arXiv:2303.05627v1 [math.ST] 10 Mar 2023

多元 Copula 密度的线性小波估计量的强一致收敛速率

Cheikh Tidiane Seck，Salha Mamane

阿利乌内·迪奥普大学数学系，班贝，塞内加尔

*Sch*威特沃特斯兰德大学统计与精算科学学院，约翰内斯堡 ，

南非

摘要
本文研究了多元 Copula 密度的基于秩的线性小波估计量在上确界范数下的几乎必然收敛。借助经验过程工具，我们证明了预言估计量（在边缘分布已知时得到）相对于其期望的偏差满足一致极限定律，并由此推导出基于秩的线性估计量的精确收敛速率。结果表明，只要恰当选择分辨率层级，该速率在 Besov 球上针对上确界范数损失具有极小极大意义下的最优性。

关键词：Copula 密度、非参数估计、小波方法、几乎必然一致收敛速率。

数学主题分类（2010年）：62G07，62G20

1 引言

Copula 是定义在 $[0,1]^d, d \geq 2$ 上且具有均匀边缘分布的多元分布函数 C。与线性相关系数不同，它能够全面刻画随机变量之间的依赖关系，无论这种关系是线性的还是非线性的。给定一个由连续随机变量构成的向量 $(X_1, \ldots, X_d)$，其边缘分布函数为 $F_1, \cdots, F_d$，Copula C 可定义为随机向量 $(F_1(X_1) \ldots, F_d(X_d))$ 的联合累积分布函数。若 Copula 密度存在，则其定义为 Copula 分布函数 C 相对于勒贝格测度的导数 c:

$$c(u_1 \ldots, u_d) = \frac{\partial^d}{\partial u_1, \ldots \partial u_d} C(u_1, \ldots, u_d), \ \forall\, (u_1, \ldots, u_d) \in (0,1)^d.$$

Copula 密度的非参数估计是一个活跃的研究领域，许多作者都对此进行了研究。例如， [12] 和 [8] 采用卷积核方法构造 Copula 密度的相合估计量，而 [21] 则采用了

基于伯恩斯坦多项式的技术。核方法的一个缺点是，由于 Copula函数的支撑集紧致，会产生边界效应。为克服这一困难，研究者提出了一些方法。例如， [12] 采用了镜像反射技术，而[2] 采用了局部线性核方法。同样地， [20] 提出了一些改进的Copula核估计量，以解决边界偏差问题。最近， [10] 提出了基于 Probit变换方法的Copula 密度核型估计量，该方法能够处理边界效应。

本文采用小波方法，更妥善地处理边界偏差问题。由于小波具有良好的局部化性质，因此非常适合描述单位立方体边缘和角点处函数的特征。事实上，小波基能够根据所估计曲线的局部性质自动适应，从而处理边界效应。 [15], 综述了小波方法在密度估计和回归估计问题中的应用，并详细讨论了小波的逼近性质。关于小波理论的更多细节，请参阅 [19], [5], [18] 和 [23] 及其中的参考文献。

小波方法已用于非参数Copula密度估计。例如， [11] 研究了基于秩的二元Copula密度线性小波估计量，并证明在一定条件下，该估计量在Besov球上针对 L_2-范数损失具有极小极大意义下的最优性，在Hölder球上针对逐点范数损失也具有这种最优性。 [1] 将这些结果推广到了多元Copula密度的非线性阈值估计量。这些非线性估计量对于 L_2-范数损失而言近乎最优（仅差一个对数因子），且具有能够适应Copula密度函数正则性的优点。类似地， [9] 针对 L_p损失 $2 \leq p < \infty$，为二元Copula密度的线性小波估计量建立了一个上界，条件是该Copula密度有界。

本文旨在确定多元 Copula 密度的基于秩的线性小波估计量在上确界范数损失下的精确几乎必然收敛速率。我们的方法主要受 [14], 的启发； [14], 研究了 $\mathbb{R}$上单变量密度函数的线性小波估计量在上确界范数损失下的几乎必然收敛速率。本文将这一结果推广至 $(0,1)^d$上的多元Copula密度。我们证明，若 Copula 密度 c 具有足够的正则性（即 c 属于正则性为 t的 Besov 空间，对应于阶数为 t的 Hölder 空间），且分辨率层级（记为 j_n）满足：$2^{j_n} \simeq (n/\log n)^{1/(2t+d)}$，则基于秩的线性小波估计量在 Besov球上达到上确界范数损失下的最优极小极大速率。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾小波理论的一些事实，并按照 [1] 定义多元 Copula 密度的基于秩的线性小波估计量。第 3 节给出主要理论结果及一些评论。附录 A 回顾经验过程理论中的一些有用事实。附录 B 给出了命题 3.1 中一致极限定律的证明。

2 小波理论与估计过程

设 ϕ 为父小波， ψ 为其对应的母小波，并假设二者均为紧支撑。 [4] 为 $L_2([0,1])$（ $[0,1]$ 上所有可测平方可积函数构成的空间）提出了正交小波基。具体而言，对于任意固定的 $j_0 \in \mathbb{N}$，族 $\{\phi_{j_0,l}\colon\ l = 1,\ldots,2^{j_0}\}\bigcup\{\psi_{j,l}\colon\ j \geq j_0, l = 1,\ldots,2^j\}$ 是 $L_2([0,1])$ 的标准正交基，其中 $\phi_{j,l}(u) = 2^{j/2}\phi(2^j u - l)$ 且 $\psi_{j,l}(u) = 2^{j/2}\psi(2^j u - l)$ $\forall j, l \in \mathbb{Z}, u \in [0,1]$ 。利用张量积，可以构造 $L_2([0,1]^d)$ $d \geq 2$ 的多元小波基。对于 $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_d) \in \mathbb{Z}^d$，定义以下关于 $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_d) \in [0,1]^d$ 的函数:

$$\phi_{j_0,\mathbf{k}}(u_1\ldots,u_d) = \prod_{m=1}^{d}\phi_{j_0,k_m}(u_m),$$

$$\psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}(u_1,\ldots,u_d) = \prod_{m=1}^{d}\phi^{1-\epsilon_m}_{j,k_m}(u_m)\psi^{\epsilon_m}_{j,k_m}(u_m),$$

其中 $\epsilon = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_d) \in \mathcal{S}_d = \{0,1\}^d \setminus \{(0,\ldots,0)\}$。那么，族 $\{\phi_{j_0,\mathbf{k}}\ \psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{h}}\colon\ j \geq j_0, \mathbf{k} \in \{1,\ldots,2^{j_0}\}^d, \mathbf{h} \in \{1,\ldots,2^j\}^d, \epsilon \in \mathcal{S}_d\}$ 是 $L_2[0,1]^d)$ 的标准正交基，对任意固定的 $j_0 \in \mathbb{N}$ 都成立。因此，假设 Copula 密度 c 属于 $L_2([0,1]^d)$，我们有如下表示:

$$c(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k}\in\{1,\ldots,2^{j_0}\}^d}\alpha_{j_0,\mathbf{k}}\phi_{j_0,\mathbf{k}}(\mathbf{u}) + \sum_{j\geq j_0}\sum_{\mathbf{k}\in\{1,\ldots,2^j\}^d}\sum_{\epsilon\in\mathcal{S}_d}\beta^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}\psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{u}), \tag{1}$$

对所有 $\mathbf{u} \in [0,1]^d$，其中尺度系数 $\alpha_{j_0,\mathbf{k}}$ 和小波系数 $\beta^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}$ 分别定义为

$$\alpha_{j_0,\mathbf{k}} = \int_{[0,1]^d} c(\mathbf{u})\phi_{j_0,\mathbf{k}}(\mathbf{u})d\mathbf{u} \quad \text{and} \quad \beta^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}} = \int_{[0,1]^d} c(\mathbf{u})\psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{u})d\mathbf{u}.$$

现在，设 $(\mathbf{X}_1,\cdots,\mathbf{X}_n)$ 是随机向量 $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_d)$ 的独立同分布 (i.i.d) 样本，其边缘分布函数 $F_1,\ldots,F_d$ 连续，并且 $\mathbf{X}_i = (X_{i1},\ldots,X_{id})$ $i = 1,\ldots,n$。随机向量 $\mathbf{U}_i = (F_1(X_{i1})\ldots,F_d(X_{id}))$ 的分布函数是 Copula C，其密度（若存在）为 c。用 $\mathbb{E}$ 表示期望算子后，系数 $\alpha_{j_0,\mathbf{k}}$ 和 $\beta^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}$ 可改写如下:

$$\alpha_{j_0,\mathbf{k}} = \mathbb{E}[\phi_{j_0,\mathbf{k}}(\mathbf{U}_i)], \qquad \beta^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}} = \mathbb{E}[\psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{U}_i)].$$

如果边缘分布 $F_1,\ldots,F_d$ 已知，则 $\alpha_{j_0,\mathbf{k}}$ 和 $\beta^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}$ 的自然估计量为:

$$\tilde{\alpha}_{j_0,\mathbf{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi_{j_0,\mathbf{k}}(\mathbf{U}_i) \ , \ \tilde{\beta}^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{U}_i). \tag{2}$$

但是，通常边缘分布函数 $F_1,\ldots,F_d$ 是未知的；因此通常用它们的经验对应量 $F_{1n},\ldots,F_{dn}$（或其重缩放版本

）来替代，且

$$F_{jn}(x_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}(X_{ij} \le x_j), \quad j = 1, \ldots, d, \quad x_j \in \mathbb{R},$$

ˆ ˆ ˆ ˆ 其中， $\mathbb{I}(\cdot)$表示指示函数。于是，令 $\mathbf{U}_i = (U_{i1}, \ldots, U_{id})$，其中 $U_{ij} = F_{jn}(X_{ij})$ $j = 1, \ldots, d$; $i = 1, \ldots, n$，修正后的经验系数为

$$\hat{\alpha}_{j_0,\mathbf{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi_{j_0,\mathbf{k}}(\mathbf{U}_i) \ , \ \hat{\beta}^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \psi^{\epsilon}_{j,\mathbf{k}}(\mathbf{U}_i). \tag{3}$$

现在，选择合适的分辨率层级 $j_n \ge j_0$，并考虑将 c 正交投影到关于 $L_2([0,1]^d)$ 的底层多分辨率分析的子空间 V_{j_n} 上，我们得到 c 的基于秩的线性小波估计量:

$$\hat{c}_{j_n}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k}\in\{1,\ldots,2^{j_n}\}^d} \hat{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}}\phi_{j_n,\mathbf{k}}(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} \in (0,1)^d. \tag{4}$$

如 [11], 中所述，估计量 ˆc_{j_n} 不一定是密度函数，因为它可能在定义域的某些部分取负值，且积分不等于 1。实际使用时，需要进行一定的截断和归一化。

为了得到线性估计量 ˆc_{j_n}的精确收敛速率，我们的证明方法遵循 [7] 中提出的经验过程方法（另见 [14],[13]）。事实上，我们可以用经验测度重写 ˆc_{j_n}。固定 j_n，定义如下核函数:

$$\widetilde{K}(x,y) = \sum_{l=1}^{2^{j_n}} \phi(x-l)\phi(y-l), \qquad (x,y) \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\widetilde{K}_{j_n}(x,y) = 2^{j_n}\widetilde{K}(2^{j_n}x, 2^{j_n}y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}.$$

对于 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^d$、$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^d$，定义集合:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \prod_{m=1}^{d} \widetilde{K}(x_m, y_m), \tag{6}$$

$$\mathbf{K}_{j_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \prod_{m=1}^{d} \widetilde{K}_{j_n}(x_m, y_m). \tag{7}$$

然后，线性小波估计量 ˆc_{j_n} 可以变换为

$$\hat{c}_{j_n}(\mathbf{u}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}_{j_n}(\hat{\mathbf{U}}_i, \mathbf{u}) = \frac{2^{dj_n}}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{K}(2^{j_n}\hat{\mathbf{U}}_i, 2^{j_n}\mathbf{u}). \tag{8}$$

3 估计量的渐近行为

引入一个辅助估计量 $\tilde{c}_{j_n}$，对应于边缘分布函数 F_1、...、 F_d 已知的情形。在这种情况下，(U_{i1}， ...， U_{id}) =(F_1(X$_{i1}$) ...， F_d(X$_{id}$)) i =1， ...， n 是 Copula C 的直接观测值，而 $\tilde{c}_{j_n}$ 可定义为

$$\tilde{c}_{j_n}(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{k}\in\{1,\ldots,2^{j_n}\}^d} \tilde{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}}\phi_{j_n,\mathbf{k}}(\mathbf{u}), \tag{9}$$

其中

$$\tilde{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi_{j_n,\mathbf{k}}(F_1(X_{i1}),\ldots,F_d(X_{id})) \tag{10}$$

是 $\alpha_{j_n,\mathbf{k}}$ 的无偏估计量。

对于所有 u $\in$ (0, 1)^d，我们可以将估计误差 $\hat{c}_{j_n} - c$ 分解为

$$\begin{aligned}\hat{c}_{j_n}(\mathbf{u}) - c(\mathbf{u}) &= [\hat{c}_{j_n}(\mathbf{u}) - \tilde{c}_{j_n}(\mathbf{u})] + [\tilde{c}_{j_n}(\mathbf{u}) - \mathbb{E}\tilde{c}_{j_n}(\mathbf{u})] + [\mathbb{E}\tilde{c}_{j_n}(\mathbf{u}) - c(\mathbf{u})] \\ &=: R_n(\mathbf{u}) + D_n(\mathbf{u}) + B_n(\mathbf{u}).\end{aligned} \tag{11}$$

为了获得 $\hat{c}_{j_n}$ 在 u $\in$ (0,1)^d 上一致的几乎必然收敛速率，我们需要研究上述三个项各自的极限行为。接下来需要以下假设:

(H.1) 父小波 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 有界、紧支撑，且其导数 ϕ' 有界。

（H.2）存在一个有界且紧支撑的函数 Φ： $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ 使得
$|\widetilde{K}(x,y)| \le \Phi(x-y)$，且函数 $\theta_\phi(x) = \sum_{k=1}^{2^{j_n}} |\phi(x-k)|$ 有界。
（H.3）核 $\widetilde{K}$ 满足：对所有 $y \in \mathbb{R}$， $\int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{K}(x,y)dx = 1.$

（H.4）当 $n \to \infty$ 时，序列（j_n）$_{n\ge0}$ 满足:

$$j_n \nearrow \infty, \qquad \frac{n}{j_n 2^{(d+1)j_n}} \to \infty, \qquad \frac{j_n}{\log\log n} \to \infty.$$

备注 1 假设（H.1）、（H.2）和（H.3）是许多小波基都满足的常见条件，例如 Daubechies小波和 Haar小波 $\phi(u) = 1_{[0,1]}(u)$。假设（H.4）中的条件与卷积核估计方法中对带宽参数施加的一些条件类似。

下面的命题给出了第二项 D_n(u) 的渐近行为，该项对应于辅助估计量 $\tilde{c}_{j_n}$ 与其期望之间的偏差。下文中，我们记 I = (0,1)， $\|c\|_\infty = \sup_{\mathbf{u}\in I^d} |c(\mathbf{u})|$ ，并且对于定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的任意实函数 φ ， $d \ge 1$, $\|\varphi\|_\infty = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} |\varphi(\mathbf{x})|$。

命题 3.1 设父小波 ϕ 一致连续，且具有紧支撑 $[0, B]$，其中 B 为正整数。此外，假设 Copula 密度 c 在 I^d 上连续且有界，并且假设（H.1）、（H.2）、（H.3）和（H.4）成立。那么，几乎必然（a.s.），

$$\lim_{n\to\infty} r_n \sup_{\boldsymbol{u}\in I^d} \frac{|\tilde{c}_{j_n}(\boldsymbol{u}) - \mathbb{E}\tilde{c}_{j_n}(\boldsymbol{u})|}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} \boldsymbol{K}^2(\boldsymbol{x}, 2^{j_n}\boldsymbol{u})d\boldsymbol{x}}} = \sqrt{\|c\|_\infty}, \tag{12}$$

with

$$r_n = \sqrt{\frac{n}{(2d\log 2)j_n 2^{dj_n}}}. \tag{13}$$

证明：该证明主要受 [14] 启发，并推迟至附录 B。证明将通过借鉴 [7] 的方法（另见 [13]），为式 (12) 中的极限建立一个下界和一个上界。

注 2 命题 3.1 给出了偏差 D_n(u) 收敛至零的精确几乎必然收敛速率（按上确界范数计），其阶为 $O(\sqrt{j_n 2^{dj_n}/n})$。事实上，根据假设 (H.1-2-3)，量 $\int_{\mathbb{R}^d}$ K²(x 2^{j_n}u)dx 可由上界和下界控制：存在两个正数常数 D_1 和 D_2，它们与 u 和 n 无关，使得：

$$D_1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{u})d\mathbf{x} \leq D_2. \tag{14}$$

这立即推出

$$\sup_{\mathbf{u}\in I^d} |D_n(\mathbf{u})| = O\left(\sqrt{\frac{j_n 2^{dj_n}}{n}}\right), \quad a.s. \tag{15}$$

下述定理是我们的主要结果。在陈述定理之前，我们需要引入一些记号。令 N 为正整数，且 $t = N + \alpha$、$0 < \alpha \leq 1$。对于定义在 I^d 上的任意有界实函数 f，若其具有直至 N阶的导数，则令

$$\|f\|_{t,\infty,\infty} = \|f\|_\infty + \sum_{k=0}^{N} \sup_{u\neq v, u,v\in I^d} \frac{|f^{(k)}(u) - f^{(k)}(v)|}{|u-v|^\alpha}. \tag{16}$$

我们称 f 属于正则性为 t 的 Besov 空间 $B^t_{\infty,\,\infty}$，当且仅当 $\|f\|_{t,\,\infty,\,\infty} < \infty$。

证明还需要满足以下条件：

条件 1(N)：父小波 ϕ 是紧支撑的，并且具有直到 N 阶的弱导数 $N \in \mathbb{N}$，这些弱导数均属于 $\mathcal{L}^p$，其中 $1 \leq p \leq \infty$。

定理 3.1 假设命题 3.1 的条件均已满足。此外，若 c属于 $B^t_{\infty,\,\infty}$ 且 ϕ 满足条件 1(N)，其中 $0 < t < N + 1$，则当 $n \to \infty$时，我们有

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in I^d} |\hat{c}_{j_n}(\boldsymbol{u}) - c(\boldsymbol{u})| = O\left(\sqrt{\frac{j_n 2^{dj_n}}{n}} + 2^{-j_n t}\right) + o(1), \quad a.s. \tag{17}$$

证明。根据分解式 (11)，只需处理第一项和最后一项。第二项的性质由前述命题 3.1 给出。先来看第一项 $R_n(\mathbf{u})$。对于 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$，我们有 $\in \mathbb{Z}^d$

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}} - \tilde{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\phi_{j_n,\mathbf{k}}(F_{1n}(X_{i1}), \ldots, F_{dn}(X_{id})) - \phi_{j_n,\mathbf{k}}(F_1(X_{i1}), \ldots, F_d(X_{id}))\right] \\ &=: \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_{\mathbf{k}}(X_{i1}, \ldots, X_{id}),\end{aligned}$$

其中，我们设

$$\xi_{\mathbf{k}}(X_{i1}, \ldots, X_{id}) = \phi_{j_n,\mathbf{k}}(F_{1n}(X_{i1}), \ldots, F_{dn}(X_{id})) - \phi_{j_n,\mathbf{k}}(F_1(X_{i1}), \ldots, F_d(X_{id})). \quad (18)$$

对于 $d = 2$， [11] 注意到，借助 $k = (k_1, k_2)$，

$$\xi_k(X_{i1}, X_{i2}) = \xi_{k_1}(X_{i1})\xi_{k_2}(X_{i2}) + \xi_{k_1}(X_{i1})\phi_{j_n k_2}(F_2(X_{i2})) + \xi_{k_2}(X_{i2})\phi_{j_n k_1}(F_1(X_{i1})), \quad (19)$$

其中 $\xi_{k_m}(X_{im}) = \phi_{j_n k_m}(F_{mn}(X_{im})) - \phi_{j_n k_m}(F_m(X_{im}))$，对于 $m = 1, 2$。由（19）式归纳法可得，对所有固定的 $d \geq 2$,

$$\xi_{\mathbf{k}}(X_{i1}, \ldots, X_{id}) = \sum_{q=0}^{d-1}\sum_{\epsilon_1+\ldots+\epsilon_d=q}\prod_{m=1}^{d}\left[\phi_{j_n k_m}(F_m(X_{im}))\right]^{\epsilon_m}\left[\xi_{k_m}(X_{im})\right]^{1-\epsilon_m}, \quad (20)$$

其中 $(\epsilon_1, \ldots \epsilon_d) \in \{0, 1\}^d$。回忆一下，$\phi_{jl}(u) = 2^{j/2}\phi(2^j u - l)\ \forall j,\ l \in \mathbb{Z}$。根据假设，利用 ϕ 的可导性，我们可以写出，对所有 $m = 1, \ldots, d$

$$\begin{aligned}\xi_{k_m}(X_{im}) &= 2^{\frac{j_n}{2}}\phi(2^{j_n}F_{mn}(X_{im}) - k_m) - 2^{\frac{j_n}{2}}\phi(2^{j_n}F_m(X_{im}) - k_m) \\ &= 2^{\frac{3}{2}j_n}\left[F_{mn}(X_{im}) - F_m(X_{im})\right]\phi'(\zeta_{im}),\end{aligned}$$

其中 ζ_{im} 介于 $F_{mn}(X_{im})$ 和 $F_m(X_{im})$ 之间。现在，结合 Chung（1949）迭代对数律（LIL）以及 ϕ 和 ϕ' 的有界性，我们得到，对所有 $m = 1, \ldots, d$

$$|\xi_{k_m}(X_{im})| \leq 2^{\frac{3}{2}j_n} \times \sqrt{\frac{\log\log n}{2n}}\|\phi'\|_\infty, \quad a.s. \quad (21)$$

因此，对于 $d = 2$，式（20）可以得到如下上界：

$$|\xi_k(X_{i1}, X_{i2})| \leq 2^{3j_n}\left(\frac{\log\log n}{2n}\right)\|\phi'\|_\infty^2 + 2.2^{2j_n}\sqrt{\frac{\log\log n}{2n}}\|\phi'\|_\infty\|\phi\|_\infty, \quad a.s. \quad (22)$$

由于

$$\frac{2^{3j_n}\left(\frac{\log\log n}{2n}\right)}{2^{2j_n}\sqrt{\frac{\log\log n}{2n}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{j_n 2^{2j_n}}{n}\right)^{1/2}\left(\frac{\log\log n}{j_n}\right)^{1/2},$$

根据假设（H.4），该式趋于 0，当 $n \to \infty$ 时。因此 $2^{3j_n}\left(\underline{\text{双对数}}{}^{n}\right) = o\left(2^{2j_n}\underline{\sqrt{\text{双对数}}}\right.$

$\left.{}^{n}\right)$。也就是说，对于 $d = 2$,

$$|\xi_k(X_{i1}, X_{i2})| = O\left(2^{2j_n}\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right).$$

由公式 (22) 归纳可得，对于所有 $d \geq 2$,

$$|\xi_{\mathbf{k}}(X_{i1}, \ldots, X_{id})| \leq 2^{\frac{3}{2}dj_n} \left(\frac{\log\log n}{n}\right)^{\frac{d}{2}} \|\phi'\|_\infty^d + \cdots + d.2^{\frac{3}{2}j_n} \sqrt{\frac{\log\log n}{n}} 2^{\frac{d-1}{2}j_n} \|\phi'\|_\infty \|\phi\|_\infty^{d-1}. \tag{23}$$

注意，不等式 (23) 右侧求和中的项数是有限的。此外，正如在情形 $d = 2$ 中所观察到的，所有这些项相对于最后一项都是小 o，而最后一项的阶为 $O\left(2^{\frac{3}{2}j_n}\sqrt{\frac{\text{双对数}}{n}}\, 2^{\frac{d-1}{2}j_n}\right)$。于是

$$|\xi_{\mathbf{k}}(X_{i1}, \ldots, X_{id})| = O\left(2^{\frac{3}{2}j_n} \sqrt{\frac{\log\log n}{n}} 2^{\frac{d-1}{2}j_n}\right).$$

and

$$\begin{aligned} |\hat{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}} - \tilde{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}}| &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |\xi_{\mathbf{k}}(X_{i1}, \ldots, X_{id})| \\ &= O\left(2^{(\frac{2+d}{2})j_n} \sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right) \end{aligned}$$

最后，利用函数 $\theta_\phi(x) = \sum_{l=1}^{2^{j_n}} |\phi(x-l)|$ 的有界性，我们得到

$$\begin{aligned} |\hat{c}_{j_n,\mathbf{k}}(\mathbf{u}) - \tilde{c}_{j_n,\mathbf{k}}(\mathbf{u})| &\leq \sum_{\mathbf{k}\in\{1,\ldots,2^{j_n}\}^d} |\hat{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}} - \tilde{\alpha}_{j_n,\mathbf{k}}| 2^{\frac{d}{2}j_n} \prod_{m=1}^{d} \phi(2^{j_n}u_m - k_m) \\ &= O\left[\|\theta_\phi\|_\infty^d 2^{\frac{2+2d}{2}j_n} \sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\right] \\ &= O\left[\left(\frac{j_n 2^{(1+d)j_n}}{n}\right)^{1/2} \left(\frac{\log\log n}{j_n}\right)^{1/2}\right] \end{aligned}$$

根据假设（H.4），当 $n \to \infty$ 时，该式收敛于 0。因此

$$\sup_{\mathbf{u}\in I^d} |R_n(\mathbf{u})| \longrightarrow 0, n \to \infty, \quad a.s. \tag{24}$$

为处理最后一项 $B_n(\mathbf{u})$，即 $\tilde{c}_{j_n}$ 的偏差，我们利用 Besov 空间中的逼近性质。令 K_{j_n} 表示到子空间 V_{j_n} 的正交投影核。也就是说

$$K_{j_n}(c)(\mathbf{u}) = \int_{I^d} K_{j_n}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) c(\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \in I^d.$$

于是，我们可以写成

$$B_n(\mathbf{u}) = \mathbb{E}\tilde{c}_{j_n}(\mathbf{u}) - c(\mathbf{u}) = K_{j_n}(c)(\mathbf{u}) - c(\mathbf{u}).$$

由于 ϕ 满足条件 1(N) 且 $c \in B^t_{\infty,\,\infty}, 0 < t < N+1$，因此应用 [15] 中的定理 9.4，可得：

$$\|K_{j_n}(c) - c\|_\infty \leq A 2^{-j_n t},$$

其中 A 是一个正常数，取决于 $\|c\|$ 的 Besov 范数。因此

$$\sup_{\mathbf{u}\in I^d} |B_n(\mathbf{u})| = O(2^{-j_n t}). \tag{25}$$

结合 (15)、(24) 和 (25) 即得定理的证明。 □

注。3 定理 3.1 表明，若 $2^{j_n} \simeq (n/\log\ n)^{\frac{1}{2t+d}}$，则基于秩的线性估计量 $\hat{c}_{j_n}$ 在 $B^t_{\infty,\infty}$ 上的 Besov球中，以上确界范数衡量时达到最优收敛速率 $(\log\ n/n)^{\frac{t}{2t+d}}$。就上确界范数损失而言，此速率是可能达到的最佳速率（$p = \infty$），且所估计的密度函数定义在紧集上 [（例如，参见 [16]关于极小极大理论中最优性的讨论]）。不过请注意，此速率慢于二次损失和逐点损失函数情形下的速率；小波线性估计量在 [11] 和 [1] 中已建立了这些速率。

注。4 对于一般 Besov 空间 B^t_{pq} 中的 Copula密度（其中 $t > 1/p$），小波线性估计量 $\hat{c}_{j_n}$ 也具有最优速率。事实上，若 $c \in B^t_{pq}$ 且 $t > 1/p$，则由 Sobolev 嵌入性质可得 $B^t_{pq} \subset B^{t-1/p}_{\infty\,\infty}$。因此，若 $2^{j_n} \simeq (n/\log\ n)_{\,1\,2(t-1/p)+d}$，则 $\hat{c}_{j_n}$ 达到~~最优速~~率：$\mathbb{E}(\|\hat{c}_{j_n} - c\|_\infty) = O\left((\log\ n/n)_{\,2}^{\ t-1/p}{}_{(t-1/p)+d}\right)$ [，例如~~参见 [6],~~定理 1]。

注 5. 正如我们在 [11] 中针对二次范数所证明的那样，我们通过另一种方法，利用 Chung（1949）的 LIL，证明了由使用秩（来自伪观测）所产生的误差项在上确界范数情形下也可忽略不计。也就是说，使用伪观测而非真实观测，不会影响 Copula 密度线性小波估计量的收敛速率。

附录 A：关于经验过程的有用结果

伯恩斯坦不等式（最大值形式）：
设 Z_1、……、Z_n 为相互独立的随机变量，满足 $\mathbb{E}(Z_i) = 0$、$i = 1$、……、n，且 $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n Z_i) \le \nu$。进一步假设存在某个常数 $M > 0$，使得 $|Z_i| < M$、$i = 1$、……、n。那么对所有 $t > 0$

$$\mathbb{P}\left(\max_{q\le n}\left|\sum_{i=1}^{q} Z_i\right| > t\right) \le 2\exp\left\{\frac{-t^2}{2\nu + (2/3)Mt}\right\}, \tag{26}$$

引理 **A.1** [Einmahl 和 Mason（2000 年）]:

设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的两个实值可测函数类，满足

$$|f(x)| \le F(x), \quad f \in \mathcal{F}, \quad x \in \mathcal{X},$$

其中 F 是定义在 $\mathcal{X}$ 上的有限值可测包络函数;

$$\|g\| \leq M \quad g \in \mathcal{G},$$

其中 $M > 0$ 是一个有限常数。假设对于所有满足 $0 < Q(F^2) < \infty$ 的概率测度 Q ,

$$N(\varepsilon(Q(F^2))^{1/2}, \mathcal{F}, d_Q) \leq C_1\varepsilon^{-\nu_1}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

and

$$N(\varepsilon M, \mathcal{G}, d_Q) \leq C_2\varepsilon^{-\nu_2}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

其中 ν_1、 ν_1、 C_1、 $C_2 \geq 1$ 是适当的常数。则对于所有满足 $0 < Q(F^2) < \infty$ 的概率测度 Q，有

$$N(\varepsilon M(Q(F^2))^{1/2}, \mathcal{FG}, d_Q) \leq C_3\varepsilon^{-\nu_1-\nu_2}, \qquad 0 < \varepsilon < 1$$

对于某个有限常数 $0 < C_3 < \infty$。

命题 **2 [**Einmahl 和 Mason（2000 年）**]:**
设 Z、 Z_1、 Z_2、..... 是一列取值于 $\mathbb{R}^m$、 $m \geq 1$ 中的独立同分布随机向量。对于每个 $n \geq 1$，考虑基于前 n 个随机向量定义的经验分布函数:

$$G_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{Z_i \leq s}, \quad s \in \mathbb{R}^m,$$

其中，按照惯例， $z \leq s$ 表示 z 的每个分量都小于或等于 s 的对应分量。对于定义在 $\mathbb{R}^m$ 上的任意可测实值函数 g ，令

$$G_n(g) = \int_{\mathbb{R}^m} g(s)dG_n(s), \qquad \mu(g) = \mathbb{E}g(Z) \qquad \text{and} \quad \sigma(g) = Var(g(Z)).$$

设 a_n： $n \geq 1$ 表示一个收敛于零的正数列。考虑集合序列 $\mathcal{G}_n = \{g_i^{(n)}: \ i = 1, ..., k_n\}$，其中各集合均为定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的实值可测函数集，并满足：对于任意 $g_i^{(n)} \in \mathcal{G}_n$:

$$\mathbb{P}(g_i^{(n)}(Z) = 0,\ g_j^{(n)}(Z)) = 0, \quad i \neq j \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{P}(g_i^{(n)}(Z) \neq 0) \leq 1/2.$$

进一步假设:
对于某个 $0 < r < \infty$，当 $n \to \infty.$时， $a_n k_n \to r$
对于某个 $-\infty < \mu_1$，对 $i = 1$， ...， k_n 一致地，当 n 足够大时， $a_n\mu_1 \leq \mu(g_i^{(n)})$ $\leq a_n\mu_2$
对于某个 $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \infty$，对 $i = 1$， $\ldots k_n$ 一致地，当 n 足够大时，
$\sigma_1\sqrt{n}a_n \leq \bar{\sigma}(g_i^{(n)})$ $\leq \sigma_2\sqrt{n}a_n$
对于某个 $0 < B < \infty$，对 $i = 1, \ldots, k_n$ 一致地，当 $n, |g_i^{(n)}| \leq B$ 充分大时

命题 3.2 在这些假设下，以概率 1，对每个 $0 < \varepsilon < 1$，都存在 N_ε，使得对于 $n \geq N_\varepsilon$,

$$\max_{1 \leq i \leq k_n} \frac{\sqrt{n}\{G_n(g_i^{(n)}) - \mu(g_i^{(n)})\}}{\bar{\sigma}(g_i^{(n)})\sqrt{2|\log a_n|}} \geq 1 - \varepsilon.$$

Talagrand 不等式:

设 $X_i, i = 1, \ldots, n$ 是一组独立同分布随机样本，取值于 X，其在 $\mathbb{R}$ 上的概率分布为 P；设 $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{R}$ 上一个以 P 为中心（即对所有 $g \in \mathcal{G}$, $\int g dP = 0$ ）的实值函数可数类，且一致有界于常数 U。设 σ 是任意一个正数，满足 $\sigma^2 \geq \sup_{g \in \mathcal{G}} \mathbb{E}(g^2(X))$。那么，Talagrand 的 1996 年不等式蕴含存在一个普适常数 L，使得对所有 $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{q \leq n} \left\| \sum_{i=1}^{q} (g(X_i) \right\|_{\mathcal{G}} > E + t\right) \leq L \exp\left\{\frac{-t}{L\mathrm{U}} \log(1 + \frac{t\mathrm{U}}{V})\right\}, \tag{27}$$

with

$$E = \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} g(X_i) \right\|_{\mathcal{G}} \text{ and } V = \mathbb{E}\left\| \sum_{i=1}^{n} (g(X_i))^2 \right\|_{\mathcal{G}}.$$

此外，如果 $\mathcal{G}$ 是一个具有特征 A, v 的 VC 型函数类，那么存在一个普适常数 B，使得：[例如，参见 Giné 和 Guillou（2001）]

$$E \leq B\left[v\mathrm{U} \log \frac{A\mathrm{U}}{\sigma} + \sqrt{v}\sqrt{n\sigma^2}\frac{A\mathrm{U}}{\sigma}\right] \tag{28}$$

接下来，如果 $\sigma < \mathrm{U}\,2$，则可以将常数 A 替换为 1，代价是改变常数 B；此外，若 $n\sigma^2 > C_0 \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma}\right)$，则有

$$E \leq C_1\sqrt{n\sigma^2 \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma}\right)}, \text{ and } V \leq L' n\sigma^2, \tag{29}$$

其中，C_1、L' 是仅依赖于 A、v、C_0的常数。最后，由 (42) 和 (29) 可知，对于所有满足以下条件的 $t > 0$：$C_1\sqrt{n\sigma^2 \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma}\right)} \leq t \leq C_2 \frac{n\sigma^2}{\mathrm{U}}$对所有常数 $C_2 \geq C_1$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n_{k-1} \leq n \leq n_k} \left\| \sum_{i=1}^{n} g(X_i) \right\|_{\mathcal{G}} > t\right) \leq R \exp\left\{\frac{-1}{C_3}\frac{t^2}{n\sigma^2}\right\}, \tag{30}$$

其中，$C_3 = \log(1 + C_2/L')/RC_2$，且 R 是仅依赖于 A 和 v的常数。

附录 B：命题 3.1 的证明

上界

引理 3.2 在命题3.1的假设下，几乎必然有

$$\limsup_{n \to \infty} r_n \sup_{\boldsymbol{u} \in I^d} \frac{|D_n(\boldsymbol{u})|}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2(\boldsymbol{x}, 2^{j_n}\boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x}}} \leq \sqrt{\|c\|_\infty}. \tag{31}$$

证明：给定 $\lambda > 1$，定义 $n_k = [\lambda^k], k \in \mathbb{N}$，其中 $[a]$ 表示实数 a 的整数部分。令 $\delta_m = 1/m, m \geq 1$ 为整数，则我们可以用数量为 l_k 的小立方体$S_{k,\ r}$覆盖集合 I^d，每个小立方体的边长为 $\delta_m 2^{-j_{n_k}}$，且

$$l_k \leq \left(\frac{1}{\delta_m 2^{-j_{n_k}}} + 1\right)^d \leq \left(\frac{2}{\delta_m 2^{-j_{n_k}}}\right)^d, \tag{32}$$

当 k 足够大时。取点 $\mathbf{u}_{k,r} \in S_{k,r} \cap I^d$, $r = 1, \ldots, l_k$。我们要在点 $\{\mathbf{u}_{k,r}\colon\ r = 1, \ldots, l_k\}$ 构成的离散网格上证明引理 3.2。对于所有 $\eta \in (0, 1)$，我们断言

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt{\frac{n_k}{(2d\log 2) j_{n_k} 2^{dj_{n_k}}}} \max_{1\leq r\leq l_k} \max_{n_{k-1}\leq n\leq n_k} |D_n(\mathbf{u}_{k,r})| \leq (1+\eta)\sqrt{\|c\|_\infty [K^2]}, \tag{33}$$

其中我们注意到

$$[K^2] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

为证明 (33)，我们应用伯恩斯坦不等式的极大版本 [（见上文附录 A）]。给定 $\mathbf{u} \in I^d$ 和 $k \in \mathbb{N}$，对于所有满足：$n_{k-1} \leq n \leq n_k$ 的 n，令

$$Z_i(\mathbf{u}) = \mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{U}_i, 2^{j_n}\mathbf{u}) - \mathbb{E}\mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{U}_i, 2^{j_n}\mathbf{u}),\ \ i = 1, \ldots, n.$$

注意，对于每个 n，$Z_i(\mathbf{u})'s$ 都是独立同分布的零均值随机变量，并且对于所有 $\mathbf{u} \in I^d$,

$$D_n(\mathbf{u}) = \frac{2^{dj_n}}{n} \sum_{i=1}^n Z_i(\mathbf{u}). \tag{34}$$

根据假设 (H.2)，我们有

$$\left|\mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{U}_i, 2^{j_n}\mathbf{u})\right| \ = \ \prod_{m=1}^d \left|\tilde{K}(2^{j_n}U_{im}, 2^{j_n}u_m)\right| \leq \prod_{m=1}^d \Phi(2^{j_n}(U_{im} - u_m)) \leq \|\Phi\|_\infty^d,$$

其中 $\|\Phi\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi(x)|$。这意味着

$$\left|\mathbb{E}\mathbf{K}[(2^{j_n}\mathbf{U}_i, 2^{j_n}\mathbf{u})]\right| \leq \mathbb{E}\|\Phi\|_\infty^2 = \|\Phi\|_\infty^d.$$

因此，对所有 $\mathbf{u} \in I^d$,

$$|Z_i(\mathbf{u})| \leq 2\|\Phi\|_\infty^d := M.$$

由于 $Z_i(\mathbf{u})'s$ 相互独立且均值为零，我们可以写出 $n = n_k$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n_k} Z_i(\mathbf{u})\right) = n_k Var(Z_1(\mathbf{u})) = n_k \mathbb{E}(Z_1^2(\mathbf{u})).$$

然后利用 th 进行变量代换 $\mathbf{s} = 2^{-j_{n_k}}\mathbf{x}$, $\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_1^2(\mathbf{u})) &\leq \mathbb{E}\mathbf{K}^2[(2^{j_{n_k}}\mathbf{U}_1, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}) \\
&\leq \int_{I^d} \mathbf{K}^2(2^{j_{n_k}}\mathbf{s}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}) c(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\
&\leq 2^{-dj_{n_k}} \|c\|_\infty \int_{[0,2^{j_{n_k}}]^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}) d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

由此可得

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n_k} Z_i(\mathbf{u})\right) \le n_k 2^{-dj_{n_k}} \|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{u}) d\mathbf{x} := \sigma_k^2.$$

现在，对每个点 $\mathbf{u}_{k,\ r}$应用最大形式的伯恩斯坦不等式，可得对所有 $t>0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})\right| > t\right) \le 2\exp\left\{\frac{-t^2}{2\sigma_k^2 + (2/3)Mt}\right\}, \tag{35}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\le r\le l_k}\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})\right| > t\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{r=1}^{l_k}\left\{\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})\right| > t\right\}\right) \\
&\le \sum_{r=1}^{l_k}\mathbb{P}\left(\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}\left|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})\right| > t\right) \\
&\le l_k 2\exp\left\{\frac{-t^2}{2\sigma_k^2 + (2/3)Mt}\right\}.
\end{aligned}$$

令 $t=\sqrt{2(1+\eta)n_k 2^{-dj_{n_k}}\log 2^{dj_{n_k}}\|c\|_\infty[K^2]}$。那么，当 k 足够大时，$t\to\infty$。将其与 (32) 结合，经过一些简单的代数运算后可得，

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\max_{1\le r\le l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})|}{\sqrt{2n_k 2^{-dj_{n_k}}\log 2^{dj_{n_k}}\|c\|_\infty[K^2]}} > \sqrt{1+\eta}\right) &\le 2l_k\exp\left\{\frac{-t^2}{\frac{t^2}{(1+\eta)\log 2^{dj_n}} + \frac{4}{3}\|\Phi\|^2 t}\right\} \\
&\le 2l_k\exp\left\{-(1+\eta)\log 2^{dj_{n_k}}\right\} \\
&\le 2^d\delta_m^{-d}2^{-d\eta j_{n_k}}.
\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{k\ge 0}2^{-d\eta j_{n_k}}<\infty$，由博雷尔-坎特利引理可得

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le r\le l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})|}{\sqrt{(2d\log 2)n_k j_{n_k}2^{-dj_{n_k}}\|c\|_\infty[K^2]}} > \sqrt{1+\eta}\right) = o(1), \tag{36}$$

即

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{1\le r\le l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})|}{\sqrt{(2d\log 2)n_k j_{n_k}2^{-dj_{n_k}}\|c\|_\infty[K^2]}} \le \sqrt{1+\eta}, \quad a.s. \tag{37}$$

由于函数 $x\mapsto x2^{-2x}$ 在 $x>2\log 2$ 时递减，因此对于 $n_{k-1}\le n\le n_k$，且当 k 足够大时，

$$\sqrt{\frac{n_k j_{n_k}2^{-dj_{n_k}}}{n j_n 2^{-dj_n}}} \le \sqrt{\frac{n_k}{n}} \le \sqrt{\frac{n_k}{n_{k-1}}} \le \sqrt{\lambda}. \tag{38}$$

根据不等式 (38)，命题 (37) 得出

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{1\le r\le l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\le n\le n_k}|\sum_{i=1}^{n} Z_i(\mathbf{u}_{k,r})|}{\sqrt{(2d\log 2)n j_n 2^{-dj_n}\|c\|_\infty[K^2]}} \le \sqrt{\lambda(1+\eta)}, \quad a.s. \tag{39}$$

现在，将 (39) 中分数的分子和分母乘以因子$2^{dj_n}/n$，并回顾 (34) 中 D_n(u) 的表达式，最终得到对所有 $\eta \in$ (0,1),

$$\limsup_{k\to\infty} \max_{1\le r\le l_k} \frac{\max_{n_{k-1}\le n\le n_k} \sqrt{n}\,|D_n(\mathbf{u}_{k,r})|}{\sqrt{(2d\log 2) j_n 2^{dj_n}}} \le \sqrt{\lambda(1+\eta)\|c\|_\infty [K^2]}, \tag{40}$$

这就证明了离散网格上的引理 3.2。

接下来，为了证明网格点之间的引理 3.2，我们将使用 Talagrand 的 1996 年不等式 (27)。引入如下定义的函数序列：对所有 $n \ge 1$、$k \ge 1$、$1 \le r \le l_k$ 以及任意固定的 u $\in S_{k,\,r}$，定义

$$g_{k,r}^{(n)}(\mathbf{s},\mathbf{u}) = \mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{s}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r}) - \mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{u}), \qquad \mathbf{s} \in I^d. \tag{41}$$

并对所有 $\lambda > 1$，令

$$\mathcal{G}_{k,r}(\lambda) = \left\{ g : \mathbf{s} \mapsto g_{k,r}^{(n)}(\mathbf{s},\mathbf{u}) : \mathbf{u} \in S_{k,r} \cap I^d,\ n_{k-1} \le n \le n_k \right\}.$$

令 S $= (S_1, \ldots, S_d)$ 为一个由 $[0,1]-$ 个均匀随机变量构成的向量。现在，为了应用 Talagrand 的 1996 年不等式，我们需要检验以下条件：

i) 类 $\mathcal{G}_{k,\,r}(\lambda)$ $1 \le r \le l_k$ 为 VC 型，其特征为 A 和 v；

ii) $\forall g \in \mathcal{G}_{k,r}(\lambda),\ \|g\|_\infty \le \mathrm{U}$;

iii) $\forall g \in \mathcal{G}_{k,r}(\lambda),\ \mathrm{Var}[g(\mathbf{S})] \le \sigma_k^2$,

iv) $\sigma_k < \frac{\mathrm{U}}{2}$ and $n_k\sigma_k^2 > C_0 \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right),\ C_0 > 0.$

下面将检验这些条件。
回顾一下，(U$_i = (F_{1i}(X_{i1}) \ldots, F_{di}(X_{id}))$ $i, \ldots, n$ 是由 $[0,1]-$均匀分量组成的一列独立同分布向量。我们已证明（见下文），每个类$\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)$均满足条件 i)、ii)、iii) 和 iv)，适用于 U $= 2\|\Phi\|_\infty^d$ 和 $\sigma_k^2 = D_0 2^{-dj_{n_k}} \|c\|_\infty \omega_\phi^2(\delta_m)$，其中 ω_ϕ 是下文 (49) 中定义的 ϕ 的连续模，而D_0 是依赖于 $\|\Phi\|_\infty$ 和 d的正常数。于是，Talagrand 的 1996 年不等式给出：对所有 $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n_{k-1}\le n\le n_k} \left\| \sum_{i=1}^n (g(\mathbf{U}_i) - \mathbb{E}g(\mathbf{U}_i)) \right\|_{\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)} > t \right) \le R \exp\left\{ \frac{-1}{C_3} \frac{t^2}{n_k\sigma_k^2} \right\}, \tag{42}$$

对 r 和 $t = C_1\sqrt{n_k\sigma_k^2 \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right)}$ 取最大值，即可得到,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\le r\le l_k} \max_{n_{k-1}\le n\le n_k} \left\| \sum_{i=1}^n (g(\mathbf{U}_i) - \mathbb{E}g(\mathbf{U}_i)) \right\|_{\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)} > t \right) \le R l_k \exp\left\{ \frac{-C_1^2}{C_3} \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right) \right\}. \tag{43}$$

每当 $m \to \infty, \omega_\phi(\delta_m) \to 0$。因此，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $m_0 \in \mathbb{N}$ 使得$\omega_\phi(\delta_m) < \varepsilon$，对于 $m \geq m_0$。利用这一事实，当 m 足够大时，我们可以用 $4D2^{-dj_{n_k}}\varepsilon\|c\|_\infty$ 替换 σ_k^2。此外，当 k 足够大时，

$$\log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right) = \log\left(\frac{\mathrm{U}}{4D\varepsilon\|c\|_\infty}\right) + j_{n_k}\log 2 \sim j_{n_k}\log 2$$

因此，当 k、m 足够大时，

$$t = C_1\sqrt{n_k\sigma_k^2\log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right)} \sim \sqrt{4DC_1^2 n_k 2^{-dj_{n_k}} d\, j_{n_k}\log 2\,\varepsilon\|c\|_\infty}.$$

结合这些事实与（32），我们得到，当$A_0 = \sqrt{2DC_1}$时，

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq r\leq l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\leq n\leq n_k}\|\sum_{i=1}^n(g(\mathbf{U}_i)-\mathbb{E}g(\mathbf{U}_i))\|_{\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)}}{\sqrt{(2d\log 2)n_k j_{n_k}2^{-dj_{n_k}}}} > A_0\sqrt{\varepsilon\|c\|_\infty}\right) \leq 4R\delta^{-2}2^{-[C_1^2/2C_3-1]2j_{n_k}}. \tag{44}$$

现在，我们可以适当选取常数 C_1，使得 $C_1^2/2C_3 - 1 > 0$；此时级数 $\sum_{k\geq 0}2^{-[C_1^2/2C_3-1]2j_{n_k}}$ 收敛。因此，由博雷尔-坎特利引理可得

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq r\leq l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\leq n\leq n_k}\|\sum_{i=1}^n(g(\mathbf{U}_i)-\mathbb{E}g(\mathbf{U}_i))\|_{\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)}}{\sqrt{(2d\log 2)n_k j_{n_k}2^{-dj_{n_k}}}} > A_0\sqrt{\varepsilon\|c\|_\infty}\right) = o(1), \tag{45}$$

即

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{1\leq r\leq l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\leq n\leq n_k}\|\sum_{i=1}^n(g(\mathbf{U}_i)-\mathbb{E}g(\mathbf{U}_i))\|_{\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)}}{\sqrt{(2d\log 2)n_k j_{n_k}2^{-dj_{n_k}}}} \leq A_0\sqrt{\varepsilon\|c\|_\infty}, \quad a.s. \tag{46}$$

参照离散情形的论证，并结合陈述（38），我们得出

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{1\leq r\leq l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\leq n\leq n_k}\sqrt{n}\,\|D_n(\mathbf{u}_{k,r})-D_n(\mathbf{u}))\|_{\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)}}{\sqrt{(2d\log 2)j_n 2^{dj_n}}} \leq A_0\sqrt{\lambda\varepsilon\|c\|_\infty}, \quad a.s., \tag{47}$$

这就完成了网格点之间引理（3.2）的证明。

综上，根据 (40) 和 (47) 可得

$$\limsup_{k\to\infty}\max_{1\leq r\leq l_k}\frac{\max_{n_{k-1}\leq n\leq n_k}\sqrt{n}\,|D_n(\mathbf{u})|}{\sqrt{(4\log 2)j_n 2^{-2j_n}}} \leq \sqrt{\lambda(1+\eta)\|c\|_\infty[K^2]} + A_0\sqrt{\lambda\varepsilon\|c\|_\infty}, \quad a.s. \tag{48}$$

由于 η 和 ε 是任意的，令 $\lambda \to 1$，引理 3.2 的证明即告完成。□

检查条件 i)、ii)、iii)、iv)

检查 i)：注意，类 $\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)$ 的元素可以改写为

$$g_{k,r}^{(n)}(\mathbf{s},\mathbf{u}) = \prod_{m=1}^d \widetilde{K}(2^{j_{n_k}}s_m, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,m}) - \prod_{m=1}^d \widetilde{K}(2^{j_n}s_m, 2^{j_n}u_m),$$

其中 $\widetilde{K}(x,y) = \sum_{l=1}^{2^{j_n}} \phi(x-l)\phi(y-l)$，其中 ϕ 紧支撑且具有有界变差。对于 $m = 1,\ldots,d$，定义函数类：$\mathcal{F}_m = \{v \mapsto \sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi(2^j w - l)\phi(2^j v - l) : w \in [0,1], j \in \mathbb{N}\}$。根据 [14], $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_m$ 中的引理 2，$\mathcal{F}_m = \{v \mapsto \sum_{l\in\mathbb{Z}} \phi$ 等是 VC 型函数类。此外，$\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_m$ 一致有界。事实上，对于所有 $w \in [0,1]$, $j \in \mathbb{N}$，我们有 $\left|\sum_{l=1}^{2^{j_n}} \phi(2^j w - l)\phi(2^j \cdot - l)\right| \le \|\phi\|_\infty \|\theta_\phi\|_\infty$，因为函数 $\theta_\phi(x) = \sum_{l=1}^{2^{j_n}} |\phi(x-l)|$ 有界。根据 [7], 中的引理 A.1，这意味着乘积 $\mathcal{F}_1 \cdots \mathcal{F}_m$ 也是 VC 型函数类。现在，利用 [24], 中引理 2.6.18 的性质 (iv) 和 (v)，可推知对于任意固定的 k, r，函数类 $\mathcal{G}_{k,r}(\lambda)$ 均为 VC 型。

检查 ii)：对于所有 $k \ge 1$, $0 \le r \le l_k$, $n_{k-1} \le n \le n_k$，利用假设 (H.2)，可写为

$$\begin{aligned}\left|g_{k,r}^{(n)}(\cdot,\mathbf{u})\right| &\le \left|\mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\cdot, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r})\right| + \left|\mathbf{K}(2^{j_n}\cdot, 2^{j_n}\mathbf{u})\right| \\ &\le \prod_{m=1}^{d} \widetilde{K}(2^{j_{n_k}}\cdot, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,m}) + \prod_{m=1}^{d} \widetilde{K}(2^{j_n}\cdot, 2^{j_n}u_m) \le 2\|\Phi\|_\infty^d\end{aligned}$$

于是，ii) 对 $\mathsf{U} = 2\|\Phi\|_\infty^d$ 成立。

检查 iii)：对于所有 $k \ge 1$, $0 \le r \le l_k$, $n_{k-1} \le n \le n_k$。如 [14] 中所示，我们选择 $\lambda \in (0,1)$，使得 $j_{n_k} = j_n$。通过变量代换 $\mathbf{s} = \mathbf{u} + 2^{-j_{n_k}}\mathbf{x}$，$\mathbf{s} = (s_1,\ldots,s_d)$，$\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_d)$，$\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_d)$，可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(g_{k,r}^{(n)}(\mathbf{S},\mathbf{u})\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{S}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r}) - \mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{S}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u})\right)^2\right] \\ &= \int_{I^d} \left(\mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{s}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r}) - \mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{s}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u})\right)^2 c(\mathbf{s})d\mathbf{s} \\ &\le \frac{\|c\|_\infty}{2^{-dj_{n_k}}} \int_{[-2^{j_{n_k}}, 2^{j_{n_k}}]^d} \left(\mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{u}+\mathbf{x}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r}) - \mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{u}+\mathbf{x}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u})\right)^2 d\mathbf{x}. \\ &\le 2^{-dj_{n_k}}\|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left(\mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{u}+\mathbf{x}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r}) - \mathbf{K}(2^{j_{n_k}}\mathbf{u}+\mathbf{x}, 2^{j_{n_k}}\mathbf{u})\right)^2 d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

为简化起见，令 $\mathbf{w} = 2^{j_{n_k}}\mathbf{u} + \mathbf{x}$，则 $d\mathbf{x} = d\mathbf{w}$，$w = (w_1,\ldots,w_d) \in \mathbb{R}^d$。
令 $A(\mathbf{w}) = \mathbf{K}(\mathbf{w}\ 2^{j_{n_k}}\mathbf{u}_{k,r}) - \mathbf{K}(\mathbf{w}\ 2^{j_{n_k}}\mathbf{u})$；利用核 K 的乘法性，可将 $A(\mathbf{w})$ 改写为

$$\begin{aligned}A(\mathbf{w}) &= \prod_{l=1}^{d} \widetilde{K}(w_l, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,l}) - \prod_{l=1}^{d} \widetilde{K}(w_l, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,l}) \\ &= \sum_{l=1}^{d} \left[\widetilde{K}(w_l, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,l}) - \widetilde{K}(w_l, 2^{j_{n_k}}u_l)\right] \prod_{p=1,p\ne l}^{d} \widetilde{K}(w_p, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,p})\end{aligned}$$

对于任意 $\delta > 0$，ϕ 的连续模定义为

$$\omega_\phi(\delta) = \{\sup|\phi(x) - \phi(y)| : |x-y| \le \delta\}. \tag{49}$$

回顾 $\widetilde{K}(x,y) = \sum_{h=1}^{2^{j_n}} \phi(x-h)\phi(y-h)$。将这些事实与不等式 $(a_1+\cdots+a_d)^2 \le d(a_1^2+\cdots+a_d^2)$ 以及富比尼定理结合起来，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}^d} |A(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \;\le\; d\int_{\mathbb{R}^d} \sum_{l=1}^{d} \left[\widetilde{K}(w_l, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,l}) - \widetilde{K}(w_l, 2^{j_{n_k}}u_l)\right]^2 \prod_{p=1,p\neq l}^{d} \widetilde{K}^2(w_l, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,p}) d\mathbf{w}.$$

Then

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |A(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \;&\le\; d\sum_{l=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} \left[\sum_{h=1}^{2^{j_n}} \phi(2^{j_{n_k}}w_l - h)[\phi(2^{j_{n_k}}u_{k,r,l} - h) - \phi(2^{j_{n_k}}u_l - h)]\right]^2 \\
&\qquad \times \prod_{p=1,p\neq l}^{d} \widetilde{K}^2(w_p, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,p}) d\mathbf{w} \\
&\le\; d\omega_\phi^2(\delta_m)\sum_{l=1}^{d}\int_{\mathbb{R}^d} \left[\sum_{h}^{2^{j_n}} \phi(2^{j_{n_k}}w_l - h)\right]^2 \prod_{p=1,p\neq l}^{d} \widetilde{K}^2(w_p, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,p}) d\mathbf{w} \\
&\le\; d\omega_\phi^2(\delta_m)\sum_{l=1}^{d}\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{h=1}^{2^{j_n}} \phi(2^{j_{n_k}}w_l - h)\right]^2 dw_l \prod_{p=1,p\neq l}^{d}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{K}^2(w_p, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,p}) dw_p.
\end{aligned}$$

现在，由于族 $\{\phi(\cdot - h):\ h = 1,\ldots,2^{j_n}\}$ 是一个标准正交基，量 $\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{h=1}^{2^{j_n}} \phi(w_l - h)\right)^2 dw_l$ 可由常数 M_0 控制；因此

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |A(\mathbf{w})|^2 d\mathbf{w} \;&\le\; M_0 d\omega_\phi^2(\delta_m)\sum_{l=1}^{d}\prod_{p=1,p\neq l}^{d}\int_{\mathbb{R}} \widetilde{K}^2(w_p, 2^{j_{n_k}}u_{k,r,p}) dw_p \\
&\le\; M_0 d^2\omega_\phi^2(\delta_m) D,
\end{aligned}$$

其中最后一个不等式用到了假设 (H.2)，且 D 是一个依赖于 $\|\Phi\|_\infty$ 的正常数。最后，我们得到

$$\mathbb{E}\left[\left(g_{k,r}^{(n)}(\mathbf{S},\mathbf{u})\right)^2\right] \le M_0 d^2 D 2^{-dj_{n_k}} \|c\|_\infty \omega_\phi^2(\delta_m), \tag{50}$$

并且 iii) 在以下条件下成立

$$\sigma_k^2 = D_0 2^{-dj_{n_k}} \|c\|_\infty \omega_\phi^2(\delta_m), \qquad D_0 = M_0 d^2 D. \tag{51}$$

验证 iv)：对于固定的 $m > 0$，我们有

$$\frac{\sigma_k}{\mathrm{U}} = \frac{D_0^{1/2} 2^{-\frac{d}{2}j_{n_k}} \|c\|_\infty^{1/2} \omega_\phi(\delta_m)}{2\|\Phi\|_\infty^d} \to 0, k \to \infty,$$

这意味着，对于所有足够大的 $\varepsilon > 0$ 和 k，$\frac{\sigma_k}{\mathrm{U}} < \varepsilon$。因此，对于 $\varepsilon = 1/2$，我们有$\sigma_k \preceq_{\mathrm{U}} 2$。对于所有足够大的 k，我们还有，

$$\frac{n_k\sigma_k^2}{\log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right)} = \frac{D_0 n_k \|c\|_\infty \omega_\phi^2(\delta_m)}{j_{n_k} 2^{dj_{n_k}} \log 2} \longrightarrow \infty,$$

根据假设（H.4）。这立即意味着，对于任意常数 $C_0 > 0, n_k\sigma_k^2 > C_0 \log\left(\frac{\mathrm{U}}{\sigma_k}\right)$，当 k 充分大时均成立，且 iv) 也成立。 □

下界

引理 3.3 在命题 3.1 的假设下，几乎必然有

$$\liminf_{n\to\infty} r_n \sup_{\boldsymbol{u}\in I^d} \frac{|D_n(\boldsymbol{u})|}{\sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} K^2[(\boldsymbol{x}, 2^{j_n}\boldsymbol{u})]d\boldsymbol{x}}} \geq \sqrt{\|c\|_\infty}. \tag{52}$$

证明：这是对 [14], 中命题 2 证明的改写；该证明本身受 [7] 中命题 2 的启发。根据后一个命题，当且仅当对所有 $\tau > 0$ 以及所有充分大的 n，存在 $k_n =: k_n(\tau)$ 个点 $\mathbf{z}_{i,\,n} = (z_{1,\,i,\,n}, \ldots, z_{d,\,i,\,n}) \in I^d, \quad i = 1, \ldots, k_n$，使得对于函数 $g_i^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{s} - 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,\,n})$，$\mathbf{s} \in I^d$，以及具有联合密度函数 c 的随机向量 $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_d)$，以下条件成立：

C.1) $\mathbb{P}(g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0,\ g_{i'}^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0) = 0, \quad \forall i \neq i'$;

C.2) $\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{P}(g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0) \leq 1/2$;

C.3) $2^{-j_n} k_n \longrightarrow r \in]0, \infty[$;

C.4) $\exists\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} : 2^{-dj_n}\mu_1 \leq \mathbb{E}g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \leq 2^{-dj_n}\mu_2, \quad \forall i = 1, \ldots, k_n$;

C.5) $\exists\, \sigma_1, \sigma_2 > 0 : 2^{-dj_n}\sigma_1^2 \leq \mathrm{Var}[g_i^{(n)}(\mathbf{U})] \leq 2^{-dj_n}\sigma_2^2, \quad \forall i = 1, \ldots, k_n$;

C.6) $\|g_i^{(n)}\|_\infty < \infty, \quad \forall i = 1, \ldots, k_n;\ \forall n \geq 1$;

现在，我们需要检验这些条件。根据假设，Copula 密度函数 c 在 I^d 上连续且有界，因此存在某个正交多面体 $D \subset I^d$，使得 $\max_{\mathbf{s}\in D} c(\mathbf{s}) = \|c\|_\infty$。因此，对所有 $\tau > 0$，存在 $\mathbf{s}_0 \in D$，使得 $c(\mathbf{s}_0) \geq (1-\tau)\|c\|_\infty$。令

$$D_\tau = \{\mathbf{s} \in D : c(\mathbf{s}) \geq (1-\tau)\|c\|_\infty\}, \tag{53}$$

并选择一个子集 $D_0 \subset D_\tau$，使得 $\mathbb{P}(\mathbf{U} \in D_0) \leq \frac{1}{2}$。假设 $D_0 = \prod_{j=1}^d [a_j, b_j]$，其中 $0 \leq a_j < b_j \leq 1$，且 $b_j - a_j = \ell,\ \forall j = 1, \ldots, d$。令 $\delta = 3B$ 并定义

$$z_{j,i,n} = a + i\delta 2^{-j_n}, \quad i = 1, \ldots, \left[\frac{b-a}{\delta 2^{-j_n}}\right] - 1 := k_n, \quad j = 1, \ldots, d$$

其中 $[x]$ 表示实数 x 的整数部分。

验证 C.1)：回顾一下，ϕ 的支撑集为 $[0, B]$，于是

$$g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0 \iff \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} 0 \leq \quad 2^{j_n}U_j - l \quad \leq B,\ j = 1, \ldots, d & (1) \\ 0 \leq \ 2^{j_n}z_{j,i,n} - l \ \leq B,\ j = 1, \ldots, d & (2) \end{cases}$$

and

$$g_{i'}^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0 \iff \forall k, l \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} 0 \leq \quad 2^{j_n}U_j - l \quad \leq B,\ j = 1, \ldots, d & (1)' \\ 0 \leq \ 2^{j_n}z_{j,i',n} - l \ \leq B,\ j = 1, \ldots, d & (2)' \end{cases}$$

结合式 (2) 和式 (2)′ 可得，对于每个 $j = 1, \ldots, d$,

$$|z_{j,i,n} - z_{j,i',n}| \leq 2^{-j_n} B. \quad (3)$$

但是，根据定义，对所有 $i \neq i'$, $|z_{j,\ i,\ n} - z_{j,\ i',\ n}| > \delta 2^{-j_n} = 3B2^{-j_n}$，这与 (3) 矛盾。因此，对于 $i \neq i'$，事件 $\{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0, g_{i'}^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\}$ 为空，条件 C.1) 得以成立。

验证 C.2)：对所有 $n \geq 1$，根据条件 C.1)，集合 $\{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\}, i = 1, \ldots, k_n$ 两两不相交。因此，我们有

$$\sum_{i=1}^{k_n} \mathbb{P}(\{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} \{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\}\right).$$

现在，只需证明 $\bigcup_{i=1}^{k_n} \{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\} \subset \{\mathbf{U} \in D_0\}$。根据上文的陈述 (1) 和 (3)，我们可以写出，对所有 $j = 1, \ldots, d$

$$\begin{gathered} -B \leq 2^{j_n}(U_j - u_{j,i,n}) \leq B \\ u_{j,i,n} - 2^{-j_n} B \leq U_j \leq u_{j,i,n} + 2^{-j_n} B \\ a_j \leq a_j + (3i-1)2^{-j_n} B \leq U_j \leq a_j + (3i+1)2^{-j_n} B \leq b_j. \end{gathered}$$

也就是说 $U_j \in [a_j, b_j]$，因此 $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_d) \in \prod_{j=1}^d [a_j, b_j] = D_0$. 由此可得，

$$\begin{gathered} \forall\, i = 1, \ldots, k_n, \quad \{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\} \subset \{\mathbf{U} \in D_0\} \\ \textstyle\bigcup_{i=1}^{k_n} \{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\} \subset \{\mathbf{U} \in D_0\} \\ \mathbb{P}\left(\textstyle\bigcup_{i=1}^{k_n} \{g_i^{(n)}(\mathbf{U}) \neq 0\}\right) \leq \mathbb{P}(\{\mathbf{U} \in D_0\}) \leq \tfrac{1}{2}. \end{gathered}$$

因此，C.2）得到满足。

验证 C.3）：这是显然的，因为

$$2^{-j_n} k_n = 2^{-j_n}\left(\left[\frac{b-a}{\delta 2^{-j_n}}\right] - 1\right) = \left[\frac{b-a}{\delta}\right] - 2^{-j_n} \to \left[\frac{b-a}{\delta}\right] =: r > 0,\ n \to \infty.$$

验证 C.4)：令 $\mathbf{s} = 2^{-j_n}\mathbf{x}$，$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$，进行变量代换，可得

$$\begin{aligned} |\mathbb{E} g_i^{(n)}(\mathbf{U})| &\leq \int_{I_\epsilon^d} \left|\mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n})\right| c(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\ &\leq 2^{-dj_n} \|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \left|\mathbf{K}(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n})\right| d\mathbf{x} \\ &\leq 2^{-dj_n} \|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} |\prod_{j=1}^d \widetilde{K}(x_j, 2^{j_n} u_{j,i,n})| dx_j \\ &\leq 2^{-dj_n} \|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \Phi(x_j - 2^{j_n} u_{j,i,n}) dx_j \\ &\leq 2^{-2j_n} \mu, \end{aligned}$$

其中 $\mu = \|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{j=1}^d \Phi(x_j - 2^{j_n} u_{j,\ i,\ n}) dx_j$ 存在，因为根据假设 (H.2)，函数 Φ 可积。最后一个不等式等价于

$$-2^{-2j_n}\mu \le \mathbb{E} g_i^{(n)}(U,V) \le 2^{-2j_n}\mu,\ \forall i = 1, \cdots, k_n.$$

也就是说，C.4) 成立。

验证 C.5)：对于 $n \ge 1$, $i = 1, \ldots, k_n$，令 $\mathbf{s} = 2^{-j_n}\mathbf{x} + \mathbf{z}_{i,n}$、$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_d)$、$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$、$\mathbf{z}_{i,n} = (z_{1,i,n}, \ldots, z_{d,i,n})$，并作变量代换，可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[g_i^{(n)}(\mathbf{U})] &\le \mathbb{E}\left[\left(g_i^{(n)}(\mathbf{U})\right)^2\right] \\
&\le \int_{I^d} \mathbf{K}^2(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) c(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \\
&\le 2^{-dj_n}\|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x} + 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

令 $\sigma_2^2 := \|c\|_\epsilon \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x} + 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{x}$，可得

$$\mathrm{Var}[g_i^{(n)}(\mathbf{U})] \le 2^{-dj_n}\sigma_2^2,$$

这就是条件 C.5) 中的上界。对于下界，我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[g_i^{(n)}(\mathbf{U})] &= \mathbb{E}\left[\left(g_i^{(n)}(\mathbf{U})\right)^2\right] - \left[\mathbb{E} g_i^{(n)}(\mathbf{U})\right]^2 \\
&= \int_{I^d} \mathbf{K}^2(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) c(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \left(\int_{I^d} \mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) c(\mathbf{s}) d\mathbf{s}\right)^2.
\end{aligned}$$

令 $\mu_n^2 = \left(\int_{I^d} \mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{s}\ 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) c(\mathbf{s}) d\mathbf{s}\right)^2$.。注意到 $D_\tau \subset I^d$，通过变量代换 $\mathbf{x} = 2^{j_n}\mathbf{s}$, 可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[g_i^{(n)}(\mathbf{U})] &\ge \int_{D_\tau} \mathbf{K}^2(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) c(\mathbf{s}) d\mathbf{s} - \mu_n^2 \\
&\ge (1-\tau)\|c\|_\infty \int_{D_\tau} \mathbf{K}^2(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{s} - \mu_n^2 \\
&\ge (1-\tau)\|c\|_\infty 2^{-dj_n} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{x} - \mu_n^2.
\end{aligned}$$

再次进行相同的变量代换，并根据假设 (H.3) 可知 $\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}(\mathbf{x}\ 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{x} = 1$，于是可得

$$\mu_n^2 \le \left(\|c\|_\infty 2^{-dj_n} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{x}\right)^2 \le \|c\|_\infty^2 2^{-2dj_n},$$

这意味着 $-\mu_n^2 \ge -\|c\|_\epsilon^2 2^{-4j_n}$. 因此，当 n 足够大时，我们得到条件 C.5) 中的下界，即

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[g_i^{(n)}(\mathbf{U})] &\ge 2^{-dj_n}(1-\tau)\|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{K}^2(\mathbf{x}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n}) d\mathbf{x} - \|c\|_\infty^2 2^{-2dj_n} \\
&\ge 2^{-dj_n}\sigma_1^2 + o(1),
\end{aligned}$$

其中 $\sigma_1^2 := (1-\tau)\|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} K^2(\mathbf{x}\ 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,\ n}]d\mathbf{x}$. 最后，C.5) 成立。
此外，令 $\tau \to 0$，我们得到 $\sigma_2^2 = \sigma_1^2 = \|c\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{K}^2(\mathbf{x}\ 2^{j_n}\mathbf{u}d\mathbf{x}$.

验证 C.6)：对于所有 $\mathbf{s} \in I^d, n \geq 1, \quad i = 1, \ldots, k_n$，利用假设 (H.1-2) 和核 K 的可乘性，我们有

$$\begin{aligned}
|g_i^{(n)}(\mathbf{s})| &= |\mathbf{K}(2^{j_n}\mathbf{s}, 2^{j_n}\mathbf{z}_{i,n})| = \prod_{m=1}^{d} |\widetilde{K}(2^{j_n}s_m, 2^{j_n}z_{i,n,m})| \\
&\leq \prod_{m=1}^{d} \sum_{l=1}^{2^{j_n}} |\phi(2^{j_n}s_m - l)\phi(2^{j_n}z_{i,n,m} - l)| \\
&\leq \|\phi\|_\infty^d \prod_{m=1}^{d} \sum_{l=1}^{2^{j_n}} |\phi(2^{j_n}s_m - l)| \\
&\leq \|\phi\|_\infty^d \|\theta_\phi\|_\infty^d.
\end{aligned}$$

因此，$\sup_{n\geq 1, 1\leq i\leq k_n} \|g_i^{(n)}\| \leq \|\phi\|_\infty^d \|\theta_\phi\|_\infty^d$，且 C.6) 成立。由于条件 C.1-2-3-4-5-6) 均已满足，我们现在可以应用 [7] 中的命题 2 来完成引理 3.3 的证明。□

最后，引理 3.2 和引理 3.3 给出了命题 (3.1) 的证明。□

利益冲突

代表所有作者，通讯作者声明不存在利益冲突。

参考文献

[1] Autin F, Le Pennec E, Tribouley K（2010年）。Copula 密度的阈值方法。《多元分析杂志》101(1)：200–222[2] Chen, S.X. 和 Huang, T.-M.（2007年）。用于依赖建模的 Copula 函数非参数估计。《加拿大统计学杂志》35：265-282。[3] Chung, K.L.（1949年）。关于 Kolmogorov 极限分布的一个估计。《美国数学会汇刊》167：36-50。[4] Cohen, A.、Daubechies, I.、Vial, P.（1993年）。区间上的小波与快速小波变换。《应用与计算调和分析》，爱思唯尔。[5] Daubechies, I.（1992年）。《小波十讲》，CBMS-NSF 应用数学区域会议系列第61卷。工业与应用数学学会（SIAM）。

[6] Donoho, D.L.、Johnstone, I.M.、Kerkyacharian, G. 和 Picard, D.（1996年）。通过小波阈值化进行密度估计。《统计年刊》第24卷第2期：508-539 [7] Einmahl U, Mason DM（2000 年）。核型函数估计量一致相合性的经验过程方法。《理论概率学杂志》13(1)：1–37[8] Fermanian J.-D, Scaillet O.（2003年）。时间序列 Copula 的非参数估计。《风险杂志》5：25-54。[9] Gannoun A.、HosseiniounN. 关于用于估计 Copula 函数的基于小波的方法。《罗马尼亚纯粹与应用数学杂志》57（2012年），第3期：205-213[10] Geenens G.、Charpentier A.、Paindaveine D. 用于 Copula 密度非参数核估计的 Probit变换。《伯努利》23(3)，2017年：1848-1873。DOI：10.3150/15-BEJ798。[11]Genest C, Masiello E, Tribouley K（2009年）。通过小波估计 Copula 密度。《保险：数学与经济学》44(2)：170–181。[12] Gijbels I, Mielniczuk J（1990年）。Copula 函数密度的估计。《统计学通讯：理论与方法》19(2)：445–464。[13] Giné E, Guillou A（2002年）。多元核密度估计量强一致相合速率。《庞加莱年刊：概率与统计》38，6（2002年）：907-921。[14] Giné E, Nickl R（2009年）。小波密度估计量的一致极限定理。《概率年刊》37(4)：1605–1646。[15] Härdle,W.、Kerkyacharian, G.、Picard, D.、Tsybakov, A.（1998年）。《小波、逼近与统计应用》。统计学讲义第129卷。纽约，NY：施普林格出版社。[16] Juditsky, A. 和 Lambert-Lacroix, S.（2004年）关于极小极大密度估计 $\mathbb{R}$上的问题。《伯努利》10，187-220。MR2046772。[17] Joe H（1997年）。《多元模型与多元依赖概念》。Chapman[18] Mallat, S.（2009年）。《信号处理中的小波之旅》。稀疏方法。（第3版）。爱思唯尔。[19] Meyer, Y.（1992年）。《小波与算子》。剑桥高级数学研究第37卷。剑桥大学出版社。由 D.H. Salinger 从1990年的法语原著翻译。[20] Omelka, M.、Gijbels, I. 和 Veraverbeke, N.（2009年）。改进的Copula核估计量：弱收敛与拟合优度检验。《统计年刊》，第37卷，5B：3023-3058

[21] Sancetta A, Satchell S（2004年）。伯恩斯坦 copula 及其在多元分布建模与近似中的应用。计量经济学理论 20(3):535–562[22] Talagrand, M.（1996年）。乘积空间中的新浓缩不等式。Invent. Math. 126, 505-563. MR1419006[23] Vidakovic, B.（1999年）。《小波统计建模》。Wiley 概率与统计丛书：应用概率与统计。John Wiley & Sons Inc.[24] van der Vaart A.W., Wellner J.A.（1996年）。弱收敛与经验过程。Springer，纽约。