arXiv:2303.05615v1 [math.ST] 9 Mar 2023

方差伽马分布：综述

Adrian Fischer*、Robert E. Gaunt†和 Andrey Sarantsev‡

摘要

方差伽马（VG）分布构成一个四参数族，其特殊情形和极限情形包括正态分布、伽马分布和拉普拉斯分布。其众多应用包括金融建模以及维纳空间上的分布逼近。本文综述方差伽马分布基础分布理论的最新进展，涵盖概率密度函数和累积分布函数、生成函数、矩和累积量、众数和中位数、Stein刻画、以其他随机变量表示该分布的方法，以及相关分布列表。我们还回顾方差伽马分布的参数估计方法及其若干应用，包括前述金融建模和维纳空间上的分布逼近。

关键词：方差伽马分布；分布理论；估计；方差伽马过程；金融建模；维纳空间上的近似

AMS 2010学科分类：主要分类 60E05；62-02；62E15；62F10

1 引言

参数为 $r>0$、 $\theta\in\mathbb{R}$、 $\sigma>0$、 $\mu\in\mathbb{R}$ 的方差伽马分布（VG），记作 VG(r, θ, σ, μ），其概率密度函数（概率密度函数）为

$$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}\Gamma(r/2)}\mathrm{e}^{\theta(x-\mu)/\sigma^2}\left(\frac{|x-\mu|}{2\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}\right)^{\frac{r-1}{2}}K_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sigma^2}|x-\mu|\right),\quad x\in\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

在极限 $\sigma\to 0$ 下，若 $\theta>0$，其支撑集为区间（μ, ∞）；若 $\theta<0$，则为（$-\infty$, μ）。这里 K_ν（x）是第二类修正贝塞尔函数；附录 A 给出了本文中使用的定义和基本性质。参数化形式（1.1）取自 Gaunt [36]，与 Finlay 和 Seneta [31] 给出的一种形式相似。Bibby和Sørensen [15] 以及 Kotz、Kozubowski 和 Podg´orski [60]，的著作中给出了其他参数化形式，他们将该分布称为广义（非对称）拉普拉斯分布。VG分布的其他名称还包括贝塞尔函数分布（McKay [80]）和麦凯II型分布（Holm 和 Alouini [53]）。

概率密度函数 (1.1) 最初由 Pearson、Jefferey 和 Elderton [93]写出，作为从二元正态总体中抽取的随机样本的样本协方差的精确概率密度函数。McKay [80] 以及 Pearson、Stouffer 和 David [94]进一步探讨了其分布性质和应用。概率密度函数中的四个参数以及第二类修正贝塞尔函数赋予了该分布很大的灵活性，因此 VG分布通常非常适用于统计建模；例如，Sichel [110] 报告称，在对西南非洲开采的钻石尺寸进行建模时，VG分布拟合效果极佳。VG分布（在对称情形下 $\theta=0$）由 Madan 和

*D´布鲁塞尔自由大学数学系, Adrian.Fischer@ulb.be
†曼彻斯特大学数学系, robert.gaunt@manchester.ac.uk
‡内华达大学雷诺分校数学与统计系, asarantsev@unr.edu

Seneta [77], 在一篇开创性论文中引入金融领域，此后在金融建模中得到广泛应用；例如，参见 Madan、Carr 和 Chang [73], 、Madan 和 Milne [74]以及 Seneta [108]。VG分布是广义双曲（GH）分布的一个特例，后者在金融建模中也颇受欢迎；例如，参见 Eberlein和Keller [25], 、Eberlein和 Prause [25] 以及 Rydberg [102]。除了适用于统计建模之外，VG分布还具有丰富的分布理论，其特殊情形或极限情形包括正态分布、伽马分布和拉普拉斯分布，以及两个零均值正态分布的乘积和两个独立伽马分布之差。因此，从 Gaunt [36] 以及 Eichelsbacher 和 Th¨ale [28], 的研究开始，VG分布近来作为一种极限分布，在概率学文献中得到应用，尤其是在维纳空间上的分析中。

迄今为止，文献中对VG分布最全面的论述见于Kotz 等人的优秀著作第4章 [60], ，其中将VG分布视为经典（非对称）拉普拉斯分布的自然推广。由于VG分布是GH分布的特例，因此可以根据GH分布的相关结果推知其分布性质，例如Bibby和Sørensen [15]以及Hammerstein [50]中的结果。然而，上述参考文献甚至未涵盖VG分布的一些最基本的分布性质，例如绝对矩或众数的公式；有兴趣的研究者只能在庞杂且难以查阅的文献中搜寻这些结果。

在这篇综述中，我们填补了文献中的一处空白，提供了关于VG分布基本分布理论的最新论述。由此，VG分布的许多重要分布性质如今汇集于同一份参考资料中。大多数结果已在文献中陈述，或者可以根据VG分布是GH分布特例这一事实，并借助该分布的已知结果推导得出。对于少数几项我们未能在文献中找到的结果，我们给出了直接而简洁的推导。

本文综述了概率密度函数的公式（第 2.1 节）、累积分布函数的公式（第 2.2 节）、生成函数、无限可分性和自分解性（第2.3节）、用其他随机变量表示该分布的方法（第 2.4 节）、相关分布列表（第 2.5 节）、Stein 刻画（第 2.6 节）、矩和累积量（第2.7节），以及众数和中位数（第 2.8 节）。本文综述了概率分布的一些最基本且重要的性质，但并不全面；例如，我们仅简要提及多元扩展。

第 3 节综述 VG分布的参数估计方法。本节简要概述了相关文献；由于 VG分布在统计建模领域，尤其是数理金融中的广泛应用，相关文献数量相当庞大。第4节介绍 VG分布在若干研究领域中的应用。第4.1节给出了一些例子，说明 VG分布如何作为与样本协方差和 Wishart矩阵相关的精确分布出现。第4.2节和第4.3节分别综述了方差-伽马过程（亦称拉普拉斯运动；例如参见 Kotz 等人 [60]）以及金融建模中广为人知的相关联系。第4.4节概述了近期有关将 VG分布应用于时间序列建模的文献。第4.5节综述了近期概率学文献中的一些研究，其中 VG分布作为极限分布出现。

记号。为简化公式，我们定义 $\lambda_\pm := (\sqrt{\theta^2 + \sigma^2} \pm \theta)/\sigma^2$.

2 分布性质

2.1 密度与参数化形式

我们先回顾文献中给出的其他一些参数化形式。第一种见于 Finlay 和 Seneta [31]。对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha^\alpha \mathrm{e}^{\theta_0(x-\mu)/\sigma_0^2}}{\sigma_0 \Gamma(\alpha)} \left(\frac{|x-\mu|}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\alpha\sigma_0^2}} \right)^{\alpha-1/2} K_{\alpha-1/2}\left(\frac{\sqrt{\theta_0^2 + 2\alpha\sigma_0^2}}{\sigma_0^2} |x-\mu| \right). \tag{2.2}$$

它与（1.1）中的参数化形式的关系为 $r = 2\alpha$, $\sigma^2 = \sigma_0^2/(2\alpha)$, $\theta = \theta_0/(2\alpha)$。若随机变量的概率密度函数为（2.2），则记作 $X \sim$方差伽马分布$_2(\alpha, \theta_0, \sigma_0, \mu)$。令 $\alpha = 1/\nu$，即可得到 Madan等人 [73], 的参数化形式；进一步令 $\theta_0 = 0$ ，则得到 Madan 和 Seneta [77]的（对称）VG分布参数化形式。Bibby和Sørensen[15]还给出了另一种参数化形式：

$$p(x) = \frac{\gamma^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda)} \left(\frac{|x-\mu|}{2\alpha} \right)^{\lambda-1/2} \mathrm{e}^{\beta(x-\mu)} K_{\lambda-1/2}(\alpha|x-\mu|), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

其中 $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$，且与（1.1）中的参数化形式的关系为 $r = 2\lambda$, $\theta = \beta/\gamma^2$, $\sigma = 1/\gamma$。最后，我们注意到 Kotz 等人 [60]使用的以下参数化形式：

$$p(x) = \frac{\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}}{2\sigma_0}(1/\kappa-\kappa)(x-\mu)}}{\sigma_0^{\tau+1/2}\Gamma(\tau)} \left(\frac{\sqrt{2}|x-\mu|}{\kappa + 1/\kappa} \right)^{\tau-1/2} K_{\tau-1/2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sigma_0} \left(\frac{1}{\kappa} - \kappa \right) |x-\mu| \right), \quad x \in \mathbb{R},$$

它与式 (1.1) 中的参数化之间存在如下关系： $r = 2\tau$, $\theta = \sigma_0(1/\kappa - \kappa)/2^{3/2}$, $\sigma^2 = \sigma_0^2/2$。此后，我们主要采用参数化 (1.1)，其他参数化下的结果则可通过上述参数变换直接推导得到。

概率密度函数 (1.1) 中出现的修正贝塞尔函数，使其初看时不太容易理解。以下极限形式有助于理解这一点。设 $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$,$\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$。利用极限形式 (A.64) 可得，当 $x \to \mu$ 时，

$$p(x) \sim \begin{cases} \dfrac{(1+\theta^2/\sigma^2)^{-(r-1)/2}}{2\sigma\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma((r-1)/2)}{\Gamma(r/2)}, & r > 1, \\ -\dfrac{1}{\pi\sigma} \log|x-\mu|, & r = 1, \\ \dfrac{1}{(2\sigma)^r\sqrt{\pi}} \dfrac{\Gamma((1-r)/2)}{\Gamma(r/2)} |x-\mu|^{r-1}, & 0 < r < 1 \end{cases} \tag{2.4}$$

（参见 Gaunt [35]）。由（2.4）可知，当 $r \leq 1$时，概率密度函数在原点处有一个奇点。此外，对于所有参数值（$r > 0$、 $\theta \in \mathbb{R}$、 $\sigma > 0$、 $\mu \in \mathbb{R}$），方差伽马分布（r, θ, σ, μ）均为单峰分布；更多详情见第2.8节。当 $r > 1$时，密度有界。图1给出了方差伽马分布概率密度函数（1.1）的曲线图，展示了改变形状参数 r 和偏度参数 θ 的影响（与上述结论一致）。此外，将极限形式（A.65）应用于（1.1）可得（参见 Gaunt [41]）

$$p(x) \sim \frac{x^{r/2-1}}{2^{r/2}(\theta^2+\sigma^2)^{r/4}\Gamma(r/2)} \mathrm{e}^{-\lambda_-(x-\mu)}, \quad x \to \infty, \tag{2.5}$$

$$p(x) \sim \frac{(-x)^{r/2-1}}{2^{r/2}(\theta^2+\sigma^2)^{r/4}\Gamma(r/2)} \mathrm{e}^{\lambda_+(x-\mu)}, \quad x \to -\infty. \tag{2.6}$$

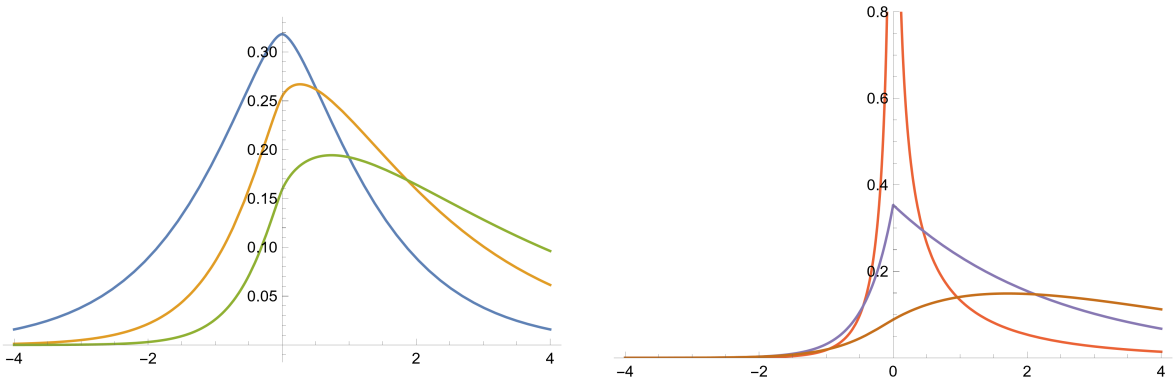


图 1：不同参数组合下的方差伽马分布概率密度函数：VG(3，0，1，0)、VG(3，0.5，1，0)、VG(3，1，1，0)（左图），以及VG(0.5，1，1，0)、VG(2，1，1，0)、VG(4，1，1，0)（右图）。

我们注意到，方差伽马分布的尾部比正态分布的尾部更厚。这一特性在金融建模中十分重要，使其比正态分布更能拟合实际金融数据；更多详情见第4.3节。

当 $r \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ 为偶数时，我们可以利用第二类修正贝塞尔函数的标准化简形式（见 (A.63)），得到一个用初等函数表示的概率密度函数公式（见 Kotz 等人 [60]，；对于 $\theta = 0$ 的情况，另见 Teichroew [113]）：

$$p(x) = \frac{|x-\mu|^{r/2-1}}{2^{r/2}(\theta^2+\sigma^2)^{r/4}\Gamma(r/2)} \exp\left(\frac{\theta}{\sigma^2}(x-\mu) - \frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sigma^2}|x-\mu|\right) \times$$
$$\times \sum_{j=0}^{r/2-1} \frac{(r/2-1+j)!}{(r/2-1-j)!j!} \left(\frac{\sigma^2}{2\sqrt{\theta^2+\sigma^2}|x-\mu|}\right)^j, \quad x \in \mathbb{R},\ r \in 2\mathbb{Z}^+. \tag{2.7}$$

由 (1.1) 可直接得出，VG 分布类在仿射变换下封闭（见 Kotz 等人 [60]）。设 $X \sim \text{VG}(r, \theta, \sigma, \mu)$。则对于 $a \neq 0$ 和 $b \in \mathbb{R}$，

$$aX + b \sim \text{VG}(r, a\theta, |a|\sigma, a\mu + b). \tag{2.8}$$

为简化表达式，我们有时令 $\mu = 0$，而一般情形 $\mu \in \mathbb{R}$ 的结果紧接着给出，因为 $\mu + \text{VG}(r, \theta, \sigma, 0) =_d \text{VG}(r, \theta, \sigma, \mu)$（这里显然是滥用了记号）。我们还注意到，若 $X \sim \text{VG}(r, \theta, \sigma, \mu)$，则 $-X \sim \text{VG}(r, -\theta, \sigma, -\mu)$；而若 $X \sim \text{VG}(r, 0, \sigma, 0)$，则 $-X =_d X$。按照 Kotz 等人 [60]，的术语，我们称 $X \sim \text{VG}(r, 0, \sigma, 0)$ 具有对称方差伽马分布。

2.2 累积分布函数

对于一般参数值 $r > 0, \theta \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$，VG分布的累积分布函数（CDF）没有闭式公式。我们列举一些可以给出精确公式的情形。对于 $X \sim \text{VG}(r, \theta, \sigma, \mu)$，令 $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$。

假设 $\theta = 0$。那么，根据方差伽马分布 $\text{VG}(r, 0, \sigma, \mu)$ 关于 $x = \mu$ 的对称性，可得 $F(x) = 1/2 + \text{sgn}(x) \int_0^{|x|} p(t)\, \mathrm{d}t$，其中 $\text{sgn}(x)$ 表示 x 的符号。利用式 (A.67) 计算积分可得，当 $x \in \mathbb{R}$ 时，

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{(x-\mu)}{2\sigma}\left[K_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)\mathbf{L}_{\frac{r-3}{2}}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) + \mathbf{L}_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)K_{\frac{r-3}{2}}\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)\right],$$

其中 $\mathbf{L}_\nu(x)$ 是第一类修正斯特鲁夫函数（定义和基本性质见 Olver 等人 [92, 第 11] 章）。关于累积分布函数在 $\theta = 0$ 情况下的其他公式，见 Jankov Maˇsirevi´c 和 Pog´any [55]，以及 Nadarajah、Srivastava 和 Gupta [85]。

现在假设 $r \in 2\mathbb{Z}^+$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$。于是，利用公式 (2.7) 可直接得到以下公式（参见 Nadarajah 等人 [85]）。当 $x \le \mu$ 时，

$$F(x) = \frac{(\theta^2+\sigma^2)^{-r/4}}{(2\lambda_+)^{r/2}(r/2-1)!}\sum_{j=0}^{r/2-1}\frac{(r/2-1+j)!}{(r/2-1-j)!j!}\left(\frac{\theta+\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}\right)^j\Gamma\left(\frac{r}{2}-j,-\lambda_+(x-\mu)\right),$$

而当 $x > \mu$ 时，

$$F(x) = 1-\frac{(\theta^2+\sigma^2)^{-r/4}}{(2\lambda_-)^{r/2}(r/2-1)!}\sum_{j=0}^{r/2-1}\frac{(r/2-1+j)!}{(r/2-1-j)!j!}\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}-\theta}{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}\right)^j\Gamma\left(\frac{r}{2}-j,\lambda_-(x-\mu)\right),$$

其中 $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ 是上不完全伽马函数。

现在回到一般情形 $r > 0, \theta \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$。由于 CDF 没有闭式公式，因此尾概率的渐近近似值得关注。设 $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$，其中 $X \sim \mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu)$。于是，利用 (1.1) 和极限形式 (A.69)，可得当 $x \to \infty$ 时，

$$\bar{F}(x) \sim \frac{1}{2^{r/2}(\theta^2+\sigma^2)^{r/4}\lambda_-\Gamma(r/2)}x^{r/2-1}\mathrm{e}^{-\lambda_-(x-\mu)}, \tag{2.9}$$

而由对称性可知，当 $x \to -\infty$ 时，

$$F(x) \sim \frac{1}{2^{r/2}(\theta^2+\sigma^2)^{r/4}\lambda_+\Gamma(r/2)}(-x)^{r/2-1}\mathrm{e}^{\lambda_+(x-\mu)}.$$

通过使用 Gaunt [37, 39]对积分 $\int_x^\infty \mathrm{e}^{\beta t}t^\nu K_\nu(t)\,\mathrm{d}t$, $x > 0$, $-1 < \beta < 1$, $\nu > -1/2$ 给出的界，可以得到 $\bar{F}(x)$ 和 $F(x)$ 的上界和下界。举例来说，由 Gaunt [39]的不等式 (2.9) 可知，对于 $x > 0$, $0 \le \beta < \alpha$,$-1/2 < \nu \le 1/2$，有 $\int_x^\infty \mathrm{e}^{\beta t}t^\nu K_\nu(\alpha t)\,\mathrm{d}t \le (\alpha-\beta)^{-1}\mathrm{e}^{\beta x}x^\nu K_\nu(\alpha x)$，当且仅当 $\nu = 1/2$ 时取等号；若 $\nu > 1/2$，则不等式反向。将此界应用于 (1.1) 可得，对于 $\theta \ge 0, x > \mu$,

$$\bar{F}(x) \le \frac{\mathrm{e}^{\theta(x-\mu)/\sigma^2}}{\sigma\sqrt{\pi}\lambda_-\Gamma(r/2)}\left(\frac{|x-\mu|}{2\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}\right)^{\frac{r-1}{2}}K_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sigma^2}|x-\mu|\right) = \frac{p(x)}{\lambda_-}, \tag{2.10}$$

当且仅当 $r = 2$ 时取等号；若 $r > 2$，则不等式反向。这里 p 是概率密度函数 (1.1)。不等式 (2.10) 在 $x \to \infty$ 时是紧的，这一点可通过将极限形式 (A.65) 应用于 (2.10) 中的界，并与 (2.9) 比较而看出。

2.3 生成函数、无限可分性与自分解性

$X \sim \mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu)$的矩母函数可利用积分公式 (A.68) 轻松求得（例如，参见 Bibby和Sørensen [15]），

$$M(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \mathrm{e}^{\mu t}\big(1-2\theta t-\sigma^2t^2\big)^{-r/2}, \tag{2.11}$$

它 xists 已给出 $-\lambda_+ < t < \lambda_-$ （见 (2.5) 和 (2.6)）。特征函数 is

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu t}\big(1-2\mathrm{i}\theta t+\sigma^2t^2\big)^{-r/2}. \tag{2.12}$$

累积量生成函数定义于 $-\lambda_+ < t < \lambda_-$，其表达式为

$$\begin{aligned} K(t) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] &= \mu t - \frac{r}{2}\log\left(1 - 2\theta t - \sigma^2 t^2\right) \\ &= \mu t - \frac{r}{2}\log\left(1 - \frac{t}{\lambda_-}\right) - \frac{r}{2}\log\left(1 + \frac{t}{\lambda_+}\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

根据特征函数公式（2.12），显然，若 $X_1 \sim$VG(r_1, θ, σ, μ_1) 和 $X_2 \sim$VG(r_2, θ, σ, μ_2) 相互独立，则

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{VG}(r_1 + r_2, \theta, \sigma, \mu_1 + \mu_2) \tag{2.14}$$

（见 Bibby和Sørensen [15]）。因此，只要随机变量具有相同的 θ 和 σ，VG 分布类在卷积下封闭。

由（2.14）可知，VG(r, θ, σ, μ) 分布是无限可分的。此外，VG 特征函数具有如下 Lévy–Khintchine 表示（见 Madan等人 [73]）：

$$\varphi(t) = \exp\left(\mathrm{i}\mu t + \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - 1)\nu(x)\,\mathrm{d}x\right), \tag{2.15}$$

其中，Lévy 密度为

$$\nu(x) = \frac{r}{2|x|}\mathrm{e}^{-\lambda_+|x|}\mathbf{1}_{x<0} + \frac{r}{2x}\mathrm{e}^{-\lambda_- x}\mathbf{1}_{x>0}. \tag{2.16}$$

若实数轴上的分布 $\mathcal{Q}$ 满足以下条件，则称其为自分解分布（Sato [103, 定义 15.1，第 90] 页）：对于任意常数 $c \in$ (0, 1)，都存在一个概率空间，其中有一个随机变量 $X \sim \mathcal{Q}$ 和一个与之独立的随机变量 Y，使得 $cX + Y \sim \mathcal{Q}$。自分解分布是无限可分的，并具有特殊形式的 Lévy–Khintchine 表示。由于由（2.16）给出的 Lévy 密度 $\nu(x)$ 可写成 $\nu(x) = h(x)/|x|$ 的形式，其中 $h(x) \geq 0$ 对负的 x 单调递增，对正的 x 单调递减，因此根据表示式（2.15）（见 Sato [103, 推论 15.11]），显然 VG(r, θ, σ, μ) 分布是自分解的。当 $r \in 2\mathbb{Z}^+$ 时，也可以显式构造 VG(r, θ, σ, μ) 分布的自分解性。令 $X \sim$VG($2n, \theta, \sigma, \mu$)，其中 $n \in \mathbb{Z}^+$。那么，对于任意 $c \in [0, 1]$,

$$X =_d cX + (1 - c)\mu + \sum_{i=1}^{n} V_i, \tag{2.17}$$

其中，$V_1, \ldots, V_n$ 是独立同分布随机变量，可表示为 $V_1 =_d \sigma(\delta_1 W_1/(\sigma\lambda_-) - \sigma\lambda_-\delta_2 W_2)$。这里，$\delta_1$ 和 δ_2 是 0-1 随机变量，其概率为

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\delta_1 = 0, \delta_2 = 0) = c^2, \quad \mathbb{P}(\delta_1 = 1, \delta_2 = 0) = (1 - c)\left(c + \frac{1 - c}{1 + \sigma^2\lambda_-^2}\right), \\ &\mathbb{P}(\delta_1 = 0, \delta_2 = 1) = (1 - c)\left(c + \frac{(1 - c)\sigma^2\lambda_-^2}{1 + \sigma^2\lambda_-^2}\right), \quad \mathbb{P}(\delta_1 = 1, \delta_2 = 1) = 0, \end{aligned}$$

其中，W_1 和 W_2 服从率参数为 1 的指数分布，且 X、W_1、W_2和（δ_1, δ_2）相互独立。Kotz 等人 [60, 命题 4.14], 给出了表示式 (2.17)，他们通过结合 VG 分布的卷积性质 (2.14) 以及 VG($2, \theta, \sigma, \mu$) 分布属于非对称拉普拉斯分布这一事实（见第 2.5.1 节第 1 部分），推广了 Ramachandran [97] 对非对称拉普拉斯分布的表示。

2.4 其他随机变量的表示

1. VG 分布具有以下基于相互独立的正态随机变量和伽马随机变量的基本表示；参见 Kotz 等人 [60, 命题 4.12] ，其中陈述了该结果，并简要给出了涉及特征函数的证明。为统一记号，考虑具有概率密度函数 $p(x) = \lambda^r x^{r-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}/\Gamma(r)$ 的 $\Gamma(r,\lambda)$ 分布， $x>0$。设 $S\sim\Gamma(r/2,1/2)$ 和 $T\sim N(0,1)$ 为独立随机变量。那么

$$\mu+\theta S+\sigma\sqrt{S}T\sim \mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu). \tag{2.18}$$

因此，VG分布是一元正态方差-均值分布（Barndorff-Nielsen、Kent 和 Sørensen [12]）。事实上，在给定 S 的条件下，随机变量 $\mu+\theta S+\sigma\sqrt{ST}$ 服从 $N(\mu+\theta S,\sigma^2 S)$ 分布。

2. 当 $r\geq 1$ 为正整数时，VG分布可以表示为相互独立的标准正态随机变量 $X_1,\ldots,X_r$ 和 $Y_1,\ldots,Y_r$ 的函数:

$$\mu+\theta\sum_{i=1}^{r}X_i^2+\sigma\sum_{i=1}^{r}X_iY_i\sim \mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu). \tag{2.19}$$

（见 Gaunt [36, 推论 2.5]）。为此，首先定义 $Z_1=\mu+\theta X_1^2+\sigma X_1Y_1$ 和 $Z_i=\theta X_i^2+\sigma X_iY_i$, $i=2,\ldots,r$。注意，对于 $i=1,2,\ldots,r$, $X_iY_i=_d|X_i|Y_i$，并且 $X_i^2\sim\Gamma(r/2,1/2)$。因此，由（2.18）可得 $Z_1\sim\mathrm{VG}_1(1,\theta,\sigma,\mu)$，且 $Z_i\sim\mathrm{VG}_1(1,\theta,\sigma,0)$, $i=2,\ldots,r$。由此，根据（2.14）可知 $\sum_{i=1}^{r}Z_i\sim\mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu)$。

3. VG分布可以简洁地表示为两个独立伽马随机变量之差（McLeish 在 $\theta=0$ 情形下证明了这一点 [81]；一般情形可参见例如 Press [96] 或 Kotz 等人 [60]）。假设 $S\sim\Gamma(r/2,(\sqrt{\theta^2+\sigma^2+\theta})^{-1})$ 和 $S'\sim\Gamma(r/2,(\sqrt{\theta^2+\sigma^2-\theta})^{-1})$ 相互独立。那么

$$\mu+S-S'\sim\mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu). \tag{2.20}$$

利用标准的特征函数论证，结合 $\mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu)$ 的特征函数公式 (2.12) 以及 $\Gamma(r,\lambda)$ 分布的特征函数公式 $\varphi_S(t)=(1-\mathrm{i}t/\lambda)^{-r}$，即可高效地证明这一表示。

现在假设 $r\geq 1$ 是一个整数。那么 $S=_d(\sqrt{\theta^2+\sigma^2}+\theta)V/2$ 和 $S'=_d(\sqrt{\theta^2+\sigma^2}-\theta)V'/2$, 其中 V 和 V' 是相互独立的 χ_r^2 随机变量（自由度为 r 的卡方分布）。根据 χ_r^2 分布可表示为 r 个相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量的平方和这一表示，以及表示式 (2.20)，我们可推得

$$\mu+r\theta+\sum_{j=1}^{2r}\lambda_j(N_j^2-1)\sim\mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu),$$

其中 $N_1,\ldots,N_{2r}$ 是相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量， $\lambda_1=\ldots=\lambda_r=(\sqrt{\theta^2+\sigma^2}+\theta)/2$ 和 $\lambda_{r+1}=\ldots=\lambda_{2r}=-(\sqrt{\theta^2+\sigma^2}-\theta)/2$。因此，当整数 $r\geq 1$ 时，VG分布属于第二维纳混沌（参见 Nourdin 和 Peccati [88, 第 2.2]节）。

4. 若 $r\in 2\mathbb{Z}^+$，则独立随机变量 $V\sim\chi_r^2$ 和 $V'\sim\chi_r^2$ 可表示为独立均匀 $U(0,1)$随机变量 U_1、.....、U_r的函数，分别为 $V=_d\sum_{j=1}^{r/2}\log U_j$和$V'=_d\sum_{j=r/2+1}^{r}\log U_j$。因此，由 (2.20) 可得,

$$\mu+\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}+\theta}{2}\sum_{j=1}^{r/2}\log U_j-\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}-\theta}{2}\sum_{j=r/2+1}^{r}\log U_j\sim\mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,\mu).$$

当 $r \in 2\mathbb{Z}^+$时，这种表示便于模拟 VG分布。对于 $r > 0$的其他取值，可以利用表示式 (2.20)，并采用 Devroye 的《第 9 章》第 3 节中给出的方法模拟 V 和 V' 的伽马分布，从而模拟 VG分布 (r, θ, σ, μ) [24]。

2.5 相关分布

2.5.1 子类与极限情形

1. VG$(2, \theta, \sigma, \mu)$ 分布对应于非对称拉普拉斯分布。事实上，在 (2.7) 中令 $r = 2$，可得

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2}} \exp\left(\frac{\theta}{\sigma^2}(x - \mu) - \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2}}{\sigma^2}|x - \mu|\right). \tag{2.21}$$

在 (2.21) 中令 $\theta = 0$，可得经典拉普拉斯分布的概率密度函数。关于拉普拉斯分布和非对称拉普拉斯分布的分布理论的全面介绍见 Kotz 等人 [60] 的第 2 章和第 3 章。

2. 伽马分布是 VG分布的一个极限情形（例如，参见 Kotz 等人[60]）。对于固定的 $r, \lambda > 0$，随机变量序列 $X_\sigma \sim$ VG$(2r, (2\lambda)^{-1}, \sigma, 0)$ 依分布收敛到一个 $\Gamma(r, \lambda)$ 随机变量，其中 $\sigma \to 0$。这可通过在 VG分布的特征函数公式 (2.12) 中令 $\sigma \to 0$，并利用 L´evy 连续性定理与伽马分布的特征函数进行比较来说明。

3. 正态分布也是 VG分布的一个极限情形（例如，参见 Kotz 等人[60]）。对于固定的 $\theta \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma > 0$，随机变量序列 $Y_r \sim$ VG$(r, \theta/\sqrt{r}, \sigma/\sqrt{r}, -\theta\sqrt{r})$ 收敛于一个 $N(0, \sigma^2 + 2\theta^2)$ 随机变量，当 $r \to \infty$ 时。与第 2 部分一样，这可以通过特征函数论证得出。更进一步，从卷积性质可知，对于 $r \in \mathbb{Z}^+$，我们可以写成 $Y_r =_d r^{-1/2} \sum_{i=1}^{r} Y_{r,i}$，其中 $Y_{r,i} \sim$ VG$(1, \theta, \sigma, -\theta)$。由中心极限定理以及公式 $\mathbb{E}[Y_{r,i}] = 0$ 和 Var$(Y_{r,i}) = \sigma^2 + 2\theta^2$（见 (2.30) 和 (2.31)），即可得出该结论。

4. 设 (X, Y) 是一个零均值向量、方差为 (σ_X^2, σ_Y^2)、相关系数为 ρ 的二元正态随机向量。将这两个相关正态随机变量的乘积记为 $Z = XY$。我们将此分布记为 PN$(\rho, \sigma_X, \sigma_Y)$。再考虑均值 $Z_n = n^{-1}(Z_1 + \cdots + Z_n)$，其中 $Z_1, \ldots, Z_n$ 是 Z 的独立副本。Gaunt 的学位论文 [35] 指出，$Z \sim$ VG$(1, \rho\sigma_X\sigma_Y, \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}, 0)$，后来 Gaunt [40] 还指出

$$\overline{Z}_n \sim \mathrm{VG}(n, \rho\sigma_X\sigma_Y/n, \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}/n, 0). \tag{2.22}$$

为说明这一点，设 $\sigma_X = \sigma_Y = 1$，一般情形可通过重新缩放得到。容易验证，X 和 $W = (Y - \rho X)/\sqrt{1-\rho^2}$ 是相互独立的 $N(0,1)$ 随机变量。因此，$Z = X\overline{Y = X}(\sqrt{1-\rho^2}W + \rho X) = \sqrt{1-\rho^2}XW + \rho X^2$，故根据 (2.19)，其服从 $Z \sim$ VG$(1, \rho, \sqrt{1-\rho^2}, 0)$。最后，我们利用性质 (2.8) 和 (2.14) 推出 (2.22)。

利用式（2.22），Gaunt [40] 证明了 Z_n 的概率密度函数（此前由 Mangilli、Plaszczynski、Tristram [79] 和 Nadarajah 与 Pog´any [84] 分别给出）为

$$p(x) = \frac{n^{(n+1)/2} 2^{(1-n)/2} |x|^{(n-1)/2}}{s^{(n+1)/2}\sqrt{\pi(1-\rho^2)}\Gamma(n/2)} \exp\left(\frac{\rho n x}{s(1-\rho^2)}\right) K_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n|x|}{s(1-\rho^2)}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $s = \sigma_X\sigma_Y$，设定 $n = 1$ 后即可得到 Z 的概率密度函数。关于 Z 和 Z 的分布理论综述，参见 Gaunt [42]。值得注意的是，两个非零均值正态随机变量的乘积不服从方差伽马分布；其概率密度函数较为复杂的精确公式见 Cui 等人 [22]。

2.5.2 超类

1. 广义双曲（GH）分布由 Barndorff-Nielsen [10, 11], 提出，他在沙丘移动建模的背景下对其进行了研究。与方差伽马分布一样，GH 分布广泛应用于金融建模；例如，参见 Bibby和Sørensen [15], 、Eberlein和Keller [26] 以及 Eberlein和Prause [27]。Bibby和Sørensen [15] 和 Hammerstein [50] 介绍了 GH 分布的性质。其概率密度函数为

$$p(x) = \frac{(\gamma/\delta)^\lambda}{\sqrt{2\pi}K_\lambda(\delta\gamma)}\mathrm{e}^{\beta(x-\mu)}\frac{K_{\lambda-1/2}(\alpha\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2})}{(\sqrt{\delta^2+(x-\mu)^2}/\alpha)^{1/2-\lambda}}, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{2.23}$$

其中 $\gamma = \sqrt{\alpha^2-\beta^2}$。参数域为

$$\begin{aligned}&\delta\geq 0, \quad \gamma>0, \quad \lambda>0,\\ &\delta>0, \quad \gamma>0, \quad \lambda=0,\\ &\delta>0, \quad \gamma\geq 0, \quad \lambda<0,\end{aligned}$$

且在每种情况下 $\mu\in\mathbb{R}$。如果 $\delta=0$ 或 $\gamma=0$，则概率密度函数 (2.23) 定义为使用 (A.64) 得到的极限。特别地，在 (2.23) 中取 $\delta\downarrow 0$，可得到采用 Bibby和Sørensen参数化的 VG分布的密度 (2.3) [15]。Eberlein和Hammerstein [25] 对 GH分布的极限情形进行了详细研究。

2. VG分布是 Carr等人的 CGMY分布的特例 [20], ，该分布是在金融建模背景下引入的。该分布由其 Lévy–Khintchine 表示 $\varphi(t) = \exp\big(\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}-1)\nu_{CGMY}(x)\,\mathrm{d}x\big)$, 定义，其中 Lévy 密度为

$$\nu_{CGMY}(x) = \frac{C}{|x|^{1+Y}}\mathrm{e}^{-G|x|}\mathbf{1}_{x<0} + \frac{C}{x^{1+Y}}\mathrm{e}^{-Mx}\mathbf{1}_{x>0}.$$

VG分布对应于情形 $Y=0$。CGMY分布的概率密度函数没有闭式公式，不过其特征函数具有初等形式（参见 Carr等人 [20]）：

$$\varphi(t) = \exp\big(C\Gamma(-Y)\big\{(M-\mathrm{i}t)^Y - M^Y + (G-\mathrm{i}t)^Y - G^Y\big\}\big),$$

由此可以直接得到低阶矩以及方差、偏度和峰度的公式（同样参见 Carr等人 [20]）。

VG 分布是 CGMY 分布的子类，而 CGMY 分布又属于 Koponen [58] 引入的截尾稳定分布这一子类。关于这类分布的性质和参考文献，例如可参见 K¨uchler 和 Tappe [65]。

3. 考虑随机变量 $X=Z+L$ 的分布，其中 $Z\sim N(0,\ \sigma^2)$ 相互独立，且L 为非对称拉普拉斯分布。Reed [99], 将这种分布称为正态非对称拉普拉斯分布，并首次引入了它。该分布有四个参数。Reed [99], 介绍了一些基本分布性质，例如无限可分性、概率密度函数、累积分布函数、矩和累积量的精确公式，并讨论了估计方法。

更一般地，如果 L 服从方差伽马分布（广义非对称拉普拉斯分布），那么 X 就称为广义正态-拉普拉斯 （GNL）分布，该分布由 Reed [100]提出。此分布有五个参数。Reed [100]的文章介绍了金融应用。Wu [119], 的学位论文对 GNL 分布进行了系统论述，并提供了相关参考文献。

4. 对称情形下VG分布的多元推广最早由 Madan 和 Seneta [77]提出。Kozubowski、Podg [77]orski 和 Rychlik 对（一般非对称）多元

VG分布的一些基本性质进行了综述 [64] （他们将其称为多元广义拉普拉斯分布）。关于矩阵变量VG分布的介绍，参见 Kozubowski、Mazur 和 Podg´orski [61] 及其中的参考文献。这里，我们仅汇集多元VG分布的一些最基本性质，并指出这些性质以自然的方式推广了单变量VG分布的性质。

多元VG分布通常通过其特征函数来定义。遵循Kozubowski等人 [64], 的做法，我们称随机向量$\mathbf{X}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 服从多元VG分布，若其特征函数为

$$\varphi(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{t}^\intercal \mathbf{X}}\big] = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\mu}^\intercal \mathbf{t}}\big(1 - \mathrm{i}\boldsymbol{\theta}^\intercal \mathbf{t} + \tfrac{1}{2}\mathbf{t}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}\big)^{-s}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^d, \tag{2.24}$$

其中 $s > 0$、 $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d$、 $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^d$和 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 $d \times d$ 非负定对称矩阵。注意，当 $d = 1$时，特征函数（2.24）化简为单变量VG分布的特征函数（2.12）（采用略有不同的参数化）。我们可以将多元VG分布表示为正态方差-均值混合

$$\mathbf{X} =_d \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\theta} G + \sqrt{G}\mathbf{Z},$$

其中 $G \sim \Gamma(s, 1)$与$\mathbf{Z} \sim N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$相互独立（后者为 d维多元正态分布，其均值向量为$\mathbf{0}$ ，协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$）。

如果矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是正定的，那么该分布是非退化的，也就是说，它确实是 d维的，其概率密度函数为

$$p(\mathbf{x}) = \frac{2\exp(\boldsymbol{\theta}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))}{(2\pi)^{d/2}\Gamma(s)|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \left(\frac{Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})}{C(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\theta})}\right)^{s-d/2} K_{s-d/2}(Q(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})C(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\theta})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

其中 $Q(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = ((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}))^{1/2}$ 且 $C(\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\theta}) = (2 + \boldsymbol{\theta}^\intercal \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\theta})^{1/2}$。

2.5.3 方差伽马分布随机变量的乘积与商

设 $(X_i)_{1 \le i \le n} \sim$方差伽马分布$(r_i, 0, \sigma_i, 0)$ 相互独立，并令 $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$和 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$。Gaunt、Mijoule 和 Swan [47] 给出了乘积 Z_n 的概率密度函数公式：

$$f_{Z_n}(x) = \frac{1}{2^n \pi^{n/2}\sigma} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(r_j/2)} G_{0,2n}^{2n,0}\left(\frac{x^2}{2^{2n}\sigma^2} \,\middle|\, \frac{r_1 - 1}{2}, \ldots, \frac{r_n - 1}{2}, 0, \ldots, 0\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

其中 $G^{k,\,0}_{\ell,\,k}(x)$ 是 Meijer G-函数（定义及基本性质见 Olver 等人 [92] 的第 16 章）。据我们所知，对于两个或更多个相互独立的方差伽马分布$(r, \theta, \sigma, 0)$ 随机变量的乘积，当 $\theta \neq 0$ 时，尚无精确公式。

设 $X \sim$方差伽马分布$(r, \theta_1, \sigma_1, 0)$ 和 $Y \sim$方差伽马分布$(s, \theta_2, \sigma_2, 0)$ 相互独立，其中 $r, s > 0$、$\theta_i \in \mathbb{R}$、 $\sigma_i > 0$、 $i = 1, 2$。Gaunt 和 Li [45] 得到了比值 $Z = X/Y$ 的概率密度函数的精确公式，该公式以涉及高斯超几何函数的无穷级数表示（定义及基本性质见 Olver 等人 [92] 的第 15 章）。此前，Nadarajah 和 Kotz [83] 针对 $\theta_1 = \theta_2 = 0$ 和 $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ 的情形，给出了以下更简单的精确公式，该公式用单个高斯超几何函数表示。对于 $x \in \mathbb{R}$,

$$f_Z(x) = \frac{2|x|^{-s-1}\Gamma((r+1)/2)\Gamma((s+1)/2)}{\pi(r+s)\Gamma(r/2)\Gamma(s/2)} {}_2F_1\left(\frac{r+s}{2}, \frac{s+1}{2}; \frac{r+s}{2} + 1; 1 - x^{-2}\right).$$

关于 VG 比值分布的更多性质，例如针对特定参数值以初等函数表示的概率密度函数公式、累积分布函数公式、分数阶矩，以及概率密度函数和尾概率的渐近行为（由此可见均值不存在），请参阅前述两篇著作。

2.6 Stein刻画

方差伽马分布的以下 Stein 刻画由 Gaunt [36] 给出。设 W 为一个实值随机变量。那么 $W \sim$服从 VG(r, θ, σ, μ) 分布，当且仅当

$$\mathbb{E}\big[\sigma^2(W-\mu)g''(W) + (\sigma^2 r + 2\theta(W-\mu))g'(W) + (r\theta - (W-\mu))g(W)\big] = 0 \tag{2.25}$$

对所有二阶可微的 $g:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，只要对于 $X \sim$VG(r, θ, σ, μ)，期望 $\mathbb{E}|g(X)|$、$\mathbb{E}|Xg(X)|$、$\mathbb{E}|g'(X)|$、$\mathbb{E}|Xg'(X)|$ 和 $\mathbb{E}|Xg''(X)|$ 均有限。

这里我们概述论证过程。先证明必要性。方差伽马分布 VG(r, θ, σ, μ) 的概率密度函数 (1.1) 满足常微分方程（ODE）

$$\mathcal{L}p(x) := \sigma^2 x p''(x) - (\sigma^2(r-2) + 2\theta x)p'(x) + (\theta(r-2) - x)p(x) = 0, \tag{2.26}$$

该方程可从 Gaunt [38, Corollary 3.3] 中给出的 GH分布概率密度函数所满足的更一般常微分方程推得。由 (2.26) 可知 $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathcal{L}p(x)\mathrm{d}x = 0$，两次分部积分即可得到 (2.25)。为证明充分性，设 W 是一个实值随机变量。为便于说明，令 $\mu = 0$，一般情形只需作简单的平移即可得到。将$g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$（一个二阶可微且有界的函数）代入 (2.25)，并令 $\varphi(t) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tW}]$，即可得到常微分方程

$$(\sigma^2 t^2 - 2\mathrm{i}\theta t + 1)\varphi'(t) + (\mathrm{i}\sigma^2 r t + r\theta)\varphi(t) = 0. \tag{2.27}$$

这里，我们将刻画方程应用于 $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ 的实部和虚部。在条件 $\varphi(0) = 1$ 下求解 (2.27)，可得 $\varphi(t) = (1 - 2\mathrm{i}\theta t + \sigma^2 t^2)^{-r/2}$，当 $\mu = 0$ 时，这与特征函数 (2.12) 一致，因此 $W \sim$VG(r, θ, σ, 0)。

Stein 刻画最常用于 Stein 方法（Stein [111]），以关于某种概率度量界定两个概率分布之间的距离；不过，也可以用它们来确立分布性质。事实上，令 $Y \sim$VG(r, θ, σ, 0)，并将 $g_1(x) = x^k$ 和 $g_2(x) = (x - \mathbb{E}[Y])^k = (x - r\theta)^k$ 代入 (2.25)（其中 $\mu = 0$），即可得到以下关于 k 阶原始矩 $\mu'_k = \mathbb{E}[Y^k]$ 和 k 阶中心矩 $\mu_k = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y])^k]$ 的递推关系：

$$\mu'_{k+1} = \theta(2k + r)\mu'_k + \sigma^2 k(r + k - 1)\mu'_{k-1}, \quad k \geq 1, \tag{2.28}$$

$$\mu_{k+1} = 2k\theta\mu_k + k\big(\sigma^2(r + k - 1) + 2\theta^2 r\big)\mu_{k-1} + k(k-1)r\theta\sigma^2\mu_{k-2}, \quad k \geq 2. \tag{2.29}$$

利用递推关系，可以在给定第一个原始矩（第一个和第二个中心矩）以及基本条件 $\mu_0 = 1$ 的情况下，高效计算低阶原始矩（中心矩）。

2.7 矩与累积量

$X \sim$VG(r, θ, σ, μ) 的均值和方差，可通过标准方法轻松计算，即利用矩母函数求得低阶矩（使用 (2.11)）。我们有

$$\mathbb{E}[X] = \mu + r\theta, \tag{2.30}$$

$$\mathrm{Var}(X) = r(\sigma^2 + 2\theta^2). \tag{2.31}$$

现在，令 $Y \sim$方差伽马分布($r, \theta, \sigma, 0$)。利用递推式 (2.28) 和 (2.29)，可以高效地求出 Y的低阶原始矩和中心矩。 $X \sim$方差伽马分布(r, θ, σ, μ) 的中心矩与 Y的中心矩相同，而 X 的原始矩可通过公式$\mathbb{E}[X^k] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\mu^j\mathbb{E}[Y^k]$直接求得。 $Y \sim$方差伽马分布($r, \theta, \sigma, 0$)的前四阶原始矩为

$$\mu'_1 = r\theta, \quad \mu'_2 = r(\sigma^2 + (r+2)\theta^2), \quad \mu'_3 = r(r+2)\theta\big(3\sigma^2 + (r+4)\theta^2\big),$$

$$\mu_4' = r(r+2)\big(3\sigma^4 + 6(r+4)\theta^2\sigma^2 + (r+4)(r+6)\theta^4\big),$$

而前四阶中心矩为

$$\mu_1 = 0, \tag{2.32}$$
$$\mu_2 = r(\sigma^2 + 2\theta^2), \tag{2.33}$$
$$\mu_3 = 2r\theta(3\sigma^2 + 4\theta^2), \tag{2.34}$$
$$\mu_4 = 3r\big((r+2)\sigma^4 + (4r+16)\theta^2\sigma^2 + (4r+16)\theta^4\big). \tag{2.35}$$

因此，偏度 $\gamma_1 = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ 和峰度 $\beta_2 = \mu_4/\mu_2^2$ 分别为

$$\gamma_1 = \frac{2\theta(3\sigma^2 + 4\theta^2)}{\sqrt{r}(\sigma^2 + 2\theta^2)^{3/2}}, \quad \beta_2 = \frac{3((r+2)\sigma^4 + (4r+16)\theta^2\sigma^2 + (4r+16)\theta^4)}{r(\sigma^2 + 2\theta^2)^2},$$

超额峰度 $\gamma_2 = \mu_4/\mu_2^2 - 3$ 等于

$$\gamma_2 = \frac{6(\sigma^4 + 8\theta^2\sigma^2 + 8\theta^4)}{r(\sigma^2 + 2\theta^2)^2}.$$

Seneta [108]给出了 VG分布的前四个中心矩以及偏度和峰度的公式。

利用 VG(r, θ, σ, 0) 分布的表示 (2.20)（其中 $\mu = 0$）以及公式 $\mathbb{E}[V^k] = \lambda^{-k}\Gamma(r/2 + k)/\Gamma(r/2)$, $k \geq 1$，其中 $V \sim \Gamma(r/2, \lambda)$，可以计算高阶矩。对于 $k \geq 1$,

$$\mu_k' = \frac{\sigma^{2k}}{(\Gamma(r/2))^2}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-\lambda_-)^j\lambda_+^{k-j}\Gamma\Big(\frac{r}{2}+j\Big)\Gamma\Big(\frac{r}{2}+k-j\Big).$$

现在回到一般情形 $r > 0$。对于该情形，Gaunt [43]得到了涉及超几何函数的 $Y \sim$ VG(r, θ, σ, 0) 的原始矩和绝对矩表达式。令 $k \in \mathbb{Z}^+$，并定义 $\ell := \lceil k/2 \rceil + 1/2$ 以及 $m := k$ 对 2 取模。于是

$$\mu_k' = \frac{2^{k+m}\theta^m\sigma^{r+2k}}{\sqrt{\pi}(\theta^2+\sigma^2)^{(r+k+m)/2}\Gamma(r/2)}\Gamma\Big(\frac{r-1}{2}+\ell\Big)\Gamma(\ell)\,{}_2F_1\bigg(\ell, \frac{r-1}{2}+\ell; \frac{1}{2}+m; \frac{\theta^2}{\theta^2+\sigma^2}\bigg),$$

而对于 $k > k_* = k_*(r) := \max\{-1, -r\}$,

$$\mathbb{E}[|Y|^k] = \frac{2^k\sigma^{r+2k}}{\sqrt{\pi}(\theta^2+\sigma^2)^{(r+k)/2}\Gamma(r/2)}\Gamma\Big(\frac{r+k}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{k+1}{2}\Big)\,{}_2F_1\bigg(\frac{k+1}{2}, \frac{r+k}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\theta^2}{\theta^2+\sigma^2}\bigg).$$

由于 ${}_2F_1(a, b; c; 0) = 1$，我们观察到，在 $\theta = 0$ 的情况下，原始矩可简化为

$$\mu_k' = \begin{cases} \dfrac{2^k\sigma^k}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\Gamma((r+k)/2)\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma(r/2)}, & \text{if } k \text{ is even}, \\ 0, & \text{if } k \text{ is odd}. \end{cases}$$

方差伽马分布 VG(r, θ, σ, 0) 的一般阶中心矩可利用表示式 (2.20) 和公式 $\mathbb{E}[(V - \mathbb{E}[V])^k] = \lambda^{-k}U(-k, 1-k-r/2, -r/2)$ 计算，其中$V \sim \Gamma(r/2, \lambda)$，而 $U(a, b, x)$ 是第二类合流超几何函数。Weisstein [118], 给出了 $V \sim \chi_r^2$ 时的此公式，将其推广到伽马分布显而易见。我们注意到，当 $a = -m$ 为 $U(a, b, x)$ 时，它是一个多项式：$m = 0, 1, 2, \ldots$

$U(-m,\ b,\ x) = (-1)^m \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} (b+j)^{m-j} (-x)^j$。这里，波赫哈默符号定义为 $(a)_0 = 0$，且 $(a)_j = a(a+1)(a+2)\cdots(a+j-1),\ \ j \geq 1$（参见 Olver 等人 [92, 第 13.2(i) 节]）。对于 $k \geq 1$,

$$\mu_k = \sigma^{2k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-\lambda_-)^j \lambda_+^{k-j} U\left(-j, 1-j-\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right) U\left(j-k, 1+j-k-\frac{r}{2}, -\frac{r}{2}\right).$$

其他关于 VG分布的原始矩和中心矩的公式见 Scott [105]。

VG$(r,\ \theta,\ \sigma,\ \mu)$分布的累积量可通过对（2.13）中的对数进行泰勒展开，或利用表示（2.20）推导得出。后一种方法用到了以下性质：对于独立随机变量 S_1 和 S_2 以及常数 c，第 k阶累积量具有如下性质：$\kappa_k(cS_1) = c^k \kappa_k(S_1)$和 $\kappa_k(S_1 + S_2) = \kappa_k(S_1) + \kappa_k(S_2)$，且 $\kappa_k(V) = \lambda^{-k}(k-1)!$ r 对于$V \sim \Gamma(r/2,\ \lambda)$。对于 $k \geq 1$,

$$\kappa_k = \mu \delta_{k,1} + \frac{(k-1)!\, r}{2} \left[(\theta + \sqrt{\theta^2 + \sigma^2})^k + (\theta - \sqrt{\theta^2 + \sigma^2})^k \right],$$

其中$\delta_{i,\ j}$ 是克罗内克δ（参见 McKay [80]）。特别地,

$$\kappa_1 = \mu + r\theta, \quad \kappa_2 = r(\sigma^2 + 2\theta^2), \quad \kappa_3 = 2r\theta(3\sigma^2 + 4\theta^2), \quad \kappa_4 = 6r(\sigma^4 + 8\theta^2\sigma^2 + 8\theta^4),$$
$$\kappa_5 = 24r\theta(5\sigma^4 + 20\theta^2\sigma^2 + 16\theta^4), \quad \kappa_6 = 120r(\sigma^6 + 18\theta^2\sigma^4 + 48\theta^4\sigma^2 + 32\theta^6).$$

2.8 众数和中位数

Gaunt 和 Merkle [46] 对 GH 分布和 VG 分布的众数与中位数进行了详细研究；这里我们对 VG分布作一总结。

方差伽马分布(r, θ, σ, μ)是单峰的。这是因为该分布是自分解的，而自分解分布是单峰的（Yamazato [120]）。用 M_r表示方差伽马分布(r, θ, σ, μ)的众数。对于 $0 < r \leq 2,\ \theta \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$或 $r > 0,\ \theta = 0,\ \sigma > 0$，有 $M_r = \mu$。当 $\theta = 0$时，这显然成立，因为 $VG(r, 0, \sigma, \mu)$分布关于μ对称；对于 $0 < r \leq 2$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$，这是因为当 $0 < \nu \leq 1/2$ 和 $|\beta| < 1$时，函数$x \mapsto \mathrm{e}^{\beta x}|x|^\nu K_\nu(|x|)$在$(-\infty, 0)$上递增，在$(0, \infty)$上递减（由Gaunt的引理5.1第(i)部分可轻易得出 [41]）。

现在假设 $r > 2, \theta \in \mathbb{R}, \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$。利用 (A.66)，我们得到 $M_r = \mu + \mathrm{sgn}(\theta) \cdot x^*$，其中 x^* 是方程的唯一正解

$$K_{\frac{r-3}{2}}\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sigma^2}x\right) = \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}} K_{\frac{r-1}{2}}\left(\frac{\sqrt{\theta^2+\sigma^2}}{\sigma^2}x\right). \tag{2.36}$$

当 $r = 4$ 和 $r = 6$时，将 (A.63) 应用于 (2.36)，可得到关于 x^* 的简单代数方程，求解后得

$$M_4 = \mu + \theta\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\kappa}}\right), \quad M_6 = \mu + \frac{\theta}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\kappa}}\right)\left(3 - \sqrt{1+\kappa} + \sqrt{6\sqrt{1+\kappa} + \kappa - 2}\right),$$

其中 $\kappa = \sigma^2/\theta^2$。对于 $r = 8$ 和 $r = 10$，我们可以将 (A.63) 应用于 (2.36)，得到关于 x^*的三次方程和四次方程；然而，它们的解 M_8 和 M_{10} 过于复杂，不值得列出。对于 r的其他取值，无法得到 M_r 的精确公式，除了 $\theta = 0$ 这种情况；我们已指出此时众数等于 μ。

对于一般的 $r > 2$，M_r 没有精确公式；不过，可以得到简单而精确的上下界。固定 $\theta > 0$；若$X \sim$ VG$(r,\ \theta,\ \sigma,\ \mu)$，则 $\theta < 0$ 的界可立即得出为 VG$(r,\ -\theta,\ \sigma,\ -\mu)$（见 (2.8)）。将 (A.70) 的上下界应用于

(2.36)，可得关于 x^*的简单代数不等式。解这些不等式，并利用 $M_r > \mu$，对于 $r > 2$ 和 $\theta > 0$，可得到以下双重不等式:

$$\theta(r-3)_+ < M_r - \mu < \theta(r-2), \quad r > 2, \tag{2.37}$$

其中 $x_+ = \max\{0, x\}$。请注意，当 $r = 2$ 时，上界取等号。将不等式 (A.71) 应用于等式 (2.36)，可得

$$M_r > \mu + \frac{\theta}{2}\left[r - 2 + \sqrt{\frac{\theta^2(r-2)^2 + \sigma^2(r-4)^2}{\theta^2 + \sigma^2}}\right], \quad r > 4, \tag{2.38}$$

当且仅当 $r = 4$ 时取等号；若 $2 < r < 4$，则不等式反向。不等式 (2.38) 在其适用范围 $r > 4$ 内改进了 (2.37) 中的下界。对于 $3 < r < 4$，反向的不等式 (2.38) 比 (2.37) 中的上界更准确；但对于 $2 < r < 3$，情况恰好相反。

设 $X \sim$方差伽马分布$(r,\ \theta,\ \sigma,\ \mu)$。我们注意到，对于某些参数值，中位数有精确公式：若 $\theta = 0$，则 $\text{Med}(X) = \mu$；而对于 $r = 2$,

$$\text{Med}(X) = \mu + \text{sgn}(\theta) \cdot \left(|\theta| + \sqrt{\theta^2 + \sigma^2}\right) \log\left(1 + \frac{|\theta|}{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2}}\right), \tag{2.39}$$

这是由非对称拉普拉斯分布的中位数公式得出的（参见 Kozubowski 和 Podg´orski [62]）。对于其他参数值，不存在精确的闭式公式。此外，与众数不同，文献中尚无中位数的准确上下界。Gaunt 和 Merkle [46]猜想了中位数的准确界限，我们将在下文给出。表1中的数值结果取自 Gaunt 和 Merkle[46], ，它们支持这一猜想的界限，因为表中的每个数值都落在猜想的下界与上界之间。

猜想2.1。 设 $X \sim$方差伽马分布(r, θ, σ, μ) 满足 $r, \theta, \sigma > 0$。那么猜想认为

$$\mu + (r-1)\theta < \text{Med}(X) < \mu + r\theta \mathrm{e}^{-2/3r} < \mu + \left(r - \frac{2}{3} + \frac{2}{9r}\right)\theta, \quad r > 0,$$

and

$$\text{Med}(X) \leq \mu + (r + 2\log 2 - 2)\theta, \quad r \geq 2.$$

表1： 方差伽马分布$(r,1,\sigma,0)$ 的中位数。

r \ σ	0.1	0.3	1	3	10	30
0.5	0.0863	0.0798	0.0502	0.0195	0.00582	0.00192
1	0.454	0.444	0.380	0.276	0.198	0.157
2.5	1.872	1.861	1.775	1.621	1.531	1.507
5	4.350	4.338	4.246	4.084	4.012	4.001
10	9.340	9.328	9.233	9.071	9.009	9.001

由于 $\mathbb{E}[X_r] = \mu + r\theta$ 对于 $X_r \sim$方差伽马分布(r, θ, σ, μ)，根据 (2.37) 以及 $M_r = \mu$对于 $0 < r \leq 2$ 这一事实可知，若 $\theta > 0$，则对所有 $r > 0$，都有 $M_r \leq \mathbb{E}[X_r]$。此外，若所猜想的中位数界成立，则可推出，对所有 $r, \theta, \sigma > 0$，都有 $M_r \leq \text{Med}(X_r) \leq \mathbb{E}[X_r]$，这意味着方差伽马分布$(r, \theta, \sigma, \mu)$ 满足均值-中位数-众数不等式（Groeneveld 和 Meeden [49] 以及 van Zwet [117]）。

3 参数估计

由于方差伽马分布有诸多应用，其参数估计备受关注。本节概述文献中已有的方法。下文中，令 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ 为来自方差伽马分布(r, θ, σ, μ) 的独立同分布随机变量样本，我们希望据此估计四个未知参数 r, θ, σ 和 μ。

3.1 矩估计法

矩估计是通过算术平均数估计原始矩或中心矩，即 $\hat{}\mu'_j = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i^j$，$j = 1, \ldots, 4$，以及 $\hat{}\mu_j = n^{-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \hat{}\mu'_j)^j$，$j = 1, \ldots, 4$。正如 Finlay 和 Seneta [32], 所指出的，在四参数情形下，无法显式求解 (r, θ, σ, μ) 对应的 $\hat{}\mu_j = \mu_j, j = 1, \ldots, 4$。然而，在对称情形 $\theta = 0$ 下，这是可以做到的。为说明这一点，我们将采用 Madan 和 Seneta [77] 的参数化（2.2）。利用 VG分布的第一、第二和第四中心矩公式（2.32）、（2.33）和（2.35），可以直接得到以下显式相合估计量；其中，μ 的估计量还是无偏的（Madan 和 Seneta [77]）：

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2, \quad \hat{\nu} = \frac{1}{3\hat{\sigma}_0^4 n}\left\{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^4\right\} - 1.$$

在 Finlay 和 Seneta [32], 中，通过最小化量 $\sum_{j=1}^4 ((\hat{}\mu'_j - \mu'_j)/\hat{}\mu'_j)^2$，并对 (r, θ, σ, μ) 求值，得到矩估计量，其中 μ'_j, $j = 1, \ldots, 4$ 与第2.7节中的相同。在 Seneta [108],中，通过假设形如 θ_0^k, $k \geq 2$ 的表达式可忽略不计，得到了参数化 (2.2) 的显式矩估计量，因为在金融建模应用中，θ_0 的真实值通常较小。矩估计量的一个优点是数值实现简便。Finlay 和 Seneta [32]开展了一项具有竞争性的模拟研究，以评估矩估计量的表现。

3.2 最大似然估计

我们最大化对数似然函数

$$\ell(\mathbf{X}, r, \theta, \sigma, \mu) = \sum_{i=1}^n \log p(X_i, r, \theta, \sigma, \mu)$$

关于 (r, θ, σ, μ)，其中 p 是 VG 密度 (1.1)。由于密度涉及第二类修正贝塞尔函数，形式复杂，因此该优化问题不存在解析解，必须依靠数值方法来确定全局最大值。我们还强调，对于 $r \leq 1$，密度函数在 μ 处存在奇点。已有一些用于最大似然估计的数值程序实现，例如 Scott 和 Dong [104] 通过 *VGFit* 函数开发的 *VarianceGamma* R 软件包。Madan 和 Seneta [77] 提出了一种变换最大似然法，使得可以针对形式更易处理的密度函数进行优化（另见 Madan 和 Seneta [76]）。Madan等人 [73], 使用最大似然估计来估计一个真实金融数据示例中的参数。在 Bee、Dickson 和 Santi [14], 中，作者将 *VarianceGamma* 软件包与 Breymann 和 L¨uthi [16], 开发的 *ghyp* R 软件包（该软件包实现了更一般的 GH分布）以及我们在第 3.3 节中介绍的期望条件最大化算法进行了比较。Cervellera 和 Tucci [19], 考察了三种不同的数值优化程序（包括 *VarianceGamma* R 软件包、*Matlab* 和 *Ezgrad*），并指出了使用最大似然估计时可能遇到的若干困难。更具体地说，

作者展示了似然函数对单个观测值的移除十分敏感，而且在某些情况下，不同初始值会使算法产生不同的结果。由于似然函数关于 μ不可微，方差伽马分布不满足应用最大似然估计量标准渐近理论所需的经典正则性假设。然而，在某些参数已知的特殊情形下，渐近理论已得到研究（例如，参见 Kotz 等人 [60] 关于拉普拉斯分布和非对称拉普拉斯分布的研究）。

3.3 期望条件最大化算法

鉴于似然函数优化的复杂性，近年来人们研究了几种采用期望条件最大化（Expectation-Conditional Maximisation，ECM）算法的方法。我们在此介绍的算法最初由 Nitithumbundit 和 Chan [86] 以及 McNicholas、McNicholas 和 Browne [82]提出，用于多元方差伽马模型及其混合分布。我们仅讨论一维情形，并详细介绍 Bee 等人[14]所述的算法。这里我们将考虑采用参数化（2.2）的方差伽马分布模型。期望条件最大化算法被视为基于含缺失数据的似然函数最大化的迭代过程。令 $S \sim \Gamma(\alpha,\ \alpha)$、$T \sim N(0,\ 1)$ 相互独立，并利用（2.18），我们知道

$$X = \mu + \theta_0 S + \sigma_0 \sqrt{S} T \sim \mathrm{VG}_2(\alpha, \theta_0, \sigma_0, \mu).$$

现在我们将 $\mathbf{S} = (S_1,\ \ldots\ldots,\ S_n)$ 视为缺失数据，因为给定 S 时 X 的条件分布为$N(\mu+\theta_0 S,\ \sigma_0^2 S)$，这意味着我们可以将相应的联合对数似然函数写成条件正态密度和伽马密度的乘积。更准确地说，

$$\begin{aligned}\ell_c(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \alpha, \theta_0, \sigma_0, \mu) =& -\frac{n}{2}\log\left(\sqrt{r}\sigma_0^2\right) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{S_i}\frac{(X_i-\mu-S_i\theta_0)^2}{\sigma_0^2} \\ &+ n\alpha\log(\alpha) - n\log(\gamma(\alpha)) + (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log S_i - \alpha\sum_{i=1}^{n} S_i \\ =& \ell_c^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \theta_0, \sigma_0, \mu) + \ell_c^{(2)}(\mathbf{X}, \mathbf{S}, \alpha).\end{aligned}$$

期望条件最大化类型算法 通过迭代执行期望（E）步和条件最大化（CM）步 .

E步： 这里计算条件期望 $\mathbb{E}[\ell_c(\mathbf{X},\ \mathbf{S}\ \alpha,\ \theta_0,\ \sigma_0,\ \mu)\ |\mathbf{X}],$，这可分解为计算 $\mathbb{E}[S_i\,|\mathbf{X}]$、$\mathbb{E}[1/S_i\,|\,\mathbf{X}]$ 和 $\mathbb{E}[\log\ S_i\,|\mathbf{X}]$。Embrechts [29] 证明了 S 在 X 条件下的条件分布为广义逆高斯分布，因此我们可以通过相应的条件期望估计 S_i、$1/S_i$ 和 $\log S_i$

$$\hat{S}_i = \mathbb{E}[S_i \,|\, \mathbf{X}] = \frac{\delta_i K_{\alpha+1/2}\left(\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}\delta_i\right)}{\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}K_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}\delta_i\right)}, \tag{3.40}$$

$$\widehat{1/S_i} = \mathbb{E}[1/S_i \,|\, \mathbf{X}] = \frac{\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}K_{\alpha-3/2}\left(\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}\delta_i\right)}{\delta_i K_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}\delta_i\right)}, \tag{3.41}$$

$$\widehat{\log S_i} = \mathbb{E}[\log S_i \,|\, \mathbf{X}] = \log\left(\frac{\delta_i}{\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}}\right) + \frac{\hat{K}_{\alpha-1/2}^{(1,0)}\left(\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}\delta_i\right)}{K_{\alpha-1/2}\left(\sqrt{2\alpha+\theta_0^2/\sigma_0^2}\delta_i\right)}, \tag{3.42}$$

其中 $\delta_i = (X_i-\mu)^2/\sigma_0^2$ 和 $\hat{}K_\alpha^{(1,0)}(z) = (K_{\alpha+h}(z)-K_{\alpha-h}(z))/(2h)$，对于某个较小的常数 $h>0$，是 $\partial K_\tau(z)/\partial\tau|_{\tau=\alpha}$ 的近似（见 Bee 等人 [14, 第 76] 页）。

CM步：在此步骤中，针对参数向量 $(\alpha, \theta_0, \sigma_0, \mu)$ 最大化对数似然函数$\mathbb{E}[\ell_c(\mathbf{X}, \mathbf{S}\ \alpha, \theta_0, \sigma_0, \mu)\ |\mathbf{X}]$ 的条件期望。可以分别最大化$\mathbb{E}[\ell_c^{(1)}(\mathbf{X}, \mathbf{S}\ \theta_0, \sigma_0, \mu)\,|\,\mathbf{X}]$ 和 $\mathbb{E}[\ell_c^{(2)}(\mathbf{X}, \mathbf{S}\ \alpha)\ |\mathbf{X}]$。第一个优化问题可以通过解析方法求解，

$$\hat{\mu} = \frac{\sum X_i \widehat{1/S_i} \sum \hat{S}_i - n \sum X_i}{\sum \widehat{1/S_i} \sum \hat{S}_i - n^2}, \tag{3.43}$$

$$\hat{\theta}_0 = \frac{\sum X_i - n\hat{\mu}}{\hat{S}_i}, \tag{3.44}$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{1}{n} \sum \widehat{1/S_i} (X_i - \hat{\mu})^2 - \frac{1}{n} \hat{\theta}_0^2 \sum \hat{S}_i. \tag{3.45}$$

对于 α的优化，没有解析解。建议优化 $\mathbb{E}[\ell_c^{(2)}(\mathbf{X},\ \mathbf{S}\ \alpha)\,|\,\mathbf{X}]$，或使用更新后的参数 $\hat{}\ell(\mathbf{X},\ \mathbf{S}\ \alpha,\ \theta_0,\ \hat{}\sigma_0,\ \hat{}\mu)$计算 VG分布的似然。Bee 等人 [14] 开展了一项有竞争力的模拟研究，发现后一个选项更可取。给定一组初始值 $(\hat{}\alpha^{(0)},\ \hat{}\theta_0^{(0)},\ \hat{}\sigma_0^{(0)},\ \hat{}\mu^{(0)})$，该算法第 t 次迭代的伪代码如下：

- **E步 1：** 使用 (3.40) 和 (3.41)，以及当前估计值 $\hat{}\alpha^{(t-1)}$、$\hat{}\theta^{(t-1)\ 0}$、$\hat{}\sigma^{(t-1)\ 0}$ 和 $\hat{}\mu^{(t-1)}$，计算 $\widehat{S}_{i(t-1/2)}$ 和 $\widehat{1/S_{i(t)}}$。
- **CM步 1：** 根据 (3.43)、(3.44) 和 (3.45) 计算 $\hat{}\theta^{(t)\ 0}$、$\hat{}\sigma^{(t)\ 0}$ 和 $\hat{}\mu^{(t)}$。
- **E步 2：** 使用更新后的参数 $\hat{}\theta^{(t)\ 0}$、$\hat{}\sigma^{(t)\ 0}$、$\hat{}\mu^{(t)}$ 以及 $\hat{}\alpha^{(t-1)}$，通过 (3.40) 和 (3.42) 计算 $\widehat{S}_{i(t)}$ 和 $\widehat{\log S_{i(t)}}$。
- **CM步 2：** 使用更新后的期望值 $\widehat{S}_{i(t)}$ 和 $\widehat{\log S_{i(t)}}$，通过数值优化方法计算 $\hat{}\alpha^{(t)}$。

当 X_i 非常接近 μ时，算法在 E步中会遇到困难。在这种情况下，建议将 δ_i 替换为 $\delta_i^* = \Delta/\sqrt{2\alpha + \theta_0^2/\sigma_0^2}$，其中 $\Delta > 0$。Bee 等人 [14]给出了关于 Δ 取值的建议。Nitithumbundit 和 Chan [87]提出了多元情形下该算法的改进版本。

3.4 进一步估计方法

为求完整起见，我们提及文献中的其他几种估计方法。Loregian、Mercuri 和 Rroji [69], 使用高斯求积，将 VG 密度的积分表示近似为高斯密度的混合，然后针对混合变量使用 ECM算法来估计参数。Nzokem [91] 使用分数阶傅里叶变换来近似 VG 密度。Finaly 和 Seneta [32], 研究了一种最小 χ^2方法，用于比较理论分位数与经验分位数（另见 Finlay 和 Seneta [31]以及 Tjetjep 和 Seneta [114]）。Finlay 和 Seneta [32] 还提出了一种基于特征函数的估计程序。值得注意的是，当数据存在某种依赖结构时，这种方法仍然适用。Finlay 和 Seneta [32] 介绍了一种贝叶斯程序，并使用马尔可夫链蒙特卡罗方法从后验分布中抽样。我们还提及 Rathgeber、Johannes 和 St¨ockl [98], 的研究，其中根据真实金融数据对本节所述的若干估计方法进行了比较。

4 应用

4.1 数理统计中的精确分布

4.1.1 与样本相关的联系

设 (X_i, Y_i)、 $1 \le i \le n$ 为独立同分布的二元正态随机向量，其均值向量为 (μ_X, μ_Y)，方差为 (σ_X^2, σ_Y^2)，相关系数为 ρ。Pearson、Jefferey 和 Elderton[93] 证明，积矩系数

$$p_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

具有 VG分布（他们将其称为贝塞尔函数分布）。Kotz 等人给出了另一种证明。 [60, 命题 4.1。5]在我们的参数化中,

$$p_n \sim \mathrm{VG}(n-1, \rho\sigma_X\sigma_Y/n, \sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}/n, 0).$$

此处我们应用 VG分布的缩放性质 (2.8)，处理方差一般取值 σ_X^2， $\sigma_Y^2 > 0$ 的情形；Kotz 等人 [60] 证明了 $\sigma_X = \sigma_Y = 1$ 时的结果。Kotz 等人指出， $n = 3$ 时，积矩系数 p_3 服从非对称拉普拉斯分布（见第2.5.1节第 1 部分）。此外，如第2.5.1节第 4 部分所述，令 $Z = UV$，其中 $(U,\ V)$ 是一个均值向量为零、方差为 $(\sigma_X^2,\ \sigma_Y^2)$ 、相关系数为 ρ 的二元正态随机向量。另考虑均值 $Z_{n-1} = (n-1)^{-1}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{n-1})$，其中$Z_1$, Z_2，$\ldots$， Z_{n-1} 是 Z 的独立副本。于是，根据关系式 (2.22) 和缩放性质 (2.8)，对于 $n \ge 2$，有

$$p_n =_d (1 - 1/n)\overline{Z}_{n-1}. \tag{4.46}$$

特别是， $p_2 =_d Z/2$。由（4.46）和中心极限定理可得，当 $n \to \infty$ 时， $\sqrt{n}(p_n - \rho\sigma_X\sigma_Y) \to_d N(0, \sigma_X^2\sigma_Y^2(1+\rho^2))$。

4.1.2 与Wishart分布的联系

设 N 是一个 $p \times n$ 矩阵，其 n 列为独立的 p 维多元正态随机向量，均值向量为零，正定协方差矩阵为 $V = (v_{ij})$。那么，Wishart分布就是 $p \times p$ 随机矩阵 $X = NN^{\mathsf{T}}$ 的概率分布。我们将这样的随机矩阵记为 $W_p(V, n)$。正整数 $n \ge 1$ 称为自由度；当 $V = p = 1$ 时，Wishart分布退化为 χ_n^2 分布。Wishart分布广泛应用于多元统计学、贝叶斯分析和随机矩阵理论。

Wishart分布的一项基本分布性质是其各元素的边缘分布。众所周知，对角元素是经过适当缩放的卡方随机变量： $X_{ii} \sim v_{ii}\chi_n^2$, $1 \le i \le p$ （例如参见 Kollo [57, 推论 2.4.2。2]）。或许较少为人所知的是，非对角元素服从方差伽马分布（二维情形见 Pearson等人 [93] ）。更确切地说,

$$X_{ij} \sim \mathrm{VG}(n, v_{ij}, (v_{ii}v_{jj} - v_{ij}^2)^{1/2}, 0), \quad i \ne j. \tag{4.47}$$

由于 V是协方差矩阵，因此自然可以令 $v_{ii} = \sigma_i^2$和 $v_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, $i \ne j$，其中 σ_i^2是 p维 N_p多元正态随机向量（ $i \in V$）的第 i 个分量的方差，而 ρ_{ij} 是第 i个和第 j个分量的相关系数。采用此记号，我们

有 $X_{ij} \sim$ 方差伽马分布(n, $\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, $\sigma_i\sigma_j(1-\rho_{ij}^2)^{1/2}$, 0), $i \neq j$。由式（2.22）可知, X_{ij}可以简洁地表示为若干个相关零均值正态随机变量的独立副本之和。令 Z_1、.....、 Z_n 为独立的 PN(ρ_{ij}, σ_i, σ_j) 随机变量（回想一下，该记号在第2.5.1节第4部分中引入）。那么

$$X_{ij} =_d Z_1 + \cdots + Z_n, \quad i \neq j.$$

非对角元素服从 VG 分布这一点，可以根据 Wishart分布的 Bartlett分解（见 Anderson [4]）以及 VG分布关于独立正态随机变量和卡方随机变量的表示（2.18）推导得出。$X \sim W_p(V, n)$的 Bartlett分解为

$$X =_d LAA^\intercal L^\intercal, \tag{4.48}$$

其中, L 是 V 的 Cholesky因子, A 是一个下三角矩阵，其对角元素为$S_i \sim \chi_{n-i+1}$（因此 $S_i^2 \sim \chi^2_{n-i+1}$）, $1 \leq i \leq p$，且当 $j < i$时，非对角元素为 0；当 $i > j$时，非对角元素为 $N_{ij} \sim N(0, 1)$。矩阵 A 中的所有元素均相互独立。由 Bartlett分解（4.48）可得

$$X_{12} =_d v_{12}S_1^2 + (v_{11}v_{22} - v_{12}^2)^{1/2}S_1N_{12}, \tag{4.49}$$

其中我们用到了$L_{11} = \sqrt{v_{11}}$、$L_{12} = v_{12}/\sqrt{v_{11}}$和 $L_{22} = (v_{22} - v_{12}^2/v_{11})^{1/2}$。因此，根据 VG分布的表示（2.18）可知, $X_{12} \sim$ VG(n, v_{12}, $(v_{11}v_{22} - v_{12}^2)^{1/2}$, 0)。我们可以利用 Bartlett分解（4.48），得到非对角元素 X_{ij}、 $i \neq j$关于独立正态随机变量和卡方随机变量的类似表示，尽管这些表示更为复杂，而且通过这种方法较难推断这些元素确实服从 VG 分布。不过，由（4.49）和对称性可知，非对角元素服从 VG 分布，其参数如（4.47）所示。对于一般的非对角元素 X_{ij}，可以通过适当重排 Wishart 矩阵 X 中的元素，并对矩阵 V作相应的重排，再对新的 Wishart 矩阵 X' 进行 Bartlett分解，从解析上验证这一点。随后可知，元素 X_{ij} （重排后的 Wishart 矩阵 X'中的元素X'_{12} ）可表示为$X_{ij} =_d v_{ij}S_1^2 +(v_{ii}v_{jj} - v_{ij}^2)^{1/2}S_1N_{12}$的形式，由此即可得证。

4.2 方差-伽马过程

在第2.3节中，我们看到 VG分布是无限可分的。根据无限可分分布与过程的理论（见 Ferguson 和 Klass [30]），我们可以定义一个具有方差伽马分布增量的 Lévy 过程。由此得到的 Lévy 过程称为 VG过程，正如我们将在第4.3节讨论的那样，它广泛应用于金融建模。拉普拉斯运动 这一术语也经常使用；例如参见 Kotz 等人 [60] 以及 Kozubowski 和 Podg´orski [63]。Madan 和 Seneta [77] 首次完整阐述了 VG模型，针对的是对称方差伽马分布增量的情形（$\theta = 0$）；随后 Madan 和 Milne [74] 以及 Madan等人 [73]将其扩展到包含偏度的情形（$\theta \in \mathbb{R}$）。在 Madan 和 Seneta [77], 发表开创性论文的几年前，同一作者曾发表过两篇论文（Madan 和 Seneta [75, 76]），其中介绍了 VG过程的一些基本性质；有关方差伽马过程早期发展的介绍，参见 Seneta [109] 。

本节将回顾方差伽马分布过程的一些最基本性质，并简要讨论这些性质为何适用于金融建模。我们仅考虑单变量VG过程；关于由 Madan 和 Seneta [77], 提出的多变量VG过程，请参阅 Luciano 和 Schoutens [70],

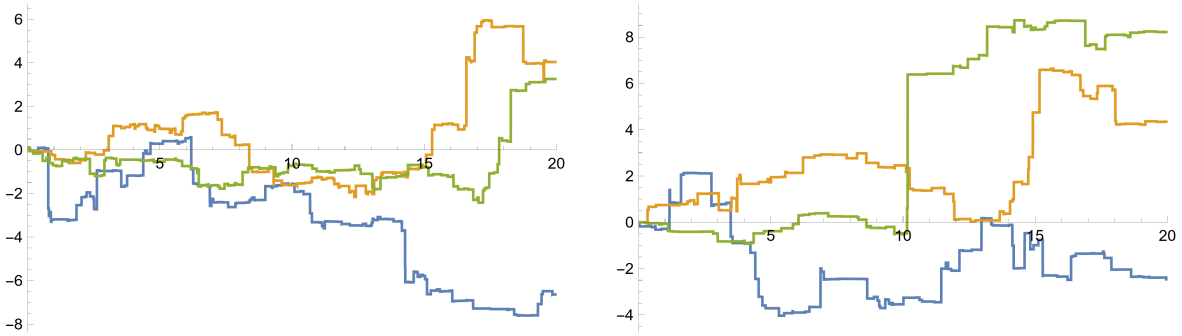


图 2：*VG*过程 $X(t;1,1,0)$ 的三个实现（左图），以及 $X(t;1,2,0)$（右图）。

Semeraro [107], 、Luciano 和 Semeraro [71] 、Luciano、Marena 和 Semeraro [72], 以及 Linders 和 Stassen [68] 介绍了将其应用于道琼斯工业平均指数（DJIA）篮子期权的校准。我们也不讨论VG过程的模拟方法，相关算法请参阅 Avramidis 和 L'Ecyuer [6],、Fu [34] 以及 Korn、Korn 和 Kroisandt [59, 第 7.3 节。3]

Madan等人 [73] 将VG过程构造为经伽马过程进行时间变换的从属布朗运动。考虑漂移为 θ 、波动率为 σ 的布朗运动 $b(t;\theta,\sigma) = \theta t + \sigma B(t)$，其中 $B(t)$ 为标准布朗运动。回顾一下，伽马过程 $\gamma(t;\mu,\nu)$ 的均值速率为 μ，方差速率为 ν，它是一个Lévy过程，其增量 $\tau_h = \gamma(t+h;\mu,\nu) - \gamma(t;\mu,\nu)$ 服从 $\Gamma(\mu^2 h/\nu, \mu/\nu)$ 分布。假设过程 $B(t)$ 与 $\gamma(t;\mu,\nu)$ 相互独立。则具有参数 $\nu > 0$、$\theta \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma > 0$ 的VG过程 $X(t) = X(t;\sigma,\nu,\theta)$ 定义为

$$X(t) = b(\gamma(t;1,\nu);\theta,\sigma). \tag{4.50}$$

正如我们将看到的，分别通过参数 θ 和 ν可以控制偏度和峰度。这一特性对金融建模十分重要。正如 Madan 和 Seneta [77,第 517], 页所指出的，式（4.50）中的随机伽马时间变换有着有趣的经济学解释：它假设具有经济意义的时间是随机的，即市场（价格过程 $X(t)$）在不同日期以不同速度运行，而过程 $\gamma(t;1,\nu)$则是对这种速度的度量。图 2 给出了对称 VG过程在参数 ν 取不同值时的样本路径。

为了观察 方差伽马分布过程（4.50）的增量服从方差伽马分布，我们注意到

$$X(t+h) - X(t) = \theta\tau_h + \sigma(B(\gamma(t+h;1,\nu)) - B(\gamma(t;1,\nu)) =_d \theta\tau_h + \sigma\tau_h^{1/2}B(1).$$

由于 $B(1) \sim N(0, 1)$ 和 $\tau_h \sim \Gamma(\mu^2 h/\nu, \mu/\nu)$ 相互独立，由（2.18）可得

$$X(t+h) - X(t) \sim \mathrm{VG}(2h/\nu, \theta\nu/2, \sigma\sqrt{\nu/2}, 0). \tag{4.51}$$

特别是，由于 $X(0) = 0$,

$$X(t) \sim \mathrm{VG}(2t/\nu, \theta\nu/2, \sigma\sqrt{\nu/2}, 0). \tag{4.52}$$

我们很快将看到，VG过程具有有限变差，因此可以表示为两个独立递增过程之差。这些递增过程实际上是伽马过程，其表示如下（参见 Madan等人 [73]）

$$X(t) =_d \gamma_p(t;\mu_p,\nu_p) - \gamma_n(t;\mu_n,\nu_n), \tag{4.53}$$

其中

$$\mu_p = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} + \frac{\theta}{2}, \quad \mu_n = \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 + \frac{2\sigma^2}{\nu}} - \frac{\theta}{2}, \quad \nu_p = \mu_p^2\nu, \quad \nu_n = \mu_n^2\nu.$$

这里，$\gamma_p(t;\mu_p,\ \nu_p)$ 充当收益过程，而 $\gamma_n(t;\ \mu_n,\ \nu_n)$ 则是损失过程。根据表示 (2.20) 以及 $\gamma(t;\mu,\ \nu) \sim \Gamma(\mu^2 t/\nu,\ \mu/\nu)$ 这一事实，可以得到方差伽马分布过程表示 (4.53)，即两个独立伽马过程之差。

由 (4.52) 以及矩公式 (2.30) 和 (2.33)–(2.35)，我们得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X(t)] &= \theta t,\\
\mathbb{E}[(X(t)-\mathbb{E}[X(t)])^2] &= (\theta^2\nu + \sigma^2)t,\\
\mathbb{E}[(X(t)-\mathbb{E}[X(t)])^3] &= (2\theta^3\nu^2 + 3\sigma^2\theta\nu)t,\\
\mathbb{E}[(X(t)-\mathbb{E}[X(t)])^4] &= (3\sigma^4\nu + 12\sigma^2\theta^2\nu^2 + 6\theta^4\nu^3)t + (3\sigma^4 + 6\sigma^2\theta^2\nu + 3\theta^4\nu^2)t^2
\end{aligned}$$

（见 Madan等人 [73]）。我们看到，参数 θ 并不直接控制偏度，尽管当 $\theta = 0$ 时偏度为零，而当 $\theta > 0$ 时偏度为正。当 $\theta = 0$ 时，峰度为 $3(1 + \nu/t)$，因此 ν 是单位时间间隔 $t = 1$ 内超额峰度的百分比。随着 t 增大，峰度会逐渐降至 3，即标准正态分布的峰度。正如 Madan 和 Seneta [77], 所指出的，这与经验证据一致：日收益具有厚尾，而月收益服从正态分布。

由 (4.52) 和 (2.12)，可得 VG过程的特征函数为

$$\varphi_{X(t)}(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}uX(t)}] = \left(1 - \mathrm{i}\theta\nu u + (\sigma^2\nu/2)u^2\right)^{-t/\nu} \tag{4.54}$$

（见 Madan等人 [73]）。特征函数 (4.54) 具有简单形式，这一点对期权定价很重要，因为例如，可以应用 Carr和Madan [21]经典论文中的快速傅里叶变换方法，以数值方式确定期权价值。由 (2.15) 和 (4.52) 可得 VG过程的 Lévy–Khintchine 表示为 $\varphi_{X(t)}(u) = \exp\left(t\int_{\mathbb{R}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ux} - 1)\nu_{VG}(x)\,\mathrm{d}x\right)$，其中 Lévy 密度为

$$\nu_{VG}(x) = \frac{\mu_n^2}{\nu_n|x|}\mathrm{e}^{-\mu_n|x|/\nu_n}\mathbf{1}_{x<0} + \frac{\mu_p^2}{\nu_p x}\mathrm{e}^{-\mu_p x/\nu_p}\mathbf{1}_{x>0}.$$

从其 L´évy-Hinchin 表示可知，VG过程是纯跳跃过程（不存在扩散成分）。VG过程的纯跳跃特性不同于许多期权定价文献中的常见做法；例如，Black-Scholes模型是纯扩散模型。Bakshi、Chen和Cao [9] 指出，跳跃成分在期权定价中十分重要，因为纯扩散模型难以解释微笑效应，尤其是短期限期权的价格。此外，正如Madan等人 [73], 所指出的，Black-Scholes模型是VG模型的参数化特例（回想第2.5.1节，正态分布是VG分布的极限情形），这意味着高活动性已被纳入考虑，因此无需再额外加入扩散成分。事实上，由于 $|x|^{-1}$这一因子，L´évy密度的积分为无穷，因此VG过程具有无限活动。此外，由于 $|x|$ 对L´évy密度可积，该过程具有有限变差。正如Carr等人 [20], 所指出的，与无限变差过程相比，有限变差过程在解释从统计过程到风险中性过程的测度变换时可能更有用，因为它们允许两种测度下鞅成分的局部特征之间具有更大的灵活性。最后，同样如Carr等人 [20], 所指出的，VG过程的L´évy密度完全单调。具体而言，L´évy密度的导数在负跳跃处为正，在正

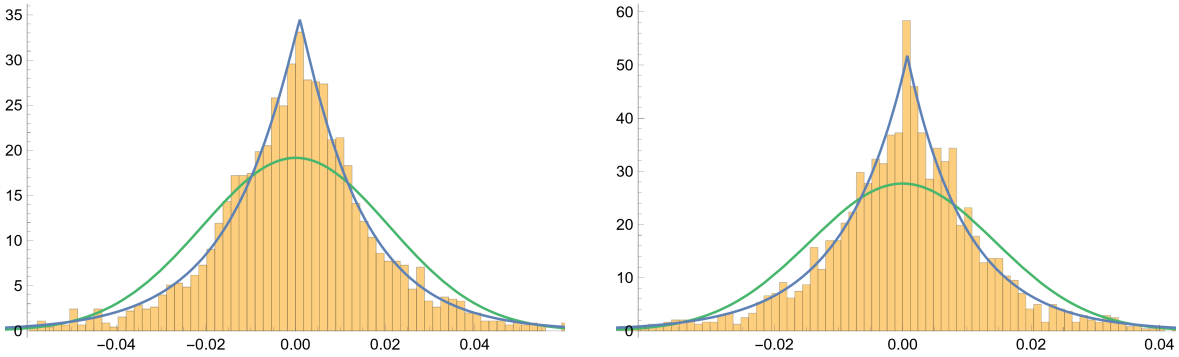


图3： 真实数据示例：图中展示了梅赛德斯-奔驰集团股份公司（日收益左图，*2013*年*01*月*01*日—*2023*年*01*月*01*日，共*2517*个观测值）和*Global X DAX*德国*ETF*（日收益右图，*2015*年*01*月*01*日—*2023*年*01*月*01*日，共*2013*个观测值）的对数收益，并分别拟合了方差伽马分布（）和正态分布（）。我们采用最大似然估计拟合*VG*分布。

跳跃处为负，因此大跳跃出现的频率低于小跳跃，这与我们在价格变动中观察到的情况一致。事实上，大多数跳跃的幅度都极小；关于复合泊松近似以及跳跃精细结构的详细说明，参见 Madan 和 Seneta [77] 以及Kotz 等人 [60, 第4节2]。

4.3 金融建模

Black-Scholes模型是数理金融中的典范模型。在该模型下，时刻 t 的资产价格 $S(t)$服从几何布朗运动

$$S(t) = S(0)\exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B(t)), \tag{4.55}$$

其中， $\mu \in \mathbb{R}$ 和 $\sigma > 0$ 是分别表示漂移和波动率的常数， $B(t)$是标准布朗运动。尽管几何布朗运动在金融建模中得到广泛应用，但人们也指出了它存在若干不足。例如，正如Heyde [51], 详细阐述的，在几何布朗运动假设下，对数收益 $Y(t)$ =log $S(t)$ – log $S(t-1)$是独立同分布的正态随机变量，这往往与实证对数收益数据不符；相关实证研究见Eberlein和Keller [26] 以及 Leonenko、Petherick和Sikorskii [67]。具体而言，正态分布的尾部不够厚，无法充分刻画日收益；这正是Madan 和 Seneta [77] 最初引入VG过程的原因之一，他们增加了一个参数来控制峰度，从而允许更厚的尾部。由于VG模型能够灵活控制偏度和峰度，从而更好地拟合金融数据，同时还具有第4.2节所述的其他理想性质，因此已广泛应用于金融建模；图3比较了VG分布和正态分布对真实金融数据的拟合效果。本节将简要介绍相关的大量文献。

Madan等人给出了以VG过程表示的股票价格的统计动力学和风险中性动力学 [73]。统计股票价格是通过在几何布朗运动模型 (4.55) 中用VG过程取代布朗运动的作用而得到的：

$$S(t) = S(0)\exp(mt + X(t;\sigma_S,\nu_S,\theta_S) + \omega_S t), \tag{4.56}$$

其中 $X(\cdot)$ 是 VG过程， m 是统计概率测度下股票的平均收益率，而 VG 参数中的下标 S 表明这些参数是统计

参数。数值 $\omega_S = \nu_S^{-1}\log(1-\theta_S\nu_S-\sigma_S^2\nu_S/2)$ 由无套利条件确定，以确保 $\mathbb{E}[S(t)] = S(0)\exp(mt)$，即 $\mathbb{E}[\exp(X(t))] = \exp(-\omega_S t)$，其中 $\mathbb{E}[\exp(X(t))]$ 的计算使用了式 (4.52) 和矩母函数公式 (2.11)。

在风险中性过程中，以无风险利率贴现的股票价格是鞅。因此，在该概率测度下，股票的平均收益率就是连续复利利率 r。风险中性过程为

$$S(t) = S(0)\exp(rt + X(t;\sigma_{RN},\nu_{RN},\theta_{RN}) + \omega_{RN}t), \tag{4.57}$$

其中，下标 RN 表示这些是无风险参数，而 $\omega_{RN} = \nu_{RN}^{-1}\log(1-\theta_{RN}\nu_{RN}-\sigma_{RN}^2\nu_{RN}/2)$ 则是采用与统计股票价格相同的考量推导得出的。正如 Madan等人 [77], 详细讨论的那样，与基于扩散的价格过程不同，统计参数和无风险参数不必相等，而且二者通常相差很大。

正如 Madan等人 [77], 指出的，当股票价格遵循式（4.56）的方差伽马分布过程动态时，股票价格对数比率 $\log(S(t)/S(0))$ 服从方差伽马分布（这可由式（2.8）和（4.52）得出）：

$$\log(S(t)/S(0)) \sim \mathrm{VG}(2t/\nu, \theta\nu/2, \sigma\sqrt{\nu/2}, (m+\omega)t),$$

其中 $\omega = \nu^{-1}\log(1-\theta\nu-\sigma^2\nu/2)$，并且我们省略了参数中的下标 S。这次使用式（4.51），我们看到对数收益也服从方差伽马分布：

$$Y(t) = \log S(t) - \log S(t-1) \sim \mathrm{VG}(2/\nu, \theta\nu/2, \sigma\sqrt{\nu/2}, m+\omega);$$

参见 Finlay 和 Seneta [31], ，他们还给出了描述对数收益过程 $\{Y(t)\}$ 协方差结构的公式。

Madan等人 [77] 推导出了一个闭式公式，用于计算股票价格的风险中性动力学遵循 VG模型（4.57）时欧式看涨期权的价格。一个标准结果指出，执行价为 K、到期时间为 t 的欧式看涨期权价格 $c(S(0);K,t)$ 为

$$c(S(0);K,t) = \mathrm{e}^{-rt}\mathbb{E}[\max(S(t)-K,0)]. \tag{4.58}$$

在 Madan 和 Milne [74], 的方法基础上，Madan等人 [73] 通过先对随机伽马过程时间变换进行条件化，计算了（4.58）中的期望。在此条件下，VG过程 $X(t)$ 服从正态分布（参见第 2.4 节第 1 部分），期权价值由 Black–Scholes 型公式给出。最后，对得到的条件 Black–Scholes 公式关于伽马密度积分，即可得到 VG 风险中性动力学下的欧式期权价格。公式为

$$\begin{aligned} c(S(0);K,t) = {} & S(0)\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_1}{\nu}}, (\alpha+s)\sqrt{\frac{\nu}{1-c_1}}, \frac{t}{\nu}\right) \\ & - K\mathrm{e}^{-rt}\Psi\left(d\sqrt{\frac{1-c_2}{\nu}}, \alpha s\sqrt{\frac{\nu}{1-c_2}}, \frac{t}{\nu}\right), \end{aligned} \tag{4.59}$$

其中 $\alpha = -\theta/\sqrt{\sigma^2+\theta^2\nu/2}$, $c_1 = \nu(\alpha+s)^2/2$, $c_2 = \nu\alpha^2/2$, 以及

$$d = \frac{1}{s}\left[\log\left(\frac{S(0)}{K}\right) + rt + \frac{t}{\nu}\log\left(\frac{1-c_1}{1-c_2}\right)\right],$$

并且 Ψ 可用第二类修正贝塞尔函数和二元退化超几何函数显式表示；公式见Madan等人 [73] 。正如Madan等人 [73], 所指出的，在（4.59）中令 $\nu \to 0$ ，即可得到经典的Black–Scholes 期权定价公式。

Madan等人 [73] 比较了定价公式（4.59）在标准普尔500指数期权数据上的定价表现，并将其与Black-Scholes模型和对称特例（$\theta = 0$）进行了比较。他们发现，该模型的表现优于Black-Scholes模型，并提供了证据表明，尽管标的风险的统计密度通常呈对称分布，但期权数据所隐含的风险中性密度呈负偏态，这说明考虑一般的非对称VG模型十分重要。

除了Madan等人 [73], 的研究之外，VG模型也已成功地在真实市场数据上进行了检验，并且在许多其他情形下，其表现优于Black-Scholes模型和跳跃扩散模型，例如Lam、Chang和Lee [66] 研究的恒生指数上的欧式期权，以及Daal和Madan [23]研究的货币期权。针对VG模型下各种路径无关支付的闭式定价公式也已得出；例如，参见Aguilar [3] 和Ivanov [54]。不过，通常并不存在闭式期权公式；例如，Hirsa和Madan [52], 推导了VG过程下美式期权定价的偏积分微分方程。在这类情况下，需要采用数值方法。关于各种方法的详细介绍，请参阅Fiorani的学位论文 [33]；此外，Aguilar [3] 最近发表的文章概述了一些常用的数值方法。

4.4 时间序列建模

回顾第4.3节，方差伽马分布因具有较厚的尾部且能够体现偏度，在金融建模中是正态分布的一种实用替代方案。这一点同样适用于时间序列建模中的创新项。正如 Johannesson[56], 详细讨论的那样，VG分布创新项是广泛使用的正态分布创新项的一种自然替代方案，因为条件正态分布创新项具有伽马分布方差的解释十分自然（这会导致较厚的尾部），同时仍具有一定的解析处理能力，而且模拟相对简单。本节简要概述了一个日益丰富的研究领域：创新项服从 VG 分布的时间序列模型。

Tomy和Jose [115], 研究了一个创新项服从广义高斯—拉普拉斯分布的一阶自回归模型：

$$X_t = aX_{t-1} + Z_t + V_t, \tag{4.60}$$

其中，a 是模型参数，$Z_t \sim N(0, \rho^2)$和 $V_t \sim \text{VG}(r, \theta, \sigma, \mu)$相互独立。这里，创新项分布比 VG 分布更一般：它是相互独立的 VG 和正态随机变量之和（不失一般性，均值为零）。Tomy和Jose [115] 通过计算前六阶矩，采用经典的矩估计法拟合参数；不过，他们没有讨论这种方法的拟合优度问题。Nitithumbundit 和 Chan [87] 在与式（4.60）略有不同的设定下，考虑了一阶自回归模型。他们的模型只有 VG 分量 V_t （没有 Z_t），但设定为多元情形。即使创新项的 VG 密度无界，作者仍成功采用期望条件最大化（ECM）拟合模型。他们将方法应用于金融数据，报告称，相较于具有多元正态分布创新项的类似模型，该模型对数据的拟合效果更好。Trindade、Zhu和Andrews [116]研究了更一般的 ARMA(p, q) 模型，其噪声服从非对称拉普拉斯分布（VG$(2, \theta, \sigma, \mu)$ 分布），以及噪声服从 GARCH 非对称拉普拉斯噪声的 ARMA(p, q) 模型。与 Nitithumbundit 和 Chan [87], 类似，他们将模型应用于金融数据，并再次报告称，相较于相应的正态创新项模型，这些模型对数据的拟合效果更好。

Johannesson [56]在道路地形的背景下，研究了一种更复杂的时间序列模型。对于创新项，采用了式（2.18）中的一个对称 VG 随机变量 $Y = \mu + \sigma\sqrt{ST}$（其非对称参数为 $\theta = 0$），并以 T_t取代 T； T_t是一阶自回归过程，具有

高斯创新，且用 S_t取代 S； S_t是一种（非线性）一阶自回归过程，其构造方式使得 S_t 对每个 t 都服从伽马分布，且该过程平稳。他们提出了两种拟合自回归参数的方法，并将该模型拟合到真实道路拓扑数据，结果表明，该模型能够令人满意地还原丘陵的长度、平均坡度和高度的分布。

最后，我们提及，近期人们开始关注基于方差伽马分布构造的非高斯随机场研究；关于这一主题的概述，请参阅 ̊Aberg、Podg´orski 和 Rychlik[2]、 ̊Aberg 和 Podg´orski [1], Bolin [18], Baxevani、Podg´orski 和 Wegener [13]，以及 Kozubowski 和 Podg´orski 的综述 [63]; 关于估计方法的讨论，请参阅 Podg´orski 和 Wegener [95]；关于将其应用于路面不平度建模，请参阅 Bogsj¨o、Podg´orski 和Rychlik [17] 。

4.5 维纳空间上的近似

在第2.3节中，我们看到 VG分布是无限可分的；在第2.4节中，我们看到 VG分布可以简洁地表示为独立标准正态随机变量和伽马随机变量的函数。鉴于这些性质，VG分布自然是极限分布的理想候选。事实上，近期人们开始关注维纳空间上的 VG近似。Azmoodeh、Eichelsbacher 和 Th¨ale [7], Eichelsbacher 和 Th¨ale [28] 以及 Gaunt [41] 通过用于 VG近似的 Stein 方法研究了双重 Wiener-Itˆo 积分的 VG近似；该方法最初由 Gaunt [36], 提出，其出发点是 Stein 刻画 (2.25)。

4.5.1 双重 Wiener-Itˆo 积分的六矩定理

设 $\mathfrak{H}$ 是一个实可分希尔伯特空间，并用 $\mathfrak{H}^{\odot 2}$ 表示 $\mathfrak{H}$ 的二阶对称张量积。对于 $f \in \mathfrak{H}^{\odot 2}$，我们将双重 Wiener-Itˆo 积分记为 $I_2(f)$（定义及基本性质见 Nourdin 和 Peccati [88, 第 2.7] 节）。若 $f \in L^2([0,T]^2,\ \mathrm{d}t)$ 是对称的，则

$$I_2(f) = \int_{[0,T]^2} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}B_{t_1}\,\mathrm{d}B_{t_2},$$

其中 $B = (B_t)_{t\in[0,T]}$ 是标准二维布朗运动（参见 Nourdin 和 Peccati[88, 练习 2.7.6]）。考虑两个随机元素 F 和 G 的分布之间的 Wasserstein $d_{\mathrm{W}}(F,\ G)$ 距离和光滑 Wasserstein 距离 $d_2(F,\ G)$，定义如下:

$$d_{\mathcal{H}}(F,G) := \sup_{h\in\mathcal{H}} |\mathbb{E}[h(F)] - \mathbb{E}[h(G)]|,$$

其中，上确界分别取遍以下函数类

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathrm{W}} &= \{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,h' \text{ is Lipschitz},\ \|h'\|_\infty \le 1\},\\ \mathcal{H}_2 &= \{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,|\,h' \text{ is Lipschitz},\ \|h'\|_\infty \le 1,\ \|h''\|_\infty \le 1\},\end{aligned}$$

其中，$g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 的上确界范数定义为 $\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)|$。显然，对于任何使 $d_{\mathrm{W}}(F,\ G)$ 有定义的随机元素 F 和 G，均有 $d_2(F,\ G) \le d_{\mathrm{W}}(F,\ G)$。

设 $F_n = I_2(f_n)$ 满足 $f_n \in \mathfrak{H}^{\odot 2},\ n \ge 1$。按照 Eichelsbacher 和 Th¨ale [28], 的记法，我们用 $\mathrm{VG}_c(r,\theta,\sigma)$ 表示 $\mathrm{VG}(r,\theta,\sigma,-r\theta)$，即具有零均值的 VG分布。于是，Eichelsbacher 和 Th¨ale [28] 的定理5.8表明，当 $n\to\infty$ 时，序列 $(F_n)_{n\ge1}$ 依分布收敛到 $Y \sim \mathrm{VG}_c(r,\theta,\sigma)$，当且仅当 $\kappa_i(F_n) \to \kappa_i(Y),\ \ i = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$。累积量 $\kappa_i(Y)$ 可通过第2.7节中的公式以及公式 $\kappa_j(S+c) = \kappa_j(S),\ \ j \ge 2$，对任意 $c\in\mathbb{R}$ 直接求得。这个“六矩”定理意味着，一列双重

Wiener-Itˆo 积分收敛到 VG$_c(r,\ \theta,\ \sigma)$ 分布，仅取决于前六个累积量（等价地，前六阶矩）的行为。这是 Nualart 和 Peccati [90] 关于多重 Wiener-Itˆo 积分正态近似的著名“四阶矩”定理的一个 VG类比。

此外，也有定量的“六阶矩”定理。设

$$\mathbf{M}(F_n) = \max\{|\kappa_i(F_n) - \kappa_i(Y)| : i = 2,3,4,5,6\}.$$

那么，存在一个通用常数 $C > 0$，它仅取决于 r, θ, σ，使得

$$d_{\mathrm{W}}(F_n, Y) \le C\sqrt{\mathbf{M}(F_n)} \tag{4.61}$$

（Eichelsbacher 和 Th¨ale [28] 以及 Gaunt [41]），并且 Azmoodeh 等人 [7] 证明，在较弱的 d_2 度量下，存在通用常数 $C_1,\ C_2 > 0$ 使得

$$C_1\mathbf{M}(F_n) \le d_2(F_n, Y) \le C_2\mathbf{M}(F_n). \tag{4.62}$$

(4.62)中的收敛速率是最优的，因此构成了Nourdin 和 Peccati [89] 关于正态近似的最优四阶矩定理的一个类比。

4.5.2 极端临界指数下的广义Rosenblatt过程

现在我们回顾 Azmoodeh 等人 [7] 和 Gaunt [41] 如何利用界（4.61）和（4.62），为 Bai 和 Taqqu [8]的一项卓越极限定理推导收敛速率界。考虑广义Rosenblatt过程 $Z_{\gamma_1,\ \gamma_2}(t)$，它由 Maejima 和 Tudor [78]引入，是如下双重 Wiener-Itˆo 积分

$$Z_{\gamma_1,\gamma_2}(t) = \int_{\mathbb{R}^2}{}' \left(\int_0^t (s - x_1)_+^{\gamma_1} (s - x_2)_+^{\gamma_2} \,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}B_{x_1}\, \mathrm{d}B_{x_2},$$

其中，B_x 是标准布朗运动，$\gamma_i \in (-1,\ -1/2)$，$i = 1,\ 2$，以及 $\gamma_1 + \gamma_2 > -3/2$；撇号 $'$ 表示在随机积分中排除对角线 $x_1 = x_2$。Rosenblatt过程为 $Z_\gamma(t) = Z_{\gamma,\ \gamma}(t)$，$-3/4 < \gamma < -1/2$（参见 Taqqu [112]）。由于$Z_{\gamma_1,\ \gamma_2}(t) =_d t^{2+\gamma_1+\gamma_2} Z_{\gamma_1,\ \gamma_2}(1)$，我们将考虑随机变量$Z_{\gamma_1,\ \gamma_2}(1)$；一般 $t > 0$ 的结果可通过重新缩放得到。对于$\rho \in (0,\ 1)$，定义随机变量 Y_ρ 如下：

$$Y_\rho = \frac{a_\rho}{\sqrt{2}}(X_1 - 1) - \frac{b_\rho}{\sqrt{2}}(X_2 - 1),$$

其中，X_1 和 X_2 是独立随机变量 χ_1^2，且

$$a_\rho = \frac{(2\sqrt{\rho})^{-1} + (\rho+1)^{-1}}{\sqrt{(2\rho)^{-1} + 2(\rho+1)^{-2}}}, \quad b_\rho = \frac{(2\sqrt{\rho})^{-1} - (\rho+1)^{-1}}{\sqrt{(2\rho)^{-1} + 2(\rho+1)^{-2}}}.$$

假设 $\gamma_1 \ge \gamma_2$ 和 $\gamma_2 = (\gamma_1 + 1/2)/\rho - 1/2$。那么，Bai 和 Taqqu [8] 证明了$Z_{\gamma_1,\ \gamma_2}(1) \to_d Y_\rho$，当 $\gamma_1 \to -1/2$ 时。（注意，如果 $\gamma_1 \to -1/2$，那么 $\gamma_2 \to -1/2$。）

根据表示 (2.20)，我们有 $Y_\rho \sim$ 方差伽马分布$_c(1, (a_\rho - b_\rho)/\sqrt{2}, \sqrt{2a_\rho b_\rho})$。Arras 等人 [5] 证明，对于任意 $i \ge 2$, $\kappa_i(Z_{\gamma_1,\gamma_2}(1)) = \kappa_i(Y_\rho) + O(-\gamma_1 - 1/2)$，当 $\gamma_1 \to -1/2$ 时成立；结合 (4.61) 和 (4.62) 可得，当 $\gamma_1 \to -1/2$ 时，

$$d_{\mathrm{W}}(Z_{\gamma_1,\gamma_2}(1), Y_\rho) \le C_\rho\sqrt{-\gamma_1 - \frac{1}{2}}, \quad d_2(Z_{\gamma_1,\gamma_2}(1), Y_\rho) \le C'_\rho\Big(-\gamma_1 - \frac{1}{2}\Big).$$

其中，C_ρ 和 C'_ρ 仅取决于 ρ。通过对上述d_2 度量界应用标准的平滑技术，Gaunt和Li [44] 推导出了 Kolmogorov 距离界

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}(Z_{\gamma_1,\gamma_2}(1) \le z) - \mathbb{P}(Y_\rho \le z)| \le C''_\rho\Big(-\gamma_1 - \frac{1}{2}\Big)^{1/3} \log\left(\frac{1}{-\gamma_1 - 1/2}\right), \quad \text{as } \gamma_1 \to -\tfrac{1}{2}.$$

A 第二类修正贝塞尔函数

本附录陈述本综述中用到的第二类修正贝塞尔函数的一些基本性质。除非另有说明，这些性质均见 Olver 等人 [92]。第二类修正贝塞尔函数 $K_\nu(x)$ 对于 $\nu \in \mathbb{R}$ 定义如下：

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x\cosh(t)} \cosh(\nu t)\,\mathrm{d}t, \quad x > 0.$$

对于 $x > 0$，函数 $K_\nu(x)$ 对所有 $\nu \in \mathbb{R}$ 均为正。对于 $\nu = m + 1/2$，$m = 0$，1，2，.....，

$$K_{m+1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sum_{j=0}^{m} \frac{(m+j)!}{(m-j)!j!} (2x)^{-j} \mathrm{e}^{-x}. \tag{A.63}$$

修正贝塞尔函数 $K_\nu(x)$ 具有如下渐近行为：

$$K_\nu(x) \sim \begin{cases} 2^{|\nu|-1}\Gamma(|\nu|)x^{-|\nu|}, & x \downarrow 0,\ \nu \neq 0, \\ -\log x, & x \downarrow 0,\ \nu = 0, \end{cases} \tag{A.64}$$

$$K_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \mathrm{e}^{-x}, \quad x \to \infty,\ \nu \in \mathbb{R}. \tag{A.65}$$

以下求导公式成立：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^\nu K_\nu(x)\big) = -x^\nu K_{\nu-1}(x). \tag{A.66}$$

格拉德施泰因和雷日克的积分公式 [48] 指出，对于 a，$\alpha > 0$ 和 $\nu > -1/2$,

$$\int_0^a t^\nu K_\nu(\alpha t)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1/2)}{\alpha^\nu} a\big(K_\nu(\alpha a)\mathbf{L}_{\nu-1}(\alpha a) + K_{\nu-1}(\alpha a)\mathbf{L}_\nu(\alpha a)\big), \tag{A.67}$$

由概率密度函数 (2.3) 可立即得出，对于 $\nu > -1/2$ 和 $0 \le |\beta| < \alpha$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |t|^\nu \mathrm{e}^{\beta t} K_\nu(\alpha|t|)\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}(2\alpha)^\nu \Gamma(\nu+1/2)}{(\alpha^2-\beta^2)^{\nu+1/2}}. \tag{A.68}$$

以下渐近近似可通过对 Gaunt [39] 中的极限形式 (2.13) 进行重新缩放直接推导得出。对于 $\beta < \alpha$ 和 $\nu > -1/2$,

$$\int_x^\infty \mathrm{e}^{\beta t} t^\nu K_\nu(\alpha t)\,\mathrm{d}t \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \frac{1}{(\alpha-\beta)} x^{\nu-1/2} \mathrm{e}^{-(\alpha-\beta)x}, \quad x \to \infty. \tag{A.69}$$

比值 $K_{\nu-1}(x)/K_\nu(x)$ 满足以下界限。对于 $x > 0$,

$$\frac{x}{\nu - 1/2 + \sqrt{(\nu-1/2)^2 + x^2}} < \frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)} < \frac{x}{\nu - 1 + \sqrt{(\nu-1)^2 + x^2}}, \quad \nu > 1/2; \tag{A.70}$$

$$\frac{K_{\nu-1}(x)}{K_\nu(x)} \le \frac{x}{\nu - 1/2 + \sqrt{(\nu-3/2)^2 + x^2}}, \quad \nu \ge 3/2, \tag{A.71}$$

当且仅当 $\nu = 3/2$ 时，(A.71) 中的等号成立。(A.70) 中的上下界分别由 Segura [106] 和 Ruiz-Antol´ın 与 Segura [101]，推导得出。Gaunt 和 Merkle [46] 给出了不等式 (A.71)。

参考文献

[1] ̊Aberg, S. 和 Podg´orski, K. 一类非高斯二阶随机场。 *Extremes* **14** (2011年), 187–222。[2] ̊Aberg, S.、Podg´orski, K. 和 Rychlik, I. 非高斯随机载荷谱模型的疲劳损伤评估。 *Probabilist. Eng. Mech.* **24**(2009年), 608–617。[3] Aguilar, J. P. 方差伽马模型的一些定价工具。 *Int. J. Theor. Appl. Financ.* **23** (2020年), 2050025。[4] Anderson, T. W. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (第3版)。霍博肯，新泽西州：Wiley-Interscience，2003年。[5] Arras, B.、Azmoodeh, E.、Poly, G. 和 Swan, Y. 独立随机变量线性组合之间的2-瓦瑟斯坦距离上界。 *Stoch. Proc. Appl.* **129** (2019年), 2341–2375。[6] Avramidis, A. N. 和 L'Ecyuer, P. 方差伽马模型下高效的蒙特卡洛和准蒙特卡洛期权定价。 *Manage. Sci.* **52** (2006年), 1930–1944。[7] Azmoodeh, E.、Eichelsbacher, P. 和 Th¨ale, C. 第二维纳混沌上的最优方差伽马逼近。 *J. Funct. Anal.* **282** (2022年), Art. 109450。[8] Bai, S. 和 Taqqu, M. S. 广义Rosenblatt过程在极端临界指数值下的行为。*Ann. Probab.* **45**(2017年), 1278–1324。[9] Bakshi, G.、Chen, C. 和 Cao, Z. 替代期权定价模型的实证表现。 *J. Financ.* **52** (1997年), 2003–2049。[10] Barndorff-Nielsen, O. E. 粒径对数的指数衰减分布。 *Proc. Roy. Soc. London A* **353** 1977 401 419 ( ), – 。

[11] Barndorff-Nielsen, O. E. 双曲分布及双曲线上的分布。 *Scand. J. Stat.* **5** (1978年), 151–157。[12] Barndorff-Nielsen, O. E.、Kent, J. 和 Sørensen, M. 正态方差-均值混合与 *z* *Int. -分 Stat. Rev.* **50** 1982 145 159
布。( ), – 。[13] Baxevani, A.、Podg´orski, K. 和 Wegener, J. 非高斯随机过程的样本路径非对称性。 *Scand. J. Stat.* **41**(2014年), 1102–1123。[14] Bee, M.、Dickson, M. M. 和 Santi, F. 方差伽马模型的基于似然的风险估计。 *Stat. Method. Appl.* **27** 2018 69 89 ( ), – 。

[15] Bibby, B. M. 和 Sørensen, M. 金融中的双曲过程。载于：Rachev, S.（编）， *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance.* 2003 211 248

Elsevier Science，阿姆斯特丹 ( ), – 。[16] Breymann, W. 和 L¨uthi, D. ghyp：广义双曲分布软件包。R软件包ghyp手册，2013年。[17] Bogsj¨o, K. Podg´orski, K. 和 Rychlik, I. 路面粗糙度模型。 *Veh. Syst. Dyn.* **50** (2012年), 725–747。[18] Bolin, D. 非高斯噪声驱动的空间Mat´ern场。 *Scand. J. Stat.* **41** (2014年), 557–579。[19] Cervellera, G. P. 和 Tucci, M. P. 关于伽马-方差过程估计的说明：从失败中汲取经验。 *Comput. Econ.* **49** (2017年), 363–385。[20] Carr, P.、Geman, H.、Madan, D. 和 Yor, M. 资产收益的精细结构：一项实证研究。*J. Bus.* **75** (2002年), 305–332。[21] Carr. P. 和 Madan, D. 使用快速傅里叶变换进行期权估值。 *J. Comput. Financ.* **2** (1999年), 61–73。[22] Cui, G.、Yu, X. Iommelli, S. 和 Kong, L. 两个相关高斯随机变量乘积的精确分布。 *IEEE Signal Process. Lett.* **23** (2016年), 1662–1666。[23] Daal, E. A. 和 Madan, D. B. 方差伽马模型在外汇期权中的实证检验。 *J. Bus.* **78** (2005年), 2121–2152。[24] Devroye, L. *Non-Uniform Random Variate Generation.* 纽约：Springer-Verlag，1986年。[25] Eberlein, E. 和 Hammerstein E. 广义双曲分布和逆高斯分布：极限情形与过程近似。载于：Dalang, R. C.、Dozzi, M.、Russo, F.（编），随机分析、随机场及应用研讨会 IV，收入： *Progress in Probability* **58** Birkh¨auser Verlag，(2004年), 105–153。[26] Eberlein, E. 和 Keller, U. 金融中的双曲分布。 *Bernoulli* **1** (1995年), 281–299。[27] Eberlein, E. 和 Prause, K. 广义双曲模型：金融衍生品与风险度量。载于：Geman, H.、Madan, D. B.、Pliska, S. 和 Vorst, T.（编）， *Mathematical finance – Bachelier Congress 2000* Springer，柏林，(2001年), 245–267。[28] Eichelsbacher, P. 和 Th¨ale, C. 维纳空间上用于方差伽马逼近的Malliavin-Stein方法。*Electron. J. Probab.* **20** 第123期 (2015年), 1–28。[29] Embrechts, P. 广义逆高斯分布的一个性质及其若干应用。 *J. Appl. Probab.* **20** 1983 537 544 ( ), – 。

[30] Ferguson, T. S. 和 Klass, M. J. 无高斯分量独立增量过程的一种表示。 *Ann. Math. Statist.* **43** (1972), 1634–1643。[31] Finlay, R. 和 Seneta, E. 平稳增量学生过程与方差伽马过程。 *J. Appl. Probab.* **43** (2006年), 441–453。[32] Finlay, R. 和 Seneta, E. 平稳增量方差伽马模型与 t 模型：模拟和参数估计。 *Int. Stat. Rev.* **76** (2008), 167–186。[33] Fiorani, F. *Option Pricing Under the Variance Gamma Process.*博士学位论文，的里雅斯特大学，2004年。[34] Fu, M. C. 方差伽马与蒙特卡洛。载于：Fu, M. C.、Jarrow, R. A.、Yen, J.-Y. J. 和 Elliot, R. J.（编），载于：*Advances in Mathematical Finance* Birkh¨auser Boston，（2007），21–34。[35] Gaunt, R. E. *Rates of Convergence of Variance-Gamma Approximations via Stein's Method.* 哲学博士学位论文，牛津大学，2013年。[36] Gaunt, R. E. 基于 Stein 方法的方差伽马逼近。 *Electron. J. Probab.* **19** 第38期（2014年），1–33。[37] Gaunt, R. E. 修正贝塞尔函数及其积分的不等式。 *J. Math. Anal. Appl.* **420** (2014年), 373–386。[38] Gaunt, R. E. 广义双曲分布的 Stein 刻画。 *ESAIM: Probab. Stat.* **21** (2017年), 303–316。[39] Gaunt, R. E. 修正贝塞尔函数积分及其相关表达式的不等式。

J. Math. ( ), – 。

Anal. Appl. **462** 2018 172 190

[40] Gaunt, R. E. 关于零均值相关正态随机变量乘积分布的注记。

Stat. ( ), – 。

Neerl. **73** 2019 176 179

[41] Gaunt, R. E. Wasserstein 距离和 Kolmogorov 距离下方差伽马逼近的 Stein 因子。*J. Math. Anal. Appl.* **514** (2022年), 第126274号。[42] Gaunt, R. E. 零均值相关正态随机变量乘积的基本分布理论。*Stat. Neerl.* **76** (2022年), 450–470。[43] Gaunt, R. E. 关于方差伽马分布的矩。arXiv:2209.07767, 2022年。[44] Gaunt, R. E. 和 Li, S. 通过 Wasserstein 距离及相关积分概率度量界定 Kolmogorov 距离。 *J. Math. Anal. Appl.* **522** (2023年), 第126985号。[45] Gaunt, R. E. 和 Li, S. 方差伽马比值分布。arXiv:2302.12581, 2023年。[46] Gaunt, R. E. 和 Merkle, M. 关于广义双曲分布及相关分布众数与中位数界的研究。 *J. Math. Anal. Appl.* **493** (2021年), 第124508号，1–19。[47] Gaunt, R. E.、Mijoule, G. 和 Swan Y. Stein 算子代数。 *J. Math. Anal. Appl.* **469** (2019年), 260–279。[48] Gradshetyn, I. S. 和 Ryzhik, I. M. *Table of Integrals, Series and Products*，第7版。Academic Press，2007年。[49] Groeneveld, R. A. 和 Meeden, G. 众数、中位数与均值不等式。 *Amer. Stat.* **31** (1977年), 120–121。[50] Hammerstein, E. A. V. *Generalized hyperbolic distributions: Theory and applications to CDO pricing.* 博士学位论文，弗赖堡大学，2010年。[51] Heyde, C. C. 通过分形活动时间构建的强依赖风险资产模型。

J. Appl. Probab. ( ), – 。

36 1999 1234 1239

[52] Hirsa, A. 和 Madan, D. B. 方差伽马模型下美式期权的定价。 *J. Comput. Financ.* **7** (2004年), 63–80。[53] Holm, H. 和 Alouini, M.–S. 服从 McKay 分布的两个相关 Nakagami 随机变量平方和与平方差。*IEEE T. Commun.* **52** (2004年), 1367–1376。[54] Ivanov, R. V. 漂移跳跃下方差伽马模型的期权定价。

Int. J. Theor. Appl. Financ. ( ), – 。

21 2018 1 19

[55] Jankov Maˇsirevi´c, D. 和 Pog´any, T. K. 关于 McKay 贝塞尔分布累积分布函数的新公式。*Commun. Stat. Theory* **50**(2021年), 143–160。[56] Johannesson, P.、Podg´orski, K.、Rychlik, I. 和 Shariati, N. 用于道路地形建模、具有自回归伽马方差的 AR(1) 时间序列。 *Probabilist. Eng. Mech.* **43** (2016年), 106–116。[57] Kollo, T. *Advanced Multivariate Statistics with Matrices.* Springer，2005年。[58] Koponen, I.（1995）截断 Lévy 飞行趋向高斯随机过程的收敛问题的解析方法。 *Phys. Rev. E* **52**，1197–1199。[59] Korn, R.、Korn, E. 和 Kroisandt, G. *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance.* 佛罗里达州博卡拉顿：Chapman and Hall/CRC，2010年[60] Kotz, S.、Kozubowski, T. J. 和 Podg

´ *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications Economics Engineering and Finance.* 2001

orski, K. , , , Springer, 。

[61] Kozubowski, T. J.、Mazur, S. 和 Podg´orski, K. 矩阵变元广义拉普拉斯分布。工作论文 2022:7, ¨厄勒布鲁大学商学院。[62] Kozubowski, T. J. 和 Podg

´

Math. Comput.

Model. **34** 2001 1003 1021

orski, K. 非对称拉普拉斯定律与金融数据建模。( ), – 。[63] Kozubowski, T. J. 和 Podg´orski, K. 拉普拉斯概率分布及相关随机过程。载于：Shmaliy, Y.（编）。 *Probability: Interpretation, Theory and Applications.* 纽约：Nova Science Publishers, Inc.，（2012年），第105–145页。[64] Kozubowski, T. J.、Podg´orski, K. 和 Rychlik, I. 多元广义拉普拉斯分布及相关随机场。 *J. Multivariate Anal.* (2013年), 59–72。[65] K¨uchler, U. 和 Tappe, S. 截尾稳定分布与过程。 *Stoch. Proc. Appl.* **123** (2013年), 4256–4293。[66] Lam, K.、Chang, E. 和 Lee, M. C. 漂移跳跃下方差伽马模型的期权定价。

Pac.- ( ), –

Basin Financ. J. **10** 2002 267 285

[67] Leonenko, N. N.、Petherick, S. 和 Sikorskii, A. 具有依赖性的学生次 subordinators 模型与风险资产收益。 *Commun. Stat. Theory* **40**(2011年), 3509–3523。[68] Linders, D. 和 Stassen, B. 多元方差伽马模型：篮子期权定价与校准。*Quant. Financ.* **16**(2016年), 555–572。[69] Loregian, A.、Mercuri, L. 和 Rroji, E. 用正态分布有限混合逼近方差伽马模型。 *Stat. Probabil. Lett.* **82** (2012年), 217–224。[70] Luciano, E. 和 Schoutens, W. 多元跳跃驱动金融资产模型。 *Quant. Financ.* **6**(2006年), 385–402。[71] Luciano, E. 和 Semeraro, P. Lévy 资产模型的多元时间变换：刻画与校准。 *J. Comput. Appl. Math.* **233** (2010年), 1937–1953。[72] Luciano, E.、Marena, M. 和 Semeraro, P. 基于因子次级过程的依赖关系校准与投资组合拟合。 *Quant. Financ.* **16** (2016年), 1037–1052。[73] Madan, D. B.、Carr, P. 和 Chang, E. C. 方差伽马过程与期权定价,

Eur. Finance Rev. ( ), – 。

2 1998 74 105

[74] Madan, D. B. 和 Milne, F. 带有方差伽马鞅分量的期权定价。 *Math. Financ.* **1** (1991年), 39–55。[75] Madan, D. B. 和 Seneta, E. 使用经验特征函数模拟估计量。

Int. Stat. ( ), – 。

Rev. **55** 1987 153 161

[76] Madan, D. B. 和 Seneta, E. 切比雪夫多项式逼近与特征函数估计。*J. Roy. Stat. Soc. B* **49** (1987年), 163–169。[77] Madan, D. B. 和 Seneta, E. 股票市场收益的方差伽马模型。 *J. Bus.* **63** (1990年), 511–524。[78] Maejima, M. 和 Tudor, C. A. 第二维纳混沌中具有平稳增量的自相似过程。*Probab. Math. Stat.-Pol.* **32** (2012年), 167–186。[79] Mangilli, A.、Plaszczynski, S. 和 Tristram, M.（2015）。宇宙微波背景温度与偏振交叉谱的似然。 *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **453** (2015年), 3174–3189。[80] McKay, A. T. 贝塞尔函数分布。 *Biometrika* **24** (1932年), 39–44。[81] McLeish, D. L. 正态分布的一种稳健替代。 *Can. J. Statist.* **10** (1982 年), 89–102。[82] McNicholas, S. M.、McNicholas, P. D. 和 Browne, R. P. 方差伽马分布混合。arXiv:1309.2695, 2013年。[83] Nadarajah, S. 和 Kotz, S. 贝塞尔比值分布。 *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **343** (2006年) 531–534。[84] Nadarajah, S. 和 Pog´any, T. K. 关于相关正态随机变量乘积分布的研究。*C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **354**(2016年), 201–204。[85] Nadarajah, S.、Srivastava, H. M. 和 Gupta, A. K. 偏斜贝塞尔函数分布及其在降雨数据中的应用。 *Statistics* **41** (2007年), 333–344。[86] Nitithumbundit, T. 和 Chan, J. S. 正态均值—方差表示下偏斜多元方差伽马分布的期望条件最大化算法。arXiv:1504.01239, 2015年。[87] Nitithumbundit, T. 和 Chan, J. S. 用于无界密度自回归多元偏斜方差伽马模型的期望条件最大化算法。 *Methodol. Comput. Appl.* **22** (2020年), 1169–1191。[88] Nourdin, I. 和 Peccati, G. 基于 Malliavin 演算的正态逼近：从 Stein 方法到普适性。第192卷。剑桥大学出版社，2012年。[89] Nourdin, I. 和 Peccati, G. 最优四阶矩定理。 *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015年), 3123–3133。[90] Nualart, D. 和 Peccati, G. 多重随机积分序列的中心极限定理。

Ann. Probab. ( ), – 。

33 2005 177 193

[91] Nzokem, A. H. 伽马方差模型：分数阶傅里叶变换（FRFT）。载于 *Journal of Physics: Conference Series* 2090, 1, 012094 2021 (Vol. No. p.)。IOP 出版社，。[92] Olver, F. W. J., Lozier, D. W., Boisvert, R. F. 和 Clark, C. W. *NIST Handbook of Mathematical Functions.* 剑桥大学出版社，2010年。[93] Pearson, K., Jefferey, G. B. 和 Elderton, E. M. 关于从无限大的正态总体中抽取的样本中第一乘积矩系数的分布。 *Biometrika* **21** (1929年), 164–193。[94] Pearson, K., Stouffer, S. A. 和 David, F. N. 贝塞尔函数 $T_m(x)$ 在统计学中的进一步应用。*Biometrika* **24** (1932年), 293–350。[95] Podg´orski, K. 和 Wegener, J. 拉普拉斯运动驱动的随机模型的估计。 *Commun. Stat.Theory* **40**(2011年), 3281–3302[96] Press, S. J. 关于来自二元正态分布的样本协方差， *Ann. Inst. Statist. Math.* **19** (1967年), 355–361。[97] Ramachandran, B. 关于几何稳定律、稳定过程的一项相关性质以及稳定密度。

Ann. ( ), – 。 *Inst. Statist. Math.* **49** 1997 299 313

[98] Rathgeber, A. W., Johannes, S. 和 St¨ockl, S. 股票收益建模——方差伽马模型的实证研究。 *J. Econ. Finance* **40** (2016年), 653–682。[99] Reed, W. J. 正态-拉普拉斯分布及其相关分布。

Advances in Distribution Theory Order , , *Statistics and Inference* ( )。– 。2006 61 74

[100] Reed, W. J. 布朗-拉普拉斯运动及其在金融建模中的应用。 *Commun. Stat. Theory* **36** (2007年), 473–484。[101] Ruiz-Antol´ın, *J. Math. Anal. Appl.* **443** 2016 1232 1246

D. 和 Segura. J. 修正贝塞尔函数比值的一种新型紧界。( ), – 。[102] Rydberg, T. H. 广义双曲扩散及其在金融领域的应用。 *Math. Financ.* **9**, 183–201。[103] Sato, K. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions.* 剑桥：剑桥大学出版社，1999年。[104] Scott, D. 和 Dong, C. Y. 软件包“VarianceGamma”，2018年。[105] Scott, D. J., W¨urtz, D., Dong, C. 和 Tran, T. T. 广义双曲分布的矩。( ), – 。[106] Segura, J. 修正贝塞尔函数比值的界及相关的 Tur´an 型不等式。( ), – 。*J. Math. Anal. Appl.* **374** 2011 516 528

[107] Semeraro, P. 一种用于金融应用的多元方差伽马模型。 *Int. J. Theor. Appl. Financ.* **11** (2008年), 1–18。[108] Seneta, E. 将方差伽马模型拟合到金融数据。 *J. Appl. Probab.* **41** (2004 年), 177–187。[109] Seneta, E. 方差-伽马过程的早期发展。载于：Fu, M. C., Jarrow, R. A., Yen, J. J. 和 Elliott, R. J.（编），*Advances in Mathematical Finance*。(2007年), Birkhauser, Boston, 3–19。[110] Sichel, H. S. 含金刚石矿床的统计评估。 *J. S. Afr. Inst. Min. Metall.* **73** (1973年), 235–243。[111] Stein, C. 关于相关随机变量之和的分布的正态近似误差界。载于 *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statis. Prob.* (1972年), 第2卷，加州大学出版社，伯克利，583–602。[112] Taqqu, M. S. 弱收敛至分数布朗运动和 Rosenblatt过程。

Probab. Theory ( ), – 。 *Rel.* **31** 1975 287 302

[113] Teichroew, D. 具有不同方差的正态分布混合。 *Ann. Math. Statist.* **28** (1957年), 510–512。[114] Tjetjep, A. 和 Seneta, E. 用于资产定价的偏态正态方差-均值模型及矩估计法。*Int. Stat. Rev.* **74** (2008年), 109–126。[115] Tomy, L. 和 Jose, K. K. 广义正态-拉普拉斯自回归过程。 *Statist. Probabil. Lett.* **79** (2009年), 1615–1620。[116] Trindade, A. A., Zhu, Y. 和 Andrews, B. 采用非对称拉普拉斯创新项的时间序列模型。

J. Stat. ( ), – 。 *Compu. Sim.* **80** 2010 1317 1333

[117] van Zwet, W. R. 均值、中位数、众数 II。 *Stat. Neerl.* **33** (1979年), 1–5。[118] Weisstein, E. W. 卡方分布。摘自 MathWorld—Wolfram 网络资源，https://mathworld.wolfram.com/Chi-SquaredDistribution.html。最后访问日期：2023年7月3日。[119] Wu, F. *Applications of The Normal Laplace and Generalized Normal Laplace Distributions.* 硕士学位论文，维多利亚大学，2008年。[120] Yamazato, M. L 类无限可分分布函数的单峰性。 *Ann. Probab.* **6**(1978年), 523–531。