$ 上是平凡的，其过渡映射由 f_{ij} 在映射 $R_{ij}^\circ \to R_{ij}$ 下的像给出。在此情形下，我们称 $\mathfrak{L}$ 是 L 的一个形式模型。

注 5.2.2. 请注意，几何形式线丛 $\mathfrak{L}$ 不是几何线丛 L的形式模型，因为形式线的通用纤维不是刚性线。

固定阿贝尔簇 $A \cong E/M$ 上的线丛 L，并取命题 5.1.2 中的相关数据 (N,σ,r)。对每个 $m \in M$，我们有方程 5.1.11 中的相关仿射函数 z_m ：同构 $c_m\colon \pi^*N \to \tau_m^*\pi^*N$ 的热带化。按照命题 3.2.2，固定 E 的形式解析覆盖 $\mathcal{U}_n$，使得线丛 π^*N 在此覆盖上平凡。具体而言，我们选取一个 $\pi(M)$-不变覆盖 $\{\overline{V}_{j,n}\}$，其覆盖 $\overline{B}$，且 N 在其上平凡，并选取一个整除该格的有理数 α 。于是可以将 $\mathcal{U}_n$ 的典型开集写成乘积 $U_{\mathbf{e}\Delta_{\alpha/p^n}} \times V_{j,n}$，其中 $\mathbf{e} \in \mathbb{Z}^r$。在定理 3.2.4 中，我们看到 M 的作用扩张到 E 对应的形式模型 $\mathfrak{E}_{\alpha/p^n}$，因此取商可得到 A的形式模型$\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$ 。

命题 5.2.3. 沿用上一段中的记号，可以通过如下数对 $(\mathfrak{N},f)$ 构造形式阿贝尔概形 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$ 上 $\mathfrak{L}_{\alpha/p^n}$ of$L$ 的形式模型：其中 $\mathfrak{N}$ 是形式阿贝尔概形 $\overline{B}$ 上 N 的一个形式模型，而 $f\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，满足：

(1) 限制在我们对 $\mathbb{R}^r$ 的覆盖中的一个超立方体 $\Delta = \mathbf{e}\Delta_{\alpha/p^n}$ 上时，对于某些 $m_\Delta \in \mathbb{Z}^r$，$c_\Delta \in \Gamma$，有 $f(u) = m_\Delta \cdot u + c_\Delta$，其中 $\cdot$ 表示点积；(2) 对于 $\lambda \in \Lambda = \ell(M)$，有 $f(u+\lambda) = f(u) + z_\lambda(u)$。

证明。 当 A全退化时，这是 [Gub07，命题 6 的一个较弱版本。6]。Gubler 证明了在这种情况下， L 的形式模型与这些函数 f一一对应（线丛 N 在此情况下是平凡的）。我们预计一般情况下也有类似的结论，但由于本文不需要，因此尚未对此进行验证。注意，对于给定的模型 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$和线丛 L，可能不存在满足必要条件的数对 $(\mathfrak{N},f)$。我们将看到，当 n 足够大时，必定存在数对 $(\mathfrak{N},f)$。

为了将 L扩展到 $\mathfrak{L}_{\alpha/p^n}$，我们利用 $(\mathfrak{N},f)$ 的数据来构造 L 的一个合适标架：在覆盖中的每个U_i 上取单位元$g_{i,\,n}$ ，使得过渡函数 $g_{i_1,\,n}\overline{g_{i_2\,n}}^{\,n}$ 在交集上

$U_{i_1,\ n} \cap U_{i_2,\ n}$ 的上确界范数为 1，因此给出了形式模型的过渡函数。

我们首先在覆盖 $\{\overline{V}_{j,n}\}$ 上为 $\overline{B}$ 选取一个标架 $(h_{j,\ n})$。由于 $\mathfrak{N}$ 是形式线丛，过渡函数都是形式单位，因此其上确界范数为 1。对于覆盖中的每个开集 $U_\Delta \times V_{j,\ n}$，我们任意选取满足 $\ell(a_\Delta) = c_\Delta$ 的 $a_\Delta \in K^\times$。将 $T =$ 写作 $\mathrm{Spa}(K\langle x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}\rangle, K^\circ\langle x_1^{\pm 1}, \dots, x_r^{\pm 1}\rangle)$，并将 $x_1^{m_1} \cdots x_r^{m_r}$ 简记为 $\mathbf{x}^{\mathbf{m}}$，则 $a_\Delta \mathbf{x}^{m_\Delta}$ 从 T 到 Δ 的限制是一个单位元。

我们声称，令 $g_{i,n} = a_\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{e}} \otimes h_{j,n}$，便得到 $\mathfrak{N}$ 的一个 M-不变标架。由于 $h_{j,n}$ 不会影响上确界范数，Gubler 的论证也适用于此情形。根据构造，对于任意点 $z \in U_{\Delta_i} \times V_{j_i,n}$，都有 $v(g_{i,n}(z)) = f(\ell(u))$。由于 f 连续，标架单位元的绝对值在交集上相等，因此过渡函数的绝对值为 1，并给出所需的形式模型。根据条件 (2)，沿 τ_m 拉回会将 $U_{\Delta_i} \times V_{j_i,n}$ 上的单位元 $g_{i,n}$ 送到 $\tau_m^*(U_{\Delta_i} \times V_{j_i,n})$ 上的一个标架，其绝对值正确，因此我们的标架下降到该商上。

□

例 5.2.4. 在此例中，令 $K = \mathbb{C}_p$。我们举出一些例子，说明在 Tate 曲线 $C = \mathbb{G}_m/\langle p^2\rangle$ 上由例 2.2.6构造的线丛形式模型。我们希望这有助于阐明函数 f的作用。正如我们在例 5.1.5中所见，线丛L 在 $\mathbb{G}_m/\langle p^2\rangle$ 上由其次数 d 和一个元素 $\chi(p^2)$ 确定，该元素属于 $K^\times$。

(1) 令 L 为平凡线丛，对应于 $d = 0, \chi(p^2) = 1$。存在一个 C 的形式解析覆盖，使得在其上 L 是平凡的，该覆盖由超立方体覆盖给出

$$U_{[0,1]} = \mathrm{Sp}(K\langle T, \frac{p}{T}\rangle), U_{[1,2]} = \mathrm{Sp}(K\langle \frac{S}{p}, \frac{p^2}{S}\rangle),$$

沿内圆 $U_{\{1\}}$ 通过将 $T \mapsto S$映至.....的映射粘合，并沿外圆通过映射

$$\tau_{p^2} : U_{\{0\}} \to U_{\{2\}}$$

$$K\langle \frac{S}{p^2}, \frac{p^2}{S}\rangle \to K\langle T, \frac{1}{T}\rangle; S \mapsto p^2 T.$$

恒等同构 c_{p^2} 的热带化是零映射 $z_{p^2}: \mathbb{R} \to 0$，因此可能导出 L 形式模型的函数 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期函数，由其在闭区间 $[0,2]$上的行为决定。它们必须在$[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上是仿射函数，且斜率为整数，并且必须满足：对于某个$c_0 \in \mathbb{Q} \cong \Gamma$，$f(0) = f(2) = c_0$。

令 $f(u) = u$用于 $u \in [0,1]$，并令 $f(u) = 2 - u$用于 $u \in [1,2]$，我们得到一个函数，它将导出平凡线丛的一个非平凡模型。与此 f 对应的标架在 $U_{[0,1]}$ 上由 $g_{01} = T$ 给出，在 $U_{[1,2]}$上由 $g_{12} = \frac{p^2}{S}$ 给出。由于 L 是平凡的，交集上的限制映射与粘合映射相同。用 T表示所有内容时，我们选定的标架在 $U_{\{1\}}$ 上给出的过渡映射为$\frac{g_{01}}{g_{12}} = \frac{T^2}{p^2}$；当 $|T| = |p|$时，它的绝对值总是 1——这是 $U_{\{1\}}$ 的定义性质，因此我们得到一个形式单位。将另一个过渡映射写在 $U_{\{0\}}$上，

我们先用粘合映射将 $g_{12}=\frac{p^2}{S}$ 映到 $\frac{1}{T}$，然后取商 $\frac{g_{01}}{g_{12}}$，得到过渡映射 T^2。它在 $U_{\{0\}}$ 上的绝对值同样为 1，因此是一个形式单位。由于现在我们的过渡映射由形式单位构成，我们得到线丛的一个形式模型。然而，这并不是平凡线丛—— $U_{[0,1]}$ 上的单位元 $g_{01}=T$ 不是形式单位，因为它在$U_{(0,1]}$上的绝对值小于 1

(2) 令 L 为对应于 $d=0, r(p^2)=1+p$ 的线丛。我们可以使用与前一个例子相同的 C 形式解析覆盖、函数 f 和标架。该覆盖上这个 L 的限制映射在内圆 $U_{\{1\}}$ 上是通常的粘合映射，但在外圆上则由将 $S\mapsto p^2(1+p)T$ 发送到相应值给出。与前一个标架对应的过渡函数现在分别是 $\frac{T^2}{p^2}$（在 $U_{\{1\}}$ 上）和 $\frac{T^2}{1+p}$（在 $U_{\{0\}}$ 上）。

(3) 令 L 为对应于 $d=0, r(p^2)=p^{1/p}$ 的线丛。前几个例子中的形式解析覆盖仍然平凡化 L，但现在不存在满足命题 5.2.3 条件的函数 f，因此也不存在延拓 L 到相应模型的形式线丛。在这种情况下，c_{p^2} 的热带化 z_{p^2} 是将 u 发送到 $1/p$ 的常值函数，因此由命题 5.2.3 的条件 (2)，必须有 $f(2)=f(0)+1/p$。但根据条件 (1)，f 必须在 $[0,1]$ 和 $[1,2]$ 上连续且呈分段线性，并具有整数斜率，因此这是不可能的。

为了解决这个问题，我们细化用于构造形式解析覆盖的超立方体分解，改用与区间 $[\frac{\lambda}{p},\frac{\lambda+1}{p}]$for $\lambda\in\{0,\dots,2p-1\}$ 相对应的仿射子域。现在我们可以选择 f，使其在区间 $[0,1/p]$ 上的斜率为 1，在 $[1/p,2]$. 上的斜率为 0

由于热带化映射 z_m 的取值都在 $v(K)=\Gamma\subset\mathbb{R}$中，若我们假设$\Gamma\subset\mathbb{Q}$，那么例 5.1.5(3) 是函数 f 可能不存在的唯一原因。细化形式解析覆盖，总能得到一个使 f 存在的模型。由于阿贝尔簇 B 上的任意线丛都能延拓为形式阿贝尔概形 $\overline{B}$上的形式线丛，我们可以将线丛延拓到塔中的形式模型上，从而完成本节的主要目标。

命题 5.2.5. 线丛 L 在 A 上若对每个 $m\in M$，$v(\chi(m))$ 都是 α 的整数倍，则可延拓到形式模型 $\mathfrak{A}_\alpha$ 上。

结合推论 5.1.3，我们得到：

推论 5.2.6. 如果 $L^{\otimes p}$ 在 A 上的线丛可以延拓到形式模型 $\mathfrak{A}_\alpha$，那么 L 可以延拓到模型 $\mathfrak{A}_{\alpha/p}$。

5.3. 线丛的完美覆盖。 在本节余下部分，我们将说明如何取一个线丛 L 在 A 上，并构造一个线丛 L' 在适当的 A' 上，使其具有相同的特殊纤维。人们或许会认为，只需将命题5.2.3 应用于 A'，便可直接得到这一结论；但要将同态 $\sigma: M\to M^\vee$ 转移到倾斜侧，同时使图表 5.1.8 仍然交换，似乎颇为微妙。在第 4.2 节中对格进行倾斜时，

我们任意选取了 p 次方根 M^{1/p^n}，它们是 M 的根。如果倾斜对偶格 $M^\vee$时所作的选择与倾斜 M时所作的选择不兼容，那么我们在倾斜侧就无法获得良好的对偶性质。为解决这一问题，我们需要同时倾斜 M 和$M^\vee$。我们在图表 5.1.5中看到，格 $M \times M^\vee$嵌入庞加莱扭子 $P^\times_{B\times B^\vee}$中。我们将构造并倾斜该扭子的一个完美拟覆盖，使$M \times M^\vee$ 包含在其中，并由此构造 A'和 $A'^\vee$。

这将要求我们处理线丛的完美对象覆盖，将 $\mathbb{G}_m$ 上的主齐性空间推广为 A 上的 $\mathbb{G}_{m,\infty}$ 上的主齐性空间推广为 A_∞。这类构造与 [DH19]中的论证密切相关。Scholze 的逼近引理[Sch12命题 87], 已经隐式使用了线丛的完美对象覆盖，因此在命题 6.2.2中，我们将该引理从环面簇推广到阿贝尔簇时，也需要用到它们。

在本小节中，我们介绍关于 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间的一些一般性质。

定义 5.3.1。一个 $\mathbb{G}_m$上的 adic 空间 X 上的主齐性空间是一个态射 $\pi:\ L^\times \to X$，它是 adic 空间之间的态射，并带有一个 $\mathbb{G}_m \times L^\times \to L^\times$ 在 X 上的作用，使得对于某个 $\{U_i\}$ 的开覆盖 X，有 $\mathbb{G}_m$-等变同构 $\pi^{-1}(U_i)\cong \mathbb{G}_m \times U_i$。一个$\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间的定义，是将上述定义中的 $\mathbb{G}_m$ 替换为推论*3.1.6*中构造的完美拟覆盖$\mathbb{G}_{m,\infty} \sim \varprojlim_{[p]} \mathbb{G}_m$。

$\mathbb{G}_m$ 主齐性空间 $L^\times$、线丛 L 和可逆层$\mathcal{L}$ 之间存在对应关系。给定刚性空间 X 上的可逆层 $\mathcal{L}$，相应的 $\mathbb{G}_m$ 主齐性空间 $L^\times$ 是下列概形的解析化

$$\underline{\mathrm{Spec}}(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes i}).$$

沿映射 $[p]:\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ 作推出，得到一个 $\mathbb{G}_m$ 主齐性空间之间的映射

$$\begin{array}{ccc} L^\times & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \| \\ (L^{\otimes p})^\times & \longrightarrow & X, \end{array}$$

其中 $(L^{\otimes p})^\times$ 是与线丛 L 的 p 次幂相关联的主齐性空间。在X 上局部地，这个图表如下所示

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m \times U_i & \longrightarrow & U_i \\ \downarrow{\scriptstyle [p]\times id} & & \| \\ \mathbb{G}_m \times U_i & \longrightarrow & U_i. \end{array}$$

对称代数上的诱导映射是下列包含映射的解析化

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes pi} \hookrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}^{\otimes i}. \tag{5.3.1}$$

现在假设 X_∞ 是一个完美空间，并令 $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为 X_∞ 上满足 $L_{n+1}^{\otimes p} = L_n$ 的线丛族。我们希望利用这些数据，在图表顶部构造一个 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间 $L^\times_\infty$

$$L_\infty^\times \longrightarrow X_\infty$$

(5.3.2)
$$\begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \| \\ L_2^\times & \longrightarrow & X_\infty \\ \downarrow & & \| \\ L_1^\times & \longrightarrow & X_\infty. \end{array}$$

如果我们能找到 X_∞ 的一个开覆盖 $\{U_{i,\infty}\}$，使得所有 $L_i^\times$ 都能相容地局部可分裂，那么就可以做到这一点。在这种情况下，$L_\infty^\times$ 局部同构于乘积 $\mathbb{G}_{m,\infty} \times U_\infty$。这将说明 $L_\infty^\times$ 是完美空间，并且根据引理 2.4.11，它将是 $L_i^\times$ 塔的波浪极限。更明确地说，如果我们能将一个完美空间 X 上的 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 $L^\times$ 延拓为一个 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间$L_\infty^\times$，那么只需针对某个开覆盖 $\{U_{i,\infty}\}$，写出 L 的过渡函数余循环 (g_{ij})，并使其中的元素 $g_{ij} \in \Gamma(U_{i,\infty} \cap U_{j,\infty})$ 都有相容的 p 次方根序列$g_{ij}, g_{ij}^{1/p}, g_{ij}^{1/p^2}, \ldots$，便可利用余循环 (g_{ij}^{1/p^n}) 定义 L^{1/p^n}。在特征 p 下，我们总能做到这一点，因为完美空间 $K^\flat$ 代数是完美的，因此得到如下结论：

引理 5.3.2. 若 $X'^\flat_\infty$ 是特征为 p的完美拟域 $K^\flat$ 上的完美空间，则每个 $\mathbb{G}_{m,\ K^\flat}$-主齐性空间 $L'^\times$ 都能唯一延拓为一个$\mathbb{G}_{m,\ \infty,\ K^\flat}$-主齐性空间 $L'^\times_\infty$。

给定一个倾斜为 $X^\flat_\infty$的完美空间 X_∞，以及一个名副其实的 $\mathbb{G}_{m,\ \infty}$-主齐性空间 $L^\flat{}_{,\ \infty}{}^\times$，我们可以将该态射去倾斜，得到

$$L_\infty^{\flat,\times} \to X_\infty^\flat$$

从而得到一个序列

$$L_\infty^\times \to X_\infty.$$

底部的态射定义了 X_∞ 上一个 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间 $L_\infty^\times$，它位于 X_∞上的一个 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间 L 之上。对此，我们既可以通过将 $L^\flat{}_{,\infty}{}^\times$的局部劈分去倾斜来说明，也可以注意到，锐映射将定义 L' 的余循环 (g_{ij}) 映为定义 X_∞上一个线丛 L的余循环 $(g_{ij}^\sharp)$。这就恢复了 [DH19, 第 5 节.1] 中构造的映射 $\theta_0 : \mathrm{Pic}(X_\infty^\flat) \to \mathrm{Pic}(X_\infty)$。按照这种解释，Dorfsman-Hopkins 的线丛“上同调去倾斜”映射对应于相关 $\mathbb{G}_{m,\infty}$-主齐性空间的直接去倾斜（另见 [Sch13, 引理 3.24]）。

注记 5.3.3。Dorfsman-Hopkins 也研究了映射 $\theta : \mathrm{Pic}\, X^\flat \to \varprojlim_{\times p} \mathrm{Pic}\, X$。他在 [DH，定理 12] 中证明，当 $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ 是完美拟环时，这个映射是同构。Heuer 给出了一个例子 [Heu21a，第 6 节3]，其中某个完美空间上的这个映射不是双射。

我们将证明，在我们的情形下， θ_0 的像包含了A_∞ 上所有从有限层拉回的线丛。这使我们能够将线丛从 A 转移到 A'。我们从良约化的情形开始。

命题 5.3.4. 设 B 是一个具有良约化的阿贝尔簇， N 是 B上的一个线丛。那么， B_∞ 上的 $\mathbb{G}_m$ 主齐性空间 $q_1^*N^\times$ 延拓为一个 $\mathbb{G}_{m,\ \infty}$主齐性空间。

证明。 这直接来自 Heuer 更一般的结果 [Heu21a，定理 4。1] 该结果完整地分类了 Pic(B_∞)。由于我们不需要他的结果的全部内容，因此可以给出一个更简短的证明。

我们需要构造 q_1^*N 的 p次方根，并找到 B_∞的一个开覆盖 $\{U_{i,\infty}\}$ ，使得这些线丛在该开覆盖上都平凡。我们先构造 p次方根。由立方定理，对任意整数 n，有

$$[n]^*N \cong N^{\frac{n^2+n}{2}} \otimes [-1]^*N^{\frac{n^2-n}{2}}$$

（例如参见 [Mil86，推论 6.6]）。因此，当 $p \neq 2$时， $[p]^*N$ 是该线丛$N^{\frac{p+1}{2}} \otimes [-1]^*N^{\frac{p-1}{2}}$ 的 p次方。在这种情况下，拉回 $q_2^*(N^{\frac{p+1}{2}} \otimes [-1]^*N^{\frac{p-1}{2}})$ 是 $q_1^*(N)$ 所需的 p次方根。重复这一过程， $q_1^*(N)$ 的 p^n次方根来自逆系统的第 $n+1$ 层。如果 $p=2$，那么 $[4]^*N$ 是线丛 $N^5 \otimes [-1]^*N^3$的平方。因此，这种情况下的论证类似，但 2^n次方根现在来自第 $2n+1$层。

为了找到一个开覆盖，使得 B_∞ 其上的所有这些线丛都平凡，我们转到特殊纤维。论证与引理3.2.3中的情形类似，后者处理平移不变线丛的情形。根据 [L¨ut16，引理 6.2，2], 每个线丛 N 都可以 B延拓为一个形式丛 $\overline{N}$，定义在形式阿贝尔概形 $\overline{B}/K^\circ$ 上，然后模$\sim_{\varpi}$ 化简为一个线丛 N，定义在阿贝尔概形 B 上（K°/ϖ）。

在特殊纤维上，我们的塔变为一个拟紧拟分离概形的逆系统，定义在（K°/ϖ）$\widetilde{\ }$ 上，其过渡映射为仿射映射 $B_\infty = \lim_{\longleftarrow [p]} B$。根据 [Sta20，标签 0B8W], ，我们有

$$\mathrm{Pic}(\widetilde{B}_\infty) = \varinjlim_{[p]^*} \mathrm{Pic}(\widetilde{B}).$$

特别地，某个线丛$q_1^*N)^{1/p^n}$ 的特殊纤维的任意平凡化，都来自某个有限层上的平凡化。由光滑性，该平凡化可提升为形式概形上的平凡化，因此也可提升为刚性空间上的平凡化，如 [L¨ut16，命题 A.25]所述。因此，只需在 p的一个$\widetilde{\ }$覆盖上平凡化我们所有的 B_∞次根。

为此，我们将研究转到倾斜上。若 N 的次数与 p互素，那么 Grothendieck 的一个定理（参见 [Oor71，定理 2.4。1] 再结合第 4.1 节中的余切复形) 表明，存在 B 到形式阿贝尔概形 $\overline{B'}$上的一个提升，其定义在 $K^{\flat\circ}$上，使得 $\widetilde{N}$提升为 $\overline{B'}$上的一个线丛 $\overline{N'}$。由引理 5.3.2，一般纤维 N'拉回为 B'_∞ 上的一个线丛 $q_0'^*(N')$，并可扩张为一个 $\mathbb{G}_{m、\ \infty、}$ $K^\flat$-主齐性空间。这给出了一个覆盖，使所有 p次根 $q_0'^*(N')$ 都变为平凡；由此可得一个覆盖，使特殊纤维的 p次根变为平凡，正如所需。

若次数与 p不互素，我们可以（或许在对 K作有限扩张之后）找到一个 $B \to B_1$ 的同源 p，其次数为 N <style id='16'}，使得 N_1 下降为一个次数与 p 互素的线丛。由下文的引理 5.3.5 可知， B_∞ 同构于 $(B_1)_\infty$，因此我们可以对 N_1 沿用上述论证，得到所需结果。 □

引理 5.3.5。 设 $f : A \to A_1$ 是定义在 K 上的阿贝尔簇之间的同源， p-次幂。则在定理 A_∞ 和 $(A_1)_\infty$ 中构造的完美拟覆盖 *3.2.5* 是同构的。

证明。设 $f^\vee$ 是对偶同源，因此对于某个正整数 k，有 $f^\vee \cdot f = [p^k]$。于是有如下交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \longrightarrow & A_1 & & \xrightarrow{[p^k]} & & A_1 & & \\ & \nearrow^{f} & & \searrow^{f^\vee} & & \nearrow^{f} & & \searrow^{f^\vee} & \\ \dots & \longrightarrow & A & & \xrightarrow{[p^k]} & & A & \xrightarrow{[p^k]} & A. \end{array}$$

该图诱导出态射 $f_\infty : A_\infty \to (A_1)_\infty$ 和 $f^\vee_\infty : (A_1)_\infty \to A_\infty$，它们复合得到 $[p^k] : A_\infty \to A_\infty$ 和 $[p^k]: (A_1)_\infty \to (A_1)_\infty$。由于后两个映射是同构，结论得证。□

例 5.3.6. 当 N 是平移不变的时，相应的 $\mathbb{G}_m$-主齐性空间是一个半阿贝尔簇。在这种情况下，相应的$\mathbb{G}_{m,\ \infty}$-主齐性空间恰好是命题 3.2.1 中构造的那个。

5.4. 线丛完美oid覆盖的倾斜。 现在我们应用上一小节的理论，将 K 上阿贝洛簇的线丛转化为适当阿贝洛簇 A' 上的线丛，后者定义在 $K^\flat$ 上，如定理 4.2.2 所构造。将命题 5.3.4 应用于阿贝尔簇 ′ 上的庞加莱主齐性空间 $P^\times_{B\times B^\vee}$， $B \times B^\vee$即可得到完美覆盖。

推论 5.4.1. 存在一个 $\mathbb{G}_{m,\ \infty}$-主齐性空间 $P^\times_\infty \to (B \times B^\vee)_\infty \cong B_\infty \times B^\vee_\infty$，使其包含在以下 adic 空间交换图中

$$\begin{array}{ccc} P^\times_\infty & \longrightarrow & B_\infty \times B^\vee_\infty \\ \downarrow & & \| \\ q_1^*(P^\times_{B\times B^\vee}) & \longrightarrow & B_\infty \times B^\vee_\infty \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_1} \\ P^\times_{B\times B^\vee} & \longrightarrow & B \times B^\vee. \end{array} \tag{5.4.1}$$

推论 5.4.2。固定一个点 $x^\vee_\infty \in B^\vee_\infty$，令 $x^\vee := q_1(x^\vee_\infty) \in B^\vee$，则

$$P^\times_{x^\vee_\infty} := P^\times_\infty \times_{B_\infty \times B^\vee_\infty} (B_\infty \times x^\vee_\infty)$$

是 B_∞ 上的 $(\mathbb{G}_{m,K})_\infty$-主齐性空间。于是 $P^\times_{x^\vee_\infty} \sim \varprojlim_{[p]} P^\times_{B\times x^\vee}$。对 $x_\infty \in B_\infty$ 也有对称命题，并且它们给出相容的部分群律，这些部分群律投影到 $P^\times_{B\times B^\vee}$ 上的通常部分群律。

证明。将映射 $B \times x^\vee \to B \times B^\vee$ 添加到 (5.4.1)，处处取纤维积，并注意到我们恰好得到了 $P_{x^\vee_\infty}$ 的图表。□

这个构造可以很好地倾斜。由于 B 有良约化，它可延拓为一个阿贝尔概形$\overline{B}/K^\circ$，其特殊纤维为 $\widetilde{B}/(K^\circ/\varpi)$。利用同构$K^\circ/\varpi \cong K^{\flat\circ}/\varpi^\flat$，我们将 $\widetilde{B}$ 提升为一个形式阿贝尔概形 $\overline{B'}/K^{\flat\circ}$，其 adic 泛纤维为 $B'/K^\flat$。于是我们有 $B^\flat_\infty \cong (B')_\infty$，因为特殊纤维相同；并且 $(B^\vee)^\flat_\infty \cong (B'^\vee)_\infty$，因为取对偶与取特殊纤维可交换。

根据 [L¨ut16，定理 6.1。1], 庞加莱 ′线丛 $P_{B\times B^\vee}$ 延拓为 $\overline{B \times B^\vee}$ 上的形式线丛，其特殊纤维与 ′上的庞加莱线丛 $P_{B'\times B'^\vee}$ 相同。令 $B' \times B'^\vee$为庞加莱线丛上方的（$P'^\times_\infty$、$\mathbb{G}_m$）$_{K^\flat}$-主齐性空间。现在回到图表 5.4.1，我们已经为构成外侧各列和底行的空间给出了形式模型。由于右下方的方块是一个拉回，而左上方的方块是一个推出，这足以为中间列也给出形式模型。由于上述一切操作都与取特殊纤维相容，我们得出：

命题 5.4.3。存在一个同构 $(P^\times_\infty)^\flat \cong P'^\times_\infty$。

将此同构限制到推论 5.4.2 的情形，并注意到完美空间的纤维图表

$$\begin{array}{ccc} P^\times_{x^\vee_\infty} & \longrightarrow & P^\times_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_\infty \times x^\vee_\infty & \longrightarrow & B_\infty \times B^\vee_\infty \end{array}$$

倾斜为图表

$$\begin{array}{ccc} (P^\times_{x^\vee_\infty})^\flat & \longrightarrow & P'^\times_\infty \\ \downarrow & & \downarrow \\ B'_\infty \times (x^\vee_\infty)^\flat & \longrightarrow & B'_\infty \times B'^\vee_\infty, \end{array}$$

we

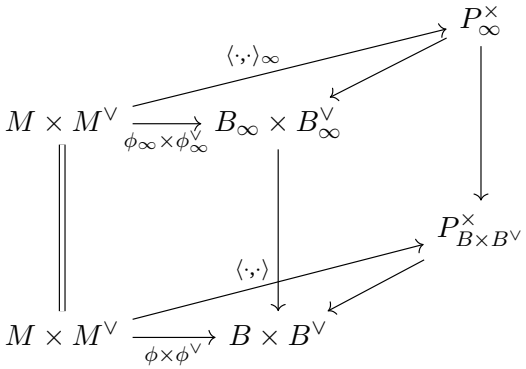
得到

推论 5.4.4. 对任意点 $x^\vee_\infty \in B^\vee_\infty$，存在一个同构 $(P^\times_{x^\vee_\infty})^\flat \cong P^\times{}_{(x^\vee_\infty)^\flat}$。

我们现在已经为图表 5.1.6 中的竖直映射构造了一个完美拟覆盖，并证明它倾斜后得到 $K^\flat$ 上的类似映射。要完成此图表的完美对象版本，我们必须提升并倾斜双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。这需要我们作出选择，因此接下来我们将验证 A_∞ 和 $(A^\vee)_\infty$ 不依赖于这些选择。

固定 M 的一组基 $m_1,\dots,m_r$，以及 $M^\vee$ 的一组基 $m_1^\vee,\dots,m_r^\vee$。我们首先通过在基元素上任意选取提升，再由此延拓，来选取群同态 $\phi_\infty : M \to B_\infty$ 和 $\phi^\vee_\infty : M^\vee \to B^\vee_\infty$，使它们分别提升 ϕ 和 $\phi^\vee$。具体而言，元素 $\phi_\infty(m)$ 对应于 B 中元素构成的序列 $(\phi(m)\ {}^{\phi}(m)_p, {}^{\phi}(m)_{p^2}, \dots)$，其中对所有 $i>0$，都有 $[p](\frac{\phi(m)}{p^i}) = {}^{\phi}(m)_{\overline{p^{i-1}}}$。接着，我们通过在位于 $\phi_\infty(m_i) \times \phi^\vee_\infty(m_j^\vee)$ 上方的元素$m_i \times m_j^\vee$上任意选取提升，再利用部分群律的相容性，将其双线性延拓到整个 $M \times M^\vee$，从而选取一个双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty \to P^\times_\infty$，使其提升 $\langle\cdot,\cdot\rangle$。这给出了如下图表

(5.4.2)



这里，顶部三角形是完美空间的交换图，并且确实取决于我们所选的提升。不过，我们声称，无论如何选择，仅凭顶部三角形就仍然可以提取出空间 E_∞、 $E_\infty^\vee$、 A_∞ 和 $A_\infty^\vee$ 。

命题 5.4.5。我们有

$$E_\infty \cong P^\times_{\phi_\infty^\vee(m_1^\vee)} \times_{B_\infty} \cdots \times_{B_\infty} P^\times_{\phi_\infty^\vee(m_r^\vee)},$$

采用推论 *5.4.2*中的记号

证明。这是方程（5.1.3）的类比，证明基于这一分解。映射 $[p]\colon E \to E$由映射 $[p]\colon P^\times_{B\times\phi^\vee(m_i^\vee)} \to P^\times_{B\times\phi^\vee(m_i^\vee)}$诱导，它们位于 $[p]\colon B \to B$之上。由推论 5.4.2，我们有 $P^\times_{\phi_\infty^\vee(m_i^\vee)} \sim \lim_{\leftarrow[p]} P^\times_{B\times\phi^\vee(m_i^\vee)}$. 结合以上结果，由完美拟极限的唯一性即可得出该命题。

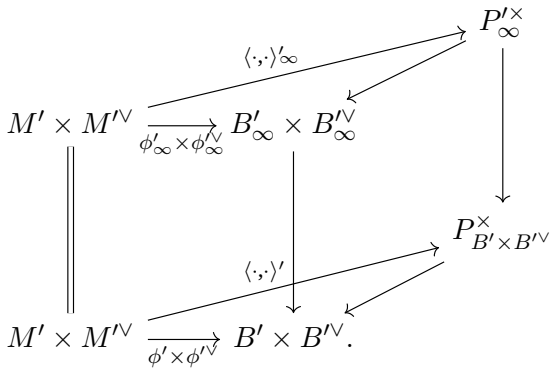
□

双线性形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ 通过发送 $m \mapsto(\langle m, m_1^\vee\rangle_\infty, \ldots, \langle m, m_r^\vee\rangle_\infty)$ 定义了一个群同态 $M \to E_\infty$ 。由图 (5.4.2) 的交换性，这提升了同态 $M \to E$。用 [BGH+18 第 4]，节的语言来说，我们恢复了 p-次幂根的一种选择 M_∞ ，它们位于格 M 的 E 中；而我们的同态恰好是 $M_\infty \to E_\infty$ ，即 [BGH+18 定义 4.2] 中的映射。沿用 [BGH+18] 中的记号，我们定义 $D_\infty := M_\infty \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$。于是由 [BGH+18 定理 4.6.5],，我们有$A_\infty = D_\infty \times^{M_\infty} E_\infty$。由对称性，同一个双线性形式也定义了 $M^\vee \to E_\infty^\vee$，由此我们可以恢复 $A_\infty^\vee$。综上，我们有：

命题 5.4.6。 这些空间 E_∞， $E_\infty^\vee$， A_∞，以及 $A_\infty^\vee$ 由图表（*5.4.2*）的上方三角形决定。

倾斜（5.4.2）中的上方三角形，并应用命题 5.4.3 补全下方三角形后，我们得到一个充满了前导符号的图表，需要进一步拆解说明

(5.4.3)



这里我们应用了同构 $B'^{\flat}_{\infty} \cong B'_{\infty}$，这是因为 B和 B'的特殊纤维相同；还应用了 $B'^{\vee}$的类似同构，以及命题 $P^{\times}_{\infty} \cong P'^{\times}_{\infty}$中的同构 5.4.3，后者也保证了右侧垂直方块的交换性。我们将 $M' \times M'^{\vee}$定义为 $M \times M^{\vee}$的倾斜，上方三角形中的态射由倾斜对应定义。下方三角形中的态射则由上方三角形中的态射与投影到底部的态射复合而成。映射 $\phi' \times \phi'^{\vee}$是 adic 群同态的复合，因此它本身也是群同态。

引理 5.4.7. 映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle'\colon M' \times M'^{\vee} \to P^{\times}_{B'\times B'^{\vee}}$ 是一个非退化双线性形式 .

证明。 双线性是因为倾斜保留了 P_{∞} 上的两个部分群律。非退化性如引理 4.2.1 中所示。 □

将 [L¨ut16应用到这个双线性形式上，根据命题 6.1。8] 我们得到一对阿贝洛簇$A' := E'/M'$以及 $A'^{\vee} := E'^{\vee}/M'^{\vee}$。我们的目标是证明 $A'^{\flat}_{\infty} \cong A^{\flat}_{\infty}$，由对称性即可推出 $A'^{\vee}_{\infty} \cong (A'^{\vee}_{\infty})^{\flat}$。根据定理 4.2.2，只需证明 $E'^{\flat}_{\infty} \cong E^{\flat}_{\infty}$，并且由 $M' \to E'_{\infty}$ 诱导的映射 $\langle\cdot,\cdot\rangle'^{\flat}_{\infty}$与由 $M \to E_{\infty}$诱导的映射的倾斜 $\langle\cdot,\cdot\rangle'_{\infty}$一致。

根据命题 5.4.5中的分解，要证明 $E'^{\flat}_{\infty} \cong E^{\flat}_{\infty}$ 只需证明

$$(P^{\times}_{\phi^{\vee}_{\infty}(m^{\vee})})^{\flat} \cong P'^{\times}_{\phi'^{\vee}_{\infty}(m^{\flat})},$$

但这正是推论 5.4.4的陈述。关于双线性形式的陈述成立，是因为 $h'\colon M' \to E'$ 由 r 映射

$$\langle\cdot,\phi'^{\vee}(m'^{\vee}_i)\rangle'_{\infty} : M' \to P'^{\times}_{B'_{\infty}\times\phi'^{\vee}_{\infty}(m^{\vee}_i)},$$

根据定义，它们是用 $\langle\cdot、\ \cdot\rangle_{\infty}$. 定义 h 的 r 相应映射的倾斜。因此我们得到了所需的结果:

命题 5.4.8. 设 A 是完美拟域 K 上的阿贝洛簇，其对偶为 $A^{\vee}$，并设 A_{∞} 和 $(A^{\vee})_{\infty}$ 为相应的完美拟覆盖。则存在一个 $K^{\flat}$ 上的阿贝洛簇 A'，使得 $A'^{\flat}_{\infty} \cong (A_{\infty})^{\flat}$ 且 $(A'^{\vee})_{\infty} \cong (A^{\vee})^{\flat}_{\infty}$。

有了这些结果，我们就可以倾斜线丛了。

定理 5.4.9。 给定一个线丛 L 在一个阿贝洛簇 A/K上，存在某个模型 $\mathfrak{A}_\alpha$ 的A ，使得 L 可扩张为一个形式线丛 $\mathfrak{L}_\alpha$ 在 $\mathfrak{A}_\alpha$上。若 L 的次数与p互素，则将 K 替换为一个 pro-p 扩张后，存在某个 $A'/K^\flat$ 如定理 4.2.2中的对象，以及线丛 L' ，它可扩张为形式线丛 $\mathfrak{L}'_\alpha$ ，使得这些形式线丛的特殊纤维相同。当且仅当 L 是丰沛线丛时，线丛 L' 也是丰沛的。

证明。 根据命题 5.1.2， L 等价于一个线丛 N 在 B上、一个群同态σ： $M \to M^\vee$，以及一个平凡化 χ： $M \to \phi^* N$，使得图表

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\sigma"] & B \arrow[d, "\varphi_N"] \\ M^\vee \arrow[r, "\phi^\vee"] & B^\vee. \end{tikzcd} \tag{5.4.4}$$

交换，且等式

$$\chi(m_1 + m_2) \otimes \chi(m_1)^{-1} \otimes \chi(m_2)^{-1} = \langle m_1, \sigma(m_2) \rangle \tag{5.4.5}$$

对所有 m_1、 $m_2 \in M$ 都成立。

根据命题 5.2.3 和命题 5.2.5， L 可扩展到某个形式模型 $\mathfrak{A}_\alpha$，且等价于选择一个形式模型 $\mathfrak{N}'$ ，它属于 N ，以及一个连续函数 f ，该函数由与 σ 和 χ相关的“热带数据”构造而成。为构造所需的 L'，我们利用 L的数据构造类似的数据 N'， σ'、以及 χ'，用于 A'。

在证明命题 5.3.4的形式阿贝尔簇在 $\overline{B'}$，使得线丛$\overline{\mathfrak{N}}$ 可提升为线丛 $\widetilde{\mathfrak{N}'}$ ，其一般纤维为N'。线丛 N'丰沛，当且仅当其特殊纤维丰沛。构造 A'时使用这一 B'，即可得到所需的 N'。我们注意到，这一步需要满足关于 L 次数的条件（也是唯一用到该条件之处）。

构造 A' 和 $A'^\vee$ ，同时按照命题 5.4.8进行构造，我们得到同构$\flat$： $M \cong M'$和 $\flat$： $M' \cong M'^\vee$，它们在特殊纤维上相一致（即，它们在特殊纤维上的作用相同）。我们利用这些同构将 σ 转化为群同态σ'： $M' \to M'^\vee$ ，它在特殊纤维上与 σ 相一致。因此，这些同构保持由此得到的双线性形式（5.1.10），所以一个正定当且仅当另一个正定。由命题 5.1.2中的丰沛性判据可知， L 是丰沛的当且仅当 L' 是。

要倾斜平凡化 $\chi: M \to \phi^* N \cong M \times K$，令 $m'_1, \ldots, m'_r$ 为基 $m_1, \ldots, m_r$ 在 $\flat$作用下于 M' 中的像。对于任意 a'_i in$\sharp^{-1}(\chi(m_i))$，我们定义 $r'(m'_i)$ 为 (m'_i, a'_i)（或许需要对 K 作一个 pro-p 扩张，以确保这样的元素存在），然后使用规则 (5.4.5) 将其延拓到所有 M' 上。□

关于 L 的次数条件有些令人困扰，但我们认为这是不可避免的。对于我们的完美类应用，引理 5.3.5 将帮助我们绕过这个问题。

作为首个应用，我们可以将定理 4.2.2 推广到阿贝尔簇，而不仅仅是阿贝洛簇。

定理 5.4.10. 设 A 是完美拟域 K 上的阿贝尔簇，其赋值群包含于 $\mathbb{Q}$。设 A_∞ 是定理 3.2.5中构造的完美拟覆盖。将 K 替换为一个 pro-p 扩张后，存在一个 A' 上的阿贝尔簇 $K^\flat$，使得$(A_\infty)^\flat \cong (A')_\infty$。

证明。命题 5.4.9 证明了对于极化次数与 p 互素的阿贝尔簇，此结论成立。任取阿贝尔簇 A 的一个极化 φ_A，将 A 除以 $\ker(\varphi_A)$ 的一个 p-Sylow 子群，可得到同源 $A \to A/\ker(\varphi_A) =: A_1$，其次数为某个正整数 k 的 p^k 倍。于是 φ_A 在 A_1 上诱导出一个次数与 p 互素的极化。根据引理 5.3.5，将 A 替换为 A_1 后即可证明该定理。□

推论 5.4.11. 设阿贝尔簇 A 定义在 K 上，且其上有一个线丛 L。将K 替换为一个 pro-p 扩张后，存在一个 $(\mathbb{G}_{m,\ K})_\infty$ 主齐性空间 $L_\infty^\times$，它位于 $q_1^*(L^\times)$ 之上。

证明。现在我们可以将线丛从 A 转移到 A'，因此论证与命题 5.3.4 中的基本相同。我们仍可利用立方定理，在塔的有限层上构造 p 次方根，并利用定理 5.4.9 找到一组定义在 A' 上、特殊纤维彼此同构的线丛。在倾斜侧，引理 5.3.2 给出一个$\mathbb{G}_{m,\ \infty}^\flat$-主齐性空间。解除倾斜后，我们得到一个特殊纤维正确的 $\mathbb{G}_{m,\ \infty}$ -主齐性空间，因此它必定就是我们要找的那个。□

注 5.4.12. Ben Heuer 告诉我们，他能够证明更强的结果，即 $\mathrm{Pic}(A_\infty) \cong \mathrm{Pic}(A_\infty^\flat)$，利用 $H^i(A_\infty, \mathbb{Z}_p) = 0$ 对于 $i > 0$。特别是，这为 [DH19，开放问题 5.14] 在此情形下给出了肯定回答。关于 Pic [Heu21a定理 1.8] 对 $\mathrm{Pic}^0(A_\infty)$ 的描述。

6. Weight-monodromy for complete intersections in abelian varieties

现在我们可以证明主要结果了：阿贝尔簇中完全交的权-单值猜想。在第 6.1 节中，我们将更详细地介绍权-单值猜想的背景设定。随后，我们将在第 6.2 节证明该定理。

6.1. 权-单值猜想的背景。设 X 是局部域 k 上一个剩余特征为 p 的真光滑d维簇，q 为剩余域的基数。设 ℓ 是一个不等于 p 的素数，i 是介于 0 和 $2d$ 之间的整数。那么，第 i 个 ´étale 上同调群 $V := H^i_{\text{ét}}(X_{\overline{k}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是一个有限维的 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 向量空间，并带有绝对伽罗瓦群 $G_k := \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$（属于 k）的作用。此作用定义了一个伽罗瓦表示 $\rho : G_k \to \mathrm{GL}(V)$。

在本节中，我们将说明如何在 V 上定义两个滤过。单值滤过来自 G_k 的惯性子群 I_k，而权滤过来自剩余域中 Frobenius 的一个提升的作用。权-单值猜想断言这两个滤过相同。

单值滤过源自 Grothendieck 的以下结果。

命题 6.1.1 ([ST68，第 515] 页命题)。设 $\rho: G_k \to \mathrm{GL}(V)$ 是一个有限维 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-表示。那么，惯性子群 I_1 的某个开子群I_k 满足：对所有 g 属于 I_1 的 $\rho(g)$，矩阵是幺幂的。

现在，我们可以使用在前一个证明过程中构造的幂零算子 $N := \log(\rho(g))$ 在 V 上定义单值滤过（经过 Tate 扭曲后）。

定义/命题 6.1.2. 设 $N: V \to V$ 是有限维向量空间上的幂零算子。那么存在唯一的有限递增滤过 Fil_j^N，其对象为 V，满足 $N\,\mathrm{Fil}_j^N$包含于 Fil_{j-2}^N，并且 N^k 诱导出一个同构 $\mathrm{Gr}_{i+j}^N V \cong \mathrm{Gr}_{i-j}^N V$. 。具体而言，我们有

$$\mathrm{Fil}_j^N V = \sum_{j_1 - j_2 = j} \ker N^{j_1+1} \cap \mathrm{Im}\, N^{j_2}.$$

证明。[Del80，命题 1.6。1] □

因此，单值滤过仅取决于伽罗瓦群中惯性的 pro-ℓ 部分。因此，对基域进行 pro-p 扩张将保留单值滤过。

为定义权滤过，我们固定一个元素 $\Phi \in \mathrm{Gal}_k$，它在剩余域上映射为几何弗罗贝尼乌斯。我们使用矩阵 $\rho(\Phi) \in \mathrm{GL}(V)$ 将 V 分解为特征子空间。Rapoport-Zink 的工作以及 de Jong 的改变定理，为我们提供了有关特征值的信息。

命题 6.1.3. 沿用上述记号，我们有如下分解

$$V = \bigoplus_{j=0}^{2i} W_j',$$

其中，$\rho(\Phi)$作用于W_j' 的特征值是权重为 j的韦伊数。也就是说，它们是代数数，并且对于 k 到 $\mathbb{C}$的任意嵌入，其绝对值均为 $q^{j/2}$。

概要。详情请参见 [RZ82] ，或参见以下简明的阐述： [Ill94，第 3] 节，以及 [Sch11，第 2]节。我们利用 de Jong 的改变定理，将问题归结为 X 具有半稳定模型的情形。该模型的特殊纤维由有限个光滑簇组成，它们彼此横截相交。根据韦伊猜想中的黎曼假设部分，特殊纤维的每个不可约分支上的 Frobenius 特征值都是权重为 i的韦伊数。如果 j 个分支交集非空，那么交集是一个余维为 j的光滑簇，因此 Frobenius 特征值是权重为 $i-j$的韦伊数。Rapoport-Zink 谱序列以这些部分构造出 X 的实际上同调，从而得到所需的分解。□

如果我们选择 Frobenius 的另一个提升，就会得到 V 的另一个分解。不过，权和维数保持不变，权滤过也不变：

定义 6.1.4。 沿用命题 *6.1.3*中的记号，在 V 上的权滤过 m第 项定义如下

$$W_m = \bigoplus_{j=0}^{m} W'_j.$$

对于几何弗罗贝尼乌斯的任意提升 Φ ，我们有 $N\Phi = q\Phi N$。这意味着单值算子与权滤过有良好的相互作用：我们有 $NW_m \subset W_{m-2}$。权-单值猜想的内容更强：

猜想 6.1.5 (Deligne, [Del71])。对于局部域 X 上的真光滑簇 k，其 i阶 ℓ-进 ´étale 上同调群上的权滤过与单值滤过相同。等价地，几何弗罗贝尼乌斯的任意提升 Φ 在单值滤过的任意分次部分 $\mathrm{gr}_j^N V$上的特征值都是权为 $i+j$的韦伊数。

这些陈述的等价性见 [Del80，第 1 节。6]。Deligne 从与层相关的 L-函数的极点角度，对这一猜想给出了另一种解释。他利用这种解释证明了当 k 的特征为 p 且 X 定义在一条曲线上时的猜想。证明见 [Del80，第 1 节。8] 关于该思路的简要概述，见 [Sch12，第 9] 节。

6.2. 阿贝尔簇中完全交的权-单值。 Scholze 关于权-单值的方法 [Sch12，第 9] 节总结如下：

命题 6.2.1. 设 Y 是一个定义在剩余特征为 p 的局部域 k 上的 d 维几何连通正常光滑簇，固定一个素数 $\ell \neq p$。设 K 是 k 的完美对象 pro-p 扩张，设 G 是 K 的绝对伽罗瓦群，且 $K^\flat$。要证明 Y 的权-单值猜想，只需构造一个定义在 $K^\flat$ 上的 d 维几何连通正常光滑簇 Z，使其可定义在包含于 $K^\flat$ 的某个局部域上，并配备映射

$$f_i^* : H^i(Y_{\mathbb{C}_p,\acute{e}t}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\acute{e}t}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

对于 $i \in \{0, \ldots, 2d\}$，这些映射是 G-等变的，与杯积相容，且 f_{2d}^* 是一个同构。

证明。我们首先验证映射 f_i^* 都是单射。为此，我们考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} H^i(Y_{\mathbb{C}_p,\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times H^{2d-i}(Y_{\mathbb{C}_p,\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\cup} & H^{2d}(Y_{\mathbb{C}_p,\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\cong} & \overline{\mathbb{Q}}_\ell \\ \downarrow{\scriptstyle f_i^* \times f_{2d-i}^*} & & \downarrow{\scriptstyle f_{2d}^*} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} \\ H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \times H^{2d-i}(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\cup} & H^{2d}(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{ét}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) & \xrightarrow{\cong} & \overline{\mathbb{Q}}_\ell. \end{array}$$

根据庞加莱对偶性，这些行对每个 i 都给出了 H^i 与 H^{2d-i} 之间的完美配对。左边的方块是交换的，因为 f_i^* 与杯积相容。右边的

方块中的映射全都是同构，因为 f_{2d}^* 是一个同构，且 Y 和 Z 都是几何连通的。

设 $c \in H^i(Y_{\mathbb{C}_p,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是一个上同调类，且满足 $f_i^*(c) = 0 \in H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$。由于 $H^{2d-i}(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中的每个上同调类与 0 的配对均为 0，根据图表的交换性可知，$H^{2d-i}(Y_{\mathbb{C}_p,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 中的每个上同调类都必须与 c 配对为 0。由于顶行是一个完美配对，c 因此必为 0，所以 f_i^* 如所需是单射。

由 G-等变性，映射 f_i^* 保持 $H^i(Y_{\mathbb{C}_p,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 和$H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 上的单值滤过。由单射性可知，$H^i(Y_{\mathbb{C}_p,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的第 j 个分次部分是 $H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{'et}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 第 j 个分次部分的子向量空间。因此，Y 的每个 Frobenius 特征值也是 Z 的 Frobenius 特征值。由于 Z 是真、光滑的，并且可以定义在特征为 p 的局部域上，Deligne 证明了 Z 满足权-单值性。也就是说，Z 的每个 Frobenius 特征值都是次数为 $i+j$ 的 Weil 数。因此，Y 也具有同样的性质，权-单值性成立。□

针对我们感兴趣的情形，设 Y是阿贝尔簇中的一个完全交A，它满足命题 6.2.1 的性质。我们必须构造一个簇 $Z \subset A'$以及映射 f_i^*，使它们也满足命题 6.2.1 的性质。为构造 Z，我们使用以下逼近结果：这是 Scholze 的逼近结果 [Sch12，命题 8 的类比。7]。

˜命题 6.2.2。设 $Y \subset A$ 是一个超曲面，设 Y 是Y的一个小开邻域，其中我们将 Y 和 A 视为 adic 空间。设 $q_1 : |(A_\infty)^\flat| \to |A|$ 是由倾斜到 A_∞，再投影到逆系统底部所诱导的拓扑空间映射。设 $q_1' : |(A_\infty)^\flat| \to |A'|$是由投影诱导的映射。则存在一个超曲面 $Z' \subset A'$，使得 $q_1'^{-1}(Z') \subset q_1^{-1}(\tilde{Y})$。等价地，存在某个开集$\tilde{Y'} \subset A'$，满足 $q_1'^{-1}(\tilde{Y'}) = q_1^{-1}(\tilde{Y})$，以及一个超曲面 $Z' \subset \tilde{Y'}$。

证明。存在某个可逆层 $\mathcal{L}_1$ on A 以及一个元素 $f \in H^0(A, \mathcal{L}_1)$，其零点轨迹为 Y。我们将归纳地定义一个线丛的逆系统 $L_1 \to L_2 \to \cdots$，使得由此诱导的全局函数环直系统 $R_1 \leftarrow R_2 \leftarrow \cdots$ 给出一个完美拟环 $R_\infty = (\varinjlim R_i)^\wedge$。其倾斜 $R_\infty^\flat$ 将由对 A'取类似的极限给出。这将使我们能够用一个从 A'拉回的函数来逼近 $q_1^* f$。

给定 A上的一个可逆层 $\mathcal{L}_n$，其关联的线丛（在概形范畴中，而非赋值空间或刚性空间中）为

$$L_n := \underline{\mathrm{Spec}}\Big(\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_n^{\otimes m}\Big).$$

记

$$R_n \cong \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} H^0(A, \mathcal{L}_n^{\otimes m})$$

对于这个线丛的整体函数环。注意，如果我们在刚性空间或 adic 空间范畴中工作，并将这个线丛解析化（如上一章所做），就会得到多得多的整体函数：刚性仿射直线上的整体函数远不止 {v1}。

然而，如果我们从 5.2.1 意义下的形式模型 $\mathfrak{L}_n$ 开始，就有 $H^0(\mathfrak{A}_n, \mathfrak{L}_n)[\frac{1}{p}] \cong H^0(A^{an}, \mathcal{L}_n^{an}) \cong H^0(A, \mathcal{L}_n)$，其中最后一个同构是刚性 GAGA [K¨op74, §5], [Con06, Example 3.2.6]。这些同构相容地延拓到张量幂 $\mathcal{L}_n^{\otimes m}$，因此我们可以用它们定义 R_n 的一个 K°-子模。我们通过令这个子模成为一个定义环来赋予 R_n 拓扑。这样，我们便可以理解 R_∞ 定义中的完备化。

当 p 为奇数时，我们定义

$$L_{n+1} = L_n^{\otimes \frac{p+1}{2}} \otimes [-1]^* L_n^{\frac{p-1}{2}}.$$

由立方定理可知，$L_{n+1}^{\otimes p} \cong [p]^* L_n$。若 $p = 2$，则我们改为令 $L_{n+1} = L_n^{\otimes 5} \otimes [-1]^* L_n^{\otimes 3}$，它满足 $L_{n+1}^{\otimes 2} \cong [4]^* L_n$，然后进行类似的论证。与定义5.3.1之后的讨论一样，我们有一个态射 $L_{n+1} \to L_{n+1}^{\otimes p}$，它由包含关系$\bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_{n+1}^{\otimes pm} \hookrightarrow \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{L}_{n+1}^{\otimes m}$诱导。现在我们可以将态射 $L_{n+1} \to L_n$ 定义为以下复合

$$L_{n+1} \to L_{n+1}^{\otimes p} \cong [p]^* L_n \to L_n.$$

这可纳入以下图表

$$\begin{array}{ccc} L_{n+1} & \longrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle f_n} & & \downarrow{\scriptstyle [p]} \\ L_n & \longrightarrow & A. \end{array} \tag{6.2.1}$$

由命题5.2.3可知，存在某个形式模型 $\mathfrak{A}_\alpha$，它是 A 的形式线丛 $\mathfrak{L}_1$，其定义在$\mathfrak{A}_\alpha$ 上，并且是 L_1的模型。归纳应用推论5.2.6，于是存在一个形式线丛 $\mathfrak{L}_n$ 定义在 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$ 上，它是 L_n的模型。因此，我们得到上述图表的一个形式模型

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}_{n+1} & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{\alpha/p^{n+1}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle [p]} \\ \mathfrak{L}_n & \longrightarrow & \mathfrak{A}_{\alpha/p^n}. \end{array} \tag{6.2.2}$$

引理 6.2.3。模 ϖ 映射的特殊纤维 $\mathfrak{L}_{n+1} \to \mathfrak{L}_n$ 在图表 *6.2.2* 经由相对 Frobenius 分解。

证明。在定理 3.2.4 的证明中，我们构造了 $\mathcal{U}_{n+1} = \{U_{i,n+1}\}$ 和 $\mathcal{U}_n = \{U_{j,n}\}$ 的形式解析覆盖，从而得到模型 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^{n+1}}$ 和 $\mathfrak{A}_{\alpha/p^n}$。构造这些覆盖时，我们确保映射 $[p]: A \to A$ 将每个$U_{i,n+1}$ 映到某个$U_{j,n}$，且相应形式仿射开集之间映射的特殊纤维经相对 Frobenius 分解。我们选择 α，使得线丛 L_{n+1} 和 L_n 分别在覆盖 $\mathcal{U}_{n+1}$ 和 $\mathcal{U}_n$ 上平凡。因此，在源空间的局部上，f_n 限制为映射 $\mathbb{A}^1_K \times U_{i,n+1} \to \mathbb{A}^1_K \times U_{j,n}$，它是映射 $\mathbb{A}^1_K \to \mathbb{A}^1_K$（将坐标 T 映到 T^p）与 $[p]$ 在 $U_{i,n+1}$ 上的限制的乘积。这两个映射在特殊纤维上都经相对 Frobenius 分解，因此它们的乘积也如此。□

推论 6.2.4。环 R_∞ 是完美对象。

证明。由于态射 $\overline{\mathfrak{X}_{n+1}} \to \overline{\mathfrak{X}_n}$ 经由相对 Frobenius 分解，诱导映射$R_n^\circ/\varpi \to R_{n+1}^\circ/\varpi$ 也经由相对 Frobenius 分解。事实上，根据 Künneth 公式（参见[Kem80，定理 14] 的适当一般性版本），我们有

$$\Gamma(\overline{\mathfrak{X}_{n+1}}^{(p)}) = \Gamma(\overline{\mathfrak{X}_{n+1}} \times_{\mathrm{Spec}(K^\circ/\varpi),\mathrm{Frob}} \mathrm{Spec}(K^\circ/\varpi)) \cong \Gamma(\overline{\mathfrak{X}_{n+1}}) \otimes_{K^\circ/\varpi,\mathrm{Frob}} K^\circ/\varpi \cong$$

$$R_{n+1}^\circ/\varpi \otimes_{K^\circ/\varpi,\mathrm{Frob}} K^\circ/\varpi \cong (R_{n+1}^\circ/\varpi)^{(p)},$$

因此，正确的泛性质在整体函数上成立。现在，命题2.4.2 的局部论证适用。□

根据定理5.4.9，我们有阿贝尔簇 L_1' 上的一个线丛 $A'/K^\flat$，它有一个定义在 $\mathfrak{X}_1'$ 上的形式模型 $\mathfrak{A}_\alpha'$，使得其模 $\varpi^\flat$ 特殊纤维与ϖ 的模 $\mathfrak{X}_1 \to \mathfrak{A}_\alpha$特殊纤维相同。将上述构造中的 $\mathfrak{X}_1'$ 替换为$\mathfrak{X}_1$，可得$R_\infty^\flat = (\varprojlim R_i')^\wedge$。

˜我们可以令 $Y = \{x \in A : |f(x)| \le \epsilon\}$，其中 ϵ 满足一定条件，且绝对值来自˜命题 5.2.3 中定义的 L 的整模型。沿着 q_1 拉回 Y 和 f，我们得到 A_∞ 中的一个开集，将其定义为 $q_1^*(f)$ 的 ϵ-邻域，并可将其视为 R_∞ 中的一个元素。利用[Bha17，命题 9.2.7]，（其基于 [Sch12，引理 6.5]，），我们可以用$\sharp$像中的一个元素 $g^\sharp$ 来逼近 $q_1^*(f)$ 的零点轨迹：$R_\infty^\flat \to R_\infty$. 我们可以调整 g，使其成为来自塔的某个有限层的某个 $g \in R_i'$ 的拉回，并且定义在 k 上。于是，$q_1^{-1}(\tilde{Y})$ 是 g 零点轨迹的一个 ϵ-邻域。取 g 的足够大次幂后，我们可以假设它来自塔底部的那一份 A'。g 的零点轨迹 Z' 就是所需的超曲面。□

如 [Sch12，推论 8.8]，，我们可以与超曲面相交，从而在 Y是 A中的完全交时，得到类似的结果。我们得到一个开集 $\tilde{Y}' \subset A'$，使得 $q_1'^{-1}(\tilde{Y}') = q_1^{-1}(\tilde{Y})$ 在A_∞'中作为拓扑空间相同；此外还有一个维数为 d的闭簇。我们可以选取 Z' 使其定义在 $K^\flat$中的某个局部域上，并取一个分支以确保其几何连通。我们强调，尽管我们使用了 adic 空间理论来构造 Z'，它仍是一个定义在局部域上的簇。

如 [Sch12 第 9]，节所述，我们现在进行一些约化。根据 [Hub98 定理3.6a]，，相关上同调群可以在相应的 adic 空间上计算。因此，从现在起我们将所有对象解析化，并严格在 adic 空间范畴中工作。根据 [Hub96 定理˜3.8.1]，，存在 Y 的一个开邻域 Y，位于 A 中，使得 Y 和 Y' 具有相同的上同调。根据 de Jong 的改变定理 [dJ96]，，我们可以选取一个射影光滑修改 $Z \to Z'$。诱导的上同调映射是单射，因此 $H^i(Z'_{\mathbb{C}_p^\flat}, \acute{}\mathrm{et}\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是 $H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat}, \acute{}\mathrm{et}\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 的直和项。因此，只需构造从 Y 的上同调到 Z 的上同调的映射即可。

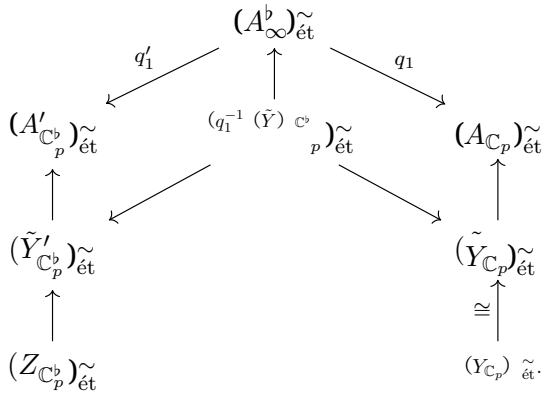
与 Scholze 关于环面簇的证明相比，最后一个难点在于，映射$[p]: A' \to A'$ 并不诱导 ´ etale topoi 的同构。因此，我们没有

Scholze 的投影映射 $\pi\colon \mathbb{P}^n_{K^\flat} \to \mathbb{P}^n_K$（定义在 ´etale topoi 和拓扑空间上，更一般地说，也定义在环面簇上）的类似物。为了解决这个问题，我们的上同调计算必须更明确地通过完美覆盖来进行。

倾斜等价 [Sch12，定理 7。17] 给出了 ´étale 拓扑的同构

$$\varprojlim_{[p]}(A'_{K^\flat})^\sim_{\text{ét}} \cong (A^\flat_\infty)^\sim_{\text{ét}} \cong \varprojlim_{[p]}(A_K)^\sim_{\text{ét}}.$$

根据[Sch12，定理 7。16], 这些逆极限与沿´到 A_K 或 $A'_{K^\flat}$的 étale 态射取纤维积可交换。因此我们得到如下 ´étale 拓扑图表



这里的平行四边形是纤维图表，而对角映射是投影映射，指向通过迭代映射 $[p]$ （针对 A' ）和 A 构造的波浪极限的底部。

我们首先从这个图表构造映射 f_i^*，然后验证它满足所需的性质。在上述图表中，拉回诱导出同构

$$H^i(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(Y_{\mathbb{C}_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$$

对所有 i 和 m，以及映射

$$H^i(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(q_1^{-1}(\tilde{Y})_{\mathbb{C}^\flat_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}),$$

$$H^i(\tilde{Y}'_{\mathbb{C}^\flat_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(Z_{\mathbb{C}^\flat_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}),$$

剩下的工作是构造一个映射

$$H^i(q_1^{-1}(\tilde{Y})_{\mathbb{C}^\flat_p}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(\tilde{Y}'_{\mathbb{C}^\flat_p,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$$

为此，我们将态射 $[p]\colon A' \to A'$ 分解为

$$A' \xrightarrow{\varphi} A'/A'[p]^0 \xrightarrow{\psi} A'.$$

这里 $A'[p]^0$ 是有限群概形 $A'[p]$的单位连通分支。态射 φ 是纯不可分的，并诱导出拓扑空间的同胚，因此根据 ´中的定理，它诱导出[Sch12，推论 719]中所述的 étale 拓扑斯同构。态射 ψ 是有限 ´étale 的。

将这些态射限制到

$$[p]^{-1}(\tilde{Y}'_{\mathbb{C}_p^\flat}) \xrightarrow{\varphi} \psi^{-1}(\tilde{Y}'_{\mathbb{C}_p^\flat}) \xrightarrow{\psi} \tilde{Y}'_{\mathbb{C}_p^\flat},$$

我们再次得到一个纯不可分同胚，后接一个有限 ́étale映射。由于纯不可分映射诱导一个 ́étale拓扑的同构，我们得到同构

$$H^i([p]^{-1}(\tilde{Y})_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^i(\psi^{-1}(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}), \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$$

对所有 i 和 m。由于 ψ 是有限 ́étale，迹映射 [Sta20，标记 03SH] 给出映射

$$H^i(\psi^{-1}(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}), \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$$

对所有 i 和 m。这些映射由层上的伴随映射 $\psi_*\psi^*(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$ 在 $\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}$ 诱导，并定义为如下复合

$$H^i(\psi^{-1}(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}), \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \xrightarrow{\cong} H^i(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}, \psi_*\psi^*(\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})) \to H^i(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}).$$

将这些映射复合起来，我们得到一个映射

$$H^i([p]^{-1}(\tilde{Y})_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(\tilde{Y}_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}).$$

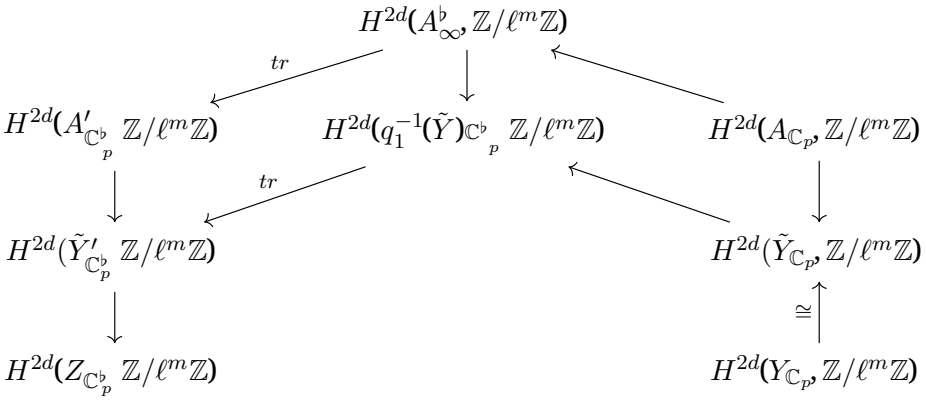
对定义 $q_1^{-1}(\tilde{Y})^{\mathbb{C}_p^\flat} \sim \varprojlim_n [p^n]^{-1}(\tilde{Y}'_{\mathbb{C}_p})$ 的逆系统迭代这一过程，我们得到所需的映射

$$H^i(q_1^{-1}(\tilde{Y})_{\mathbb{C}_p^\flat}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(\tilde{Y}'_{\mathbb{C}_p^\flat,\text{ét}}, \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}).$$

所有映射都是由 adic 空间的态射所诱导的拉回，以及（在迹映射的情形下） ́étale 层的同态组合而成的。根据这些构造的函子性，复合映射 $H^i(Y_{\mathbb{C}_p}, \text{ét}\ \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat}, \text{ét}\ \mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ 是 G-等变的，并且与杯积相容。取逆极限并张量上 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 后，映射 $f_i^*\colon H^i(Y_{\mathbb{C}_p}, \text{ét}\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^i(Z_{\mathbb{C}_p^\flat}, \text{ét}\ \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 也具有相同性质。命题 6.2.1 适用所需检查的条件只剩一个。

引理 6.2.5. 映射 $f_{2d}^*\colon H^{2d}(Y_{\mathbb{C}_p,ét}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) \to H^{2d}(Z_{\mathbb{C}_p^\flat,ét}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ 是一个同构。

证明。两个上同调群都同构于 $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$，因此只需证明该映射非零。只需在系数为 $\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}$ 时验证这一点，然后再取逆极限。在这种情况下，上述构造给出以下交换图。



现在的论证与[Sch12，引理 98], 基本相同，只是图表稍大一些。由于乘以 p 会在阿贝尔簇的所有 ℓ-进上同调群上诱导同构，图表顶部的两个对角映射都是同构。因此，只需证明映射 $H^{2d}(A'_{\mathbb{C}^{\flat}_p}\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z}) \to H^{2d}(Z_{\mathbb{C}^{\flat}_p}\mathbb{Z}/\ell^m\mathbb{Z})$ 非零。A' 上丰沛线丛的第一陈类的 d 次幂将具有非零像，因此证明完毕。

□

至此，定理 1.1.2 的证明完成。

注 6.2.6。 Scholze 定理和我们版本的定理陈述中都使用了“集合论意义上的”一词，这使得人们难以确定这些定理适用于哪些簇。对于大多数簇，尚不清楚是否能够以这种方式表示它们。暂且忽略“集合论意义上的”一词，那么，大多数阿贝尔簇中的光滑真完全交 Y 并非同时也是环面簇中的光滑真完全交。我们从 MathOverflow 上的回答 [Pol]中了解到以下论证。当 $\dim(Y) \geq 3$ 时，Lefschetz 超平面定理表明 $\pi_1(Y_{\mathbb{C}_p}) = \pi_1(A_{\mathbb{C}_p})$。如果 Y 也是某个光滑真环面簇 X 中的完全交，那么我们还会有 $\pi_1(Y_{\mathbb{C}_p}) = \pi_1(X_{\mathbb{C}_p})$。但是 $\pi_1(X_{\mathbb{C}_p})$ 是平凡的，而 $\pi_1(A_{\mathbb{C}_p})$ 不是，因此产生矛盾。

References

[BCC+19] Bhargav Bhatt、Bryden Cais、Ana Caraiani、Kiran S. Kedlaya、Peter Scholze 和 Jared Weinstein。 *Perfectoid spaces*，第 242 卷， *Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2019年。[BGH+18] Clifford Blakestad、Dami´an Gvirtz、Ben Heuer、Daria Shchedrina、Koji Shimizu、Peter Wear 和 Zijian Yao。阿贝尔簇的完美空间覆盖。 *Math. Res. Letters*， *to appear*，2018年。[Bha17] Bhargav Bhatt。关于完美空间的一门课程的讲义。 http://www-personal.umich.edu/~bhattb/teaching/mat679w17/lectures.pdf，2017年。[BL91] Siegfried Bosch 和 Werner L¨utkebohmert。退化阿贝尔簇。 *Topology*，30(4):653–698，1991年。[Bos14] Siegfried Bosch。 *Lectures on formal and rigid geometry* 2105 *Lecture Notes in Math-* ，第 卷，。 *ematics* 2014 Springer，Cham，。

[Con06] Brian Conrad。刚性几何中的相对丰沛性。 *Annales de l'institut Fourier*，56(4):1049–1126，2006年。[Del71] Pierre Deligne。霍奇理论。I。

´ *Actes du Congrés International des Mathématiciens (Nice,* ，第 卷：–。[*1970)* 1 425 430, 1971

Del80] Pierre Deligne。韦伊猜想。II。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(52 252，1980 137): –。[DH] Gabriel Dorfsman-Hopkins。在完美空间上提升线丛。 *Int. Math. Res. Not.*， *to*

appear 。[DH19]

Gabriel Dorfsman-Hopkins。完美空间的射影几何。arXiv:1910.05487，2019年。[dJ96] A. J. de Jong。光滑性、半稳定性与修正。 *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*，(83):51–93，1996年。[FvdP04] Jean Fresnel 和 Marius van der Put。 *Rigid analytic geometry and its applications*，数学讲义第218卷。

Progress in Mathematics。Birkhäuser Boston, Inc.，美国马萨诸塞州波士顿，2004年。[GR03] Ofer Gabber 和 Lorenzo Ramero。

Almost ring theory 1800 *Lecture Notes in Math-* ，第 卷，。

ematics 2003

Springer-Verlag，柏林，。[Gub07] Walter Gubler。非阿基米德解析空间的热带簇。 *Invent. Math.*，169 2 321( ): –376，2007年。[Heu21a] Ben Heuer。完美拟覆盖上的线丛：良约化情形。arXiv:2105.05230v1，2021年。[Heu21b] Ben Heuer。阿贝尔簇的 pro-´etale 一致化。 *arXiv:2105.12604v1*，2021年。[Hub96] R. Huber。

Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces。数学专题，E30。Friedr. Vieweg & Sohn，Braunschweig，1996年。[Hub98] R. Huber。刚性解析簇的 ´etale站点上直接像层的有限性结果。

J. Algebraic Geom.，7(2):359–403，1998年。[HW] Ben Heuer 和 Peter Wear。正在准备中。[Ill71] Luc Illusie。

Complexe cotangent et déformations. I。数学讲义，第239卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1971年。[Ill94] Luc Illusie。关于局部单值定理。 *Astérisque*，(223):9–57，1994年。P´eriodes p-adic（Bures-sur-Yvette, 1988）。[Ito05] Tetsushi Ito。等特征局部域上的权-单值猜想。

Amer. J. ，( ): –。[Kem

Math. 127 3 647 658, 2005

80] George R. Kempf。拟凝聚层上同调基本定理的一些初等证明。 *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*，10(3):637–645，1980年夏。[K¨op74] Ursula K

¨ ¨ ¨ ¨ ¨ *Schr.* opf。仿射空间上

Math. Inst. Univ. Münster (2) 7 +72 1974

的代数簇真族。[，(第 期):iv，。¨L16] ut

¨ *Rigid geometry of curves and their Jacobians* 61 *Ergebnisse* Werner L[

der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics

utkebohmert。86] ，第 卷，。Springer，Cham，2016年。 *Arithmetic Geometry*Mil[J.S. Milne。阿贝尔簇。载于 G. Cornell 和 J.H. Silverman 编，71] ，第103–150页。Springer-Verlag，纽约，1986年。 *Com-*

positio Math. 23 265 296, 1971 Oor[Frans

Oort。有限群概形、阿贝尔簇的局部模空间与提升问题。] ，：–。[Pol16] Francesco Polizzi。环面簇中的完全交。MathOverflow。网址：https://mathoverflow.net/q/295557（版本：2018-03-19）。

´ ´ *Ann.* PS[Vincent

Math. Qué. 40 1 167 202, 2016

Pilloni 和 Benoˆıt Stroh。相干上同调与伽罗瓦表示。82] ，( ): –。 ¨RZ¨M. Rapoport 和 Th. Zink。

*Invent. Math.*关于志村簇的局部 Zeta 函数。不同特征下的单值滤过与消失循环。[，68 1 21 101，1982年 ( ): –。11] Sch *Int. Math. Res. Not.*Anthony J. Scholl。超曲面与韦伊猜想。，(5 1022，2011 1010): –。

[Sch12] Peter Scholze。完美空间。 *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*，116:245–313，2012年。[Sch13] Peter Scholze。完美空间：综述。载于 *Current developments in mathematics 2012*，第193–227页。Int. Press，Somerville，MA，2013年。[Sch15] Peter Scholze。关于局部对称簇上同调中的挠。 *Ann. of Math. (2)*，182 3 945 1066，2015（ ）：–。[Ser88] Jean-Pierre Serre。 *Algebraic groups and class fields* 117 *Graduate Texts in Mathe-* ，第卷。 *matics* Springer-Verlag，纽约，。由法文译出。[She17] Xu Shen。阿贝尔型完美空间Shimura簇。 *Int. Math. Res. Not.*，（21 6653，2017年 6599）：–。[ST68] Jean-Pierre Serre和John Tate。阿贝尔簇的良约化。 *Ann. of Math. (2)*，88:492–517，1968年。[Sta20] Stacks Project作者。 *Stacks Project*。https://stacks.math.columbia.edu，2020年。[SW13] Peter Scholze和Jared Weinstein。 p 1 2 145 237, -可除群的模空间。 *Camb. J. Math.*， （ ）：–。[Ter98] Tomohide Terasoma。单值权滤过独立于 ℓ 9802051, 。arXiv:math/。[Wea20] Peter Wear。阿贝尔簇的完美空间覆盖与权重-单值猜想。 *PhD thesis* 2020 ，

University of California San Diego，。