arXiv:2303.05672v1 [math.LO] 10 Mar 2023

无单位对合交换剩余格：逻辑与可判定性

Yiheng Wang[1], Hao Zhan[1], Yu Peng[1] 和 Zhe Lin[1*]

[1*]厦门大学哲学系，福建省厦门市思明南路，邮编 361005，中国。

*通讯作者。电子邮箱：pennyshaq@163.com；作者邮箱：ianwang747@gmail.com；haozhan1993@gmail.com；amberlogos@163.com；

摘要

我们研究无单位对合交换剩余格，这种结构是在交换剩余格序半群上增添了一元对合否定算子。本文讨论了该结构的逻辑，并给出了它的 Gentzen 风格序列演算。此外，我们证明了该逻辑的可判定性。

关键词：对合否定；剩余格；单位元；可判定性

1 引言

剩余格序幺半群，简称剩余格，最早由 Ward 等人于 20 世纪初引入。[1–3] 剩余格是一个结构 $\mathbf{F} = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1)$，其中 $(A, \wedge, \vee)$ 是一个格，$(A, \cdot, \backslash, /, 1)$ 是一个剩余幺半群，其中 1 是融合运算“$\cdot$”的单位元，而 $\backslash, \cdot, /$ 是满足以下剩余律的二元运算：

$$(\text{res}) \quad a \cdot b \leq c \text{ iff } b \leq a \backslash c \text{ iff } a \leq c / b.$$

所有剩余格的类记作 $\mathcal{RL}$。$\mathcal{RL}$ 的研究可追溯到 W. Krull [1] 以及 Morgan Ward 和 R. P. Dilworth [2, 3]的工作。这一理论已在多个领域得到研究，包括格序群、次结构逻辑和数理语言学。The

所有剩余半群构成的类记作 $\mathcal{RSG}$。 $\mathcal{RL}$ 去掉单位元 1 后记作 $\mathcal{RL}^{-}$ 构成剩余格序半群。 $\mathcal{RSG}$， $\mathcal{RL}^{-}$及其非结合变体被广泛用作自然语言处理范畴语法的代数基础（参见 [4–6]）。交换$\mathcal{RL}$（ $\mathcal{RL}^{-}$，记作 $c\mathcal{RL}$ ($c\mathcal{RL}^{-}$)，是 $\mathcal{RL}$ ($\mathcal{RL}^{-}$，此外还满足“·”的交换性，即 $a\cdot b = b\cdot a$。因此，在 $c\mathcal{RL}$ ($c\mathcal{RL}^{-}$中，$a\backslash b = b/a$。

关于 $\mathcal{RL}$ 扩充对合否定（in）的研究文献很多，记作 $In\mathcal{RL}$ （参见 [7, 8]）。在 $\mathcal{RL}$ 和 $\mathcal{RL}^{-}$上的对合否定是一种满足以下两个条件的一元运算：(in) $a\backslash\neg b = \neg a/b$和(dn) $\neg\neg a = a$ （参见[7]）。设 $0 = \neg 1$。那么 $a\backslash 0 = \neg a/1 = \neg a$。因此 $\neg a = a\backslash 0 = 0/a$。由此可得逆否律（ctr）：若 $a \leq b$，则 $\neg b \leq \neg a$。在 $c\mathcal{RL}$中，(in)等价于(cin)： $a\backslash\neg b = b\backslash\neg a$。若将(dn)替换为 $a \leq \neg\neg a$，则得到准对合否定。下文分别用$IncR\mathcal{L}$ 和 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 表示对合 $c\mathcal{RL}$ 和 $c\mathcal{RL}^{-}$ 。显然，准对合否定和对合否定分别是极小否定和德摩根否定。德摩根否定是一种满足(ctr)和(dn)的一元运算（参见 [9]）。若从德摩根否定中去掉 $\neg\neg a \leq a$ ，则得到极小否定。极小否定这一概念由 Kolmogoroff [10], 提出，后由Johansson [11]系统研究。德摩根代数（也称“准布尔代数”）是带有德摩根否定的（不一定有界的）分配格，由 Bialynicki-Birula和Rasiowa [12]提出。Moisil [13] 也以“德摩根格”这一名称研究了这类代数；Kalman [14] 则称之为分配i-格。

次结构逻辑是指其代数模型为剩余结构的逻辑。过去四十年来，Ono 等人推动了次结构逻辑和剩余格的研究（参见 [6, 15–17]）。 $\mathcal{RL}$ 的逻辑以全兰贝克演算（FL）之名为人所知，是带单位元的兰贝克演算（L）的格扩展。兰贝克演算是 Lambek [4] 为语言学分析提出的句法演算。无单位元的 FL，记作 FL^{-}，恰好是 $\mathcal{RL}^{-}$ 的代数模型，由 Kanazawa [5]引入。Kozak[18]研究了它的分配变体（DFL^{-}）。在 [18] 中，证明了 DFL^{-} 的有限模型性质和可判定性结果。Buszkowski 研究了它们的非结合变体，并在 [19]中建立了类似的结果。

文献中探讨了与 $\mathcal{RL}$ 及其变体相对应的次结构逻辑的负扩张。 $IncR\mathcal{L}$（也称为 FL$_e$-幺半群）由 Jenei 和 Ono [8]研究。Galatos 和 Jipsen [20] 证明，$In\mathcal{RL}$ 及其非结合变体具有有限模型性质。该论文还介绍了相应代数的无割序列演算。Buszkowski [21] 探讨了对合剩余群胚。这些代数的逻辑称为经典非结合兰贝克演算（CNL）。文中介绍了无割单侧序列演算，并证明了 CNL 及带单位元的 CNL（CNL1）具有多项式时间可判定性。

我们继续这条研究路线。我们考察 $cR\mathcal{L}^{-}$上的（准）对合否定。 $cR\mathcal{L}^{-}$ 和 $cR\mathcal{L}$ 本质上是不同的。例如，不等式 $a/(b/b) \leq a$ 在 $cR\mathcal{L}$ 中成立，但在 $cR\mathcal{L}^{-}$中不成立。此外， $a \cdot \neg a \leq 0$ 是 $IncR\mathcal{L}$中的一条基本定律。然而，在 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 中，由于没有 0，这个表达式没有意义。据作者所知， $IncR\mathcal{L}^{-}$ 的代数性质尚未得到充分研究。相应逻辑的逻辑刻画、无切割规则的序列演算以及可判定性结果仍是开放问题。显然，这些结果无法轻易从$IncR\mathcal{L}$的相关结果中推导出来。本文研究 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 及其对应的逻辑 InFL_e^{-}。我们提出了 InFL_e^{-}的序列演算，并确立了其可判定性结果。我们的方法受到 Lin 等人 [22] 的启发。

本文组织如下。第2 节介绍 $cR\mathcal{L}^{-}$，$cR\mathcal{L}^{-}$ 其中带有（准）对合否定，并简要讨论不同否定之间的关系。第3 节介绍相应逻辑的序列演算，以及关于可靠性、完备性和可嵌入性的结果。第4 节展示一种切消去，并证明可判定性结果。

2 代数

本节考虑带有对合否定算子的交换剩余格序半群。首先回顾一些基本定义。

定义1 若代数 $\mathbf{F} = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash)$ 满足当且仅当以下条件，则称其为交换剩余格序半群（记作 $cR\mathcal{L}^{-}$）：

- $(A, \wedge, \vee)$ 是一个格；
- $(A, \cdot)$ 是一个交换半群；
- $\cdot, \backslash$ 是 A 上的运算，满足以下性质：

(剩余律) $a \cdot b \leq c$ 当且仅当 $b \leq a \backslash c$。

定义2 代数 $\mathbf{F} = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, 1)$ 称为交换剩余格（记作 $cR\mathcal{L}$），其中$(A, \cdot, 1)$是交换幺半群。

性质 1 *The following properties related to the lattice operation hold in* $cR\mathcal{L}^{-}$ *and* $cR\mathcal{L}$ *for all* $a, b, c \in A$*:*

(1) 如果 $a \leq b$，那么 $a \wedge c \leq b$；(2) 如果 $a \leq b$，那么 $a \leq b \vee c$；(3) 如果 $a \leq b$ 且 $c \leq b$，那么 $a \vee c \leq b$；(4) 如果 $a \leq b$ 且 $a \leq c$，那么 $a \leq b \wedge c$；(5) 如果 $a \leq b$ 且 $b \leq c$，那么 $a \leq c$。

4 $IncR\mathcal{L}^{-}$：逻辑与可判定性

性质 **2** *The following properties related to the fusion operation hold in* $cR\mathcal{L}^{-}$ *and* $cR\mathcal{L}$ *for all* $a, b, c \in A$*:*

(1) $a \cdot b = b \cdot a$; (2) $b \cdot (b \backslash a) \leq a$; (3) 若 $a_1 \leq b_1$ 且 $a_2 \leq b_2$，则 $a_1 \cdot a_2 \leq b_1 \cdot b_2$; (4) $a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$; (5) 若 $a \leq b$，则 $a \cdot c \leq b \cdot c$; (6) $(a \backslash c) \cdot b \leq a \backslash (c \cdot b)$; (7) $(a \backslash b) \cdot (b \backslash c) \leq a \backslash c$; (8) $a \backslash c \leq (b \cdot a) \backslash (b \cdot c)$; (9) $b \backslash (a \backslash c) = (a \cdot b) \backslash c$.

Proof 我们只给出（3）至（9）的证明。

（3）假设 $a_1 \leq b_1$ 和 $a_2 \leq b_2$。由于有 $b_1 \cdot a_2 \leq b_1 \cdot a_2$ 和 $b_1 \cdot b_2 \leq b_1 \cdot b_2$，通过多次应用（res）和交换性，可得$a_1 \cdot a_2 \leq b_1 \cdot b_2$。

（4）由于 $b \leq b \vee c$，由（3）可得 $a \cdot b \leq a \cdot (b \vee c)$ 和 $a \cdot c \leq a \cdot (b \vee c)$。因此，可得 $(a \cdot b) \vee (a \cdot c) \leq a \cdot (b \vee c)$。接下来，由于 $a \cdot b \leq (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$ 且$a \cdot c \leq (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$，由（res）可得 $b \vee c \leq a \backslash ((a \cdot b), (a \cdot c))$。再次由（res），可得 $a \cdot (b \vee c) \leq (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$。因此，可得 $a \cdot (b \vee c) = (a \cdot b) \vee (a \cdot c)$。

(5) 这是 (3) 的一个特例。

(6) 根据 (2)，有 $a \cdot (a \backslash c) \leq c$。根据 (5)，有 $(a \cdot (a \backslash c)) \cdot b \leq c \cdot b$。因此，根据（剩余律），有 $(a \backslash c) \cdot b \leq a \backslash (c \cdot b)$。

(7) 应用 (6)，有 $(a \backslash b) \cdot (b \backslash c) \leq a \backslash (b \cdot (b \backslash c))$。此外，根据 (2)，还有$a \cdot (a \backslash (b \cdot (b \backslash c))) \leq c$。因此，根据（剩余律），有 $(a \backslash b) \cdot (b \backslash c) \leq a \backslash c$。

(8) 证明与 (7) 十分类似。

(9) 由于有 $a \cdot (b \cdot (b \backslash (a \backslash c))) \leq c$ 和 $(a \cdot b) \cdot ((a \cdot b) \backslash c) \leq c$，因此根据（剩余律），有 $(a \cdot b) \backslash c \leq b \backslash (a \backslash c)$ 和 $b \backslash (a \backslash c) \leq (a \cdot b) \backslash c$。由此可得，$b \backslash (a \backslash c) = (a \cdot b) \backslash c$。

□

性质 **3** *The following properties related to the residual hold in* $cR\mathcal{L}^{-}$ *and* $cR\mathcal{L}$ *for all* $a, b, c \in A$*:*

(1) 若 $a \leq b$，则 $b \backslash c \leq a \backslash c$; (2) 若 $a \leq b$，则 $c \backslash a \leq c \backslash b$; (3) $c \backslash (a \wedge b) = (c \backslash a) \wedge (c \backslash b)$; (4) $b \backslash c \leq (a \backslash b) \backslash (a \backslash c)$; (5) $b / a \leq (c / b) \backslash (c / a)$ 且 $a \backslash b \leq (a \backslash c) / (b \backslash c)$; (6) $a \backslash (c / b) = (a \backslash c) / b$; (7) $c \leq (a / c) \backslash a$ 且 $c \leq a / (c \backslash a)$; (8) $a \backslash b = b / a$。

Proof
(1) 假设 $a \leq b$，由（剩余律）可得 $b \cdot (b\backslash c) \leq c$。因此，可得 $a \leq (b\backslash c)\backslash c$。两次应用（剩余律），可得 $b\backslash c \leq a\backslash c$。(2) 假设 $a \leq b$，由（剩余律）可得 $c \cdot (c\backslash a) \leq a$。因此，可得 $c \cdot (c\backslash a) \leq b$；再次应用（剩余律），可得 $c\backslash a \leq c\backslash b$。(3) 将（剩余律）应用于 $c\backslash(a \wedge b) \leq c\backslash(a \wedge b)$，可得 $c \cdot (c\backslash(a \wedge b)) \leq a \wedge b$。由格序可得 $c \cdot (c\backslash(a \wedge b)) \leq a$，再由（剩余律）可得 $c\backslash(a \wedge b) \leq c\backslash a$。同样地，采用类似方法并利用格序，可得 $c\backslash(a \wedge b) \leq (c\backslash a) \wedge (c\backslash b)$。反过来，将（剩余律）应用于 $c\backslash a \wedge c\backslash b \leq c\backslash a$ 和 $c\backslash a \wedge c\backslash b \leq c\backslash b$，可得 $c \cdot ((c\backslash a) \wedge (c\backslash b)) \leq a \wedge b$。然后再次应用（剩余律），并采用类似方法，可得 $(c\backslash a) \wedge (c\backslash b) \leq c\backslash(a \wedge b)$。因此，可得 $c\backslash(a \wedge b) = (c\backslash a) \wedge (c\backslash b)$。

(4) 根据性质2 (7)，可得 $(a/b) \cdot (b/a) \leq a/a$。应用剩余律（res），可得 $b\backslash c \leq (a\backslash b) \backslash (a\backslash c)$。

(5) 根据性质2 (7)，可得 $(c/b) \cdot (b/a) \leq (c/a)$。进一步对 $(c/b) \cdot (b/a) \leq (c/a)$ 应用剩余律（res），可得 $b/a \leq (c/b) \backslash (c/a)$。用类似方法可得$a\backslash b \leq (a\backslash c) / (b\backslash c)$。

(6) 由于有 $(a \cdot (a\backslash(c/b))) \cdot b \leq c$ 且 $(a \cdot ((a\backslash c)/b)) \cdot b \leq c$，由（剩余律）可得 $a\backslash(c/b) \leq (a\backslash c)/b$ 且 $(a\backslash c)/b \leq a\backslash(c/b)$。因此，有 $a\backslash(c/b) = (a\backslash c)/b$。
(7) 对 $a/c \leq a/c$ 两次应用（剩余律），可得 $c \leq (a/c)\backslash a$。用类似方法可得 $c \leq a/(c\backslash a)$。

(8) 由于 $(a/b) \cdot b \leq a$ 且 $b \cdot (b\backslash a) \leq a$，由（剩余律）可得 $a\backslash b \leq b/a$ 和 $b/a \leq a\backslash b$。因此，有 $a\backslash b = b/a$。□

定义 3 一个代数 $\mathsf{F} = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, \neg)$ 称为具有对合否定的交换剩余格序半群（记作 $IncR\mathcal{L}^{-}$），当且仅当：

- $(A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash)$ 是一个 $cR\mathcal{L}^{-}$；
- $\neg$ 是 A 上的一个运算，满足以下性质：

(dn) $\neg\neg a = a$;
(in) $a\backslash\neg b = b\backslash\neg a$。

$\mathsf{F} = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, \neg)$ 是一个带准对合否定的交换剩余格序半群（记作 $qIncR\mathcal{L}^{-}$），若其满足条件 (dn1) $a \leq \neg\neg a$ 而非 (dn)。在定义 3中，(in) 可以替换为以下等价条件：

$$(\text{smn})\ \text{If } a \cdot b \leq \neg c, \text{ then } c \cdot b \leq \neg a \text{ where } b \text{ can be null.}$$

我们证明 (in) 蕴含 (smn)。设 $a \cdot b \leq \neg c$。那么由 (res) 可得 $b \leq a\backslash\neg c$。因此 $b \leq c\backslash\neg a$。所以 $b \cdot c \leq \neg a$。类似地，可以证明若 $c \cdot b \leq \neg a$，则 $a \cdot b \leq \neg c$。反过来，我们证明 (smn) 蕴含 (in)。由于 $a\backslash\neg b \leq a\backslash\neg b$，由 (res) 可得 $a \cdot a\backslash\neg b \leq \neg b$。然后由 (smn) 可得 $(a\backslash\neg b) \cdot (\neg\neg b) \leq \neg a$。因此由 (dn) 可得 $a\backslash\neg b \cdot b \leq \neg a$。所以由 (res) 可得，$a\backslash\neg b \leq b\backslash\neg a$。另一个不等式也可类似证明。显然，$cR\mathcal{L}^{-}$ 若配备满足 (smn) 的否定，便是一个 $qIncR\mathcal{L}^{-}$。带有否定、且满足下述 (mn) 而非 (in) 和 (dn) 的 $cR\mathcal{L}^{-}$，称为极小$cR\mathcal{L}^{-}$，记作 $mncR\mathcal{L}^{-}$。

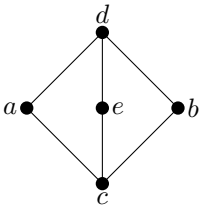
$$(\text{mn})\ \text{If } a \leq \neg c, \text{ then } c \leq \neg a.$$

显然，(smn) 蕴含 (mn)。此外，由 (mn) 可得 $a \leq \neg\neg a$。带有 $\neg\neg a \leq a$ 的 A$mncR\mathcal{L}^{-}$ 是一个德摩根 $cR\mathcal{L}^{-}$。记作 $dncR\mathcal{L}^{-}$。带有反演否定（$IncR\mathcal{L}$）的 $cR\mathcal{L}$ 自然地定义如下。

命题 **4** *$\neg a = a\backslash 0$ and $a \cdot \neg a = 0$ in $IncR\mathcal{L}$ where $0 = \neg 1$.*

*Proof*若 $IncR\mathcal{L}$ 含有单位元，则 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$。由于有 $\neg a \leq \neg a$，由单位元可得 $1 \cdot \neg a \leq \neg a$。由 (smn) 可得 $a \cdot \neg a \leq \neg 1$。于是由 (res) 可得 $\neg a \leq a\backslash 0$。反过来，对 $a\backslash 0 \leq a\backslash 0$ 应用 (res)，可得 $a \cdot a\backslash 0 \leq 0$。再应用 (smn)，可得 $a \cdot a\backslash 0 \leq \neg 1$ 和 $a\backslash 0 \leq \neg a$。因此有 $\neg a = a\backslash 0$，其中 $0 = \neg 1$。由于 $a \cdot a\backslash 0 = 0$，故 $a \cdot \neg a = 0$。□

例 **1** 图 1 中的格是 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 的一个例子。



	a	b	c	d	e
$\neg$	a	b	d	c	e

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	b	a	c	d	d
b	a	b	c	d	d
c	c	c	c	c	c
d	d	d	c	d	d
e	d	d	c	d	d

$\backslash$	a	b	c	d	e
a	b	a	c	d	c
b	a	b	c	d	c
c	d	d	d	d	d
d	c	c	c	d	c
e	c	c	c	d	c

图 **1** $IncR\mathcal{L}^{-}$ 的一个例子

显然，例 1 是 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 的一个实例，但甚至不是 $IncR\mathcal{L}$ 的某个实例的子代数。由于不存在特殊元素 $y \in \{a, b, c, d, e\}$，使得对任意 $x \in \{a, b, c, d, e\}$，$x \cdot \neg x = y$。因此，此例表明 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 与 $IncR\mathcal{L}$ 本质不同。

命题 **5** *The following properties hold in $IncR\mathcal{L}^{-}$ for all $a, b, c \in A$:*

（mn）若 $a \leq \neg c$，则 $c \leq \neg a$;

（dn1） $a \leq \neg\neg a$；（smn′）若 $a \cdot b \leq c$，则 $\neg c \cdot b \leq \neg a$；（ctr）若 $a \leq b$，则 $\neg b \leq \neg a$。

Proof

(mn) 令 b 为零元，通过 (smn) 的简单代换即可得到该条件。(dn1) 对 $\neg a \leq \neg a$应用 (mn)，可得 $a \leq \neg\neg a$。(smn′) 假设 $a \cdot b \leq c$，通过 (dn) 可得 $a \cdot b \leq \neg\neg c$。进一步应用 (smn)，可得 $a \cdot b \leq c$ 蕴含 $\neg c \cdot b \leq \neg a$。(ctr) 假设 $a \leq b$，由 (dn1) 可得 $b \leq \neg\neg b$。因此可得 $a \leq \neg\neg b$。由 (mn) 可得 $\neg b \leq \neg a$。

□

仅满足逆否律 (ctr) 的否定称为次极小否定。显然，(mn) 蕴含 (ctr)。令 $a \leq b$。根据 (dn1)，$b \leq \neg\neg b$。因此$a \leq \neg\neg b$。接着，根据 (mn)，可得 $\neg b \leq \neg a$。所以，极小否定确实是次极小否定。正如上文所述，德摩根否定是满足 $\neg\neg a \leq a$ 的极小否定，而对合否定则是满足 $a\backslash\neg b = b\backslash\neg a$ 的德摩根否定。因此，依照邓恩否定风筝图（参见 [9]），我们在图2中给出了 $c\mathcal{RL}^{-}$ 上的一系列否定。请注意，带有德摩根否定的 L（兰贝克演算）由 Buszkowski [23] 提出，旨在描述范畴语法中的否定信息。然而，相应逻辑的无割序列演算和可判定性问题仍悬而未决。

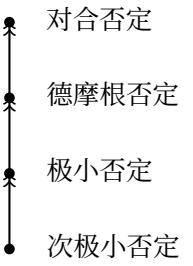


图 2 否定串

3 逻辑

本节将介绍 InFL_e^{-}（记作 G）和 qInFL_e^{-}，它们分别是 $Inc\mathcal{RL}^{-}$ 和 $qInc\mathcal{RL}^{-}$ 的逻辑。我们将为这些代数建立简单的序列演算，并证明其可靠性与完备性。最后，我们将展示 InFL_e^{-} 可以嵌入 qInFL_e^{-}。

定义4 InFL 的公式（项）集 $\mathcal{F}_{\bar{e}}$ 归纳定义如下：

$$\mathcal{F} \ni \alpha ::= p \mid \alpha \cdot \beta \mid \alpha \backslash \beta \mid \alpha \wedge \beta \mid \alpha \vee \beta \mid \neg \alpha$$

其中 $p \in$ 变量集。

定义 **5** *The simple Gentzen-style sequent calculus* G *for commutative residuated lattice-ordered semigroup with involutive negation consists of the following axioms and rules:*

(1) 公理：

$$(\mathrm{Id})\alpha \Rightarrow \alpha \quad (\mathrm{DN2})\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$$

(2) 逻辑规则：

$$\frac{\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma}{\beta \Rightarrow \alpha \backslash \gamma}(\mathrm{RES}\backslash) \quad \frac{\beta \Rightarrow \alpha \backslash \gamma}{\alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma}(\mathrm{RES}^{-}\backslash)$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \wedge \gamma \Rightarrow \beta}(\wedge\mathrm{L}) \quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma}(\wedge\mathrm{R})$$

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \gamma \Rightarrow \beta}{\alpha \vee \gamma \Rightarrow \beta}(\vee\mathrm{L}) \quad \frac{\alpha \Rightarrow \beta}{\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma}(\vee\mathrm{R})$$

$$\frac{\alpha \cdot \beta \Rightarrow \neg\gamma}{\gamma \cdot \beta \Rightarrow \neg\alpha}(\neg)$$

(3) 切规则：

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \beta \Rightarrow \gamma}{\alpha \Rightarrow \gamma}(\mathrm{Cut})$$

如果存在 G 中关于 $\alpha \Rightarrow \beta$ 的推导，则序列 $\alpha \Rightarrow \beta$ 在 G 中可证，记作 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$。若 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\vdash_{\mathsf{G}} \beta \Rightarrow \alpha$，则记作 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Leftrightarrow \beta$。由于规则（$\neg$）中的 β 可以是零元，即规则（$\neg$）可以具有以下特殊形式：

$$\frac{\alpha \Rightarrow \neg\gamma}{\gamma \Rightarrow \neg\alpha}(\mathrm{MN})$$

此外，如果省略（DN2）：$\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$，那么我们将得到一个用于 $\mathbf{qInFL}_{\bar{e}}^{-}$ 的简单序列演算。

性质 **6** *The following rules and axioms are admissible in* G*:*

（DN1）$\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \neg\neg\alpha$；（$\neg'$）若 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma$，则 $\vdash_{\mathsf{G}} \neg\gamma \cdot \beta \Rightarrow \neg\alpha$；（DN$\wedge$）$\vdash_{\mathsf{G}} \neg\neg\left(\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta\right) \Leftrightarrow \neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta$；（Mon）若 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha_1 \Rightarrow \beta_1$ 且 $\alpha_2 \Rightarrow \beta_2$，则 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha_1 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \cdot \beta_2$；（DN$\backslash$）$\vdash_{\mathsf{G}} \neg\neg\left(\neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta\right) \Leftrightarrow \neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta$。

Proof 我们只给出 (Mon) 和 (DN$\backslash$) 的证明。

(Mon):

$$\dfrac{\dfrac{\alpha_1 \Rightarrow \beta_1 \qquad \dfrac{\beta_1 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \cdot \alpha_2}{\beta_1 \Rightarrow \alpha_2 \backslash (\beta_1 \cdot \alpha_2)}\,(\mathrm{RES}\backslash)}{\alpha_1 \Rightarrow \alpha_2 \backslash (\beta_1 \cdot \alpha_2)}\,(\mathrm{Cut})}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \cdot \alpha_2}\,(\mathrm{RES}^{-}\backslash) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha_2 \Rightarrow \beta_2 \qquad \dfrac{\beta_1 \cdot \beta_2 \Rightarrow \beta_1 \cdot \beta_2}{\beta_2 \Rightarrow \beta_1 \backslash (\beta_1 \cdot \beta_2)}\,(\mathrm{RES}\backslash)}{\alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \backslash (\beta_1 \cdot \beta_2)}\,(\mathrm{Cut})}{\beta_1 \cdot \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \cdot \beta_2}\,(\mathrm{RES}^{-}\backslash)}{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \Rightarrow (\beta_1 \cdot \beta_2)}\,(\mathrm{Cut})$$

(DN\) 从右向左，这是对 (DN1) 的代换。从左向右：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta \Rightarrow \neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta}{\neg\neg\alpha \cdot (\neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta) \Rightarrow \neg\neg\beta}\,(\mathrm{RES}^{-}\backslash)}{\neg\neg\alpha \cdot \neg\neg(\neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta) \Rightarrow \neg^4\beta}\,(\neg') \times 2 \qquad \dfrac{\beta \Rightarrow \neg\neg\beta}{\neg^4\beta \Rightarrow \neg\neg\beta}\,(\neg') \times 2}{\neg\neg\alpha \cdot \neg\neg(\neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta) \Rightarrow \neg\neg\beta}\,(\mathrm{Cut})}{\neg\neg(\neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta) \Rightarrow \neg\neg\alpha \backslash \neg\neg\beta}\,(\mathrm{RES}\backslash)$$

□

设 $(A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, \neg)$ 是一个 $IncR\mathcal{L}^{-}$。设 Var 为所有原子公式 $p, q, r, \ldots$ 的集合，并且 μ 是从 Var 到 A 的映射。我们将 $\mu(p)$ 写作 A 中与之对应的 p。通过以下方式，这个映射可以自然地扩展到公式 $\mathcal{F}$ 的集合：对于任意 $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ 和 $\star \in \{\wedge, \vee, \cdot, \backslash\}$，$\mu(\neg\alpha) = \neg(\mu(\alpha))$，且 $\mu(\alpha \star \beta) = \mu(\alpha) \star \mu(\beta)$。一个 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 模型是一个二元组 (A, μ)，其中 A 是一个 $IncR\mathcal{L}^{-}$，而 μ 是从 Var 到 A 的映射。如果 $\mu(\alpha) = 1$ 在 A 中成立，则公式在 (A, μ) 中为真。若对任意 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 模型 (A, μ)，$\mu(\alpha) = 1$ 成立，则公式对 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 类有效。若 α 对 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 类有效，我们记作 $\vDash_{IncR\mathcal{L}^{-}} \alpha$。

定义6 若简单序列演算 G 对代数类 $\mathcal{K}$ 满足可靠性，则称其为可靠的；也就是说，对于任意序列 $\alpha \Rightarrow \beta, \vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$ implies $\vDash_{\mathcal{K}} \alpha \Rightarrow \beta$。若简单序列演算 G 对 $\mathcal{K}$ 满足完备性，则称其为完备的；也就是说，对于任意序列 $\alpha \Rightarrow \beta, \vDash_{\mathcal{K}} \alpha \Rightarrow \beta$ implies $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$。

定理 7 *is sound and complete with respect* （可靠性与完备性）G *to* $IncR\mathcal{L}^{-}$*s.*

Proof 可靠性由前面段落中给出的性质和命题推得。与格、融合、剩余和否定相关的规则分别由性质 1、性质 2 和 3以及命题 5 保证成立。关于完备性，只需证明对于任意序列 $\alpha \Rightarrow \beta$，若 $\nvdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$，则 $\nvDash_{IncR\mathcal{L}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$。这可以通过标准构造证明。令 $[\![\alpha]\!] = \{\beta \mid \vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Leftrightarrow \beta\}$。令 A 为所有 $[\![\alpha]\!]$ 的集合。定义 $\wedge', \vee', \cdot', \backslash', \neg'$ 如下：

$$[\![\alpha_1]\!] \wedge' [\![\alpha_2]\!] = [\![\alpha_1 \wedge \alpha_2]\!] \quad [\![\alpha_1]\!] \vee' [\![\alpha_2]\!] = [\![\alpha_1 \vee \alpha_2]\!]$$

$$[\![\alpha_1]\!] \cdot' [\![\alpha_2]\!] = [\![\alpha_1 \cdot \alpha_2]\!] \quad [\![\alpha_1]\!] \backslash' [\![\alpha_2]\!] = [\![\alpha_1 \backslash \alpha_2]\!]$$

$$\neg'[\![\alpha]\!] = [\![\neg\alpha]\!]$$

显然，根据定义 3，$\mathbf{A} = (A, \wedge', \vee', \cdot', \backslash', \neg')$ 是一个 $Inc\mathcal{RL}^{-}$。格序定义为 $[\![\alpha_1]\!] \leq' [\![\alpha_2]\!]$ 当且仅当 $[\![\alpha_1]\!] \wedge' [\![\alpha_2]\!] = [\![\alpha_1]\!]$。因此，$[\![\alpha_1]\!] \leq' [\![\alpha_2]\!]$ 当且仅当 $\vdash_G \alpha_1 \Rightarrow \alpha_2$。定义一个赋值 σ: 变量集 $\longrightarrow A$，使得 $\sigma(p) = [\![p]\!]$。通过对公式的复杂度进行归纳，可以证明，对于某些公式 α，有 $\widehat{\sigma}(\alpha) = [\![\alpha]\!]$。假设 $\vdash_{Inc\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$。那么在 A 中，$\widehat{\sigma}(\alpha) \leq \widehat{\sigma}(\beta)$。因此 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \beta$，这就导出了矛盾。证明至此完成。□

我们定义一个此前提到过的新系统：带准对合否定的交换剩余格序半群的序列演算。该演算就是省略 $\neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ 的 G，记作 qG。它是 G 的直觉主义对应系统。接下来，我们将介绍 Kolmogorov 翻译，并展示 G 与 qG 之间的可嵌入性结果。请注意，Galatos 和 Ono [24] 证明了，对于 FL 的每个对合扩张，都存在一个 FL 的最小扩张，使得前者可通过双重否定解释嵌入其中。

推论 **1** *$InFL_e^{-}$ is sound and complete with respect to $Inc\mathcal{RL}^{-}$.*

定义7（柯尔莫哥洛夫翻译）柯尔莫哥洛夫翻译是一个函数ko： $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$，其归纳定义如下:

(1) $ko(\alpha) = \neg\neg\alpha$，若 α 是原子的;
(2) $ko(\alpha \wedge \beta) = \neg\neg(ko(\alpha) \wedge ko(\beta))$; (
3) $ko(\alpha \vee \beta) = \neg\neg(ko(\alpha) \vee ko(\beta))$; (4)
$ko(\neg\alpha) = \neg ko(\alpha)$; (5) $ko(\alpha \cdot \beta) = \neg\neg$
$(ko(\alpha) \cdot ko(\beta))$; (6) $ko(\alpha \backslash \beta) = \neg\neg(ko(\alpha)$
$\backslash ko(\beta))$。

引理 **1** *For every formula α, $\vdash_{\mathsf{qG}} ko(\neg\neg\alpha) \Rightarrow ko(\{v5)$。*

Proof 有 $ko(\neg\neg\alpha) = \neg\neg ko(\alpha)$ 根据定义 7. 令 $ko(\alpha) = \neg\beta$ 为某个公式
β 1 $\vdash_{\mathsf{G}} \neg\neg\neg\beta \Rightarrow \neg\beta$ $\vdash_{\mathsf{G}} ko\ \neg\neg\alpha \Rightarrow$。根据 (DN) 和
$ko\ \alpha$
(MN)，有。因此，有 ( ) ( )。 □

引理 **2** $\vdash_{\mathsf{qG}} ko\ \alpha \Rightarrow ko\ \beta$ *iff* $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$ *where ko is the Kolmogorov* ( ) ( ) ( )
translation.

Proof 从左到右：假设 $\vdash_{\mathsf{qG}} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$，由于 G 是 qG 的扩展，因此有 $\vdash_{\mathsf{G}} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。由于 G 中双重否定成立，因此有 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$。

从右到左：假设 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$，我们通过对推导长度 n 进行归纳法来证明这一方向。设 n=0，则 $\alpha \Rightarrow \beta$ 是 (恒等公理) 的一个实例。因此有 $\alpha = \beta$。设 $\alpha = \neg\neg\alpha'$，则有 $\vdash_{\mathsf{qG}} ko(\neg\neg\alpha')$ $\Rightarrow ko(\alpha')$，由引理 1可得。因此

当 n=0 时，断言 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$ 成立。假设 n¿0，并设序列 $\alpha \Rightarrow \beta$ 由任意规则 (R) 得出，则有以下几种情况:

(1) (R) 为 (Cut)。设前提为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \gamma$ 和 $\vdash_G \gamma \Rightarrow \beta$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\gamma)$ 和 $\vdash_{qG} ko(\gamma) \Rightarrow ko(\beta)$。根据 (Cut)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。(2) (R) 为 (RES\)。设前提为 $\vdash_G \alpha \cdot \beta \Rightarrow \gamma$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha \cdot \beta) \Rightarrow ko(\gamma)$。根据 (DN1)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \cdot ko(\beta) \Rightarrow \neg\neg(ko(\alpha) \cdot ko(\beta))$。应用 (Cut)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \cdot ko(\beta) \Rightarrow ko(\gamma)$。接着，根据 (RES\)，有 $\vdash_{qG} ko(\beta) \Rightarrow ko(\alpha) \backslash ko(\gamma)$。由于根据 (DN1) 有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \backslash ko(\gamma) \Rightarrow \neg\neg(ko(\alpha) \backslash ko(\gamma))$，根据 (Cut) 可得 $\vdash_{qG} ko(\beta) \Rightarrow \neg\neg(ko(\alpha) \backslash ko(\gamma))$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\beta) \Rightarrow ko(\alpha \backslash \gamma)$。(3) (R) 为 (RES^{-}\)。设前提为 $\vdash_G \beta \Rightarrow \alpha \backslash \gamma$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\beta) \Rightarrow ko(\alpha \backslash \gamma)$。根据性质6中的 (DN\)，有 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\alpha) \backslash ko(\gamma)) \Leftrightarrow ko(\alpha) \backslash ko(\gamma)$。应用 (RES^{-}\) 和 (Cut)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \cdot ko(\beta) \Rightarrow ko(\gamma)$。应用 (¬′)，有 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\alpha) \cdot ko(\beta)) \Rightarrow \neg\neg ko(\gamma)$。由于 $\neg\neg ko(\gamma) = ko(\neg\neg\gamma)$，应用 (Cut) 和引理 1，有 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\alpha) \cdot ko(\beta)) \Rightarrow ko(\gamma)$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha \cdot \beta) \Rightarrow ko(\gamma)$。(4) (R) 为 (∧L)。设前提为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \beta$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。应用 (∧L)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \wedge ko(\gamma) \Rightarrow ko(\beta)$。根据性质6中的 (DN∧)，有 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\alpha) \wedge ko(\gamma)) \Rightarrow ko(\beta)$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha \wedge \gamma) \Rightarrow ko(\beta)$。

(5) (R) 是 (∧R)。设前提为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \beta$ 和 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \gamma$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$ 和 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\gamma)$。由 (∧R) 和 (DN1)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow \neg\neg(ko(\beta) \wedge ko(\gamma))$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta \wedge \gamma))$。

(6) (R) 是 (∨L)。设前提为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \beta$ 和 $\vdash_G \gamma \Rightarrow \beta$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$ 和 $\vdash_{qG} ko(\gamma) \Rightarrow ko(\beta)$。应用 (∨L)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \vee ko(\gamma) \Rightarrow ko(\beta)$。应用 (¬′)，有 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\alpha) \vee ko(\gamma)) \Rightarrow \neg\neg ko(\beta)$。由于 $\neg\neg ko(\beta) = ko(\neg\neg\beta)$，应用切割规则和引理 1 可得 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\alpha) \vee ko(\gamma)) \Rightarrow ko(\beta)$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha \vee \gamma) \Rightarrow ko(\beta)$。(7) (R) 是 (∨R)。设前提为 $\vdash_G \alpha \Rightarrow \beta$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。由 (∨R) 和 (DN1)，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow \neg\neg(ko(\beta) \vee ko(\gamma))$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta \vee \gamma)$。(8) (R) 是 (¬)。设前提为 $\vdash_G \alpha \cdot \beta \Rightarrow \neg\gamma$。根据归纳假设，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha \cdot \beta) \Rightarrow ko(\neg\gamma)$。应用切割规则，有 $\vdash_{qG} ko(\alpha) \cdot ko(\beta) \Rightarrow \neg ko(\gamma)$。应用 (¬)，有 $\vdash_{qG} ko(\gamma) \cdot ko(\beta) \Rightarrow \neg ko(\alpha)$。此外，由 (MN) 和 (¬′)，有 $\vdash_{qG} \neg\neg(ko(\gamma) \cdot ko(\beta)) \Rightarrow \neg ko(\alpha)$。因此，有 $\vdash_{qG} ko(\gamma \cdot \beta) \Rightarrow ko(\neg\alpha)$。

□

定理 8（可嵌入性）G *can be embedded into* qG。

Proof 由引理2立即可得。 □

推论 **2** *$IncR\mathcal{L}^{-}$ can be embedded into $qIncR\mathcal{L}^{-}$.*

Proof 这立即由定理 8 以及相应代数的可靠性结果得出。□

4 可判定性

本节中，我们将考虑 $IncR\mathcal{L}^{-}$ 的一个保守扩张。通过证明该扩张的序列演算具有切消去性质，我们将证明 $\mathbf{InFL}_e^{-}$ 的可判定性。

定义 8 一个代数 $\ddot{\mathbf{F}} = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, *, \rightarrow, \bot, \top)$ 是一个有界交换双剩余格序半群（记作 $cbR\mathcal{L}^{-}$），满足 $(A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash)$ 是一个 $cR\mathcal{L}^{-}$，且 $(A, \wedge, \vee, *, \rightarrow)$ 是一个交换剩余格序群胚。$\bot, \top \in A$ 是 A 中的最小元和最大元。两个融合运算 $*, \cdot$ 是 A 上的运算，满足以下条件：对所有 $a, b, c \in A$:

$$\text{If}(a \cdot b) * c = \bot, \text{ then}(a \cdot c) * b = \bot.$$

定义 $\neg a = a \rightarrow \bot$，则有 $a * \neg a \leq \bot$。此外，根据以下命题，$cbR\mathcal{L}^{-}$ 确实是一个 $IncR\mathcal{L}^{-}$。

命题 **9** *The following properties still hold for $cbR\mathcal{L}^{-}$ for all $a, b, c \in A$:*

(mon) 若 $a_1 \leq b_1$ 且 $a_2 \leq b_2$，则 $a_1 * b_1 \leq a_2 * b_2$；(s
mn) 若 $a \cdot b \leq \neg c$，则 $c \cdot b \leq \neg a$，其中 b 可以是零元；
(dn1) $a \leq \neg\neg a$。

Proof

(mon) 证明与性质2 (3) 的证明相当类似。
(smn) 假设 $a \cdot b \leq \neg c$，则由 $(a \cdot b) * c \leq \neg c * c$，结合 (mon)$c \leq c$。根据定义 8，有 $c * \neg c \leq \bot$。因此有 $(a \cdot b) * c \leq \bot$。接下来根据定义 8，有 $(c \cdot b) \star a \leq \bot$，由此 $c \cdot b \leq \neg a$。因此，$a \cdot b \leq \neg c$ 蕴含 $c \cdot b \leq \neg a$。
(DN1) 证明与命题5 (DN1) 的证明相同。

□

定理 **10** *Every $qIncR\mathcal{L}^{-}$ can be extended to a $cbR\mathcal{L}^{-}$.*

*Proof*给定一个 $qIncR\mathcal{L}^{-}$，由此构造代数 $M = (A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, \neg)$。令 $\top = \bigvee A$ 为 A的最大元，$\bot = \bigwedge A$ 为 A的最小元。$*$、$\rightarrow$是定义在 A 上的运算，定义如下：

$$a * b = \begin{cases} \bot & \text{if} \quad a \leq \neg b \\ \top & \text{otherwise} \end{cases} \qquad a \rightarrow b = \begin{cases} \neg a & \text{if} \quad b \neq \top \\ \top & \text{otherwise} \end{cases}$$

那么，对于任意 a、$b \in A$，以下性质在 M 中成立：

(1) $a * b \leq c$ 当且仅当 $b \leq a \to c$；(2)
若 $(a \cdot b) * c = \bot$，则 $(a \cdot c) * b = \bot$；
(3) $a * b = b * a$；(4) $\neg a = a \to \bot$；
(5) $a * \neg a = \bot$。

(1) 假设 $a * b \leq c$，分两种情况讨论。(i) $c = \top$，则由上述构造可得 $a \to c = \top$。因此，$b \leq \top = a \to c$。(ii) $c \neq \top$，则由该构造可得 $c < \top$ 和$a \to c = \neg a$。由于 $a * b \leq c$，因此 $a * b = \bot$。接着由该构造可得 $a \leq \neg b$。因此，根据定义 3，$\neg\neg b \leq \neg a$ 和$b \leq \neg\neg b$。由此可得 $b \leq \neg a$，即 $b \leq a \to c$。假设 $b \leq a \to c$，分两种情况讨论。(i) $c = \top$，则 $a * b \leq c = \top$。(ii) $c \neq \top$，则由该构造可得 $a \to c = \neg a$。因此，$b \leq a \to c = \neg a$，根据定义 3可得 $\neg\neg a \leq \neg b$ 和 $a \leq \neg\neg a$。因此，$a \leq \neg b$，由该构造可得 $a * b = \bot$。所以$a * b \leq c$。

(2) 假设 $(a \cdot b) * c = \bot$，则根据构造，有 (i)$a \cdot \neg\neg c \leq \neg b$（由 (smn)）。由 $a \leq a$ 和 $c \leq \neg\neg c$，根据 (mon) 得到 (ii) $a \cdot c \leq a \cdot \neg\neg\neg c$。因此，由 (i) 和 (ii) 通过传递性可得 $a \cdot c \leq \neg b$。所以，根据构造有 $(a \cdot c) * b = \bot$。

(3) 考虑两种情况，(i) $a * b = \bot$，则根据上述构造 $a \leq \neg b$。因此，由 (smn) 可得 $\neg\neg b \leq \neg a$。于是 $b \leq \neg a$ 根据定义 3。此后 $b * a = \bot$ 根据构造。(ii) $a * b = \top$，假设 $b * a = \bot$，则由 (i) 可得 $a * b = \bot$，这会产生矛盾。因此，$b * a = \top$ 即 $a * b = b * a$。
(4) 根据上述构造，$a \to \bot = \neg a$。
(5) 由于 $a \to \bot \leq a \to \bot$，由 (1) 和 (4) 可得 $a * \neg a \leq \bot$。由于 $\bot \leq a * \neg a$，可得 $a * \neg a = \bot$。

因此，由 $qIncR\mathcal{L}^{-}$ 构造的代数 M 是一个 $cbR\mathcal{L}^{-}$。 □

注1 注意，在 $cbR\mathcal{L}^{-}$ 中的两个融合运算 $*$、$\cdot$ 本质上不同。$*$不满足结合律。例如，取 $(a * b) * c$ 和 $a * (b * c)$，其中 $a \leq \neg b$，但 $b \not\leq \neg c$。则有 $(a * b) * c = \bot * c = \bot$，但 $a * (b * c) = a * \top = \top$。因此，对于 $*$，$(a * b) * c \neq a * (b * c)$，这与定义 8 中 $(A, \wedge, \vee, *, \to)$ 是一个交换剩余格序群胚这一事实一致。

接下来我们将介绍记作 bFL 的 $cbR\mathcal{L}^{-}$ 逻辑。我们将证明 bFL 的切消去性质和可判定性结果。

定义9 bFL 的公式（项）集合 $\mathcal{F}$ 按如下方式归纳定义：

$$\mathcal{F} \ni \alpha ::= p \mid \alpha \cdot \beta \mid \alpha \backslash \beta \mid \alpha \wedge \beta \mid \alpha \vee \beta \mid \alpha * \beta \mid \alpha \to \beta \mid \bot$$

其中 $p \in$ 变量集。我们使用缩写 $\neg\alpha := \alpha \to \bot$ 和 $\top = \neg\bot$。

定义10 令，并且；分别是 $\cdot$ 和 $*$ 的结构对应项。所有公式结构 $\mathcal{FS}$ 的集合按如下方式归纳定义:

$$\mathcal{FS} \ni \Gamma ::= \alpha \mid \Gamma, \Gamma \mid \Gamma;\ \Gamma$$

A *sequent* 是一种形如 $\Gamma \Rightarrow \alpha$ 的表达式，其中 Γ 是一个公式结构，而 α 是一个公式。A *context* 是一个公式结构 $\Gamma[-]$，它具有一个指定位置 $[-]$，可以用公式结构填充该位置。特别地，单个位置 $[-]$ 是一个上下文。例如，$\Gamma[\Delta]$ 是由 $\Gamma[-]$ 将 Δ 替换为 $[-]$ 而得到的公式结构。用 $f(\Gamma)$ 表示将 Γ 中所有结构运算替换为相应公式联结词后得到的公式。

定义 **11** *The Gentzen-style sequent calculus* Gb *for* bFL_e^- *consists of the following axiom and rules:*

(1) 公理:

$$(\mathrm{Id})\alpha \Rightarrow \alpha$$

(2) 逻辑规则:

$$\frac{\Gamma[\alpha, \beta] \Rightarrow \gamma}{\Gamma[\alpha \cdot \beta] \Rightarrow \gamma}(\cdot\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \alpha \quad \Gamma_2 \Rightarrow \beta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \alpha \cdot \beta}(\cdot\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma[\alpha;\ \beta] \Rightarrow \gamma}{\Gamma[\alpha * \beta] \Rightarrow \gamma}(*\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \alpha \quad \Gamma_2 \Rightarrow \beta}{\Gamma_1;\ \Gamma_2 \Rightarrow \alpha * \beta}(*\mathrm{R})$$

$$\frac{\Delta \Rightarrow \alpha \quad \Gamma[\beta] \Rightarrow \gamma}{\Gamma[\Delta, \alpha \backslash \beta] \Rightarrow \gamma}(\backslash\mathrm{L}) \quad \frac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \backslash \beta}(\backslash\mathrm{R})$$

$$\frac{\Delta \Rightarrow \alpha \quad \Gamma[\beta] \Rightarrow \gamma}{\Gamma[\Delta;\ \alpha \to \beta] \Rightarrow \gamma}(\to \mathrm{L}) \quad \frac{\alpha;\ \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \to \beta}(\to \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\alpha \wedge \gamma] \Rightarrow \beta}(\wedge\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha \quad \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta}(\wedge\mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \gamma \quad \Gamma[\beta] \Rightarrow \gamma}{\Gamma[\alpha \vee \beta] \Rightarrow \gamma}(\vee\mathrm{L}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \alpha}{\Gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta}(\vee\mathrm{R})$$

$$\frac{\Delta \Rightarrow \bot}{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \alpha}(\bot)$$

(2) 切规则:

$$\frac{\Delta \Rightarrow \alpha \quad \Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\Delta] \Rightarrow \beta}(\mathrm{Cut})$$

(3) 结构 *rules:*

$$\frac{(\Delta_1, \Delta_2);\ \Delta_3 \Rightarrow \bot}{(\Delta_1, \Delta_3);\ \Delta_2 \Rightarrow \bot}(\mathrm{R}-\bot)$$

$$\frac{\Gamma[\Delta_1, \Delta_2] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\Delta_2, \Delta_1] \Rightarrow \beta}(\mathrm{Ex}) \quad \frac{\Gamma[\Delta_1;\ \Delta_2] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\Delta_2;\ \Delta_1] \Rightarrow \beta}(\mathrm{Ex}^{;})$$

$$\frac{\Gamma[\Delta_1, (\Delta_2, \Delta_3)] \Rightarrow \beta}{\Gamma[(\Delta_1, \Delta_2), \Delta_3] \Rightarrow \beta}(\mathrm{As}_1) \quad \frac{\Gamma[(\Delta_1, \Delta_2), \Delta_3] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\Delta_1, (\Delta_2, \Delta_3)] \Rightarrow \beta}(\mathrm{As}_2)$$

若存在一个在 Gb 中对 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 的推导，则序列 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 在 Gb 中是可证明的，记作 $\vdash_{\mathsf{Gb}} \Gamma \Rightarrow \beta$。如果 $\vdash_{\mathsf{Gb}} \alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\vdash_{\mathsf{Gb}} \beta \Rightarrow \alpha$，我们记作 $\vdash_{\mathsf{Gb}} \alpha \Leftrightarrow \beta$。由于 , 和 ; 满足交换律和结合律，因此交换规则和结合律规则在 Gb 中都是可容许的。此后，我们通常会省略推导中这些规则的应用。

定理 **11** *is sound and complete with respect* （可靠性与完备性）qG *to* $cbR\mathcal{L}^{-}$ *s.*

定理 **12** $\vdash_{\mathsf{Gb}} \Gamma \Rightarrow \beta$ *iff* $\vdash_{\mathsf{Gb}} \Gamma \Rightarrow \beta$ *without any application* （切消去）（切割规则） *of rule.*

Proof 证明与定理 7类似。 □

Proof 假设存在一个以如下（切割规则）应用结束的 $\Gamma \Rightarrow \beta$ 子推导：

$$\frac{\vdash \Delta \Rightarrow \alpha \quad \vdash \Sigma[\alpha] \Rightarrow \beta}{\vdash \Sigma[\Delta] \Rightarrow \beta}(\mathrm{Cut})$$

我们只需证明：若 $\Delta \Rightarrow \alpha$ 和 $\Sigma[\alpha] \Rightarrow \beta$ 均可在不使用（切割规则）的情况下于 Gb 中证明，则 $\Sigma[\alpha] \Rightarrow \beta$ 可在不使用（切割规则）的情况下于 G′ 中证明。我们对（I）切割规则公式 α的复杂度进行归纳。对每种情形，我们再对（II）切割规则两个前提的长度之和进行归纳。假设 $\Delta \Rightarrow \alpha$ 由（R_l）得到，而 $\Sigma[\alpha] \Rightarrow \beta$ 由（R_r）得到。具体细节参见标准的切消去证明。

(1) α 不是由（R_l）引入的。我们先对（R_l）的前提和 $\Sigma[\alpha] \Rightarrow \beta$应用（切割规则），以此变换该推导。之后，对所得序列应用（R_l）。以（∨L）为例说明这一点。其余情形可用类似方法处理。

（R_l) 是（∨L）。那么 $\Delta = \Gamma[\alpha \vee \beta]$, $\alpha = \gamma$。假设该推导以此结束：

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \gamma \qquad \Gamma[\beta] \Rightarrow \gamma}{\Gamma[\alpha \vee \beta] \Rightarrow \gamma}(\vee \mathrm{L}) \qquad \Sigma[\gamma] \Rightarrow \theta}{\Sigma[\Gamma[\alpha \vee \beta]] \Rightarrow \theta}(\mathrm{Cut})$$

可以转换为

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \gamma \qquad \Sigma[\gamma] \Rightarrow \theta}{\Sigma[\Gamma[\alpha]] \Rightarrow \theta}(\mathrm{Cut}) \qquad \dfrac{\Gamma[\beta] \Rightarrow \gamma \qquad \Sigma[\gamma] \Rightarrow \theta}{\Sigma[\Gamma[\beta]] \Rightarrow \theta}(\mathrm{Cut})}{\Sigma[\Gamma[\alpha \vee \beta]] \Rightarrow \theta}(\vee \mathrm{L})$$

因此，前提中的（切割规则）应用具有较短长度。由归纳假设（II）可知，结论成立。

我们特别考虑 (R_l) 为 (R $-\bot$) 的情形，假设推导以如下内容结束：

$$\dfrac{\dfrac{(\Delta_1,\Delta_2);\ \Delta_3\Rightarrow\bot}{(\Delta_1,\Delta_3);\ \Delta_2\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{R}-\bot)\qquad \Sigma[\bot]\Rightarrow\beta}{\Sigma[(\Delta_1,\Delta_3);\ \Delta_2]\Rightarrow\beta}\,(\mathrm{Cut})$$

可转换为：

$$\dfrac{\dfrac{(\Delta_1,\Delta_2);\ \Delta_3\Rightarrow\bot}{(\Delta_1,\Delta_3);\ \Delta_2\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{R}-\bot)}{\Sigma[(\Delta_1,\Delta_3);\ \Delta_2]\Rightarrow\beta}\,(\bot)$$

显然，这是无切的，因此结论成立。

(2) α 仅由 (R_l) 引入。我们首先对 (R_r) 的前提和 $\Delta\Rightarrow\alpha$ 应用（切割规则），以此变换该推导。之后，我们对所得序列应用 (R_r)。以 Take(\L) 为例来说明这一点。其余情况可以类似处理。(R_r) 是 (\L)，那么 $\Sigma[\alpha]=\Gamma[\Theta[\alpha],\beta\backslash\gamma]$，$\beta=\theta$。假设该推导以如下形式结束：

$$\dfrac{\Delta\Rightarrow\alpha\qquad\dfrac{\Theta[\alpha]\Rightarrow\beta\qquad\Gamma[\gamma]\Rightarrow\theta}{\Gamma[\Theta[\alpha],\beta\backslash\gamma]\Rightarrow\theta}\,(\backslash\mathrm{L})}{\Gamma[\Theta[\Delta],\beta\backslash\gamma]\Rightarrow\theta}\,(\mathrm{Cut})$$

可转换为

$$\dfrac{\dfrac{\Delta\Rightarrow\alpha\qquad\Theta[\alpha]\Rightarrow\beta}{\Theta[\Delta]\Rightarrow\beta}\,(\mathrm{Cut})\qquad\Gamma[\gamma]\Rightarrow\theta}{\Gamma[\Theta[\Delta],\beta\backslash\gamma]\Rightarrow\theta}\,(\backslash\mathrm{L})$$

因此，新应用的（切割规则）的前提长度更短。根据归纳假设（II），结论成立。

我们特别考虑 (R_r) 为 ($\mathrm{R}\ -\bot$) 的情况。如果 α 属于 Δ_1，假设推导以如下形式结束：

$$\dfrac{\Delta\Rightarrow\alpha\qquad\dfrac{(\Delta_1[\alpha],\Delta_2);\ \Delta_3\Rightarrow\bot}{(\Delta_1[\alpha],\Delta_3);\ \Delta_2\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{R}-\bot)}{(\Delta_1[\Delta],\Delta_3);\ \Delta_2\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{Cut})$$

可以转化为：

$$\dfrac{\Delta\Rightarrow\alpha\qquad(\Delta_1[\alpha],\Delta_2);\ \Delta_3\Rightarrow\bot}{\dfrac{(\Delta_1[\Delta],\Delta_2);\ \Delta_3\Rightarrow\bot}{(\Delta_1[\Delta],\Delta_3);\ \Delta_2\Rightarrow\bot}\,(\mathrm{R}-\bot)}\,(\mathrm{Cut})$$

因此，(切割规则) 的新应用中，其右侧前提的长度更短。根据归纳假设（II），结论成立。其他情况也非常类似，这里略去。

(3) α 在两个前提中均有引入。我们先对（R_l）和（R_r）的前提应用（切割规则），从而转换该推导。之后，我们对

所得序列应用（切割规则）。以（R_l） = （∧R）、（R_r） = （∧L）以及（R_l） = （\R）、（R_r） = （\L）为例说明这一点。其余情况可类似处理。

(R_l) 是 (∧R)，那么 $\Delta = \Gamma, \alpha = \alpha \wedge \beta$。假设推导以如下内容结束：

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Gamma \Rightarrow \beta}{Ga \Rightarrow \alpha \wedge \beta}\,(\wedge R) \qquad \dfrac{\Theta[\alpha] \Rightarrow \gamma}{\Theta[\alpha \wedge \beta] \Rightarrow \gamma}\,(\wedge L)}{\Theta[\Gamma] \Rightarrow \gamma}\,(\mathrm{Cut})$$

可以转换为

$$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \alpha \qquad \Theta[\alpha] \Rightarrow \gamma}{\Theta[\Gamma] \Rightarrow \gamma}\,(\mathrm{Cut})$$

(R_l) 是 (\R)，那么 $\Delta = \Gamma, \alpha = \alpha \backslash \beta$。假设推导以如下内容结束：

$$\dfrac{\dfrac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta}{\Gamma \Rightarrow \alpha \backslash \beta}\,(\backslash \mathrm{R}) \qquad \dfrac{\Theta \Rightarrow \alpha \qquad \Sigma[\beta] \Rightarrow \gamma}{\Sigma[\Theta, \alpha \backslash \beta] \Rightarrow \gamma}\,(\backslash \mathrm{L})}{\Sigma[\Theta, \Gamma] \Rightarrow \gamma}\,(\mathrm{Cut})$$

可以转换为

$$\dfrac{\dfrac{\alpha, \Gamma \Rightarrow \beta \qquad \Sigma[\beta] \Rightarrow \gamma}{\Sigma[\alpha, \Gamma] \Rightarrow \gamma}\,(\mathrm{Cut}) \qquad \Theta \Rightarrow \alpha}{\Sigma[\Theta, \Gamma] \Rightarrow \gamma}\,(\mathrm{Cut})$$

因此，第一次和第二次应用切割规则时，切割规则公式的复杂度都低于原公式。由归纳假设 (I)，结论成立。□

推论3（子公式性质） *If* $\vdash_{\mathsf{Gb}} \Gamma \Rightarrow \alpha$, *then there exists a derivation of* $\Gamma \Rightarrow \alpha$ *in* *such that all formulas appearing in the proof are subformulas of* Gb *formulae appearing in* $\Gamma \Rightarrow \alpha$.

Proof 这直接由定理12得出。 □

定义12 我们将序列 $\Gamma \Rightarrow \alpha$ 的长度定义为其中公式的数量，记为 $l(\Gamma \Rightarrow \alpha)$。

定理13（可判定性）Gb *is decidable.*

Proof 从 Gb 中的所有规则可以看出，前提序列的长度 $l(\Gamma \Rightarrow \alpha)$ 小于或等于结论序列的长度，唯独（切割规则）规则除外。于是，根据 K¨onig 引理（参见 [25]）和定理 12，在任何以 $\Gamma \Rightarrow \alpha$

为末序列的推导中，都存在长度更小的序列，这意味着 $\Gamma \Rightarrow \alpha$ 的搜索空间是有限的。因此，我们得出结论：Gb 是可判定的。□

定理 **14** *for any sequent* $\alpha \Rightarrow \beta$ $\vdash_{\mathsf{qG}} \alpha \Rightarrow \beta$ *iff*（保守扩张）qG，$\vdash_{\mathsf{Gb}} \alpha \Rightarrow \beta$.

Proof 根据定理 7，$\vdash_{\mathsf{qG}} \alpha \Rightarrow \beta$ 当且仅当 $\vDash_{qInc\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$。而根据定理 11，$\vdash_{\mathsf{Gb}} \alpha \Rightarrow \beta$ $\vDash_{cb\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$ $\vDash_{qInc\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$ 当且仅当。因此只需证明当且仅当 $\vDash_{cb\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$。从左到右的方向显然，因为每个 $cb\mathcal{RL}^{-}$ 都是一个 $qInc\mathcal{RL}^{-}$。反过来，假设 $\nvDash_{qInc\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$，那么根据定理 10，可得到一个 $cb\mathcal{RL}^{-}$ $\mathcal{M}$ 使得 $\nvDash_{\mathcal{M}} \alpha \Rightarrow \beta$。因此 $\nvDash_{cb\mathcal{RL}^{-}} \alpha \Rightarrow \beta$。证明完毕。□

定理 15（可判定性）qG *is decidable.*

Proof 由于 qG 是 Gb 的保守扩张（根据定理 14），且 Gb 根据定理 13 是可判定的，因此 qG 是可判定的□

推论 4 G *is decidable*

Proof 由引理 1 和定理 15直接得出。□

推论 **5** $InFL_e^{-}$ *is decidable.*

若省略规则 (∗L) 和 (∗R)，并将 (→L)、(→R) 替换为以下否定规则，

$$\frac{\Delta \Rightarrow \alpha}{\Delta;\ \neg\alpha \Rightarrow \bot}(\neg\mathrm{L}) \quad \frac{\alpha;\ \Gamma \Rightarrow \bot}{\Gamma \Rightarrow \neg\alpha}(\neg\mathrm{R})$$

于是得到 qInFL_e^{-} 的序列演算，记作 ($\mathsf{qG_c}$)。显然，(¬L) 和 (¬R) 分别是 (→L) 和 (→R) 的实例。因此，$\mathsf{qG_c}$ 中保有切消去和子公式性质。在 $\mathsf{qG_c}$ 的无切系统中加入以下两条规则，即得到 G 的无切系统，记作 $\mathsf{G_c}$。

$$\frac{\Gamma[ko(\alpha)] \Rightarrow \beta}{\Gamma[\alpha] \Rightarrow \beta}(\mathrm{koL}) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow ko(\alpha)}{\Gamma \Rightarrow \alpha}(\mathrm{koR})$$

定理 **16** *For any sequent* $\alpha \Rightarrow \beta$, *if* $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$, *then* $\vdash_{\mathsf{G_c}} \alpha \Rightarrow \beta$.

Proof 令 $\vdash_{\mathsf{G}} \alpha \Rightarrow \beta$。于是 $\vdash_{\mathsf{qG}} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。因此 $\vdash_{\mathsf{Gb}} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。由此$\vdash_{\mathsf{qG_c}} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。所以 $\vdash_{\mathsf{G_c}} ko(\alpha) \Rightarrow ko(\beta)$。进而由 (koL) 和 (koR)，$\vdash_{\mathsf{G_c}} \alpha \Rightarrow \beta$。□

尽管系统 $\mathsf{G_c}$ 中包含额外的结构算子 ;，$\mathsf{G_c}$ 可以看作带有 $\top$、$\bot$ 的 InFL_e^- 无切序列演算。这是因为任何 InFL_e^- 有效序列都可在 $\mathsf{G_c}$ 中证明。这一思路受到无乘积兰贝克演算的无切序列演算的启发。

5 结论与未来工作

我们研究了带有对合否定的交换剩余格序半群，并讨论了这些代数的简单序列演算。我们证明了逻辑 InFL_e^- 的可靠性与完备性，建立了一项标准的双重否定翻译结果。此外，我们还研究了相应逻辑的可判定性结果。最后，我们设计了一种无切序列演算，用常量 $\top$、$\bot$ 丰富 InFL_e^-。我们的结果可以推广到交换剩余格序半群中的极小否定。另一个有趣的问题是，能否将这些结果推广到带有德摩根否定的交换剩余格序半群。

致谢

TBA.

声明

- 经费支持：本研究由中央高校基本科研业务费项目资助，项目编号为2072021107。

- 利益冲突：作者声明不存在利益冲突。
- 伦理审批：不适用。
- 参与知情同意：不适用。
- 发表同意：不适用。
- 数据和材料的可用性：不适用。
- 代码可用性：不适用。
- 作者贡献：待定。

参考文献

[1]Krull, W.：一般理想理论的公理化基础。埃朗根物理医学学会会报**56**，47–63（1924）[2] Dilworth, R.P.：格上的抽象剩余。美国数学会通报**44**，262–268（1938）。[CrossRef]

ty[3] Ward, M.：结构上的剩余运算，其中定义了乘法。Duke Math. J. (1937)。 [CrossRef[4]Lambek, J.：句子结构的数学。《美国数学月刊》65(3)，154–170 (1958)。 [CrossRef[5] Kanazawa, M.：加入额外联结词的兰贝克演算。《逻辑、语言与信息期刊》1，141–171 (1992)。[CrossRef[6] Buszkowski, W.：兰贝克演算与次结构逻辑。《语言分析》36(1)，15 (2006)[7] Galatos, N., Raftery, J.G.：为剩余结构添加对合。Studia Logica 77，181–207 (2004)。[CrossRef[8] Jenei, S., Ono, H.：关于带对合的 FL e-幺半群。《数学逻辑档案》51，719–738 (2012)。 [CrossRef[9] Dunn, J.M.：各种否定模型论处理的比较研究：形式否定史。《什么是否定？》，23–51 (1999)。[CrossRef[10] Kolmogoroff, A.：论直觉逻辑的解释。《数学杂志》35，58–65 (1932)。 [CrossRef[11] Johansson, I.：最小演算：一种简化的直觉主义形式体系。CompositioMathematica 4，119–136 (1936) [12] Bialynicki-Birula, A., Rasiowa, H.：关于准布尔代数的表示。《波兰科学院通报》Cl. III 5(5)，259–261 (1957)。[CrossRef[13] Moisil, G.C.：关于逻辑代数的研究。雅西大学科学年刊 22，1–117 (1935)[14] Kalman, J.A.：带对合格。《美国数学会会刊》87(2)，485–491 (1958)。[CrossRef[15] Schroeder-Heister, P.J., Doˇsen, K.：次结构逻辑。牛津大学出版社，牛津，英格兰 (1993)[16] Restall, G.：《次结构逻辑导论》。劳特利奇出版社，伦敦，英格兰 (2002)。[CrossRef[17]Galatos, N., Jipsen, P., Kowalski, T., Ono, H.：《剩余格：次结构逻辑的代数概览》。爱思唯尔，阿姆斯特丹，荷兰 (2007)。 [CrossRef]

[18] Kozak，M.：分配完全 Lambek 演算具有有限模型性质。Studia Logica 91，201–216（2009）。[CrossRef][19] Buszkowski，W.：剩余代数逻辑的插值与有限嵌入性质。Logic Journal of IGPL 19(3)，437–454（2011）。[CrossRef][20] Galatos，N.，Jipsen，P.：剩余框架及其在可判定性中的应用。《美国数学会会刊》365(3)，1219–1249（2013）。[CrossRef][21] Buszkowski，W.：论经典非结合兰贝克演算。载于：计算语言学的逻辑方面：庆祝 LACL 成立 20 周年（1996–2016）第九届国际会议 LACL 2016 论文集，法国南锡，2016年12月5日至7日，第68–84页（2016）。Springer。[CrossRef][22] Lin，Z.，Chakraborty，M.K.，Ma，M.：前粗糙代数附近的剩余代数结构及其可判定性。Fundamenta Informaticae 179(3)，239–274（2021年）。[CrossRef][23] Buszkowski，W.：带有否定信息的范畴语法。载于《否定：聚焦中的概念》，第107–126页（1995）。[CrossRef][24] Galatos，N.，Ono，H.：FL 上次结构逻辑的格利文科定理。《符号逻辑杂志》71(4)，1353–1384（2006）。[CrossRef],[25] K¨onig，D.：关于从有限到无限的一种推理方法。Acta Sci. Math.（塞格德）3(2-3)，121–130（1927）