arXiv:2303.05624v1 [physics.class-ph] 9 Mar 2023

磁荷与双性不变性

Oliver Davis Johns

旧金山州立大学，物理与天文学系，Thornton Hall，1600 Holloway Avenue，旧金山，马萨诸塞州 94132，美国， <ojohns@metacosmos.org>

摘要

本文对非标准麦克斯韦电动力学进行了批判性研究，探讨了两个重要主题：将磁荷和电荷同时纳入，从而形成文中所称的扩展电动力学；以及一种称为双性不变性的对称性的存在，这种对称性可交换电磁物理量。

首先，本文概述了扩展电动力学，包括势、规范变换，以及对扩展电动力学坡印廷定理的新证明。
文中还给出了扩展麦克斯韦方程的形式拉格朗日推导，但质疑其在基础研究中的价值。

随后，论文定义了双性不变性（在所谓的双性变换下保持形式不变，该变换交换电磁物理量），并指出，只有当电动力学采用扩展形式时，双性不变性才是有效的对称性。

论文认为，完整的麦克斯韦电动力学就是具有双荷性不变性的扩展电动力学。然而，双荷性既可以作主动解释，也可以作被动解释。由于磁荷尚未得到实验观测，主动解释被排除。但可以采用被动解释，避免明确写出磁源和势项。

本文还驳斥了一种观点：即使磁荷确实存在，双性不变性也能将其变换消除。如果存在非零磁荷，那么其存在的实验依据就不可能被对偶变换掩盖。

1 前言

本文探讨了两个重要主题：将磁荷和电荷一并纳入，从而形成所谓的扩展电动力学；以及一种名为双性不变性的对称性的存在，这种对称性会交换电磁物理量。[1]

第2至第5节概述扩展电动力学，包括势和规范变换。第3节给出了扩展电动力学坡印廷定理的新证明，第11节的附录A也给出了相关内容。

第6节对扩展电动力学进行了形式拉格朗日推导，但指出拉格朗日方法的价值有限。

第7节定义了双性不变性（在交换电磁物理量时保持形式不变，这种交换称为对偶变换），并证明它只是扩展电动力学的一种对称性。仅含电荷的标准电动力学在对偶变换下并不保持不变。

第7节和第8节阐明了扩展电动力学的双性不变性，包括扩展麦克斯韦方程本身、能量-动量张量，以及涉及四矢势的表达式。

第9节介绍了对偶变换的主动解释与被动解释之间的区别。对双性不变性的主动解释意味着磁荷在实验中确实存在，因此目前已被排除。然而，由于实验尚未发现磁荷，被动解释允许我们将标准电动力学视为扩展电动力学，其中磁源和势以被动方式从所有方程中变换出去。

第 9 节还驳斥了一种观点：双性不变性可以将实验上存在的磁荷变换消除。如果非零磁荷确实存在，那么任何对偶变换都无法掩盖其存在的实验依据。

第 10 节的后记提出了未来研究的方向。本文有两个附录。

2 符号与定义

本节介绍本文将用到的一些定义。

[1]“双荷性”这一新词　　正如 [6] 所建议的，为避免与“对偶性”这一关系（例如式 (2.10)）混淆。

事件 x^{μ} 表示为

$$x^0 = ct \qquad x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$
$$\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}\right) \quad \Box^2 = \partial_{\mu}\partial^{\mu} \tag{2.1}$$

我们将四维矢量记作 $\mathbf{K} = \mathrm{K}^0\mathbf{e}_0 + \mathrm{K}$，其中 $\mathbf{e}_0$ 是时间单位矢量，三维向量部分则理解为 $\mathrm{K} = \mathrm{K}^1\mathbf{e}_1 + \mathrm{K}^2\mathbf{e}_2 + \mathrm{K}^3\mathbf{e}_3$。按照爱因斯坦求和约定，希腊指标取值范围为 0 到 3，罗马指标取值范围为 1 到 3。用于升降指标的闵可夫斯基度规张量为$\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$。三维矢量用粗体 K 表示，其大小记作 K。本文采用海维赛-洛伦兹电磁单位制，除明确给出的源电荷密度外，仅讨论真空中的电动力学。

完全反对称的闵可夫斯基时空列维-奇维塔张量 $\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}$ 满足以下恒等式

$$\varepsilon^{0123} = +1 \qquad \varepsilon_{0123} = -1 \tag{2.2}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -2\left(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} - \delta^{\mu}_{\delta}\delta^{\nu}_{\gamma}\right) \tag{2.3}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\theta\gamma\delta} = -\left(\delta^{\beta}_{\theta}\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\delta} + \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\delta}\delta^{\nu}_{\theta} + \delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\mu}_{\theta}\delta^{\nu}_{\gamma}\right) + \left(\delta^{\beta}_{\theta}\delta^{\mu}_{\delta}\delta^{\nu}_{\gamma} + \delta^{\beta}_{\delta}\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\theta} + \delta^{\beta}_{\gamma}\delta^{\mu}_{\theta}\delta^{\nu}_{\delta}\right) \tag{2.4}$$

其中 $\delta^{\alpha}_{\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta_{\beta\mu}$ 是克罗内克δ张量，当 $\alpha = \beta$ 时其值为 $+1$，否则为零 .

如果 $\mathrm{X}^{\alpha\beta}$ 是反对称二阶张量，那么它的对偶 $\tilde{\mathrm{X}}^{\alpha\beta}$ 是另一个反对称二阶张量，定义为

$$\tilde{X}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}X_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

由式（2.3）可得

$$\tilde{\tilde{X}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\tilde{X}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\theta\delta}X^{\theta\delta} = -\frac{1}{2}\left(\delta^{\alpha}_{\theta}\delta^{\beta}_{\delta} - \delta^{\alpha}_{\delta}\delta^{\beta}_{\theta}\right)X^{\theta\delta} = -X^{\alpha\beta} \tag{2.6}$$

由式（2.4 和 2.5）还可得到其他有用的恒等式。如果 $\mathrm{X}^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{Y}^{\alpha\beta}$ 是反对称张量，那么

$$\tilde{X}^{\alpha\mu}\tilde{Y}_{\alpha\nu} = Y^{\alpha\mu}X_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}X^{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta} \tag{2.7}$$

$$\tilde{X}^{\alpha\beta}\tilde{Y}_{\alpha\beta} = -X^{\alpha\beta}Y_{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

用电场 E 和磁场 B 表示的麦克斯韦场四维张量 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 为

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}_{\mu\nu} \tag{2.9}$$

通过定义对偶场张量 $G^{\alpha\beta}$，电动力学方程通常可以写成更简洁且对称的形式:

$$G^{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

反关系可由式 (2.6) 得出

$$F^{\alpha\beta} = -\tilde{\tilde{F}}^{\alpha\beta} = -\tilde{G}^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}G_{\mu\nu} \tag{2.11}$$

用电场 E 和磁场 B 表示，对偶场张量为 i s

$$G^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z & E_y \\ -B_y & E_z & 0 & -E_x \\ -B_z & -E_y & E_x & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{2.12}$$

标准麦克斯韦方程 不含磁荷时，方程具有显式协变形式[2]

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}J^\beta \quad \text{and} \quad \partial_\alpha G^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.13}$$

其中 J^α 是电荷密度四矢量，其电荷密度为 ρ，通量密度为 J。标准麦克斯韦方程的三矢量形式为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = +\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.15}$$

将式 (2.10) 代入式 (2.13) 的第二个方程，得到

$$\varepsilon^{\beta\alpha\mu\nu}\partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \tag{2.16}$$

对于所有 β 值。该方程等价于

$$\partial_\alpha F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} = 0 \tag{2.17}$$

这常被引用[3] 为所谓齐次麦克斯韦方程组的协变形式，即式（2.15）。不过，式（2.13）的第二个方程本身似乎是更可取的形式，因为它清楚地表明，并不存在与电荷密度 J^β相对应的磁荷密度。

[2]参见 [5]中的公式 (12.126)。
[3]参见 [7]中的公式 (11.143)。

3 带有电荷和磁荷的扩展电动力学

本节概述一种同时包含电荷和磁荷的扩展电动力学，并证明扩展电动力学版本的坡印廷定理。

假设磁荷（如果存在）必须以保留洛伦兹协变性的方式加入麦克斯韦方程，那么对标准电动力学一种保守且合理的推广，就是简单地将磁荷密度四矢量作为式（2.13）中对偶场张量的源项。

于是，协变麦克斯韦方程为:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} J^\beta \qquad \partial_\alpha G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c} L^\beta \tag{3.1}$$

其中

$$\mathbf{J} = c\rho\mathbf{e}_0 + \mathbf{J} \qquad \mathbf{L} = c\lambda\mathbf{e}_0 + \mathbf{L} \tag{3.2}$$

分别是电荷密度四矢量 $\mathbf{J}$，其电荷密度为 ρ、通量密度为 J；以及磁荷四维矢量 $\mathbf{L}$，其磁荷密度为 λ、通量密度为 L。

用三矢量形式表示，式（3.1）中的扩展麦克斯韦方程为[4]

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \lambda \qquad -\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{L} \tag{3.4}$$

由式（3.1）可知，由于 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{G}^{\alpha\beta}$ 具有反对称性,

$$\partial_\beta J^\beta = -c\partial_\alpha\partial_\beta F^{\alpha\beta} = 0 \qquad \partial_\beta L^\beta = -c\partial_\alpha\partial_\beta G^{\alpha\beta} = 0 \tag{3.5}$$

在三 矢量形式下，这些是电荷和磁荷的守恒定律

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{L} = 0 \tag{3.6}$$

另一种合理的推广方式，是在标准电项 $\mathrm{f}^{\alpha}{}_{\mathrm{el}}$ 中加入相应的磁项 $\mathrm{f}^{\alpha}_{\mathrm{mg}}$，从而定义扩展的洛伦兹力密度四维矢量 f^α，使得

$$f^\alpha = \left(f^\alpha_{\mathrm{el}} + f^\alpha_{\mathrm{mg}}\right) \qquad \text{where} \qquad f^\alpha_{\mathrm{el}} = \frac{1}{c}F^\alpha{}_\gamma J^\gamma \qquad f^\alpha_{\mathrm{mg}} = \frac{1}{c}G^\alpha{}_\gamma L^\gamma \tag{3.7}$$

[4]式（3.3、3.4）与 [7] 的式（6.150）一致。

用三矢量形式表示,

$$f^0_{\rm el} = \frac{1}{c}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}) \qquad f^0_{\rm mg} = \frac{1}{c}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}) \tag{3.8}$$

$$\mathbf{f}_{\rm el} = \left\{\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,(\mathbf{J}\times\mathbf{B})\right\} \qquad \mathbf{f}_{\rm mg} = \left\{\lambda\mathbf{B} - \frac{1}{c}\,(\mathbf{L}\times\mathbf{E})\right\} \tag{3.9}$$

我们还可以利用式 (3.1)，完全用场张量来表示力密度

$$f^\alpha_{\rm el} = \frac{1}{c}F^\alpha{}_\gamma J^\gamma = -F^\alpha{}_\gamma\left(\partial_\mu F^{\mu\gamma}\right) \tag{3.10}$$

$$f^\alpha_{\rm mg} = \frac{1}{c}G^\alpha{}_\gamma L^\gamma = -G^\alpha{}_\gamma\left(\partial_\mu G^{\mu\gamma}\right) \tag{3.11}$$

标准电动力学将对称能量-动量张量定义为[5]

$$T^{\alpha\beta} = F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.12}$$

这一相同定义在扩展电动力学中也成立。

对式 (3.12) 进行展开并使用矩阵乘法，可得

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} \mathcal{E} & c\,P_x & c\,P_y & c\,P_z \\ c\,P_x & M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ c\,P_y & M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ c\,P_z & M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{3.13}$$

其中,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(E^2 + B^2\right) \qquad c\mathbf{P} = \mathbf{E}\times\mathbf{B} \qquad M_{ij} = -\left(E_iE_j + B_iB_j\right) + \delta_{ij}\mathcal{E} \tag{3.14}$$

式 (3.12) 右侧的第二项使 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 成为无迹张量。将不变迹定义为

$$\mathrm{Tr}\,T = T^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} \tag{3.15}$$

由式（3.12）可得

$$\mathrm{Tr}\,T = \eta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0 \tag{3.16}$$

利用恒等式 eq.(2.7)，并作代换 $\mathrm{X}^{\alpha\beta} = \mathrm{Y}^{\alpha\beta} = \mathrm{F}^{\alpha\beta}$，eq.(3.12) 中的标准定义也可以写成一种等价形式

$$T^{\alpha\beta} = G^{\alpha\mu}G^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \tag{3.17}$$

[5]例如，参见 [7] 中的式（12.113）。

由于相同的代换表明 $G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$，因此可以将 eqs.(3.12 and 3.17) 相加，得到第三种等价形式

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu} + G^{\alpha\mu}G^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu}\right\} \tag{3.18}$$

在这三种等价形式中，第三种，即式（3.18），最为简洁实用。教科书中应引用它，而不是式（3.12）。

正如第7节将要说明的，式（3.18）清楚地表明，$T^{\alpha\beta}$ 在对偶变换下保持不变。原本看来纯属偶然的要求——必须先将$T^{\alpha\beta}$ 化为无迹形式，才能得到坡印廷定理——可以理解为：电动力学必须在对偶变换下保持不变，因此必须是扩展电动力学。

利用式（3.18）对$T^{\alpha\beta}$ 的等价定义，并结合式（3.10、3.11），第11节中的附录A证明了

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = -\left(f^\beta_{\rm el} + f^\beta_{\rm mg}\right) = -f^\beta \tag{3.19}$$

这既证明了在等价的式（3.12、3.17和3.18）中对$T^{\alpha\beta}$ 的选取是正确的，也证明了式（3.7）中的力假设是正确的。

对于 $\beta = 0$，式(3.19)展开后即为坡印廷定理

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{S}\right) = -(\mathbf{E}\cdot\mathbf{J}) - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{L}) \tag{3.20}$$

其中 $\mathbf{S} = c\mathbf{E}\times\mathbf{B}$。

对于 $\beta = i$，其中 $i = 1, 2, 3$，式(3.19)展开后为

$$\frac{\partial P_i}{\partial t} + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbb{M})_i = -\left\{\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}(\mathbf{J}\times\mathbf{B})\right\}_i - \left\{\lambda\mathbf{B} - \frac{1}{c}(\mathbf{L}\times\mathbf{E})\right\}_i \tag{3.21}$$

其中 P 和 $\mathbb{M}$ 在式(3.14)中定义。注意，此处对三维二阶张量 $\mathbb{M}$ 的符号定义，使得当 da 表示表面 $\mathcal{S}$上指向外侧的面元时，积分 $\int_{\mathcal{S}}\left(\sum_{j=1}^{3} M_{ij}da_j\right)$表示动量 $i^{\rm th}$ 分量的净流出。

4 由两个矢量势导出的扩展麦克斯韦方程

扩展麦克斯韦方程可由两个四矢量势 **A** 和**N**导出。根据定义[6]

$$F^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial A^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta}\right) - \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\frac{\partial N^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial N^\mu}{\partial x^\nu}\right) \tag{4.1}$$

[6]方程（4.1、4.3、5.5、5.7）最初由 Shanmugadhasan 得出[14]。另见 [2]。关于符号约定，请参阅 [7] 的方程（11.136）。

由此可得，对偶场张量为

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) - \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta}\partial^\gamma N^\delta \tag{4.2}$$

利用恒等式 eq.(2.3)，可得

$$G^{\alpha\beta} = \left(\frac{\partial N^\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial N^\alpha}{\partial x^\beta}\right) + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}\right) \tag{4.3}$$

根据反对称张量和规范不变张量 $a_{\alpha\beta}$ and $n_{\alpha\beta}$ 的定义，

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \\ n_{\alpha\beta} &= \frac{\partial N_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial x^\alpha} \end{aligned} \tag{4.4}$$

a以及 eq.(2.5) 中对偶量的定义，eqs.(4.1 and 4.3) 也可写成 s

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= -a_{\alpha\beta} + \tilde{n}_{\alpha\beta} \\ G_{\alpha\beta} &= -n_{\alpha\beta} - \tilde{a}_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{4.5}$$

T势四矢量可用记号 $A^0 = \phi$ and $N^0 =$ 表示 θ

$$\mathbf{A} = \phi\mathbf{e}_0 + \mathbf{A} \qquad \mathbf{N} = \theta\mathbf{e}_0 + \mathbf{N} \tag{4.6}$$

于是，电场和磁场可用这些势表示。

$$-E_i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i - \varepsilon^{i0kl}\partial_k N_l \tag{4.7}$$

因此

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{N} \tag{4.8}$$

Also

$$-B_i = G^{i0} = \partial^i N^0 - \partial^0 N^i + \varepsilon^{i0kl}\partial_k A_l \tag{4.9}$$

因此

$$\mathbf{B} = -\nabla\theta - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{A} \tag{4.10}$$

5 势的规范变换

规范变换将第4节中引入的四矢势 A^{α} 和 N^{α} 替换为修改后的势

$$A^{*\alpha} = A^{\alpha} + \partial^{\alpha}\Lambda \quad \text{and} \quad N^{*\alpha} = N^{\alpha} + \partial^{\alpha}\Gamma \tag{5.1}$$

其中 Λ 和 Γ是场函数。于是

$$F^{*\alpha\beta} = \left(\partial^{\alpha}A^{*\beta} - \partial^{\beta}A^{*\alpha}\right) - \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_{\mu}N_{\nu}^{*} = F^{\alpha\beta} + \left(\partial^{\alpha}\partial^{\beta} - \partial^{\beta}\partial^{\alpha}\right)\Lambda - \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu}\right)\Gamma = F^{\alpha\beta} \tag{5.2}$$

类似地，$\mathrm{G}^{*\alpha\beta} = \mathrm{G}^{\alpha\beta}$。场张量 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$和 $\mathrm{G}^{\alpha\beta}$，因而电场和磁场 E 与 B，在对势进行规范变换时保持不变。

我们假设四矢势满足洛伦兹条件 $\partial_{\alpha}\mathrm{A}^{\alpha} = 0$ 和 $\partial_{\alpha}\mathrm{N}^{\alpha} = 0$。规范变换后的势 $\mathrm{A}^{*\alpha}$ 和 $\mathrm{N}^{*\alpha}$ 也是四维矢量，并且满足洛伦兹条件 $\partial_{\alpha}\mathrm{A}^{*\alpha} = 0$ 和$\partial_{\alpha}\mathrm{N}^{*\alpha} = 0$，当且仅当场函数 Λ 和 Γ 是满足以下条件的洛伦兹标量场

$$\Box^{2}\Lambda = 0 \quad \text{and} \quad \Box^{2}\Gamma = 0 \tag{5.3}$$

这里我们也作此假设。

于是，式（3.1）的第一式可写为

$$-\frac{1}{c}J^{\beta} = \partial_{\alpha}F^{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}A^{\beta} - \partial^{\beta}\left(\partial_{\alpha}A^{\alpha}\right) - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}N_{\delta} \tag{5.4}$$

最后一项因反对称性而消失，因此，假设满足洛伦兹规范条件，$\partial_{\alpha}\mathrm{A}^{\alpha} = 0$ ，

$$\Box^{2}A^{\beta} = -\frac{1}{c}J^{\beta} \tag{5.5}$$

同样，假设洛伦兹规范条件 $\partial_{\alpha}\mathrm{N}^{\alpha} = 0$ 以及方程 (3.1) 的第二式，

$$-\frac{1}{c}L^{\beta} = \partial_{\alpha}G^{\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\partial^{\alpha}N^{\beta} - \partial^{\beta}\left(\partial_{\alpha}N^{\alpha}\right) - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\partial_{\alpha}\partial_{\gamma}A_{\delta} \tag{5.6}$$

$$\Box^{2}N^{\beta} = -\frac{1}{c}L^{\beta} \tag{5.7}$$

6 扩展电动力学的形式拉格朗日推导

本节将说明，扩展电动力学的麦克斯韦方程可以从拉格朗日场函数推导出来。

一些关于扩展电动力学的拉格朗格推导方法，不过是试图将拉格朗日电动力学与狄拉克旋量源结合起来推导狄拉克磁单极子的起点。[7]

早期这些关于扩展电动力学拉格朗日量的尝试，受限于它们试图将拉格朗日量设法写成彼此独立的“电”拉格朗日量与“磁”拉格朗日量之和。$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{el}} + \mathcal{L}_{\text{mg}}$另一些方法[8] 则引入“电”场 $F^{\alpha\beta}$，它只作用于电荷；以及“磁”场 $F'^{\alpha\beta}$，它只作用于磁荷。

这里的简化首先在于，拉格朗日场 $\mathcal{L}$ 不必分解为电和磁拉格朗日量的对称和。

第二个简化是只需要一种电磁场 $F^{\alpha\beta}$。它也可以表示为对偶张量 $G^{\alpha\beta} = \tilde{F}^{\alpha\beta}$，但两个张量中使用的电场和磁场是相同的，只是重新排列了。必须避免混淆双荷性与对偶性。

尽管可以对扩展麦克斯韦方程进行形式上的拉格朗日推导，但我们必须记住，将拉格朗日方法应用于电磁学，必然带有很强的启发式猜测成分。我们只能大致借助类比来指引，而力学所提示的具体选取 $\mathrm{d}/\mathrm{dt} \to \partial/\partial x^{\mu}$、$u_k \to A_{\alpha}$、$v_k \to \Phi_{\alpha\mu} = \partial A_{\alpha}/\partial x^{\mu}$，则必须通过实践中的成效来证明其合理性。

此处选取的简化拉格朗日量为[9]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}J^{\alpha}A_{\alpha} + \frac{1}{c}L^{\alpha}N_{\alpha} \tag{6.1}$$

势 A_{α} 和 N_{α}扮演“坐标”的角色，而$\Phi_{\alpha\beta}$ 和 $\Theta_{\alpha\beta}$ 扮演“广义速度”的角色，其中

$$\Phi_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad \text{and} \quad \Theta_{\alpha\beta} = \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \tag{6.2}$$

为了用这些“坐标”和“广义速度”表示 $\mathcal{L}$，将式 (4.1) 和式 (4.3) 写为

$$F_{\alpha\beta} = -\left(\Phi_{\alpha\beta} - \Phi_{\beta\alpha}\right) + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\Theta_{\mu\nu} \qquad G_{\alpha\beta} = -\left(\Theta_{\alpha\beta} - \Theta_{\beta\alpha}\right) - \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}\Phi_{\mu\nu} \tag{6.3}$$

[7]例如，[14, 3, 2]。[8]见 [13]。[9]见 [11]。由于式 (2.8) 中 X=Y=F 蕴含 $G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} = -F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$，因此这个拉格朗日量也可以写成更对称的形式 $\mathcal{L} = -\frac{1}{8}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{c}J^{\alpha}A_{\alpha} + \frac{1}{8}G^{\alpha\beta}G_{\alpha\beta} + \frac{1}{c}L^{\alpha}N_{\alpha}$。

求偏导时，将拉格朗日场视为如下形式的函数$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathrm{A}, \mathrm{N}, \Phi, \Theta, \mathrm{x})$，其中 $\mathrm{A} \equiv [\mathrm{A}_\alpha]$，$\mathrm{N} \equiv [\mathrm{N}_\alpha]$，$\Phi \equiv \mathrm{h}\partial \mathrm{A}_\alpha/\partial \mathrm{x}_\mu \mathrm{i}$，$\Theta \equiv \mathrm{h}\partial \mathrm{N}_\alpha/\partial \mathrm{x}_\mu \mathrm{i}$，以及 $\mathrm{x} \equiv [\mathrm{x}^\mu]$；其中 [ ] 括号表示其中所包含分量的整个集合。因此

$$\frac{\partial}{\partial \Phi_{\alpha\beta}} \left\{ F^{\lambda\delta} F_{\lambda\delta} \right\} = -2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \Phi_{\alpha\beta}} \left(\Phi_{\lambda\delta} - \Phi_{\delta\lambda} \right) \right\} F^{\lambda\delta} = -4 F^{\alpha\beta} \tag{6.4}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial \Theta_{\alpha\beta}} \left\{ F^{\lambda\delta} F_{\lambda\delta} \right\} = 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta_{\alpha\beta}} \left(\varepsilon_{\lambda\delta}{}^{\mu\nu} \Theta_{\mu\nu} \right) \right\} F^{\lambda\delta} = 2 \varepsilon^{\lambda\delta\alpha\beta} F_{\lambda\delta} = 4 G^{\alpha\beta} \tag{6.5}$$

因此

$$\frac{\partial \mathcal{L}(A, N, \Phi, \Theta, x)}{\partial \Phi_{\alpha\beta}} = F^{\alpha\beta} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}(A, N, \Phi, \Theta, x)}{\partial \Theta_{\alpha\beta}} = -G^{\alpha\beta} \tag{6.6}$$

拉格朗日方程仍是通过类比力学选取的，其形式为

$$\partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} = 0 \qquad \partial_\beta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta_{\alpha\beta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N_\alpha} = 0 \tag{6.7}$$

利用式（6.1）和式（6.6），式（6.7）中的拉格朗日方程可展开为

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} J^\alpha = 0 \qquad -\partial_\beta G^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} L^\alpha = 0 \tag{6.8}$$

考虑到 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{G}^{\alpha\beta}$ 的反对称性，式（6.8）重现了式（3.1）中的协变扩展麦克斯韦方程。[10]

然而请注意，拉格朗日类比是有限的。例如，力学中定义为 $\mathrm{p}_k = \partial \mathrm{L}/\partial \dot{\mathrm{q}}_k$ 的广义动量，其类比量是式（6.6）中的场 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 和 $-\mathrm{G}^{\alpha\beta}$。但它们并非相互独立；它们只是麦克斯韦场张量及其对偶。协变的扩展电动力学中不存在哈密顿方程的对应形式。

试图从拉格朗日量推导能量-动量张量 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 同样缺乏说服力。在 [12], 的第4.9节中，从诺特定理出发，采用标准的拉格朗日推导来推导能量-动量张量，并加入一个对称化修正项。这种方法确实能为标准电动力学给出正确的 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$。 [7] 和 [4]也引用了同样的方法。然而，即使加入对称化修正项，这种方法的推广仍无法为扩展电动力学给出正确的 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$。

[10]式（6.1）中的拉格朗日量函数 $\mathcal{L}$ 既不具有规范变换不变性，也不具有对偶变换不变性。这是可以接受的，因为在这两种情况下，所得的拉格朗日方程（式（6.8））都是不变的。

此外，在 §94 的 [10], 中，运用哈密顿原理并结合对广义相对论度量的变分来推导 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$，虽然能得到正确的值，但这种做法流于形式，缺乏说服力。

第3节和第11节附录A中对坡印廷定理的直接代数证明，是对式(3.18)中引用的能量-动量张量 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 最可靠的验证。

7 对偶变换

本节定义了对偶变换，并说明双性不变性在该变换下是扩展电动力学所独有的一种对称性。

对于无源标准麦克斯韦方程（式(2.14、2.15)，其中 $\rho = 0$ 和 $\mathrm{J} = 0$）的任意一个解，都存在另一个解，其带撇号的场定义如下：

$$\mathbf{E}' = \mathbf{B} \qquad \mathbf{B}' = -\mathbf{E} \tag{7.1}$$

根据这些定义，式(2.14、2.15)给出：

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}' = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t} \tag{7.2}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}' = 0 \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}' = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t} \tag{7.3}$$

这表明带撇号的场满足与式(2.14、2.15)完全相同的麦克斯韦方程，只是所有场都带有撇号。

然而，当 ρ 不为 0 或 J 不为 0 时，这种对称性就会被破坏。例如，$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathrm{B}' = \rho$ 并不是正确的麦克斯韦方程。当存在源时，式 (7.1) 中的变换不是标准电动力学的有效对称性。

通过转向第 3 节所述的扩展电动力学，并在对偶变换中纳入场和源，可以恢复这种对称性。纳入 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{N}$ 也能确保涉及这些势的表达式具有双性不变性。对偶变换定义如下：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}'\\ \mathbf{B}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{B}\\ -\mathbf{E}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{J}'\\ \mathbf{L}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{L}\\ -\mathbf{J}\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\mathbf{A}'\\ \mathbf{N}'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{N}\\ -\mathbf{A}\end{pmatrix} \tag{7.4}$$

将这些定义代入式（3.3）和式（3.4）后，带撇号的物理量便满足与第 3 节相同的三维矢量麦克斯韦方程组。

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}' = -\lambda' \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t} - \frac{1}{c}\mathbf{L}' \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}'=\rho' \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}'=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}'}{\partial t}+\frac{1}{c}\mathbf{J}' \tag{7.6}$$

这是麦克斯韦方程的对偶变换解，其中电磁物理量互换。

这种双性不变性只是具有电荷和磁荷的扩展电动力学的一种对称性。如上所示，标准电动力学并不存在这种对称性，特殊的无源情形除外。

将 $\mathrm{F}'^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{G}'^{\alpha\beta}$ 记作与方程（2.9）和方程（2.12）中相同的矩阵，但其中电场和磁场分量均带撇号。因此

$$F'^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & E'_x & E'_y & E'_z \\ -E'_x & 0 & B'_z & -B'_y \\ -E'_y & -B'_z & 0 & B'_x \\ -E'_z & B'_y & -B'_x & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{7.7}$$

$\mathrm{G}'^{\alpha\beta}$也有类似的表达式

$$G'^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} 0 & B'_x & B'_y & B'_z \\ -B'_x & 0 & -E'_z & E'_y \\ -B'_y & E'_z & 0 & -E'_x \\ -B'_z & -E'_y & E'_x & 0 \end{pmatrix}_{\alpha\beta} \tag{7.8}$$

然后，将方程（7.4）中的定义代入方程（7.7）和方程（7.8），得到 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{G}^{\alpha\beta}$ 的对偶变换:

$$\begin{pmatrix} F'^{\alpha\beta} \\ G'^{\alpha\beta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} G^{\alpha\beta} \\ -F^{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

将这些式子代入方程（3.1），得到

$$-\partial_\mu G'^{\mu\nu}=\frac{1}{c}L'^{\nu} \quad \text{and} \quad \partial_\mu F'^{\mu\nu}=-\frac{1}{c}J'^{\nu} \tag{7.10}$$

其中，方程（3.1）中的两个方程仅仅是互换了位置。因此，带撇号的量满足与上文方程（3.1）所列相同的协变麦克斯韦方程。这就是方程（7.2）和（7.3）中另一种解的协变形式。

现在，我们考察对偶变换对能量-动量张量 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 的影响。该张量在式 (3.18) 中以其等价形式之一表示。令 $\mathrm{T}'^{\alpha\beta}$ 表示与式 (3.18) 中 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 相同的矩阵，但场分量带有撇号。

$$T'^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left\{F'^{\alpha\mu}F'^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu}+G'^{\alpha\mu}G'^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu}\right\} \tag{7.11}$$

将式 (7.9) 代入式 (7.11)，得

$$T'^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{F'^{\alpha\mu}F'^{\beta\nu}\,\eta_{\mu\nu} + G'^{\alpha\mu}G'^{\beta\nu}\,\eta_{\mu\nu}\right\} = \frac{1}{2}\left\{G^{\alpha\mu}G^{\beta\nu}\,\eta_{\mu\nu} + (-F^{\alpha\mu})\left(-F^{\beta\nu}\right)\,\eta_{\mu\nu}\right\} = T^{\alpha\beta} \tag{7.12}$$

式（7.9）中的对偶变换只是交换了式（3.18）中的两项。因此，在对偶变换下，$\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 保持不变，也就是说，进行对偶代换后得到

$$T'^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} \tag{7.13}$$

检查式（3.13）也可以验证$\mathrm{T}^{\alpha\beta}$的这一不变性。请注意，对偶代换使得

$$E'_i E'_j + B'_i B'_j = B_i B_j + (-E_i)\left(-E_j\right) = E_i E_j + B_i B_j \tag{7.14}$$

因此 $\mathcal{E}' = \mathcal{E}$和$\mathrm{M}'_{ij}=\mathrm{M}^{ij}$。还要注意，$\mathrm{E}'\times\mathrm{B}' = \mathrm{B}\times(-\mathrm{E}) = \mathrm{E}\times\mathrm{B}$，因此$\mathrm{P}'_i = \mathrm{P}_i$。于是$\mathrm{T}'^{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$。

对偶变换不可与对指标求和的洛伦兹变换混淆。等式$\mathrm{T}'^{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$对$\mathrm{T}^{\alpha\beta}$的每个矩阵元都独立成立。因此，式（7.13）意味着$\mathrm{T}'^{00} = \mathrm{T}^{00}$、$\mathrm{T}'^{0i} = \mathrm{T}^{0i}$，其他指标的情形也依此类推。

8 扩展电动力学的对偶结构

第 3 节中扩展电动力学协变形式的一个特点，是方程分为两组：一组由场张量 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 和电荷密度四矢量 **J** 支配，另一组则由对偶场张量 $\mathrm{G}^{\alpha\beta}$ 和磁荷密度四矢量 **L** 支配。

我们可以在式 (3.1) 的麦克斯韦方程中看到这种划分，其中

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}J^\beta \quad \text{and} \quad \partial_\alpha G^{\alpha\beta} = -\frac{1}{c}L^\beta \tag{8.1}$$

在式 (3.7) 的洛伦兹力密度中也能看到这种划分，其中 $\mathrm{f}^\alpha = (\mathrm{f}^\alpha{}_{\text{电}} + \mathrm{f}^\alpha{}_{\text{磁}})$，其中

$$f^\alpha_{\text{el}} = \frac{1}{c}F^\alpha{}_\gamma J^\gamma \quad \text{and} \quad f^\alpha_{\text{mg}} = \frac{1}{c}G^\alpha{}_\gamma L^\gamma \tag{8.2}$$

这种区分也出现在式（5.5）和式（5.7）中矢势**A** 和**N** 的方程里，其中

$$\Box^2 A^\beta = -\frac{1}{c}J^\beta \quad \text{and} \quad \Box^2 N^\beta = -\frac{1}{c}L^\beta \tag{8.3}$$

四矢量势**A** 只有电源**J**，而四矢量势**N** 只有磁源**L**。

在每种分解情形中，方程 (8.1、8.2、8.3) 里的对偶变换都会交换分解后的两部分，从而证明该理论具有双荷性不变性。

方程 (3.18) 中的能量动量张量 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 是一个单一表达式，由 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 和 $\mathrm{G}^{\alpha\beta}$ 的二次项之和构成

$$T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\{F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}\,\eta_{\mu\nu} + G^{\alpha\mu}G^{\beta\nu}\,\eta_{\mu\nu}\right\} \tag{8.4}$$

对偶变换会交换这些项，从而使方程 (7.13) 中的 $\mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 具有双荷性不变性。

对偶变换还会交换方程 (4.1) 和方程 (4.3) 中以矢势表示的麦克斯韦场 $\mathrm{F}^{\alpha\beta}$ 及其对偶$\mathrm{G}^{\alpha\beta}$ 的表达式；方程 (4.1)

$$F^{\alpha\beta} = \left(\partial^{\alpha}A^{\beta} - \partial^{\beta}A^{\alpha}\right) - \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_{\mu}N_{\nu} \tag{8.5}$$

变为方程 (4.3)

$$G^{\alpha\beta} = \left(\partial^{\alpha}N^{\beta} - \partial^{\beta}N^{\alpha}\right) + \varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_{\mu}A_{\nu} \tag{8.6}$$

反之亦然。

9 双性不变性是否意味着磁单极子的存在?

让我们暂且接受这一假设：双性不变的扩展电动力学才是正确的电动力学形式。我们来考察这一假设所带来的影响。尤其是，它对磁荷是否真实存在有何看法?

答案　　取决于如何解释对偶变换：主动解释还是被动解释。

所谓对对偶变换的主动解释，意味着磁荷在实验中确实存在，因此目前已被排除。

这里的类比是标准三维向量代数中的主动旋转。[11] 在主动旋转中，三维向量 V 会变换为旋转后的向量 V′，其在原坐标系中的分量表示为 $\mathrm{V}'_i = \mathrm{P}\,\mathrm{R}_{ij}\mathrm{V}_j$。旋转后的向量 V′ 长度不变，但方向不同，因此在物理上有所不同。

[11]参见 [8]第8章

将这一类比应用于方程（7.4），在主动变换中，带撇号的场代表不同的物理现实。由于双荷性不变性，它们仍是麦克斯韦方程和扩展电动力学其他方程的解，但它们是另一种解，并非同一个解。

例如，真空中的平面单色线偏振光波，其角速度为ω，波矢为 $\mathrm{k} = (\omega/\mathrm{c})\mathbf{e}_3$，具有

$$\mathbf{E} = a\mathbf{e}_1 \cos\phi \qquad \mathbf{B} = a\mathbf{e}_2 \cos\phi \tag{9.1}$$

其中 $\phi = (\mathrm{kz} - \omega\mathrm{t})$，且 $\mathrm{z} = \mathrm{x}^3$。将方程（7.4）应用于此，得到

$$\mathbf{E}' = a\mathbf{e}_2 \cos\phi \qquad \mathbf{B}' = -a\mathbf{e}_1 \cos\phi \tag{9.2}$$

这是沿$\mathbf{e}_2$方向线偏振的平面波。方程（9.2）中的带撇号平面波也是麦克斯韦方程的一个解，但它是另一种解，在物理上可与方程（9.1）中的原解区分开来。

再看一个更复杂的例子，假设我们从扩展麦克斯韦方程出发，但令$\mathbf{L} = 0$，因为实验上尚未发现磁荷

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \tag{9.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad -\nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9.4}$$

现在应用方程（7.4）中的双荷性变换。扩展麦克斯韦方程于是变为

$$-\nabla \cdot \mathbf{B}' = -\lambda' \qquad \nabla \times \mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} - \frac{1}{c}\mathbf{L}' \tag{9.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B}' = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}'}{\partial t} \tag{9.6}$$

其中$\mathbf{L}' \neq 0$。即使我们从$\mathbf{L} = 0$的解出发，这与目前尚无磁荷存在的实验依据相符，诸如方程（7.4）所示的主动变换仍会意味着存在一个真实的另一种解，其中$\mathbf{L}' \neq 0$。按照双荷性变换的主动解释，方程（9.5、9.6）代表一种在实验上真实存在的另一种解，其中磁荷不为零。因此，目前由于实验上未能发现这些解，主动解释被排除。

不过，也可以对对偶变换作被动解释。在被动解释中，方程（7.4）中的带撇量被视为代表与不带撇量相同的物理现实，只是观察视角不同。

这里的类比是标准三维向量代数中的被动旋转。坐标系沿相反方向旋转，而向量分量仍按原方式变换，即 $V'_i = P\,R_{ij}V_j$。但向量 V 本身并未改变。向量 V 之所以具有不同的分量，只是因为现在是从不同的观察者方位来看它。

例如，按照被动解释，方程（9.1）和方程（9.2）代表同一物理现实。唯一的变化是，原先记作 E、B 的量现在记作 $-B'$、E'。另一个例子中，按照对偶变换的被动解释，方程（9.5、9.6）代表的物理现实与方程（9.3、9.4）相同。唯一的变化是，原先记作 E、B、**J** 的量现在记作 $-B'$、E'、$-\mathbf{L}'$。

显然，Jackson[12] 采用了被动解释：他说，如果所有[13] 粒子的磁荷与电荷之比都相同，那么我们就可以使用附录B中的广义对偶变换定义，并在方程（12.1）中选择 χ，使得$\mathbf{L}' = 0$。将该比值记为 $r = q_m/q_e$，并利用方程（12.1）的第二式，写成

$$\mathbf{L}' = \mathbf{J}(-\sin\chi + r\cos\chi) \tag{9.7}$$

然后选择 $\tan\chi = r$，使$\mathbf{L}' = 0$。这样，我们“……便得到通常所熟知的麦克斯韦方程。”在这种情况下，“……说粒子具有电荷而不具有磁荷，只是约定问题。”

而且，目前所有粒子的磁荷与电荷之比 r 确实有一个普遍接受的值。$r = 0$。因此，借用 Jackson 的说法来看，我们可以从$\mathbf{L} = 0$ 开始，并使用 $r = 0$ 和 $\chi = 0$（恒等变换），以一致且连贯的方式维持$\mathbf{L}' = 0$。正如我们在标准向量微积分中为方便起见选择坐标系一样，我们也可以为方便起见选择 $\chi = 0$。结果仍然是扩展电动力学，只不过借助其被动对偶对称性来证明维持$\mathbf{L}'$等于零是合理的。因此，式（9.3、9.4）中的麦克斯韦方程标准形式，可以看作是借助被动对偶对称性来普遍维持 $\chi = 0$ 和$\mathbf{L} = 0$ 的扩展麦克斯韦方程。

然而，如果最终发现一种粒子，其磁荷比 $|q_m/q_e|$ 大于电子的近零值，那么 r 就不再具有普适值。对于电子，r 将接近于零；对于带磁荷的粒子，r 则可能更大。这样一来，就无法再利用被动对偶不变性使 $\mathbf{L}' = 0$ 保持普适。

因此，如果未来某项磁荷探测实验能够由扩展麦克斯韦方程正确描述，其中电子的磁荷为零，而某种其他

[12]第6.12节，第252页，见 [7].[13]请注意“所有”一词；这里要求普适性。显然，只有具有普适性，这种方案才是自洽的。整个物理学都必须认同所选定的 χ 值。

粒子的磁荷不为零，那么将不再存在能够消除磁荷源的被动解释双荷性变换。如果磁荷确实不为零，其存在的实验依据就无法通过被动解释的双荷性变换加以隐藏。

10 后记

由式（3.20）可知，坡印廷矢量 $\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 是场能 $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2\right)$ 的通量密度。如果假设电磁能像经典流体一样流动，那么在每个场点都应存在一个速度 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$，使得[14]

$$\mathbf{S} = \mathcal{E}\mathbf{V} \tag{10.1}$$

如果确实如此，那么除以 c^2，并使用式（3.14）中场动量 $\mathbf{P}$ 的定义，就会得到

$$\mathbf{P} = \mathcal{M}\mathbf{V} \tag{10.2}$$

其中，$\mathcal{M} = \mathcal{E}/c^2$ 是相对论质量密度。由此我们便可得出结论：场动量源于场质量的流动。

然而，已有证明[15]，不存在满足式（10.1）的、符合狭义相对论的特殊速度 $\mathbf{V}$。这是因为电磁能量-动量守恒是通过对称四阶张量 $\mathbf{T}^{\alpha\beta}$ 的散度来表达的，而不是通过一个（并不存在的）四维矢量的散度来表达。

因此，式（10.2）并不成立；电磁场动量不能解释为由相对论性质量流动所致。然而，电磁场动量可以与粒子动量自由交换。如果电磁场动量并非源于场能流，那么它究竟是什么？又是什么样的粒子动量能够与之自由交换?

试图回答这些问题，或许能为未来的量子力学提供线索。[16] 若果真如此，我们就应当致力于更深入地理解电动力学，本文正是希望借此鼓励人们这样做。

此外，第 6 节指出的扩展电动力学形式拉格朗日推导中的缺陷表明，未来的基础电动力学研究应着眼于扩展麦克斯韦方程本身，而非其拉格朗日推导。

[14]参见 [1]第2章。[15]参见 [9]。[16]例如，式（10.2）中 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ 不存在这一点，或许与量子力学中速度本征态不存在有关。

11 附录A：坡印廷定理

证明 $\partial_\alpha \mathrm{T}^{\alpha\beta} = -\mathrm{f}^{\beta} = -\left(\mathrm{f}^{\beta}{}_{\mathrm{el}} + \mathrm{f}^{\beta}{}_{\mathrm{mg}}\right)$。

根据式（3.18），需要证明

$$-\left(f^{\beta}_{\mathrm{el}} + f^{\beta}_{\mathrm{mg}}\right) = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\partial_\alpha \left\{F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu} + G^{\alpha\mu}G^{\beta\nu}\eta_{\mu\nu}\right\} \tag{11.1}$$

利用式（3.10）、式（3.11）和乘积法则，可将其化为

$$\left\{F^{\beta}{}_{\gamma}(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma}) + G^{\beta}{}_{\gamma}(\partial_\alpha G^{\alpha\gamma})\right\} = \frac{1}{2}\left\{F^{\beta}{}_{\gamma}(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma}) + F^{\alpha}{}_{\gamma}\left(\partial_\alpha F^{\beta\gamma}\right) + G^{\beta}{}_{\gamma}(\partial_\alpha G^{\alpha\gamma}) + G^{\alpha}{}_{\gamma}\left(\partial_\alpha G^{\beta\gamma}\right)\right\} \tag{11.2}$$

因此，我们必须证明

$$F^{\beta}{}_{\gamma}(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma}) + G^{\beta}{}_{\gamma}(\partial_\alpha G^{\alpha\gamma}) = F^{\alpha}{}_{\gamma}\left(\partial_\alpha F^{\beta\gamma}\right) + G^{\alpha}{}_{\gamma}\left(\partial_\alpha G^{\beta\gamma}\right) \tag{11.3}$$

定义

$$\phi_\beta \equiv G_{\beta\gamma}(\partial_\alpha G^{\alpha\gamma}) - G^{\alpha\gamma}\left(\partial_\alpha G_{\beta\gamma}\right) \tag{11.4}$$

我们必须证明

$$\phi_\beta = -F_{\beta\gamma}(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma}) + F^{\alpha\gamma}\left(\partial_\alpha F_{\beta\gamma}\right) \tag{11.5}$$

将式（2.10）代入式（11.4），得到

$$\phi_\beta = \frac{1}{4}\varepsilon_{\gamma\beta\theta\delta}F^{\theta\delta}\left(\partial_\alpha \varepsilon^{\gamma\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu}\right) - \frac{1}{4}\varepsilon^{\gamma\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu}\left(\partial_\alpha \varepsilon_{\gamma\beta\theta\delta}F^{\theta\delta}\right)$$

利用恒等式（2.4），可将其写成

$$\phi_\beta = \frac{1}{4}\left\{-\left(\delta^\alpha_\beta\delta^\mu_\theta\delta^\nu_\delta + \delta^\alpha_\theta\delta^\mu_\delta\delta^\nu_\beta + \delta^\alpha_\delta\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\theta\right) + \left(\delta^\alpha_\beta\delta^\mu_\delta\delta^\nu_\theta + \delta^\alpha_\delta\delta^\mu_\theta\delta^\nu_\beta + \delta^\alpha_\theta\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\delta\right)\right\}\left\{F^{\theta\delta}\partial_\alpha F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}\partial_\alpha F^{\theta\delta}\right\} \tag{11.6}$$

$$\phi_\beta = -\frac{1}{2}\left(\delta^\alpha_\beta\delta^\mu_\theta\delta^\nu_\delta + \delta^\alpha_\theta\delta^\mu_\delta\delta^\nu_\beta + \delta^\alpha_\delta\delta^\mu_\beta\delta^\nu_\theta\right)\left(F^{\theta\delta}\partial_\alpha F_{\mu\nu} - F_{\mu\nu}\partial_\alpha F^{\theta\delta}\right) \tag{11.7}$$

$$\phi_\beta = -\frac{1}{2}\left(F^{\mu\nu}\partial_\beta F_{\mu\nu} + F^{\alpha\mu}\partial_\alpha F_{\mu\beta} + F^{\nu\alpha}\partial_\alpha F_{\beta\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(F_{\mu\nu}\partial_\beta F^{\mu\nu} + F_{\mu\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\mu} + F_{\beta\nu}\partial_\alpha F^{\nu\alpha}\right) \tag{11.8}$$

$$\phi_\beta = -F_{\beta\gamma}(\partial_\alpha F^{\alpha\gamma}) + F^{\alpha\gamma}\left(\partial_\alpha F_{\beta\gamma}\right) \tag{11.9}$$

这就是方程（11.5），证毕。

12 附录B：广义双荷性变换

方程（7.4）中对偶变换的定义可以推广为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\mathbf{E}'\\ \mathbf{B}'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos\chi & \sin\chi\\ -\sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{J}'\\ \mathbf{L}'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos\chi & \sin\chi\\ -\sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{J}\\ \mathbf{L}\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\mathbf{A}'\\ \mathbf{N}'\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\cos\chi & \sin\chi\\ -\sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{N}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{12.1}$$

其中 χ 是一个常数参数。[17] 方程（7.4）中的先前定义是取 $\chi = \pi/2$ 的特殊情况。由于方程（12.1）具有线性和正交性，本文先前使用 $\chi = \pi/2$ 给出的所有双性不变性论证对于一般的 χ 也同样成立。例如，方程（7.9）可推广为

$$\begin{pmatrix}F'^{\alpha\beta}\\ G'^{\alpha\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\chi & \sin\chi\\ -\sin\chi & \cos\chi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F^{\alpha\beta}\\ G^{\alpha\beta}\end{pmatrix} \tag{12.2}$$

此外，无论 χ 取何值，$\mathrm{T}'^{\alpha\beta} = \mathrm{T}^{\alpha\beta}$ 以及式（3.19）中的坡印廷定理都保持不变。

[17]参见 [7] 中的方程（6.151 和 6.152）。

参考文献

[1] G. K. Batchelor。《流体动力学导论》。剑桥大学出版社，剑桥，英国，1967年。[2] N. Cabibbo 和 E. Ferrari。含有狄拉克磁单极子的量子电动力学。《新物理学评论》，23（6）：1147，1962年。[3] D. Fryberger。论广义电磁学与狄拉克代数。《物理学基础》，19（2）：125–159，1989年。[4] H. Goldstein、C. Poole 和 J. Safko。《经典力学》。艾迪生-韦斯利出版公司，第3版，2002年。[5] D. J. Griffiths。《电动力学导论》。普伦蒂斯霍尔，上萨德尔河镇，新泽西州，第3版，1999年。[6] M. Y. Han 和 L.C. Biederharn。电动力学中的显式双性不变性与磁单极子的 Cabibbo-Ferrari 理论。《新物理学评论》，2A：544–556，1971年。[7] J. D. Jackson。《经典电动力学》。约翰·威立父子公司，纽约，第2版，1975年。[8] O. D. Johns。《分析力学》。牛津大学出版社，牛津，英国，第2版，2011年。[9] O. D. Johns。电磁场动量是否源于场能流？《科学史与科学哲学研究》，88：358–366，2021年。[10] L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz。《经典场论》。培格蒙出版社，牛津，英国，第4版英文版，1975年。[11] F. Moulin。磁单极子与洛伦兹力。《新物理学评论》，116B（8）：869–877，2001年。[12] F. Rohrlich。《经典带电粒子》。艾迪生-韦斯利出版公司，雷丁，马萨诸塞州，1965年。[13] F. Rohrlich。磁单极子的经典理论。《物理评论》，150（4）：1104–1111，1966年。[14] S. Shanmugadhasan。磁单极子的动力学理论。《加拿大物理学杂志》，30（3）：218–225，1952年。