声学 BTZ 黑洞中的罗宾边界条件

Christyan C. de Oliveira, [1], * Ricardo A. Mosna, [2], † 以及 Jo˜ao Paulo M. Pitelli[2], ‡

[1] *Instituto de Física "Gleb Wataghin", Universidade Estadual de Campinas, 13083-859, Campinas, SP, Brazil*

[2] *Departamento de Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Campinas, 13083-859, Campinas, SP, Brazil*

我们为 BTZ 黑洞上的共形耦合标量场提出了一种类比模型。该模型基于声波在拉瓦尔喷管中的传播。由于 BTZ 黑洞并非全局双曲时空，因此在其空间无穷远处规定额外的边界条件之前，标量场的动力学并未明确定义。我们表明，满足 BTZ 黑洞中狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的准正规模（QNMs），可以解释为相对于适当延伸的喷管定义的普通准正规模。我们还讨论了该模型对小扰动的稳定性。

arXiv:2303.05612v1 [gr-qc] 9 Mar 2023

I. 引言

众所周知，在无黏流体中传播的声波可以模拟黑洞背景中的标量波。Unruh 最早于 1981 [1] 证明了这一点，此后，物理学家又发现了许多具有相同特征的其他系统（详见 [2]）。尤其是，过去几十年来，越来越多的类比引力模型相继涌现，旨在探究黑洞背景中的各种现象。例如，人们已开展多项实验，观测旋转超辐射 [3], 、准正规振铃 [4, 5]以及霍金辐射 [6–11]的类比现象。

除实验检验外，类比模型在理论研究中也很重要，因为它们能为不同几何中的诸多问题带来新的见解。其中一类特别有趣的几何是非整体双曲时空。在这类空间中，只有在规定额外的边界条件后，确定性时间演化才有明确的定义[12–14]。这是因为信息可以在有限时间内到达空间无穷远（或从空间无穷远传来）。因此，来自无穷远的信息能够影响时空内部动力学。文献 [15, 16]给出了一些示例，展示了如何利用类比模型，从理论上深入理解非整体双曲时空。

一个特别有趣的非全局双曲空间例子是 Ba˜nados、Teitelboim 和 Zanelli（BTZ）黑洞 [17], ，它是三维广义相对论（GR）中具有负宇宙学常数 [18]的渐近反德西特解。对于这一时空，描述标量波传播的有效势在空间无穷远处不为零，因此解在那里不表现为平面波。因此，在渐近平坦时空中用于定义准正规模（QNMs）的通常出射边界条件无法满足 [19–21]。因此，对于 BTZ黑洞，准正规模不仅取决于有效势，以及无穷远处的边界条件。

在本研究中，我们基于拉瓦尔喷管引入一个用于描述 BTZ黑洞上共形耦合标量场的类比模型。拉瓦尔喷管是一种中部带有喉部的收敛-发散喷管，通常用于加速空气 [22]。通过在喷管两端建立足够大的压力差，可以实现跨声速流动状态。喷管一侧为亚声速流，另一侧则形成超声速流。声速点（空气速度等于声速的位置）位于喷管喉部。

我们发现，得到的喷管长度有限，其末端对应于 BTZ时空的空间无穷远，因此我们的类比模型有效地将 BTZ黑洞的外部区域映射到拉瓦尔喷管的有限区域。由于控制波传播的有效势在喷管末端（对应于 BTZ 的空间无穷远）并不为零，我们仍无法施加平面波出射边界条件来求得准正规模。为绕过这一问题，我们考虑喷管的一族延拓。我们选择这些延拓，使相应的有效势在新的末端趋于零。如此一来，我们恢复了平面波行为，因此可以施加出射边界条件，求得延伸喷管的普通准正规模（对应于 BTZ时空的 + 延拓）。这样，我们将 BTZ黑洞上共形耦合标量场的准正规模（它们在空间无穷远处不满足出射边界条件）解释为喷管中声波的普通准正规模（它们满足通常的出射边界条件）。我们发现，普通准正规模可以按宇称分类，并表明奇宇称普通准正规模对应于满足狄利克雷边界条件的黑洞准正规模；偶宇称普通准正规模则对应于满足诺伊曼或罗宾边界条件的黑洞准正规模。

最后，我们利用关于 BTZ黑洞中标量场动力学的一项结果 [21] ，讨论我们的模型在线性扰动下的稳定性。

本文结构安排如下。第II节中，我们简要回顾拉瓦尔喷管中的声学方程，并应用 [23]的方法来寻找满足以下条件的喷管：

* chris@ifi.unicamp.br

† mosna@unicamp.br

‡ pitelli@unicamp.br

其声波对应于 BTZ黑洞上共形耦合场的声波。第III节中，我们考察第II节有效势的延拓，以找到先前得到的喷管的延拓。我们还展示了如何利用声波的普通准正规模来模拟满足 BTZ 空间无穷远处狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的准正规模。之后，我们讨论模型在小扰动下的稳定性。最后，我们在第IV节讨论研究结果。

II. BTZ黑洞的喷管类比

A. BTZ黑洞中的波传播

与BTZ几何共形耦合的标量场 Ψ 由方程 [24, 25]支配

$$\left(\Box+\frac{3}{4l^2}\right)\Psi=0, \tag{1}$$

其中，达朗贝尔算子 $\Box=\nabla_\mu\nabla^\mu$是相对于时空度规计算的

$$ds^2=-\left(-M+\frac{r^2}{l^2}\right)dt^2+\left(-M+\frac{r^2}{l^2}\right)^{-1}dr^2+r^2d\phi^2. \tag{2}$$

这里， M 表示黑洞质量（在该时空中为无量纲量），l 是相应的三维反德西特空间（AdS_3）的半径。

通过以下方式分离变量

$$\Psi(t,r,\phi)=\frac{\psi(r)}{r^{1/2}}e^{-i\omega t}e^{im\phi}, \tag{3}$$

运动方程 (1) 给出

$$-\frac{d^2\psi(r_*)}{dr_*^2}+V_{\rm BTZ}(r_*)\psi(r_*)=\omega^2\psi(r_*), \tag{4}$$

其中，乌龟坐标定义为

$$r_*=-\frac{l}{\sqrt{M}}\,\mathrm{arcoth}\left(\frac{r}{l\sqrt{M}}\right), \tag{5}$$

有效势为

$$V_{\rm BTZ}(r_*)=\frac{(4m^2+M)}{4l^2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{M}r_*}{l}\right). \tag{6}$$

黑洞视界 $r=l\sqrt{M}$ 对应于 $r_*=-\infty$ ，而位于 $r=\infty$ 的共形边界映射到 $r_*=0$。为方便后续讨论，我们将 r_* 和 ω重新缩放为无量纲量 $\hat{r}_*=(\sqrt{M}/l)r_*$ 和 $\hat{\omega}=(l/\sqrt{M})\omega$。于是，径向运动方程（方程 (4)）变为

$$-\frac{d^2\psi(\hat{r}_*)}{d\hat{r}_*^2}+\hat{V}_{\rm BTZ}(\hat{r}_*)\psi(\hat{r}_*)=\hat{\omega}^2\psi(\hat{r}_*), \tag{7}$$

其中无量纲有效势为

$$\hat{V}_{\rm BTZ}(\hat{r}_*)=\left(\frac{4m^2+M}{4M}\right)\mathrm{sech}^2\,\hat{r}_*. \tag{8}$$

我们打算利用在经过适当设计的拉瓦尔喷管中传播的声波，模拟由有效势 $V_{\rm BTZ}(\hat{r}_*)$ 决定的标量场传播。为此，我们需要了解喷管形状如何决定波传播。接下来，我们回顾拉瓦尔喷管中流体动力学的基本方程，并展示横截面积如何决定声波的有效势。

B. 拉瓦尔喷管中的波传播

设沿喷管轴向的坐标为 x。我们考虑空气作为理想流体在准一维状态下流动，此时物理量仅沿 x 轴变化。其运动方程即为连续性方程和欧拉方程，

$$\partial_t(\rho A)+\partial_x(\rho v A)=0, \tag{9}$$

$$\rho(\partial_t+v\partial_x)v=-\partial_x p, \tag{10}$$

其中， ρ 为空气密度， p 为压力， v 为空气速度， A 为喷管横截面积。此外，我们假设气体为等熵流

$$p\propto\rho^\gamma, \tag{11}$$

其中， $\gamma=7/5$ 表示空气的热容比。

假设流动为无旋流， $v=\partial_x\Phi$，并定义比焓 $h(\rho)=\int\rho^{-1}dp$，方程 (10) 可化简为伯努利方程

$$\partial_t\Phi+\frac{1}{2}(\partial_x\Phi)^2+h(\rho)=0. \tag{12}$$

为推导声波的线性化波动方程，我们首先将 $(\rho,\ \Phi)$ 重写为两部分之和：一部分对应背景流 $(\bar{\rho},\ \bar{\Phi})$，另一部分对应声学扰动 $(\delta\rho,\ \phi)$。背景流和扰动满足

$$\begin{aligned}\rho&=\ \bar{\rho}+\delta\rho, &&\bar{\rho}\gg|\delta\rho|,\\ \Phi&=\ \bar{\Phi}+\phi, &&|\partial_x\bar{\Phi}|\gg|\partial_x\phi|.\end{aligned} \tag{13}$$

接下来 [26],我们定义辅助量

$$g=\frac{\bar{\rho}A}{c_s}=\frac{\bar{\rho}A}{\sqrt{\gamma\bar{p}/\bar{\rho}}}, \tag{14}$$

$$f(x)=\int\frac{|v|dx}{c_s^2-v^2}, \tag{15}$$

$$H_\omega=g^{1/2}\int dt e^{i\omega[t-f(x)]}\phi(t,x), \tag{16}$$

$$x_*=c_{s0}\int\frac{dx}{c_s(1-\mathcal{M}^2)}, \tag{17}$$

其中， $c_s = \sqrt{\partial p/\partial \rho} = \sqrt{\gamma \bar{p}/\bar{\rho}}$ 是局部声速，c_{s0} 是停滞声速，在等熵流动中保持恒定，而 $\mathcal{M} = |v|/c_s$ 是马赫数。用这些量表示，波动方程可化简为

$$-\frac{d^2 H_\omega}{dx_*^2} + V(x_*) H_\omega = \kappa^2 H_\omega, \tag{18}$$

其中

$$\kappa = \frac{\omega}{c_{s0}}, \tag{19}$$

有效势为

$$V(x_*) = \frac{1}{g^2}\left[\frac{g}{2}\frac{d^2 g}{dx_*^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{dg}{dx_*}\right)^2\right]. \tag{20}$$

有效势 $V(x_*)$ 描述了气体流动中声波的动力学。对于拉瓦尔喷管中的跨声速流动，所有无量纲量（ρ/ρ_0、p/p_0、$\mathcal{M}$，.....）均由函数 $A(x_*)/A_{th}$ 唯一确定，其中 A_{th} 是喷管喉部的横截面积 [22, 26]。特别是，函数 $g(x_*)$ 和有效势 $V(x_*)$ 也完全由 $A(x_*)/A_{th}$ 确定。另一方面，A（以及所有其他物理量）可以通过喷管中物理变量之间的方程，完全用 g 表示。

下面更仔细地看看如何用 g 表示物理量。首先，我们注意到，由方程（11）和（14）可知

$$g \propto \frac{\bar{\rho} A}{\bar{\rho}^{(\gamma-1)/2}}, \tag{21}$$

而由 [22] 可得

$$\left(\frac{A}{A_{th}}\right)^{-1} = \frac{1}{\eta_\gamma}\left[1 - \left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)}\right]^{1/2}\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}, \tag{22}$$

其中， ρ_0 是滞止密度，且

$$\eta_\gamma = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \tag{23}$$

由于方程 (18) 在对 g 进行缩放变换后保持不变，我们选取方程 (21) 中的系数，使得

$$g = \frac{\frac{A}{\eta_\gamma A_{th}}\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}}{2\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{(\gamma-1)/2}}. \tag{24}$$

基于上述假设，我们可以运用 [23] 中的相同推理，求出物理变量关于 g 的表达式:

$$\frac{A}{A_{th}} = \frac{\eta_\gamma\sqrt{2}\left[2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)\right]^{1/(\gamma-1)}}{\sqrt{1-\sqrt{1-g^{-2}}}}, \tag{25}$$

$$\left(\frac{\bar{\rho}}{\rho_0}\right)^{1-\gamma} = 2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right), \tag{26}$$

$$c_s = \frac{c_{s0}}{\sqrt{2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)}}, \tag{27}$$

$$\mathcal{M}^2 = \frac{2}{\gamma-1}\left(2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)-1\right). \tag{28}$$

为方便起见，我们将 x_* 和 ω 重新缩放为无量纲量 $\hat{}x_*$ 和 $\hat{}\omega$，使得

$$\hat{x}_* = \frac{x_*}{L}, \tag{29}$$

and

$$\kappa = \frac{\omega}{c_{s0}} = \frac{\hat{\omega}}{c_{s0}T} = \frac{\hat{\omega}}{L}, \tag{30}$$

其中， L 是喷管中的特征长度，特征时间间隔选为 $T = L/c_{s0}$。于是，方程 (18) 得出

$$-\frac{d^2 H_\omega}{d\hat{x}_*^2} + \hat{V}(\hat{x}_*) H_\omega = \hat{\omega}^2 H_\omega, \tag{31}$$

其中，无量纲有效势为

$$\hat{V}(\hat{x}_*) = \frac{1}{g^2}\left[\frac{g}{2}\frac{d^2 g}{d\hat{x}_*^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{dg}{d\hat{x}_*}\right)^2\right]. \tag{32}$$

C. 逆问题

上述计算表明，喷嘴形状 $A(x_*)$ 如何通过有效势 $V(x_*)$ 决定喷管中的波传播。现在，我们希望找到一种喷嘴形状，使其能够模拟 BTZ 黑洞背景中微扰所对应的有效势 V_{BTZ}。

如前所述，描述拉瓦尔喷管中流动的所有物理量都可以由横截面 A 确定。另一方面，给定一个有效势 $\hat{}\hat{}$，例如 $V = V_{\mathrm{BTZ}}$，我们应当能够通过求解方程 (32) 找到 g。进而，根据方程 (25) 确定喷管的形状。对 g 的边界条件是要求空气速度和声波速度在声学视界 $|v| = c_s$ 处相等，因此，由方程 (28) 可得，

$$g|_{\mathrm{horizon}} = \frac{\gamma+1}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}. \tag{33}$$

在将 $V_{\rm BTZ}$ 与喷管中的有效势等同之前，我们需要把 BTZ时空的径向坐标 r 与沿喷管的坐标 x 联系起来。为此，我们令相应的乌龟坐标相等，即 $d\hat{r}_* = d\hat{x}_*$。由方程 (17)、(27) 和 (28)，可得

$$d\hat{r}_* = d\hat{x}_* = \frac{c_{s0}d\hat{x}}{c_s(1-\mathcal{M}^2)} = \frac{\sqrt{2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)}d\hat{x}}{1-\frac{2}{\gamma-1}\left[2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)-1\right]}, \quad (34)$$

因此

$$\frac{d\hat{x}}{d\hat{r}_*} = \frac{1-\frac{2}{\gamma-1}\left[2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)-1\right]}{\sqrt{2g^2\left(1-\sqrt{1-g^{-2}}\right)}}, \quad (35)$$

其中，$\hat{x}$ 是无量纲坐标，与沿喷管方向的坐标之间的关系由 $\hat{x} = x/L$ 给出。

由于喷管和 BTZ时空的乌龟坐标已设为相同，我们现在可以令有效势相等，即方程（32）和（8），从而得到

$$\frac{g''(\hat{r}_*)}{2g(\hat{r}_*)} - \frac{g'(\hat{r}_*)^2}{4g(\hat{r}_*)^2} = \hat{V}_{\rm BTZ}(\hat{r}_*), \quad (36)$$

其中，撇号表示对 $\hat{r}_*$ 求导，$g' = dg/d\hat{r}_*$。通过代换 [27]，可以简化该方程

$$g(\hat{r}_*) = h^2(\hat{r}_*) \quad (37)$$

由此得到

$$-h''(\hat{r}_*) + \hat{V}_{\rm BTZ}(\hat{r}_*)h(\hat{r}_*) = 0. \quad (38)$$

为了得到与方程（8）中的有效势相对应的喷管构型，我们必须求解方程（38），并利用方程（37）和边界条件方程（33）来确定 g。然后，根据方程（25）和（35），我们可以求出横截面 A 与沿喷管方向的坐标 x 之间的函数关系，使得此时的声传播能够模拟 BTZ时空中的标量场传播。

D. BTZ黑洞上传播的共形标量场的拉瓦尔喷管

为尽可能简化计算，我们将考虑角动量为 $m = 0$ 的模解（$m \neq 0$ 的情况也可用类似方法处理，并将在第 IV 节中简要讨论）。对于这种情况，微分方程 (38) 的通解可表示为线性组合[1]

$$h(r_*) = c_1 h_1(r_*) + c_2 h_2(r_*), \quad (39)$$

其中 c_1、c_2 为常数，且

$$h_1(r_*) = P_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*), \quad (40)$$

$$h_2(r_*) = Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*). \quad (41)$$

这里，$P_\mu(z)$和 $Q_\mu(z)$分别表示第一类和第二类勒让德函数 [28]。

边界条件方程（33）要求 $h(r_*)$在声学视界（$r \to -\infty$）处有限。由于 $h_1(r_*)$在 $r \to -\infty$处趋于无穷大，我们应取 $c_1 = 0$ 和c_2 ，使得

$$h(r_*) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}\,Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*). \quad (42)$$

得到 $h(r_*)$后，我们使用方程（37）、（25）以及(35)...，求得横截面 A 作为沿喷管坐标的函数。所得喷管的侧面剖面由图1中的黑色实线表示，其中

我们还绘出了有效势（红色虚线）。BTZ黑洞的外部区域对应于

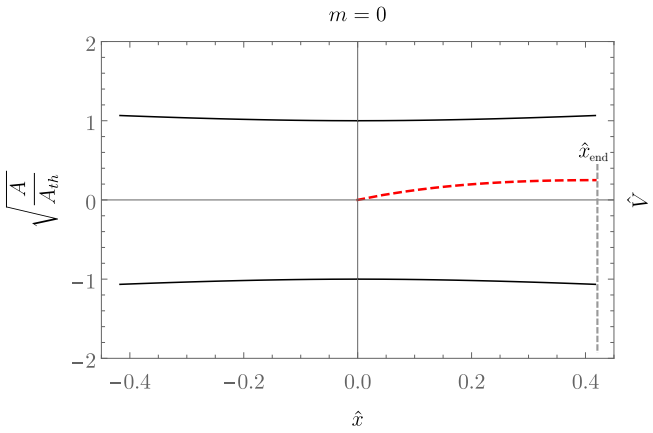

图 1。（黑色曲线）对应共形耦合标量场的拉瓦尔喷管侧面剖面。区域$\hat{x} > 0$ ($\hat{x} < 0$)分别对应亚声速（超声速）流动。声速点（流体速度等于声速的位置）位于喉部$\hat{x} = 0$。（红色虚线）亚声速区域中声波的无量纲有效势。

亚声速区域（$x > 0$）。

图 2 展示了沿喷管的 x 坐标与 BTZ黑洞的径向坐标 r 之间的关系。我们发现，x存在一个有限的上限，位于$x_{\rm end} \cong 0.417306$。因此，得到的喷管长度有限，$x$ 的上限映射到 BTZ黑洞的空间无穷远。换言之，这意味着 BTZ黑洞的外部区域映射到实验室中的一个有限区域，而 BTZ时空的空间无穷远则映射到喷管的右端。

由此可知，为了完全确定喷管中的声波传播，必须

[1] 下文中，为简化记号，我们省略 r_* 上的帽号。

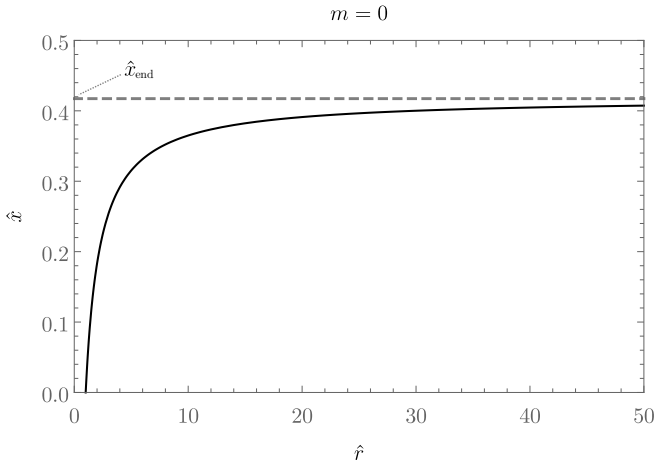

图 2. 沿喷管的无量纲坐标$\hat{x}$ 随 BTZ时空的无量纲径向坐标$\hat{r}$ 的变化。坐标$\hat{x}$ 具有有限的上限$\hat{x}_{\rm end} \cong 0.417306$，这意味着相应的喷管具有有限长度。坐标$\hat{x}$ 的上限映射到 BTZ时空的空间无穷远。

在其右端规定一个边界条件。在 BTZ 时空层面上，空间无穷远处需要边界条件，是因为该时空缺乏整体双曲性 [25], [12–14]。因此，根据上文建立的对应关系，我们的模型通过在喷管（有限）右端施加适当的边界条件，模拟 BTZ 时空共形边界处所需的边界条件。

文献 [25]研究了与 BTZ时空中传播的标量场的合理动力学相容的边界条件。特别是，对于共形耦合的标量场，Garbaz 等人发现，罗宾边界条件（RBCs）

$$\left.\frac{d\psi/dr_*}{\psi}\right|_{r_*=0} = \beta, \tag{43}$$

能够带来明确无歧义的时间演化。在这种情况下，$\beta = \pm\infty$ 对应于无穷远处的狄利克雷边界条件 $\psi|_{r_*=0} = 0$，而 $\beta = 0$对应于诺伊曼边界条件 $d\psi/dr_*|_{r_*=0} = 0$。此外，在文献 [21], 中，Dappiaggi 等人计算了罗宾边界条件对 BTZ黑洞中标量场准正规模的影响。在下一节中，我们将提出一种喷管构型，以实现满足罗宾边界条件的 BTZ黑洞准正规模。

III. BTZ类比喷管中的罗宾边界条件

A. 喷嘴延伸

如上所述，模拟 BTZ时空的喷管会在距喉部有限距离处突然终止 $x = x_{\rm end} \cong 0.417306$。接下来，我们将以这样的方式延伸喷管：使其最右端 $x \to \infty$ 处准正规模通常采用的边界条件，在 $x_{\rm end}$ 处诱导出罗宾边界条件。在 r_* 坐标中，这相当于将势 $V_{\rm BTZ}(r_*)$ 延伸至区域 $r_* > 0$ （请记住，坐标 r_* 的原始取值范围是从 $-\infty$ 到 0）。

我们将考虑 $r_* \geq 0$下 $V_{\rm BTZ}(r_*)$的以下延伸:

$$V_{\rm eff}(r_*) = \left[\frac{4m^2 + M}{M}\right] \operatorname{sech}^2 r_* + a\,\delta(r_*), \tag{44}$$

其中， $\delta(r_*)$是狄拉克δ函数， a 是一个常数，且 $-\infty < r_* < \infty$ 。我们注意到，当 $-\infty < r_* < 0$时，该有效势化为方程（8）。此外，当$r_* \to \infty$时， $V_{\rm eff}$ 趋于零，场恢复了渐近平坦时空中典型的平面波行为（即，当 $r_* \to \infty$时， $\psi \sim e^{\pm i\omega r_*}$）。特别地，这意味着现在可以在扩展模型中对准正规模施加通常的出射边界条件。δ函数项会导致 $A(x)$在 $x = 0$ 处发生形状变化（见图3），下文将探讨这一变化，以便在BTZ时空中实施罗宾边界条件。

让我们计算与上述延伸势相对应的延伸喷管形状。为此，我们将由方程 (44) 给出的 $V(r_*)$ 代入，求解方程 (38)。

对于 $r_* < 0$，计算过程与前一节讨论的情形完全相同。因此，相应的解由方程 (42) 给出。为方便起见，现将此解记为 $h^{(<)}(r_*)$,

$$h^{(<)}(r_*) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}\, Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*). \tag{45}$$

对于 $r_* > 0$，有

$$h^{(>)}(r_*) = c_1 h_1(r_*) + c_2 h_2(r_*), \tag{46}$$

其中 $h_1(r_*)$ 和 $h_2(r_*)$ 分别由方程 (40) 和 (41) 给出。现在，我们需要在 $r_* = 0$ 处匹配这些解，以确定常数 c_1、 c_2。首先，连续性要求

$$h^{(<)}(r_* \to 0^-) = h^{(>)}(r_* \to 0^+). \tag{47}$$

另一个边界条件可通过在 r_* =0 的任意小邻域内对方程 (38) 积分得到，由此可得

$$\left.\frac{dh^{(>)}}{dr_*}\right|_{r_*=0^+} - \left.\frac{dh^{(<)}}{dr_*}\right|_{r_*=0^-} = a\,h(0). \tag{48}$$

该方程表明， a 刻画了喷管在 $x = 0$ 处的形状变化（见图 3）。

利用式（47）和（48），我们得到

$$c_1 = -\sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}\frac{\pi^2 a}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}, \tag{49}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}\left[\frac{2}{\pi} + \frac{\pi a}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4}\right], \tag{50}$$

以便

$$h(r_*) = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}\, Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*)\,\theta(-r_*) + \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}}\left\{-\frac{\pi^2 a}{2\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4} P_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) + \left[\frac{\pi a}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4} + \frac{2}{\pi}\right] Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*)\right\}\theta(r_*), \quad (51)$$

其中 $\theta(r_*)$ 表示赫维赛德阶跃函数。随后可按照第II节中讨论的步骤确定喷嘴形状。图3展示了参数 a 取若干不同值时得到的喷管延伸部分。

我们注意到，截面积在 $x \to \infty$处的发散行为并不会破坏运动的一维特性，因为只要适当选择 x的单位，就总能使 $A(x)$的变化任意缓慢。正如 [23], 中所指出的，这等价于沿喷管轴向"拉动"喷管。在当前情况下，这种拉动意味着我们考虑一个比值$l/\sqrt{M}$更大的 BTZ黑洞。

—

B. 扩展喷管的准正规模

准正规模是表征系统在受到扰动[29–31]后的能量损失的特征振动。原则上，任何涉及开放系统的物理情境中都可能出现准正规模（不只是黑洞）[32]。黑洞背景中的准正规模通常定义为满足以下条件的模解：在视界处满足入射边界条件（$\psi_\omega \sim e^{-i\omega r_*}$，如$r_* \to -\infty$），并在空间无穷远处满足出射边界条件（$\psi_\omega \sim e^{i\omega r_*}$，如 $r_* \to \infty$）。对于渐近平坦时空，这一定义完全适用，因为与场耦合的有效势在无穷远处趋于零。然而，对于渐近曲率时空，有效势在无穷远处不为零，因此无法在那里区分入射模与出射模 [19–21]。

如前所述，与渐近曲率时空中的情形不同，我们的延伸喷管的有效势在 $r_* \to +\infty$ 处消失。因此，可以通过通常的渐近行为来定义准正规模

$$\psi_\omega \sim e^{-i\omega r_*}, \qquad r_* \to -\infty, \quad (52)$$

$$\psi_\omega \sim e^{+i\omega r_*}, \qquad r_* \to +\infty. \quad (53)$$

渐近条件（52）和（53）完全确定了拉瓦尔喷管中的声学准正规模。我们将满足方程（52）和（53）的模称为普通准正规模。

此前已有研究分析了BTZ黑洞中满足罗宾边界条件的准正规模[21]。接下来，我们将利用喷管中声波的普通准正规模，模拟BTZ黑洞中满足罗宾边界条件的共形标量场的准正规模。为此，我们现在对前者进行显式计算。

令 $\psi_<$ 和 $\psi_>$ 表示以下方程的解

$$-\frac{d^2\psi_\omega(r_*)}{dr_*^2} + V_{\rm eff}(r_*)\psi_\omega(r_*) = \omega^2\psi_\omega(r_*), \quad (54)$$

其有效势由方程（44）给出，分别对应 $r_* < 0$ 和 $r_* > 0$。方程（54）的通解可表示为以下函数的线性组合

$$\psi_1(r_*) = P^{i\omega}_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*), \quad (55)$$

$$\psi_2(r_*) = Q^{i\omega}_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*), \quad (56)$$

其中，$P^\mu_\nu(z)$ 和 $Q^\nu_\mu(z)$ 分别表示第一类和第二类缔合勒让德函数 [28]。

对于 $r_* < 0$，边界条件（52）意味着

$$\psi^{(<)}_\omega(r_*) = \omega\sinh(\pi\omega)\Gamma(-i\omega)\psi_1(r_*) - \frac{2i\omega}{\pi}\cosh(\pi\omega)\Gamma(-i\omega)\psi_2(r_*). \quad (57)$$

对于 $r_* > 0$，我们有

$$\psi^{(>)}_\omega(r_*) = c_1\psi_1(r_*) + c_2\psi_2(r_*). \quad (58)$$

在考虑 $r_* \to \infty$ 处的行为之前，我们在 $r_* = 0$ 处匹配 $\psi^{(<)}_\omega$和 $\psi^{(>)}_\omega$。连续性要求

$$\psi^{(<)}_\omega(r_* \to 0^-) = \psi^{(>)}_\omega(r_* \to 0^+). \quad (59)$$

我们还要求

$$\left.\frac{d\psi^{(>)}_\omega}{dr_*}\right|_{r_*=0^+} - \left.\frac{d\psi^{(<)}_\omega}{dr_*}\right|_{r_*=0^-} = a\psi(0), \quad (60)$$

这是在任意小的 $r_* = 0$ 邻域内对方程积分后得到的条件。(54)

求解方程 (59) 和 (60)，可得常数 c_1和 c_2 是参数 a 的函数。之后，我们在 $r_* \to +\infty$ 附近展开 $\psi^{(>)}_\omega$，

$$\psi^{(>)}_\omega(r_*) \sim D(\omega,a)e^{-i\omega r_*} + E(\omega,a)e^{i\omega r_*}. \quad (61)$$

渐近展开方程 (61) 的系数为

$$D(\omega,a) = \frac{\pi\,\mathrm{csch}(\pi\omega)\Gamma(-i\omega)}{2i\Gamma(i\omega)}\times \left[\frac{2^{2i\omega}\pi a}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\omega}{2}\right)^4} + \frac{2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\omega\right)^2}\right], \quad (62)$$

$$E(\omega,a) = -i\,\mathrm{csch}(\pi\omega) - \frac{ia}{4}[\mathrm{csch}(\pi\omega) - i]\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}-\frac{i\omega}{2}\right)^2}. \quad (63)$$

因此，扩展拉瓦尔喷管的准正规频率由下式的解给出

$$D(\omega,a) = 0. \quad (64)$$

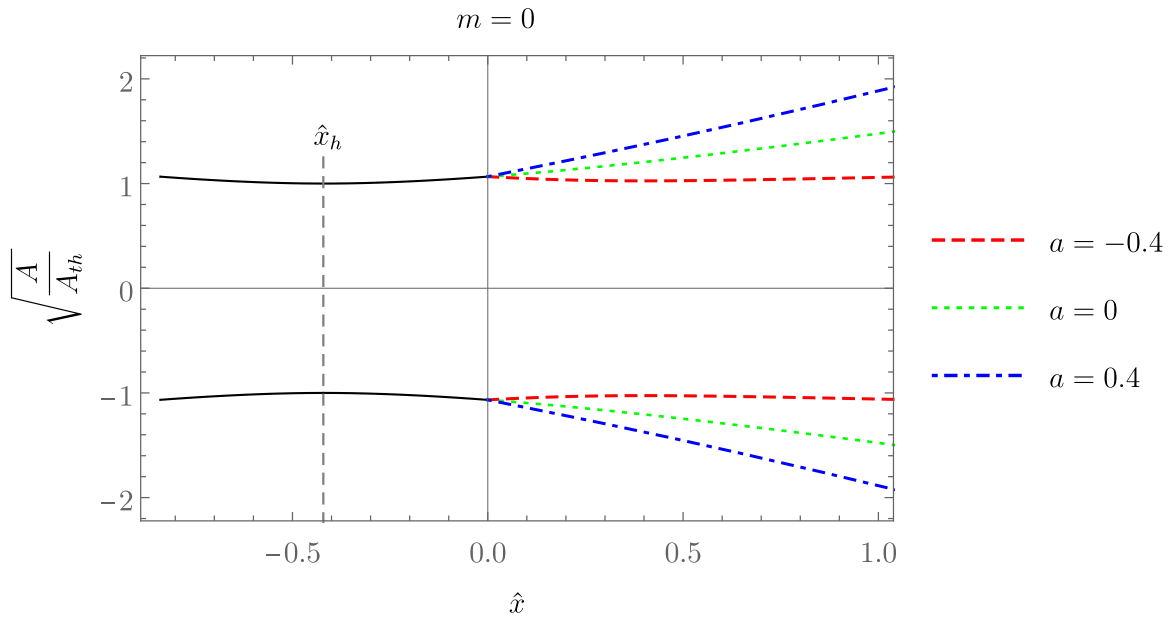

图 3. 参数 a取不同值时扩展拉瓦尔喷管的侧面剖面。每个取值都对应有效势的一种不同延拓。由于波动现象主要由有效势决定，a 取不同值将导致不同的准正规谱。请注意，我们将$\hat{x}$ 轴平移了$\hat{x} \to \hat{x} - \hat{x}_{\rm end}$，因此现在原点$\hat{x} = 0$ 对应 BTZ 空间无穷远，而视界对应$\hat{x}_h = -\hat{x}_{\rm end} \cong -0.417306$。

由方程 (62) 可知，普通准正规频率可分为两组。首先，由于伽马函数在负整数处有极点，因此频率

$$\omega_n = -\frac{i}{2}(4n+3), \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots \tag{65}$$

对任意 a值均满足方程 (64)。第二组准正规频率由以下各解给出

$$a = -\frac{2^{1-2i\omega}\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2}\right)^4}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\omega\right)^2}. \tag{66}$$

下面我们分析两种情况（方程 (65) 和 (66)）下得到的准正规模。为方便起见，我们将方程 (66) 的情况分为 (i) $a = 0$ 和 (ii) $a \neq 0$。

1. *Dirichlet quasinormal modes*

我们首先考虑频率由方程（65）给出的准正规模。利用 $\psi_\omega^{(<)}$ 和 $\psi_\omega^{(>)}$ 的表达式，即方程（57）和（58），我们得到

$$\psi_n^{(D)}(r_*) = -\Gamma\left(-2n - \frac{1}{2}\right) P_{-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}(\tanh r_*), \tag{67}$$

它在 $-\infty < r_* < \infty$ 中定义。根据变换公式 [28]

$$P_{-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{3}{2}}(\tanh r_*) = C_n \sinh r_* \cosh^{2n+\frac{1}{2}} r_* \times F\left(-n, -n; \frac{3}{2}; \tanh^2 r_*\right), \tag{68}$$

其中，F 表示标准超几何函数，并且

$$C_n = \frac{(-1)^n 2^{2n+\frac{5}{2}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(-n-\frac{1}{2}\right)}, \tag{69}$$

我们可以看到

$$\psi_n^{(D)}(r_* = 0) = 0. \tag{70}$$

由于 $\psi_n^{(D)}$ 是满足方程 (54) 并在视界 $r_* = -\infty$ 处服从入射边界条件的解，因此由方程 (70) 可知，在限制于 $-\infty < r_* \leq 0$ 时，普通准正规模 $\psi_n^{(D)}$ 可解释为满足 BTZ 时空无穷远处狄利克雷边界条件的准正规模。此外，我们注意到，这些模关于乌龟坐标 r_* 是奇函数，且不依赖于参数 a 的取值。我们还提到，方程 (65) 给出的频率是 BTZ 背景 [21, 33] 中已知的狄利克雷准正规频率。图 4 显示了 $n = 0$，1，2 对应的 $\psi_n^{(D)}$。

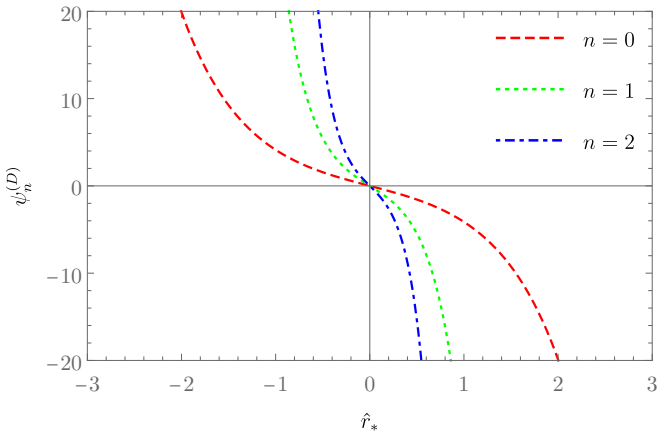

图 4. 延伸喷管中声波普通准正规模的空间部分随无量纲乌龟坐标的变化关系，以及由方程 (65) 给出的频率。这些准正规模关于$\hat{r}_*$是奇函数。对于$-\infty < \hat{r}_* \leq 0$，这些模解可以解释为 BTZ 时空空间无穷远处满足狄利克雷边界条件的共形耦合标量波的准正规模。注意，这些模不依赖参数 a。图例：红色虚线表示$n=0$对应的准正规模，绿色点线表示 $n=1$对应的准正规模，蓝色点划线表示 $n=2$对应的准正规模。

2. *Neumann quasinormal modes*

对于 $a=0$，满足方程 (66) 的频率为

$$\omega_k = -\frac{i}{2}(2k+1), \quad k=0,\,1,\,2,\,3,\,\ldots \tag{71}$$

当 k 为奇数时，$k=2n+1$，这些频率化为狄利克雷频率，即方程 (65)，相应的模由方程 (67) 给出。另一方面，当k 为偶数时，$k=2n$，我们有

$$\omega_n = -\frac{i}{2}(4n+1). \tag{72}$$

此情形下的模解为

$$\psi_n^{(N)}(r_*) = \Gamma\left(\frac{1}{2}-2n\right) P_{-\frac{1}{2}}^{2n+\frac{1}{2}}\left(\tanh r_*\right), \tag{73}$$

并在 $-\infty < r_* < \infty$ 中定义。利用变换公式 [28]

$$P_{-\frac{1}{2}}^{2p+\frac{1}{2}}(\tanh r_*) = C_n \cosh^{2n+\frac{1}{2}} r_* \times F\left(-n,-n;\frac{1}{2};\tanh^2 r_*\right), \tag{74}$$

其中

$$C_n = \frac{2^{2n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{\pi^{3/2}}, \tag{75}$$

我们可以看出，$\psi_n^{(N)}$是关于坐标 r_* 的偶函数。此外，由上述表达式可以证明

$$\left.\frac{d\psi_n^{(N)}}{dr_*}\right|_{r_*=0} = 0. \tag{76}$$

因此，当限制在 $-\infty < r_* \leq 0$ 时，普通准正规模 $\psi_n^{(N)}$ 对应于在 BTZ 黑洞的空间无穷远处满足诺伊曼边界条件的准正规模。我们注意到，方程 (72) 给出的频率是 [21] 中发现的 BTZ 背景下共形耦合标量场的诺伊曼准正规频率。图 5 展示了 $n=0$ 下的 $\psi_n^{(N)}$，1，2。

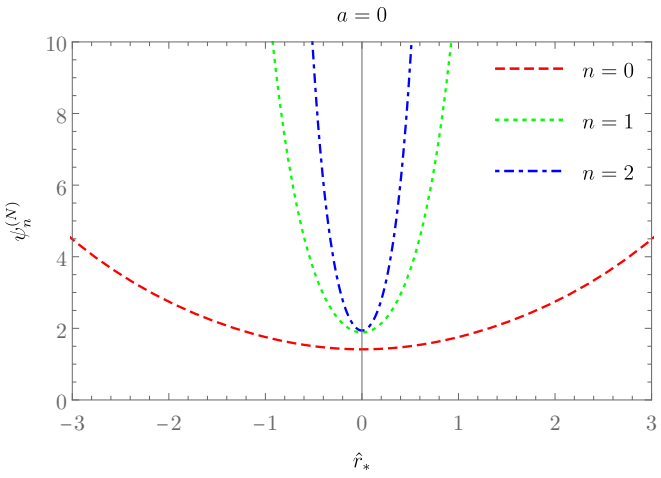

图 5. 延伸喷管中声波普通准正规模的空间部分随无量纲乌龟坐标变化的情况，以及方程 (72) 给出的频率。这些准正规模关于$\hat{r}_*$为偶函数。对于 $-\infty < \hat{r}_* \leq 0$，这些模解可解释为满足 BTZ时空空间无穷远处诺伊曼边界条件的共形耦合标量波的准正规模，$\beta = a = 0$。图例：红色虚线表示 $n=0$ 的准正规模，绿色点线表示 $n=1$ 的准正规模，蓝色点划线表示 $n=2$ 的准正规模。

3. *Robin quasinormal modes*

对于 $a \neq 0$，我们无法精确求解关于 ω 的方程 (66)。不过，我们仍然可以证明，相应的准正规模关于 r_* 是偶函数。首先，我们使用方程 (57)，并将方程 (66) 代入方程 (58)，得到

$$\left.\frac{d\psi_\omega^{(>)}}{dr_*}\right|_{r_*=0^+} = -\left.\frac{d\psi_\omega^{(<)}}{dr_*}\right|_{r_*=0^-} = -\frac{\sqrt{\pi}2^{1+i\omega}\Gamma(1-i\omega)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{i\omega}{2}\right)^2}. \tag{77}$$

令 $\phi(r_*)$ 在 $0 \leq r_* < \infty$ 中定义为 $\phi(r_*) = \psi_\omega^{(<)}(-r_*)$。由于有效势是偶函数，因此 $\phi(r_*)$

是 $0 \le r_* < \infty$ 中方程 (54) 的一个解。此外，我们有

$$\phi(0^+) = \psi_\omega^{(<)}(0^-), \tag{78}$$

$$\left.\frac{d\phi}{dr_*}\right|_{r_*=0^+} = -\left.\frac{d\psi_\omega^{(<)}}{dr_*}\right|_{r_*=0^-}. \tag{79}$$

然后，根据满足条件（78）和（79）的方程（54）的解的唯一性，我们得出 $\psi_\omega^{(<)}(-r_*) = \phi(r_*) = \psi_\omega^{(>)}(r_*)$。因此，整个区间$-\infty \le r_* < \infty$ 上的解可写为

$$\psi_\omega^{(R)}(r_*) = \psi_\omega^{(<)}(r_*)\theta(-r_*) + \psi_\omega^{(<)}(-r_*)\theta(r_*), \tag{80}$$

由此可直接得出， $\psi_\omega^{(R)}(r_*)$ 是一个偶函数。

将方程（77）代入方程（60），可以得到 $\psi_\omega^{(R)}$ 的另一项性质:

$$\beta = \left.\frac{(d\psi_\omega^{(<)}/dr_*)}{\psi_\omega^{(<)}}\right|_{r_*=0^-} = -\frac{a}{2}. \tag{81}$$

因此，当限制在 $-\infty < r_* \le 0$上时，我们可以将普通准正规模 $\psi_\omega^{(R)}$ 解释为 BTZ黑洞中的一个准正规模，其在空间无穷远处满足 Robin 边界条件，且 $\beta = -a/2$。

让我们更仔细地分析方程（81）。首先，利用方程（66），我们可以将其改写为

$$\beta = \frac{2^{-2i\omega}\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2}\right)^4}{\pi\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\omega\right)^2}. \tag{82}$$

考虑公式 [28]

$$\Gamma(2z) = \pi^{-1/2}2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{83}$$

取 $z = 3/4 - i\omega/2$，我们得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\omega\right) = \pi^{-1/2}2^{-i\omega-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\omega}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2}\right). \tag{84}$$

将方程 (84) 代入方程 (82)，可得

$$\beta = \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{i\omega}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{i\omega}{2}\right)^2}, \tag{85}$$

这与 [21] 中关于满足罗宾边界条件的准正规模频率的表达式一致。[2]

图6展示了扩展喷管的一些普通准正规模，其 $a = 4$，频率由方程 (66) 的解给出。准正规频率为 $\omega_0 = 0.628244 - 1.21348i$、$\omega_1 = 0.711933 - 2.69836i$、$\omega_2 = 0.501734 - 4.54024i$。这些普通准正规模对应于 BTZ时空中满足罗宾边界条件且具有 $\beta = -a/2 = -2$ 的准正规模。

总结本节的结果，我们计算了延伸喷管中声波的普通准正规模，并表明它们都具有确定的宇称：奇宇称普通准正规模对应于满足狄利克雷边界条件的BTZ黑洞准正规模；偶宇称普通准正规模对应于满足诺伊曼或罗宾边界条件的BTZ黑洞准正规模。这至少原则上为借助类比模型，在BTZ黑洞的共形边界处实现罗宾边界条件提供了一种巧妙的方法。请注意，由于对于任意初始数据，方程 (64) 所允许的两种准正规模（奇宇称和偶宇称）都会被激发，因此，为了观测对应于满足例如罗宾或诺伊曼边界条件的准正规模的模解，必须考察偶宇称初始数据的时间演化。

因此，我们可以将准正规模解释为具有确定宇称的（复）频率模。这与喷管的延伸方式相符。这种延伸产生了一个偶对称的有效势，如方程（44）所示；因此，结合方程（52）和（53）给出的渐近行为，宇称得以保持。此外，方程（78）和（79）表明，这种延伸表示的是同一个带有边界条件的柯西问题的两个映像

$$\begin{aligned} &\psi_\omega \sim e^{i\omega r_*}, && r_* \to \infty, \\ &\tfrac{d\psi_\omega}{dn}(r_*) + \tfrac{a}{2}\psi_\omega(r_*) = 0, && r_* \to 0, \end{aligned}$$

其中， d/dn 表示指向 $r_* = 0$的法向导数。由此，在这种“扩展构型”中得到的准正规频率，恰好就是通过方程（43）中的对应关系 $a = -2\beta$，在BTZ时空中找到的频率。

在结束本节之前，我们要指出，扩展喷管接合处缺乏光滑性，这是由有效势中的狄拉克 δ 函数造成的；这只是一种理想化处理，例如可以通过在方程（44）中考虑有限势垒来消除。事实上，取足够小的 $\epsilon > 0$，宽度为 2ϵ、高度为 $a/2\epsilon$的势垒会形成一个光滑的喷管，其准正规频率可以任意接近通过方程（65）和（66）计算得到的频率。这意味着，有效势中的狄拉克 δ 函数及由此产生的不光滑喷管，并不会对我们的模型构成显著限制。

C. 稳定性

对于渐近平坦时空中的黑洞，随时间指数增长（Im $[\omega] > 0$）的模解会出

[2] 静态BTZ黑洞中共形耦合标量场的 $m = 0$ 模情形对应于参数 $k = 0$ $\mu^2 = -3/4$ [21] β 和 。此处使用的罗宾边界条件参数与 [21] 中的参数 ζ之间的关系为 $\beta = -\cot\zeta$。

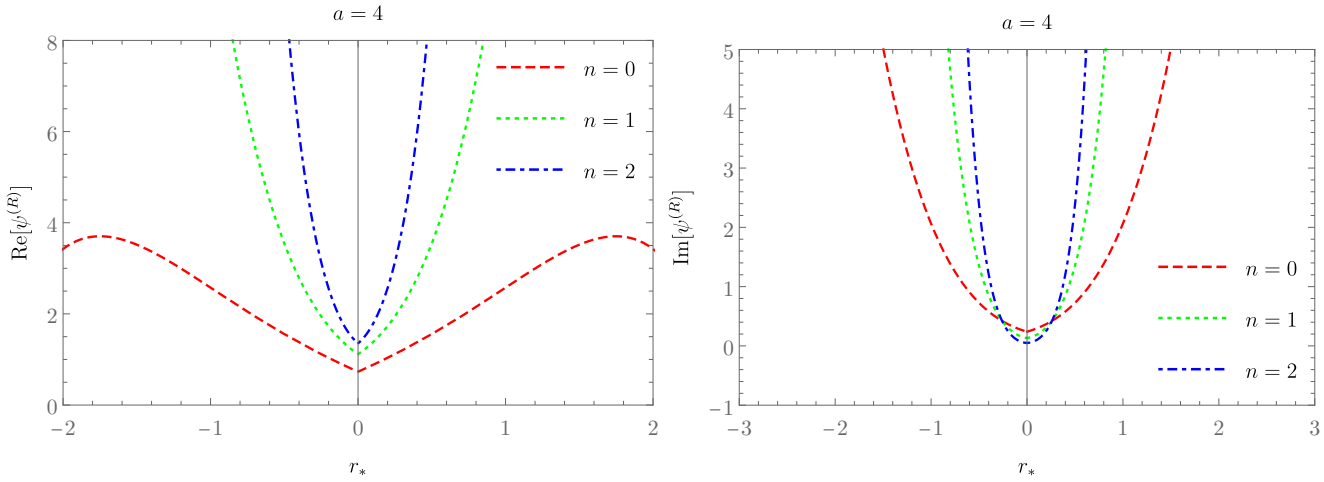

图 6. 延伸喷管中声波普通准正规模的空间部分随无量纲乌龟坐标变化的函数图，频率由方程（66）的解给出。这些准正规模关于 $\hat{r}_*$ 为偶函数。对于$-\infty < \hat{r}_* \leq 0$，这些模解可解释为 BTZ 时空空间无穷远处满足罗宾边界条件（ $\beta = -a/2 = -2$）的共形耦合标量波准正规模。频率通过数值方法计算，并按虚部绝对值递增的顺序排列。图例：红色虚线表示阻尼最弱的准正规模，其频率由 $\omega_0 = 0.628244 - 1.21348i$ 给出；绿色点线表示频率为 $\omega_1 = 0.711933 - 2.69836i$ 的准正规模；蓝色点划线表示频率为 $\omega_2 = 0.501734 - 4.54024i$ 的准正规模。

现，这是通过超辐射 [34]机制从背景时空中提取能量的结果。

对于旋转 BTZ 黑洞，Dappiaggi等人指出，某些罗宾边界条件 [21] 下会出现指数增长模。这类模有两种：（i）对应于超辐射不稳定性的模，它们从黑洞中提取能量；（ii）源于 AdS_3 体不稳定性的模 [35], ，它们不会从黑洞中提取能量。在这两种情况下，角动量都会从黑洞中被提取。

由于我们的模型未考虑黑洞旋转，由方程 (64) 确定的准正规谱中不会出现超辐射模。另一方面，由于类比时空中存在非超辐射的指数增长模，我们仍有理由探究：对于某个 a 值，这类模是否允许出现在我们的模型中。

根据 [21], ，当 β 大于临界值 β_c时，罗宾边界条件下会出现 $\mathrm{Im}[\omega] > 0$ 的模，

$$\beta > \beta_c, \tag{86}$$

在我们的情形中，它由[3]给出

$$\beta_c = \frac{2\,\Gamma^2\,(3/4)}{\Gamma^2\,(1/4)}. \tag{87}$$

用 a 表示，这意味着当.....时，预计会出现不稳定模

$$a < -\frac{4\,\Gamma^2\,(3/4)}{\Gamma^2\,(1/4)} = -\frac{2}{\pi^2}\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right), \tag{88}$$

[3] 参见脚注 2。

这里我们使用了欧拉反射公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi\csc\pi z$，其中 $z = 3/4$，从而得出最后一个等式。

从拉瓦尔喷管的角度来看，方程（25）中根号下的表达式表明，只有当 $g \geq 1$时，截面积才有定义。注意到 $h^{(<)}$ 在区间$-\infty < r_* < 0$内是严格递增函数，并且在 $r_* \to -\infty$处取得最小值，可知当 $r_* \leq 0$ 时确实如此。由于

$$\lim_{r_*\to-\infty} Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) = \frac{\pi}{2}, \tag{89}$$

我们看到，这个最小值为

$$\lim_{r_*\to-\infty} h^{(<)}(r_*) = \frac{3}{\sqrt{5}} > 1. \tag{90}$$

因此，我们得出结论：对于 a的任意取值， $g(r_*)$在 $-\infty < r_* \leq 0$内 > 1 。

对于 $r_* > 0$，需要考虑两种情况：

$$\text{(i)} \quad a < -\frac{2}{\pi^2}\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right), \tag{91}$$

$$\text{(ii)} \quad a \geq -\frac{2}{\pi^2}\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right). \tag{92}$$

在附录中，我们证明，对于情形 (i)，总存在 $\tilde{r}_*$，使得 $g(\tilde{r}_*) < 1$，因此，当 a 满足不等式 (91) 时，我们的模型定义不良。另一方面，我们证明，当 a 满足不等式 (92) 时，$g(r_*)$ 的值始终大于 1，因此我们的模型定义良好。

由此讨论可知，我们的模型是良好的

仅定义于

$$a \geq a_{\min} = -\frac{2}{\pi^2}\Gamma^4\left(\frac{3}{4}\right), \tag{93}$$

此外，根据此前及方程（88）中的讨论，我们得出结论：该模型中绝不会出现不稳定模态解。这一结果揭示了一个很好的特性，即允许的喷管构型自动只产生在 BTZ 时空中始终符合稳定性条件的边界条件。

IV. 总结与结论

我们提出了一种适用于分析 BTZ 黑洞上相应共形无穷远处罗宾边界条件所产生的准正规模的类比模型。按照 [23], 中介绍的方法，我们找到了一个拉瓦尔喷管构型，其中流动气体中的声波模拟了在 BTZ 黑洞中传播的共形耦合标量场。我们发现，所得喷管长度有限，且 BTZ时空的空间无穷远被映射到喷管的一端。随后，我们考虑了与有效势相对应的喷管延伸段，这些有效势在形式上将 BTZ 黑洞延拓至其共形无穷远之外。在乌龟坐标中，延拓后的模型代表同一问题的两个副本，因此产生了 BTZ时空中的准正规模（第二个副本通过宇称将模解有效延拓至 BTZ时空空间无穷远之外的区域）。

在求得延拓喷管中的普通准正规模后，我们证明这些模可用于模拟满足其共形边界处狄利克雷、诺伊曼和罗宾边界条件的 BTZ时空准正规模。最后，我们证明，对于 $m = 0$，模型定义良好的参数范围恰好对应于仅允许稳定准正规模的罗宾边界条件范围。

尽管我们将讨论范围限定在角动量为零的模式解（$m = 0$），但若取黑洞质量为 $M = m^2$，则可以用类似的方法处理 $m \neq 0$ 的情形，此时方程 (8) 的有效势变为 $\hat{V}(\hat{r}_*) = (5/4)\,\mathrm{sech}^2\,\hat{r}_*$。与 $m = 0$的情形一样，喷管长度有限；通过延长喷管，并在势中添加狄拉克δ函数项 $a\delta(r_*)$，便可模拟罗宾边界条件。其他结果在此情形下仍然成立：奇（偶）普通准正规模对应于在 BTZ 共形无穷远处满足狄利克雷（诺伊曼或罗宾）边界条件的准正规模；并且对于某个 $a_{\min}$，我们的模型在 $a \geq a_{\min}$ 时定义良好。最小值 $a_{\min}$ 仍将允许的边界条件范围限制在区间 $-\infty < \beta \leq \beta_{\max}$内，但现在 $\beta_{\max}$小于相应的临界值 β_c （且因此，允许的喷管构型仍只能再现与 BTZ 时空中的稳定性条件相一致的边界条件）。

致谢

作者感谢 M. Richartz 提供富有见地的讨论。C. C. O. 感谢巴西国家科学技术发展委员会（CNPq，巴西）提供的资助，资助编号为 142529/2018-4。R. A. M. 获得了巴西国家科学技术发展委员会的部分资助，资助编号为 310403/2019-7。J.P.M.P. 获得了巴西国家科学技术发展委员会（CNPq，巴西）的部分资助，资助编号为 311443/2021-4。

附录：满足不等式 (91) 和 (92) 的 a $g(r_*)$ 的行为

假设 a 满足方程 (91)。注意到

$$\lim_{r_* \to +\infty} Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) = +\infty, \tag{94}$$

由此可得

$$\lim_{r_* \to +\infty} h^{(>)}(r_*) = -\infty. \tag{95}$$

因此我们得出结论，存在 $\tilde{r}_*$ 使得$h^{(>)}(\tilde{r}_*) = 0$。对于这个 $\tilde{r}_*$，我们有 $g(\tilde{r}_*) < 1$，而我们的模型在情形 (i) 下定义不良。

现在让我们分析由不等式 (92) 给出的情形 (ii)。根据方程 (51)，我们有

$$\begin{aligned} h^{(>)}(r_*) = \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}} \Bigg\{ & \frac{2}{\pi} Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) \\ & + \frac{\pi a}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)^4} \left[Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) - \frac{\pi}{2} P_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) \right] \Bigg\} \\ & \geq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}} P_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*), \end{aligned} \tag{96}$$

这里我们用到了条件 (92) 以及以下事实

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) \geq \frac{\pi}{2} P_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) \tag{97}$$

对于 $0 \leq r_* < \infty$。不等式 (97) 可由关系 [28] 得出

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) = \frac{\pi}{2} P_{-\frac{1}{2}}(-\tanh r_*) \tag{98}$$

以及 $Q_{-1/2}$ 是关于 $-\infty < r_* < \infty$ 的递增函数这一事实。

由于

$$P_{-\frac{1}{2}}(\tanh r_*) \geq 1, \qquad 0 \leq r_* < \infty, \tag{99}$$

结果（96）意味着

$$h^{(>)}(r_*) \geq \sqrt{\frac{3}{\sqrt{5}}} > 1. \tag{100}$$

因此，由方程（37）可知，只要满足约束（92），$g(r_*) > 1$ 就成立，这意味着在情形 (ii) 下，我们的模型对 a 定义良好。

[1] W. G. Unruh，《物理评论快报》**46**，1351（1981年）。[2] C. Barcel´o、S. Liberati 和 M. Visser，《相对论在线评论》**14**，1（2011年）。[3] T. Torres、S. Patrick、A. Coutant、M. Richartz、E. W. Tedford 和 S. Weinfurtner，《自然·物理》**13**，833（2017年）。[4] T. Torres、S. Patrick、M. Richartz 和 S. Weinfurtner，《经典与量子引力》**36**，194002（2019 年）。[5] T. Torres、S. Patrick、M. Richartz 和 S. Weinfurtner，《物理评论快报》**125**，011301（2020年）。[6] G. Rousseaux、C. Mathis、P. Ma¨ıssa、T. G. Philbin 和 U. Leonhardt，《新物理学杂志》**10**，053015（2008年）。[7] S. Weinfurtner、E. W. Tedford、M. C. J. Penrice、W. G. Unruh 和 G. A. Lawrence，《物理评论快报》**106**，021302（2011年）。[8] L.-P. Euv´e、F. Michel、R. Parentani、T. G. Philbin 和 G. Rousseaux，《物理评论快报》**117**，121301（2016年）。[9] J. Steinhauer，《自然·物理》**12**，959（2016年）。[10] J. R. M. De Nova、K. Golubkov、V. I. Kolobov 和 J. Steinhauer，《自然》**569**，688（2019年）。[11] V. I. Kolobov、K. Golubkov、J. R. M. de Nova 和 J. Steinhauer，《自然·物理》**17**，362（2021年）。[12] R. M. Wald，《数学物理学杂志》**21**，2802（1980年）。[13] A. Ishibashi 和 R. M. Wald，《经典与量子引力》**20**，3815（2003年）。[14] A. Ishibashi 和 R. M. Wald，《经典与量子引力》**21**，2981（2004年）。[15] R. A. Mosna、Joao Paulo M. Pitelli 和 M. Richartz，《物理评论D》**94**，104065（2016年）。[16] C. C. de Oliveira 和 R. A. Mosna，arXiv 预印本 arXiv:2206.01147（2022年）。[17] M. Banados、C. Teitelboim 和 J. Zanelli，《物理评论快报》**69**，1849（1992年）。[18] S. Carlip，《经典与量子引力》**12**，2853 **(1995).** [19] D. Birmingham、I. Sachs 和 S. Sen，《物理评论快报B》**413**，281（1997）。[20] Y. Myung 和 N. Kim，《经典与量子引力》**21**，63（2003）。[21] C. Dappiaggi、H. R. Ferreira 和 C. A. Herdeiro，《物理评论快报B》**778**，146（2018）。[22] A. Roshko 和 H. Liepmann，*Elements of Gas-dynamics*（Wiley，1957）。[23] E. Abdalla、R. Konoplya 和 A. Zhidenko，《经典与量子引力》**24**，5901（2007）。[24] H. Lee、N. Kim 和 Y. Myung，《物理评论快报B》**441**，83 1998（）。[25] A. Garbarz、J. La Madrid 和 M. Leston，《欧洲物理学杂志C》**77**，1（2017）。[26] S. Okuzumi 和 M.-a. Sakagami，《物理评论D》**76**，084027 2007（）。[27] M. Cuyubamba，《经典与量子引力》**30**，195005 2013（）。[28] F. Olver、N. I. of Standards、T. (U.S.)、D. Lozier、R. Boisvert 和 C. Clark，*NIST Handbook of Mathematical Functions* 2010（剑桥大学出版社，）。[29] K. D. Kokkotas 和 B. G. Schmidt，《相对论在线评论》**2**，1（1999）。[30] R. A. Konoplya 和 A. Zhidenko，《现代物理评论》**83**，793（2011）。[31] E. Berti、V. Cardoso 和 A. O. Starinets，《经典与量子引力》**26**，163001（2009）。[32] E. Ching、P. Leung、A. M. Van Den Brink、W. Suen、S. Tong 和 K. Young，《现代物理评论》**70**，1545 1998（）。[33] V. Cardoso 和 J. P. S. Lemos，《物理评论D》**63**，124015 2001（）。[34] R. Brito、V. Cardoso 和 P. Pani，arXiv 预印本 arXiv:1501.06570（2015）。[35] C. Dappiaggi 和 H. R. C. Ferreira，Phys. Rev. D **94**，125016 2016（）。