arXiv:2303.05673v1 [math.CO] 10 Mar 2023

标签正则有向树在几乎同构意义下的分类

Roman Gorazd*

2023年3月13日

摘要

本文概述了一种判断两棵标签正则有向树是否同构，以及何时几乎同构的方法。该方法将标签正则有向树重新诠释为有根图的万能覆盖。这样一来，我们便可以为每个标签正则有向树的同构类关联一个唯一的图。此外，通过考察图幺半群，我们可以验证两个展开图何时会生成几乎同构的展开树，从而对几乎同构意义下的展开树进行分类。

亮点

- 证明何时两个有向图的展开树可通过非边塌缩等价关系同构。
- 利用图幺半群证明何时两个有向图的展开树几乎同构
- 猜想一个对具有两个顶点的图的展开树进行显式分类的结果。

*纽卡斯尔大学

1 引言

在全不连通局部紧群的研究中，最重要的例子之一是作用在树上的群。在全不连通局部紧群的研究中，经常考察的一类树是标签正则树，即带有一种着色的树，其中两个同色顶点的邻域具有相同的着色方式。当我们考察从根向外定向的有根树，并施加相同条件，但只考察出邻域时，便得到标签正则有向树这一类；事实上，它包含标签正则树（无论采用何种定向）。这一对定义的修改使我们更容易确定树上几乎自同构的结构，也使我们能够将它们描述为有向图的展开树。

图的有限深度展开树是研究神经网络时常用的一种工具，参见 [10]。本文将探讨无限深度展开树，它是对 [6] 中引入的展开树的略微扩展。我们将揭示这些树的结构与相应图的图幺半群之间的联系。事实上，可以证明，图幺半群中的字问题与判定两个图的展开树何时几乎同构的问题在计算上等价。这进而使我们能够利用 [8] 的结果，估计计算两个图何时会产生几乎同构的展开树的复杂度。

群幺半群自然产生于对 Leavitt 路径代数（在 [5] 中引入）的研究，但也可以通过显式表示轻松定义。群幺半群是一个广受研究的课题 [1],[7] ，相关研究常常关注这一概念的扩展[3]。

在后续论文中，我将运用本文介绍的工具，研究这些树的几乎自同构群和 Higman-Thompson 群，以及它们在边界上的作用。

本文的主要目标是对标签正则有向树按同构和几乎同构进行分类。为此，我们指出，任意标签正则有向树都是某个有根图的展开树。现在，为了按同构对标签正则有向树进行分类，我们将考察图上的非边塌缩等价关系（即在等价顶点的邻域之间诱导双射的关系），并指出，对其取商不会改变展开结构。

定理 1. 两个有根图 G, H 的展开树同构，当且仅当分别在 G, H 上存在两个非边塌缩等价关系 $\sim_G, \sim_H$，使得 $G/\sim_G$ 和 $H/\sim_H$ 有根同构。

因此，每个标签正则有向树都同构于某个唯一（在同构意义下）且不存在非边塌缩等价关系的图（非冗余图）的展开树。

为了将一个图化简为产生相同展开树的非冗余图，我们可以应用 [2] 中所述的 nauty 算法第一阶段，并对得到的划分进行因子化。

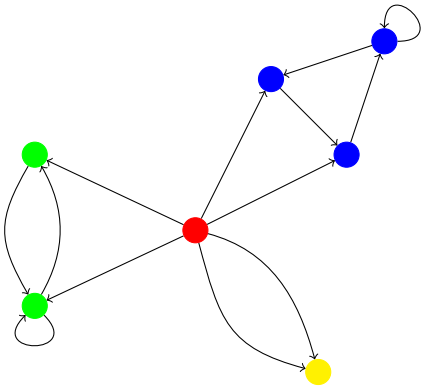


图1：由3个图（顶点分别为绿色、黄色和蓝色）与一个红色根构成的蜘蛛积的一个例子

这使我们只需考察非冗余图的展开树。将这些树按几乎同构分类时，关键在于注意：同一图中以不同顶点为根的两棵展开树几乎同构，当且仅当它们的根在图幺半群中相等。图幺半群与展开树几乎结构之间的这种对应关系，是对标签正则有向树进行几乎同构分类所需的关键洞见。为了利用这一洞见，我们注意到，对于稳健根图，如果展开树几乎同构，那么底层图也同构（但不一定有根同构）。

这两个结果使我们能够对强健根化图的展开树进行分类。我们可以通过注意到以下事实将其推广到所有图：

定理2. 对于任意有根图 G，存在 $G_1, \ldots, G_n$ 个鲁棒图，满足 $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$，以及函数 $\rho_1, \ldots, \rho_n$，使得蜘蛛积：

$$\langle\!\langle (G_1, k_1, \rho), \ldots, (G_n, k_n, \rho_n) \rangle\!\rangle$$

有一棵与 G 几乎同构的树

这里，蜘蛛积将多个图连接到同一个根上，如图1所示。因此，我们只需考察鲁棒图的蜘蛛积。首先注意到，如果它们的展开树几乎同构，我们可以假设它们具有相同的分量图；这是因为，若强健根化图的展开树几乎同构，则这些图同构。此外，我们还可以看到：

定理 3. 对于任意两个鲁棒图的非冗余蜘蛛积：

$$(G_\rho, S_\rho) := \langle\!\langle (G_1, \rho_1.k_1), \ldots, (G_n, \rho_n.k_n) \rangle\!\rangle$$
$$(G_\sigma, S_\sigma) := \langle\!\langle (G_1, \sigma_1.l_1), \ldots, (G_n, \sigma_n.l_n) \rangle\!\rangle$$

那么，T (G_ρ, S_ρ) 和 T (G_σ, S_σ) 几乎同构，当且仅当对每个$m \in \{1, \ldots, n\}$，都有：

$$\sum_{i=1}^{k_m} \rho_m(i) = \sum_{j=1}^{l_m} \sigma_m(j)$$

在 G_m 的图幺半群中。

通过考察连通鲁棒图的每个蜘蛛积，并检查上述定理中的和何时相等，我们便可以对所有展开树按几乎同构进行分类。

2 基本定义

本文将探讨标签正则有向树（l.r.d. 树）的结构。这类树是标签正则树概念的扩展，可用带有多重边的有向图来描述。这种描述将使我们能够更好地刻画其几乎自同构群。

本文将以非常宽泛的方式定义图：图 G 是一个四元组 (V, E, o, t)，其中 V 和 E 是集合（分别由顶点和边构成），而 o、t 是从 E 到 V 的函数，分别表示边的起点和终点。若 G 的基数有限且 V 和 E 的基数有限，则称 G 为有限图。

$H = (VH, EH, o_H, t_H)$ 是 $G = (VG, EG, o_G, t_G)$ 的一个子图，它是满足以下条件的图：

$$VH \subseteq VG$$
$$EH \subseteq EG$$
$$o_H = o_G|_{EH}$$
$$t_H = t_G|_{EH}$$

两个子图 H_1, H_2 的并集是一个顶点集为 $VH_1 \cup VH_2$、边集为 $EH_1 \cup EH_2$ 的子图，我们将其记为 $H_1 \cup H_2$。交集 $H_1 \cap H_2$ 的定义类似。若子图 H 满足以下条件，我们称其为顶点诱导的：

$$EH = \{e \in EG \mid o_G(e), t_G(e) \in VH\}$$

两个图 $G = (V, E, o, t)$ 和 $G' = (V', E', o', t')$ 之间的图同态 ϕ 由两个函数 $\phi_V : V \to V'$ 和 $\phi_E : E \to E'$ 组成，使得：

$$\forall e \in E \begin{cases} o'(\phi_E(e)) = \phi_V(o(e)) \\ t'(\phi_E(e)) = \phi_V(t(e)) \end{cases}$$

如果 ϕ_V 和 ϕ_E 都是单射或满射，则分别称 ϕ为单射或满射；如果 ϕ_V 和 ϕ_E 是双射，则称 ϕ 为同构。对于两个同构图 G 和 H，我们记作 $G \cong H$。对于任意图，我们将某个顶点 $v \in V$的出边邻域和入边邻域定义如下：

$$E_o(v) := \{e \in E \mid o(e) = v\}$$
$$E_t(v) := \{e \in E \mid t(e) = v\}$$

顶点的出度和入度分别定义如下：

$$d_o(v) := |E_o(v)|$$
$$d_t(v) := |E_t(v)|$$

由此我们也可以定义入邻域和出邻域：

$$N_o(v) := t[E_o(v)]$$
$$N_t(v) := o[E_t(v)]$$

如果 $E_o(v) = \varnothing$，我们称 v 为汇点；如果 $E_t(v) = \varnothing$，则称其为源点。
现在我们将 G 上的游走空间定义为：

$$\mathcal{W}(G) := \{e_1 \dots e_n \in E^* \mid \forall 1 \le i < n,\ t(e_i) = o(e_{i+1})\} \cup \{\epsilon_v \mid v \in VG\}$$

其中 ϵ_v表示 v上的空游走。对于任意非空游走 $p = e_1 \dots e_n$，定义 $O(p) := o(e_1)$，并且 $T(p) := t(e_n)$；此外，p 的长度为$|p| := n$。对于空游走 ϵ_v，我们定义 $O(\epsilon_v) := v =: T(\epsilon_v)$，且 $|\epsilon_v| := 0$。
如果一个图 G 存在两个非空子图 H_1, H_2，使得 $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ 且 $H_1 \cup H_2 = G$，则称其为非连通图。若不属于这种情况，则称该图 G连通。

当且仅当对于任意两个顶点 $v_1, v_2 \in V$，存在游走 $p_1, p_2 \in \mathsf{W}(G)$，使得 $T(p_1) = v_1$, $T(p_2) = v_2$且 $O(p_1) = O(p_2)$，图才是星连通的。若总能选择 p_1, p_2，使得 $O(p_1) = O(p_2) = S$，我们就称这样的图有一个根 $S \in V$。有根图是一个二元组 (G, S)，其中 G 是图，S 是它的根。若存在图同构 $\phi : G \to H$，满足 $\phi(S) = R$，则称两个有根图 (G, S) 和 (H, R) 有根同构，记作 $(G, S) \cong_R (H, R)$。对于任意顶点 $x \in VG$，定义从 x 出发的出图：$G_x := (V_x, E_x, o_x, t_x)$，其中：

$$V_x := \{x\} \cup \{y \in V \mid \exists p \in \mathcal{W}(G),\ O(p) = y \wedge T(p) = x\}$$
$$E_x := \{e \in E \mid o(e), t(e) \in V_x\}$$
$$o_x := o|_{E_x}$$
$$t_x := t|_{E_x}$$

注意，对于任何这样的图，x 都是一个自然根。我们称两个顶点x、$y \in V$出等价（记作 $x \sim_o y$），当且仅当：

$$(G_x, x) \cong_R (G_y, y)$$

当且仅当对于任意非空游走 $p \in \mathrm{W}(G)$，都有 $O(p) \neq T(p)$ 时，我们称一个图是无环的。

如果对于任意 e_1、$e_2 \in E$，图 G 都不存在冲突，则称该图没有冲突：

$$t(e_1) = t(e_2) \implies e_1 = e_2$$

因此，我们将有向树定义为没有冲突的星形连通无环图。如果树有一个根，我们就称其为有根树（注意，这样的根总是唯一的，因此树之间的任何同构都是保根的）。

如果 VG 和 EG 都是有限集，我们就称图 G 是有限的。现在我们已经定义了图和树，可以通过三种不同的方式定义标签正则有向树：

定义 1. 如果存在某个有限集 M 和某个函数 $l : V\mathrm{T} \to M$，使得对于任意 $m \in M$：则称有根树 $\mathrm{T} = (V\mathrm{T}\ E\mathrm{T}\ o_{\mathcal{T}},\ t_{\mathcal{T}})$ 是标签正则的。

$$\forall v, w \in V\mathcal{T}\ (l(v) = l(w)) \implies |\{u \in N_o(v) \mid l(u) = m\}| = |\{u \in N_o(w) \mid l(u) = m\}|$$

注意，这个定义不同于无向标签正则树的定义；后者是一个概括性较弱的概念。

定义 2. 对于一棵有根树 T，当且仅当满足以下条件时，我们称其为标签正则的：

$$|\{[x]_{\sim_o} \mid x \in V\mathcal{T}\}| < \infty$$

作为最后一个定义，我们对任意有根图 (G, S)，定义从 S 开始的游走空间：$\mathrm{W}(G, S) := \{w \in \mathrm{W}(G) \mid O(w) = S\}$。通过如下定义图 $\mathrm{T}(G, S)$，我们可以赋予这个集合一个图结构：

$$\begin{aligned} V\mathcal{T}(G,S) &:= \mathcal{W}(G,S) \\ E\mathcal{T}(G,S) &:= \{(w, we) \in \mathcal{W}(G,S) \mid w, we \in \mathcal{W}(G,S), e \in EG\} \\ \forall (w, we) \in E\mathcal{T}(G,S),\ o_{\mathcal{T}}((w,we)) &:= w \text{ and } t_{\mathcal{T}}((w,we)) := we \end{aligned}$$

显然，这是一个以 ε_S 为根的有根树。

定义 3. 有根树 $(\mathrm{T}\ \ \epsilon)$ 是标签正则的，如果存在某个有限有根图 (G, S)，使得

$$(\mathcal{T}, \epsilon) \cong_R (\mathcal{T}(G,S), \epsilon_S)$$

定理4. 上述三个定义等价

证明. 为了证明上述定理中的三个定义等价，我们将证明定义 2 蕴含定义 1，定义 1 蕴含定义 3，而定义 3 又反过来蕴含定义 2。

对于第一个蕴含，我们将取一棵有根树 T，使得

$$|\{[x]_{\sim_o} \mid x \in V\mathcal{T}\}| < \infty$$

然后，我们通过设定 $l(x) := [x]_{\sim_o}$（对任意顶点 x），来定义 $M := \{[x]_{\sim_o} \mid x \in V\mathsf{T}\}$ 和 $l : V\mathsf{T} \to M$。现在，为了证明这个标记满足定义 1 中的条件，我们任取两个顶点 x, y，使得 $l(x) = l(y)$；这使我们可以固定某个有根同构 $\Psi : \mathsf{T}_x \to \mathsf{T}_y$。我们注意到 $\Psi(N_o(x)) = N_o(y)$，因为 $\Psi(x) = y$，从而得到一个双射 $\Psi|_{N_o(x)}$，其对应于 $N_o(x)$ 和 $N_o(y)$ 之间的双射。此外，我们看到 $l(z) = l(\Psi(z))$，因为 $\Psi|_{\mathcal{T}_z} : \mathsf{T}_z \to \mathsf{T}_{\Psi(z)}$ 是一个有根同构。这表明：

$$|\{z \in N_o(x) \mid l(z) = m\}| = |\{z \in N_o(y) \mid l(z) = m\}|$$

对于任意 $m \in M$。

现在，若我们有一个如定义 1 中所示的标记 $l : V\mathsf{T} \to M$，不失一般性，我们可以通过缩小 M，假设 l 是满射。对于任意 m、$n \in M$，我们可以定义 $Y_{m,n}$ 为不相交集合，使得

$$|Y_{m,n}| = |\{u \in N_o(v) \mid l(u) = n\}|$$

其中 $v \in V\mathsf{T}$ 是任意满足 $l(v) = m$ 的顶点。现在令：

$$Y := \bigcup_{m,n \in M} Y_{m,n}$$

我们可以通过如下设定来定义图 $G = (M, Y, o, t)$：

$$\forall m, n \in M, \forall e \in Y_{m,n},\ o(e) = m \text{ and } t(e) = n$$

现在令 s 为 T 的根，并设 $S := l(s)$。我们将按词 $w \in \mathsf{W}(G, S)$ 的长度归纳地构造一个同构 $\Psi : \mathsf{T}(G, S) \to \mathsf{T}$，使得 $l(\Psi(w)) = T(w)$。作为归纳的起始，我们定义 $\Psi(\varepsilon) = s$。现在，若我们已对某个词 $w \in \mathsf{W}(G, S)$ 定义了 $\Psi(w) = v$，则令 $m := O(w) = l(v)$，并固定一个双射：

$$\pi_v : Y_m := \bigcup_{n \in M} Y_{m,n} \to N_o(v)$$

使得 $\forall u \in Y_{m,n}$，$l(\pi_v(u)) = n$。注意，我们有 $\{u \in EG \mid wu \in \mathsf{W}(G, S)\} = Y_m$，因此可以定义 $\Psi(wu) = \pi_v(u)$。现在，由于我们有 $l(\Psi(wu)) = l(\pi_v(u)) = t(u) = T(wu)$，构造完成。

Ψ 根据构造可知是一个同态；又由于 π_v 是双射，因此它是一个同构。

现在，为了说明定义 3 蕴含定义 2，我们注意到，对于任意 $w_1, w_2 \in \mathsf{W}(G, S)$，使得 $T(w_1) = T(w_2)$，对于任意 $u \in \mathsf{W}(G)$，有：

$$w_1 u \in \mathcal{W}(G, S) \iff O(u) = T(w_1) = T(w_2) \iff w_2 u \in \mathcal{W}(G, S)$$

因此我们可以看出，该函数：

$$\Psi_V : \begin{cases} V\mathcal{T}(G, S)_{w_1} \to V\mathcal{T}(G, S)_{w_2} \\ w_1 u \mapsto w_2 u \end{cases}$$

与由 $\Psi_E : E\mathrm{T}(G,S)_{w_1} \to E\mathrm{T}(G,S)_{w_2}$ 定义的函数$\Psi_E((w,we)) = (\Psi_V(w)\ \Psi_V(we))$结合后，给出了一个树同构 $\Psi : \mathrm{T}(G,S)_{w_1} \to \mathrm{T}(G,S)_{w_2}$。因此，任何具有相同终点的词都出等价；又由于终点的可能取值只有有限种（G 是有限的），所以顶点的等价类也只有有限个。 □

这使我们能够将标签正则树视为有限有根图的展开树，因此，与其研究这些树，不如研究有限有根图。探究图的性质与其展开树的性质之间的联系，可以让我们对这些树进行分类，判断它们是否同构或几乎同构。

3 标签正则有向树的同构分类

现在，定义 3 让我们能够通过有根图有限地描述（通常是无限的）标签正则树。现在我们可以确定，两个有根图何时表示同构的标签正则树。为此，我们先在一个图上定义等价关系。

定义 4. 对于任意图 $G = (V,E,o,t)$，其上的等价关系 $\sim$ 由分别定义在 V 和 E 上的两个等价关系 $\sim_V$ 和 $\sim_E$ 组成，且满足：

$$\forall e_1, e_2 \in EG(e_1 \sim_E e_2) \implies \big((o(e_1) \sim_V o(e_2)) \wedge (t(e_1) \sim_V t(e_2))\big)$$

如果 $\sim_V$ 和 $\sim_E$ 都平凡，则该等价关系是平凡的。
商图 $G/\sim := (V/\sim_V, E/\sim_E, o_\sim, t_\sim)$ 定义如下：

$$\begin{aligned} V/\sim &:= \{[v]_{\sim_V} \mid v \in V\} \\ E/\sim &:= \{[e]_{\sim_E} \mid e \in E\} \\ \forall e \in E,\ o_\sim([e]_{\sim_E}) &:= [o(e)]_{\sim_V} \\ \forall e \in E,\ t_\sim([e]_{\sim_E}) &:= [t(e)]_{\sim_V} \end{aligned}$$

我们称图关系 $\sim$ 不折叠边，当且仅当：

$$\forall v \sim v' \in VG, \forall e \in EG\ (o(e) = v) \implies (\exists! e' \in EG\ (o(e') = v') \wedge (e \sim e'))$$

我们首先注意到，任何在每个出邻域上均为单射的满图同态都是非边塌缩等价关系（反之亦然）：

引理 1. 任取两个图 G、H 及任意一个同态：

$$\phi : G \to H$$

使得 ϕ 是满射，并且对于任意 $v \in VG$：$\phi|_{E_o(v)}$ 是从 $E_o(v)$ 到$E_o(\phi(v))$. 的双射。于是，在 G上存在一个非边塌缩等价关系 $\sim$ 以及一个同构：

$$\psi : G/\sim \to H$$

使得 $\forall x \in VG \cup EG,\ \psi([x]_\sim) = \phi(x)$

我们将引理中所述的任意同态 ϕ 称为不折叠边的。

证明。我们将如下定义 $\sim$:

$$\forall x, y \in VG \cup EG,\ x \sim y \iff \phi(x) = \phi(y)$$

这是一个图等价关系，因为 ϕ 是图同态。为了证明 $\sim$ 是不折叠边的，我们取 $v_1 \sim v_2$ 和某个 $e_1 \in E_o(v_1)$。现在令 $e := \phi(e_1)$，根据定义有 $o(e) = \phi(v_1) = \phi(v_2)$，并且由于 $\phi|_{E_o(v_2)}$是一个双射，我们有唯一的某个 $e_2 \in E_o(v_2)$，使得 $\phi(e_2) = e = \phi(e_1)$，即 $e_2 \sim e_1$。由此可知 $\sim$ 是不折叠边的。

现在我们可以通过设定 $\forall x \in VG \cup EG,\ \psi([x]_\sim) = \phi(x)$ 来定义 $\psi : G/\sim \to H$。对于任意 $x \sim y \in VG \cup EG$，都有 $\phi(x) = \phi(y)$，因此 ψ是良定义的。 ψ 是图同态，因为:

$$\forall e \in EG,\ o(\psi([e]_\sim)) = o(\phi(e)) = \phi(o(e)) = \psi([o(e)]_\sim) = \psi(o([e]_\sim))$$

类似地:

$$\forall e \in EG,\ t(\psi([e]_\sim)) = t(\phi(e)) = \phi(t(e)) = \psi([t(e)]_\sim) = \psi(t([e]_\sim))$$

由于 ϕ 是满射，因此ψ 是满射。最后，由于: ψ 是单射。

$$\forall x, y \in VG \cup EG,\ \psi([x]_\sim) = \psi([y]_\sim) \implies \phi(x) = \phi(y) \implies [x]_\sim = [y]_\sim$$

因此， ψ 就是我们要找的图同构。 □

非边塌缩条件意味着，如果图中的两个顶点是 o等价的，那么它们在商图中就是 o等价的。这一观察使我们得以证明，任意图都存在一个非边塌缩等价关系，其顶点分量为 $\sim_o$。此外，我们可以注意到，非边塌缩等价关系的顶点分量决定了图的结构。结合这些性质，我们可以为每个图找到一个关于非边塌缩等价关系的唯一极小因子。

引理2. 设 G 是一个图，则有:

- 存在一个非边塌缩等价关系，其顶点分量为 $\sim_o$

- 对于任意两个非边塌缩等价关系 $\sim^1$ 和 $\sim^2$，若满足$\sim^1_V = \sim^2_V$，则存在一个同构:

$$\phi : G/\sim^1 \to G/\sim^2$$

其中 $\forall v \in V\phi([v]_{\sim^1}) = [v]_{\sim^2}$

- 对于 G 上的任意非边塌缩等价关系 $\sim$，以及 $G/\sim$ 上的任意非边塌缩等价关系 $\approx$，存在 G 上的某个非边塌缩等价关系 $\approxeq$，使得

$$\forall x, y \in VG \cup EG,\ x \sim y \implies x \approxeq y$$

并且我们有：

$$G/\approxeq \cong (G/\sim)/\approx$$

- 对于任意两个非边塌缩等价关系 $\sim^1, \sim^2$，存在另一个非边塌缩关系 $\sim$，使得：

$$\forall v, w \in VG,\ v \sim_V^1 w \vee v \sim_V^2 w \implies v \sim_V w$$

证明。对于第一点，对于任意两个顶点 $v \sim_o w$ 和一个有根同构$\phi_{v,w} : G_v \to G_w$，我们可以选择这些同构，使得对于任意 $v \sim_o w \sim_o u$，都有：

$$\begin{aligned}\phi_{v,v} &= \mathrm{id}.\\ \phi_{v,w} &= \phi_{w,v}^{-1}\\ \phi_{v,u} &= \phi_{v,w} \circ \phi_{w,u}\end{aligned}$$

现在我们可以看到，如果定义 $e \sim_e f \Longleftrightarrow (o(e) \sim_o o(f)) \wedge \phi_{o(e),o(f)}(e) = f$，这将定义一个等价关系。此外，若有 $e \sim_e f$，则根据定义可得 $o(e) \sim_o o(f)$；又由于 $\phi_{o(e),o(f)}(e) = f$，我们必有 $\phi_{o(e),o(f)}(t(e)) = t(f)$，因此函数 $\phi_{o(e),o(f)}|_{G_{t(e)}}$ 给出了 $G_{t(e)}$ 与 $G_{t(f)}$ 之间的有根同构，从而 $t(e) \sim_o t(f)$。
这表明 $(\sim_o, \sim_e)$ 是一个图等价关系。现在，为了证明它不折叠边，我们考察任意一条边 e，其中 $o(e) = v$ 以及某个顶点$v' \sim_o v$，于是可知，$\phi_{v,v'}(e)$ 是与 e 等价且起点位于 v' 的唯一一条边。因此，该等价关系不折叠边。这就证明了第一点。
对于第二点，我们取两个不折叠边的等价关系 $\sim^1$ 和 $\sim^2$，其中 $\sim_V := \sim_V^1 = \sim_V^2$。现在，令集合 $V_0 \subset V$为 $\sim_V$ 的每个等价类的互异代表元集合。现在我们可以定义：

$$E_0 := \bigcup_{v_0 \in V_0} E_o(v_0)$$

我们将证明，E_0 是 $\sim_E^1$ 和 $\sim_E^2$ 的每个等价类的代表元集合。为此，我们固定某个 $i \in \{1,2\}$。现在假设对于某个e_0，有 $e_0 \sim_E^i f_0, f_0 \in E_0$，那么必有 $o(e_0) \sim_V o(f_0)$；但根据定义，我们有$o(e_0)\ o(f_0) \in V_0$，因此必有 $o(e_0) = o(f_0)$。由于等价关系$\sim_e^i$ 不折叠边，因此必有 $e_0 = f_0$。
对于任意的 $e \in E$，我们注意到存在某个 $v_0 \in V_0$，使得 $o(e) \sim_V v_0$。由于 $\sim^i$ 是不折叠边的，因此必定存在某个 $e_0 \in E_o(v_0) \subseteq E_0$，使得 $e \sim_E^i e_0$。
这表明，E_0 是 $\sim_E^1$ 的每个等价类的一组代表元，并且

属于 $\sim_E^2$（因为 $i \in \{1, 2\}$是任意的）。
利用这一点，我们可以通过如下方式构造同构 $\Psi : G/\sim^1 \to G/\sim^2$：

$$\forall v \in V,\ \Psi_V([v]_{\sim_V}) := [v]_{\sim_V}$$
$$\forall e_0 \in E_0\ \Psi_E([e_0]_{\sim_E^1}) := [e_0]_{\sim_E^2}$$

显然，Ψ_V 是一个双射。由 E_0 同时是 $\sim_E^1$ 和 $\sim_E^2$ 的代表元集可知，Ψ_E 定义良好且也是一个双射。为证明它是一个同构，我们只需考察某个 $[e]_{\sim_E^1} \in E/\sim_E^1$，并选取满足条件 $[e]_{\sim_E^1} = [e_0]_{\sim_E^1}$ 的唯一 $e_0 \in E_0$，于是有：

$$o(\Psi_E([e]_{\sim_E^1})) = o(\Psi_E([e_0]_{\sim_E^1})) = o([e_0]_{\sim_E^2}) = \Psi_V(o([e_0]_{\sim_E^2})) = \Psi_V(o([e]_{\sim_E^2}))$$
$$t(\Psi_E([e]_{\sim_E^1})) = t(\Psi_E([e_0]_{\sim_E^1})) = t([e_0]_{\sim_E^2}) = \Psi_V(t([e_0]_{\sim_E^2})) = \Psi_V(t([e]_{\sim_E^2}))$$

这表明 Ψ 确实是一个同构。
对于第三点，我们如下定义 $\approxeq$：

$$\forall x, y \in VG \cup EG,\ x \approxeq y \iff [x]_\sim \approx [y]_\sim$$

由于 $\sim$ 和 $\approx$ 都是图等价关系，因此 $\approxeq$ 显然也是图等价关系。为证明它不折叠边，取某个 $v \approxeq v' \in VG$ 和某个 $e \in E_o(v)$。由于 $\approx$ 不折叠边，存在唯一的 $[e']_\sim \in E_o([v']_\sim)$ 使得 $[e']_\sim \approx [e]_\sim$。由于 $\sim$ 也不折叠边，我们可以假设 e' 是 $[v']_\sim$ 中满足 $o(e') = v'$ 的唯一代表元；根据定义，这就是满足 $e' \approxeq e$ 的唯一 $e' \in E_o(v')$。

事实 $G/\approxeq \cong (G/\sim)/\approx$ 可由标准结果推出。
对于最后一点，我们将通过如下设定在顶点 G 上定义等价关系 $\sim$：

$$\forall v, w \in V\ v \sim_V w \iff v \sim_V^1 w \vee v \sim_V^2 w$$

要在边上定义它，我们取一些 $e, f \in EG$ 并考虑以下情况：

- 若 $o(e) \sim^1 o(f)$，则定义如下：

$$e \sim f \iff e \sim^1 f$$

- 若有 $o(e) \sim^2 o(f)$，但 $o(e) \not\sim^1 o(f)$，则定义如下：

$$e \sim f \iff e \sim^2 f$$

- 若同时有 $o(e) \not\sim^1 o(f)$ 和 $o(e) \not\sim^2 o(f)$，则还有 $e \not\sim f$。

为说明这是一个图等价关系，我们注意到，如果有 $e \sim f$，那么对于某个 $i = 1$，我们有 $e \sim^i f$，2，因此 $o(e) \sim^i o(f)$，且 $t(e) \sim^i t(f)$，从而 $o(e) \sim o(f)$，且 $t(e) \sim t(f)$。

为了证明该关系是不折叠边的，我们取一些 $v \sim v' \in VG$ 和

一些 $e \in E_o(v)$。现在，若有 $v \sim^1 v'$，由于 $\sim^1$ 是不折叠边的，我们必有一个唯一的 $e' \in E_o(v')$，使得 $e \sim^1 e'$。根据定义，这也是唯一的$e' \in E_o(v')$，使得 $e \sim e'$。

如果我们有 $v \not\sim^1 v'$，那么必有 $v \sim^2 v'$；又由于 $\sim^2$ 也是非边塌缩的，因此存在唯一的 $e' \in E_o(v')$，使得 $e \sim^2 e'$。根据定义，这也是唯一的 $e' \in E_o(v')$，使得 $e \sim e'$。

□

注意，如果我们通过规定 $\sim^1 \lessdot \sim^2$ 当且仅当以下条件成立，对 G 上的非边塌缩等价关系进行排序：

$$\forall x, y \in VG \cup EG,\ x \sim^1 y \implies x \sim^2 y$$

注意，如果有一些 $\lessdot$-极大非边塌缩等价关系 $\sim^1$ 和 $\sim^2$，根据上述引理的最后一点，必有：

$$\sim^1_V = \sim^2_V$$

我们将没有非平凡非边塌缩等价关系的图称为非冗余图。对于任意图 G 以及 G 上的任意 $\lessdot$-极大非边塌缩等价关系 $\sim$，根据引理2的第3点，图 $G/\sim$ 是非冗余的。结合上述引理的第三点和第四点可知，所有形如 $G/\sim$ 的非冗余图彼此同构。因此，我们得到一个唯一的非冗余图，它是 G的一个因子。

现在我们可以证明，对于图上的任意非边塌缩等价关系，其商图会产生相同的展开树。

引理 3. 对于有根图G 上任意非边塌缩等价关系 $\sim$，其根为 S，我们有：

$$\mathcal{T}(G, S) \cong_R \mathcal{T}(G/\sim, [S]_\sim)$$

证明. 在此证明中，为了符号简洁，我们将省略 $\sim_V$ 和 $\sim_E$ 的下标。

定义函数如下：

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{T}(G,S) \to \mathcal{T}(G/\sim, [S]_\sim) \\ e_1 e_2 \dots e_n \mapsto [e_1]_\sim [e_2]_\sim \dots [e_n]_\sim \end{cases}$$

该函数定义良好，因为对于任意 $e_1 e_2 \dots e_n \in \mathrm{T}(G,S)$，我们有 $[S]_\sim = [o(e_1)]_\sim$；对于任意 $i < n$，我们有 $[o(e_{i+1})]_\sim = [t(e_i)]_\sim$。显然，$\Psi$ 是一个树同态，因为 $\forall e \in EG, ve \in \mathrm{W}(G,S) \Psi(ve) = \Psi(v)[e]_\sim$。

为证明单射性，假设存在两个 $e_1 e_2 \dots e_n \neq d_1 d_2 \dots d_m \in \mathrm{W}(G,S)$，满足$\Psi(e_1 e_2 \dots e_n) = \Psi(d_1 d_2 \dots d_m)$。首先，由于 Ψ保持词的长度，我们必有 $n = m$。其次，由于这两个词不同，设 k 是满足 $e_k \neq d_k$的最小下标。若 $k = 1$，则必有 $o(e_k) = S = o(d_k)$；否则，由于 $e_{k-1} = d_{k-1}$，有 $o(e_k) = t(e_{k-1}) = t(d_{k-1}) = o(d_k)$。因此，在每种情况下

$o(e_k) = o(d_k)$，但由于 $e_k \neq d_k$，且 $\sim$ 是非边塌缩的，我们必有$e_k \not\sim d_k$，从而 $[e_k]_\sim \neq [d_k]_\sim$。然而，这就得到：

$$\Psi(e_1 e_2 \dots e_n) = [e_1]_\sim [e_2]_\sim \dots [e_n]_\sim \neq [d_1]_\sim [d_2]_\sim \dots [d_n]_\sim = \Psi(d_1 d_2 \dots d_n)$$

这与我们的假设矛盾。因此我们得到单射性。
对于满射性，我们取某个 $[e_1]_\sim [e_2]_\sim \dots [e_n]_\sim \in \mathsf{W}(G/\sim, [S]_\sim)$，并递归地选取 $[e_1]_\sim$, $[e_2]_\sim, \dots, [e_n]_\sim$ 的代表元 $e'_1 e'_2 \dots e'_n$，使它们在 G 中构成一条以 S 为起点的游走，如下所示。由于我们有 $o(e_1) \sim S$，根据我们的假设，存在某个 e'_1，满足 $e_1 \sim e'_1$ 且 $o(e'_1) = S$。现在，递归地，若我们已经为某个 $k < n$ 选好了 $e'_1, \dots, e'_k$，那么由于 $e'_k \sim e_k$，我们有 $t(e'_k) \sim t(e_k) \sim o(e_{k+1})$，因此同样可以找到唯一一条边 e'_{k+1}，使得 $o(e'_{k+1}) = t(e'_k)$ 且 $e'_{k+1} \sim e_{k+1}$。这样我们就找到了 $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$，使得 $e'_1 e'_2 \dots e'_n \in \mathsf{W}(G, S)$ 且 $e_1 \sim e'_1, \dots, e_n \sim e'_n$，由此得到：

$$\Psi(e'_1 e'_2 \dots e'_n) = [e'_1]_\sim [e'_2]_\sim \dots [e'_n]_\sim = [e_1]_\sim [e_2]_\sim \dots [e_n]_\sim$$

证明了满射性。
因此，我们证明了 Ψ 是树同构。显然，我们还有 $\Psi(\varepsilon_S) = \varepsilon_{[S]_\sim}$，因此它是一个有根同构。 □

我们可以证明，上述引理涵盖了两个图生成相同树的所有情形。为此，我们将在由有序对 (G, S) 构成的类 Γ 上定义两个等价关系，其中 G 是一个有根图，S 是 G的根。

定义 5. 设 $\simeq$ 是 Γ 上的最小等价关系，使得任意有根同构的有根图都 $\simeq$ 等价，并且对于任意 $(G, S) \in \Gamma$ 以及 G上的任意非边塌缩等价关系 $\sim$，都有：

$$(G, S) \simeq (G/\sim, [S]_\sim)$$

这个等价关系准确地描述了两个图何时生成相同的树：

定理5. 对任意 (G, S)、$(H, R) \in \Gamma$，都有：

$$\mathcal{T}(G, S) \cong_R \mathcal{T}(H, R)$$

当且仅当：

$$(G, S) \simeq (H, R)$$

证明。蕴含关系的“若”部分直接由引理 3 得出。反过来，我们首先需要：

断言6. 对于每个有根图 (G, S)，$\mathsf{T}(G, S)$ 上存在一个非边塌缩等价关系 $\sim$，使得

$$G \cong_R \mathcal{T}(G, S)/\sim$$

证明. 为证明这一点，我们将如下定义一个同态 $\Phi : \mathbf{T}\,(G, S) \to G$：

$$\forall p \in \mathcal{W}(G,S),\, \Phi(p) \coloneqq T(p)$$
$$\forall p \in \mathcal{W}(G,S), \forall e \in E_o(T(p)),\, \Phi(p, pe) \coloneqq e$$

注意，这是一个同态；由于 S 是一个根，因此它是满射。此外，根据展开树的构造，函数 $\Phi|_{E_o(v)} : E_o(v) \to E_o(\Phi(v))$ 是一个双射。因此，根据引理 1，存在某个非边塌缩等价关系 $\sim$，使得：

$$G \cong_R \mathcal{T}(G,S)/{\sim}$$

□

现在证明逆命题。利用上述断言，我们首先取一棵树 $\mathbf{T}$，使得

$$\mathcal{T}(G,S) \cong \mathcal{T} \cong \mathcal{T}(H,R)$$

根据上述断言，我们有两个非边塌缩等价关系$\sim^1$ 和 $\sim^2$，使得：

$$G \cong_R \mathcal{T}/{\sim^1} \qquad H \cong_R \mathcal{T}/{\sim^2}$$

so:

$$G \simeq \mathcal{T} \simeq H$$

因此：

$$G \simeq H$$

□

为了更好地描述哪些图会产生相同的展开树，我们需要仔细考察 $\simeq$:

引理 4. 对于任意两个有根图 (G,S)、$(H,R) \in \Gamma$，我们有：

$$(G,S) \simeq (H,R)$$

当且仅当分别在 G 和 H 上存在某些非边塌缩等价关系 $\sim_G$、 $\sim_H$，使得：

$$(G/{\sim_G}, [S]_{\sim_G}) \cong_R (H/{\sim_H}, [R]_{\sim_H})$$

证明。对于“仅当”这一蕴含，我们注意到，对于引理中任意两个 $\sim_G$、 $\sim_H$，根据定义 5：

$$(G,S) \simeq (G/{\sim_G}, [S]_{\sim_G}) \simeq (H/{\sim_H}, [R]_{\sim_H}) \simeq (H,R)$$

因此，根据传递性，我们必然有：

$$(G,S) \simeq (H,R)$$

对于逆命题，我们将使用定理5的证明。由此可知，如果有一棵树 T 及其上的两个非边塌缩等价关系 $\sim_1$ 和 $\sim_2$，使得

$$G \cong_R \mathcal{T}/\sim^1 \qquad H \cong_R \mathcal{T}/\sim^2$$

现在令 $\approx^1$ 和 $\approx^2$ 分别为 T /$\sim^1$ 和 T /$\sim^2$ 上的一些极大非边折叠关系。根据上下文，我们也会分别将它们重新解释为 G 和 H 上的非边塌缩等价关系。

现在根据引理2的第3点，我们有其他一些等价关系 $\approx\!\!\!\approx^1$ 和 $\approx\!\!\!\approx^2$，使得

$$(\mathcal{T}/\sim^1)/\approx^1 \cong \mathcal{T}/\approx\!\!\!\approx^1 \quad (\mathcal{T}/\sim^2)/\approx^2 \cong \mathcal{T}/\approx\!\!\!\approx^2$$

现在，由于 $\approx^1$ 和 $\approx^2$ 是极大的，根据引理2第三点的证明，$\approx\!\!\!\approx^1$ 和 $\approx\!\!\!\approx^2$ 也都是极大的。因此，根据引理2的第二点（使用显然的根），我们必有：

$$G/\approx^1 \cong_R (\mathcal{T}/\sim^1)/\approx^1 \cong_R \mathcal{T}/\approx\!\!\!\approx^1 \cong_R \mathcal{T}/\approx\!\!\!\approx^2 \cong_R (\mathcal{T}/\sim^2)/\approx^2 \cong_R H/\approx^2$$

证明引理的另一方向。 □

定理5立即给出：

推论1. 对于任意两个非冗余有根图 (G,S)、(H,R)，$\in \Gamma$ 我们有：

$$\mathcal{T}(G,S) \cong_R \mathcal{T}(H,R)$$

当且仅当：

$$(G,S) \cong_R (H,R)$$

证明。由定理5可知，对于任意这样的（G，S）、（H，R），必有：

$$(G,S) \simeq (H,R)$$

即根据定义 5，在 G 和 H 上分别存在非边塌缩等价关系 $\sim_G$ 和 $\sim_H$，使得：

$$(G/\sim_G, [S]_{\sim_G}) \cong_R (H/\sim_H, [R]_{\sim_H})$$

并且由于 G 和 H 非冗余，这些关系必为平凡关系，因此：

$$(G,S) \cong_R (H,R)$$

□

因此，通过考察两个图，我们可以看出它们何时会生成相同的树。结合引理2可知，每个根标号正则树的根同构类都对应一个唯一的非冗余有根图。这使我们能够将每棵标签正则树归类为与唯一的非冗余有根图相关联的树，而该树正是此有根图的展开树。

4 标签正则有向树的几乎同构分类

现在，我们可以定义两棵树何时在有限子树意义下同构，也就是说，何时几乎同构。为此，我们先定义如何删去一个子图。

定义 6. 对于任意图 G 及其任意子图 H，我们可以通过如下设置来定义图 $G \setminus H$：

$$
\begin{aligned}
E(G \setminus H) &:= EG \setminus EH \\
V(G \setminus H) &:= VG \setminus \{v \in VG \mid E_o(v), E_t(v) \neq \varnothing,\ E_o(v) \cup E_t(v) \subseteq EH\} \\
o_{G \setminus H} &:= o|_{E(G \setminus H)} \\
t_{G \setminus H} &:= t|_{E(G \setminus H)}
\end{aligned}
$$

由此我们可以定义几乎同构：

定义 7. 对于任意两棵树 T_1,T_2，若存在有限子树 T_1,T_2，使得存在一个同构：

$$\Psi : \mathcal{T}_1 \setminus T_1 \to \mathcal{T}_2 \setminus T_2$$

若情况如此，我们记作 $\mathsf{T}_1 \cong_A \mathsf{T}_1$。

注意，通过扩展子树 T_1 和 T_2，使其包含一个可能的根。我们还可以确保，对于 T_i 中的任意顶点 v，要么有$N_o(v) \subseteq T_i$，要么有 $N_o(v) \cap T_i = \varnothing$。对于树为 $\mathsf{T}(G,S)$ 的情况，我们可以用类似于文献 [11] 中对正则树所采用的方式，描述一个不含此类子树的有根树：

定义 8. 对于任意有根图 G 和任意根 S，顶点诱导子图 $\mathsf{S} \leq \mathsf{T}(G,S)$ 为：

- 子空间，如果 $\forall w \in \mathsf{W}(G,S)\ \forall u \in \mathsf{W}(G,T(w))\ \ w \in \mathsf{S} \Rightarrow wu \in \mathsf{S}$
- 不可逃逸，如果 $\forall w \in \mathsf{W}(G,S) \exists u \in \mathsf{W}(G,T(w)) : wu \in \mathsf{S}$
- 余有限，如果存在有限集 $F \subseteq V\mathsf{T}(G,S)$ 使得。

$$\mathcal{S} = \bigcup_{x \in F} \mathcal{T}(G,S)_x$$

注意，若有 $|\mathsf{W}(G,S) \setminus \mathsf{S}| < \infty$，则子空间 S 是余有限的。若 S 是不可逃逸的，则逆命题也成立。
我们可以证明，在讨论几乎同构时，可以考察不可逃逸的余有限子空间，而不必移除任意有限棵树。

引理 5. 对于任意两个有限有根图 (G,S),(G',S')，如果树 $\mathsf{T}(G,S)$ 和 $\mathsf{T}(G',S')$ 几乎同构，那么 $\mathsf{W}(G,S)$ 和 $\mathsf{W}(G',S')$ 中分别存在一些不可避免的余有限子空间 S, S'，它们彼此同构。

证明. 我们将用 $|w|$ 表示词 w 的长度。由于 $\mathsf{T}(G,S)$ 和 $\mathsf{T}(G',S')$ 几乎同构，因此存在一些有限子树 $T \leq \mathsf{T}(G,S), T' \leq \mathsf{T}(G',S')$，以及一个同构：

$$\phi : \mathcal{T}(G,S) \setminus T \to \mathcal{T}(G',S') \setminus T'$$

现在令 $m' := \max\{|w| \mid w \in VT'\}$，并通过如下设定定义顶点诱导子图 T'_0：

$$VT'_0 := \{w \in \mathcal{T}(G,S) \setminus T' \mid |w| \leq m'\}$$

现在我们可以令 $m := \max\{|w| \mid w \in VT \cup \phi^{-1}[VT'_0]\}$，并将 S 定义为 $\mathsf{T}(G,S)$ 的顶点诱导子图，其中：

$$V\mathcal{S} = \{w \in \mathcal{T}(G,S) \mid |w| > m\} \cup \{u \in \mathcal{T}(G,S) \mid N_o(u) = \varnothing\}$$

我们首先注意到，S 确实是一个不可逃逸子空间，因为我们可以将任意词扩展为长度为 $> m$ 的词，或扩展为一个叶节点（出邻域为空的顶点）。要证明它是余有限的，只需注意：

$$\mathcal{W}(G,S) \setminus V\mathcal{S} \subseteq \{w \in \mathcal{T}(G,S) \mid |w| \leq m\}$$

由于左侧集合是有限集，因此该子空间是余有限的。
现在我们注意到，根据定义，对于任意叶节点 u，必有：$u \in V(\mathsf{T}(G,S) \setminus T)$；并且必有 $\{w \in \mathsf{T}(G,S) \mid |w| > m\} \subseteq V(\mathsf{T}(G,S) \setminus T)$，因为 $V(\mathsf{T}(G,S)) \setminus VT \subseteq V(\mathsf{T}(G,S) \setminus T)$。这说明 $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T}(G,S) \setminus T$，因此当我们定义 $\mathsf{S}' := \phi[\mathsf{S}]$, 时，可以定义如下同构：

$$\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$$

通过定义 $\psi := \phi|_{\mathcal{S}}$。现在我们只需证明 S' 是一个余有限不可逃逸子空间。

为了证明它是一个子空间，我们将证明对于任意的 $w' \in \mathsf{S}'$ 以及任意的 $e' \in E_o(T(w'))$，都有 $w'e' \in \mathsf{S}'$；由归纳法可知，这将证明 S' 是一个子空间。为证明这一命题，注意到由于 $w' \in \mathsf{S}'$ 且 $E_o(w) \neq \varnothing$，我们必定存在某个 $w \in \mathsf{S}$，使得 $w' = \phi(w)$ 且 $E_o(w) \neq \varnothing$，因此 $|w| > m$，从而得到 $w' = \phi(w) \notin T'_0$，于是 $|w'| > m'$。因此我们也必定有 $|w'e'| > m'$，进而有 $w'e' \in \mathsf{T}(G',S') \setminus T'$。所以 w' 和 $w'e'$ 都在 ϕ 的定义域中。令 $w := \phi^{-1}(w') \in \mathsf{S}$，并且由于 $\phi^{-1}(w'e') = we$ 对某个 $e \in EG$ 成立，我们必定有 $\phi^{-1}(w'e') \in \mathsf{S}$，因此 $w'e' \in \mathsf{S}'$。
为证明该子空间不可逃逸，我们取某个 $w' \in \mathsf{W}(G',S')$，那么必定存在某个 $u' \in \mathsf{W}(G')$，使得 $w'u' \in \mathsf{T}(G',S') \setminus T'$，因此我们可以设 $w = \phi^{-1}(w'u')$。接着，由于 S 不可逃逸，必定存在某个 $u \in \mathsf{W}(G)$，使得 $wu \in \mathsf{S}$。此外，由于 ϕ 是一个同态，必定存在某个 u''，使得 $\phi(wu) = w'u'u'' \in \mathsf{S}'$。
最后，关于余有限性，我们注意到，对于任意 $w' \notin V\mathsf{S}'$，必有 $w' \notin V(\mathsf{T}(G',S') \setminus T')$ 或 $\phi^{-1}(w') \notin V\mathsf{S}$。由于这两种情况都只对有限多个 w' 成立，因此 S' 是余有限的。

□

因此，为了更好地描述几乎同构的标签正则树，我们需要考察子空间。为此，对于任意两个词$v, w \in \mathsf{W}(G, S)$ v，如果存在另一个词 u属于 EG^*，使得 $w = vu$，我们就称其为 w的前缀，并记作 $v \leq_p w$。注意，这种序关系使 $\mathsf{W}(G, S)$ 成为一个半格。现在我们可以引入子空间的基：

引理 6. 对于任意有根图 G 及其某个根 S，对于任意子空间 $\mathsf{S} \leq \mathsf{T}(G, S)$，存在唯一的集合 $B \subseteq \mathsf{S}$，使得其中任意两个不同元素都不是彼此的前缀，并且 S 中的任意词都有一个属于 B的前缀。此时：

- 子空间 S 是不可逃逸的，当且仅当对于每个 $v \in \mathsf{W}(G, S)$，都存在某个 $b \in B$，使得 $v \leq_p b$ 或 $b \leq_p v$。
- 子空间 S 是余有限的，当且仅当 $|B| < \infty$。

我们称集合 B 为 S 的基。反过来，对于任意集合 B ，若其中任意两个不同元素都不是彼此的前缀，则存在唯一的子空间 S_B，使得 B 是 S 的基。

证明。基的存在性和唯一性直接源于偏序构成半格这一事实。

为证明第一点，我们先假设 S 是不可逃逸的，那么对于任意$w \in \mathsf{W}(G, S)$，都存在某个 $v \in \mathsf{S}$，使得 $w \leq_p v$。现在，对于 v，相应地存在某个$b_v \in B$，使得 $b_v \leq_p v$。因此 w 和 b_v 都是 v 的前缀，故它们必定是 $\leq_p$可比较的。

反过来，设 B 是 S 的基，使得 $\mathsf{W}(G, S)$ 中的任意词都与 B 中的某个词可比较。那么对于任意词 v，都有一个与之可比较的 $b \in B$；如果 $b \leq_p v$，那么根据子空间的定义，$v \in \mathsf{S}$；另一方面，如果 $v \leq_p b$，那么 v 是 S 中某个词的前缀。

对于第二点，我们注意到，对于任意以 B 为基的子空间 S，都有：

$$\mathcal{S} = \{bw \in \mathcal{T}(G, S) \mid b \in B \wedge w \in (EG)^*\} = \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{T}(G, S)_b$$

因此，如果基是有限的，那么子空间也是余有限的。

此外，若 S 是余有限的，取 $F \subseteq \mathsf{S}$ 为有限集，使得

$$\mathcal{S} = \bigcup_{x \in F} \mathcal{T}(G, S)_x$$

因此，对于任意 $v \in \mathsf{S}$，都有某个 $x \in F$，使得 $x \leq_p v$。由此可见，$B \subseteq F$，因为对于每个 $b \in B$，都有某个 $x \in F \subseteq \mathsf{S}$ 满足 $x \leq_p b$，从而 $b = x$。因此，由于 F 是有限的，B 也必定是有限的。

对于第二部分，我们首先注意到，对于任意两个具有相同基 B 的子空间 S_1 和 S_2，必有：

$$\mathcal{S}_1 = \{bw \in \mathcal{T}(G, S) \mid b \in B \wedge w \in \mathcal{W}(G, T(b))\} = \mathcal{S}_2$$

由此可得唯一性。

现在，对于任意满足以下条件的集合 B：其中任意两个不同元素 B 都不是彼此的前缀，我们可以定义：

$$\mathcal{S}_B \coloneqq \{bw \in \mathcal{T}(G, S) \mid b \in B \wedge w \in \mathcal{W}(G, T(b))\}$$

这显然是 $\mathsf{T}(G,S)$ 的一个子空间，其基为 B。 □

现在我们还可以看出，对于任意几乎同构树，都能找到一个几乎同构映射，它是两个不可逃逸余有限子空间之间的同构，并且将一个子空间的基映射到另一个子空间的基。根据引理 5，这是因为任意子空间之间的同构都会将基元素映射到基元素，因为它们是（在 S 中）唯一入邻域为空的元素。

此外，我们可以证明，对于任意半图，其展开树同构于整个图的展开树的一个半树。

引理 7. 对于任意有根图 (G,S)、任意 $x \in VG$ 以及任意词 $w \in \mathsf{W}(G,S)$，使得 $T(w) = x$，我们有：

$$\mathcal{T}(G_x, x) \cong_R \mathcal{T}(G,S)_w$$

证明. 首先要注意，G 中任何起点为 x 的路径都必须包含在 G_x 中。

我们将定义一个图同态 $\phi : \mathsf{T}(G_x, x) \to \mathsf{T}(G,S)_w$，具体方法是在顶点上定义如下：

$$\forall u \in \mathcal{W}(G_x, x),\ \phi(u) := wu$$

注意，由于 $\mathsf{T}(G,S)_w$ 中的任意顶点都具有 wv 的形式，其中 v 是一条满足 $O(v) = T(w) = x$ 的路径，因此 $v \in \mathsf{W}(G_x, x)$。反过来，任何这种形式的词都属于 $\mathsf{T}(G,S)_w$。这说明 ϕ 是良定义的，并且是顶点上的一个双射。

此外，我们看到 $(u_1, u_2) \in E\mathsf{T}(G,S)$ 当且仅当 $(\phi(u_1)\ \phi(u_2)) \in E\mathsf{T}(G,S)$，因为对于任意 $u \in \mathsf{W}(G_x, x)$ 以及任意满足 $T(u) = o(e)$ 的 $e \in EG$，都有 $\phi(ue) = wue = \phi(u)e$；反向结论由 ϕ 的双射性得出。因此，我们可以通过如下方式在边上定义 ϕ：

$$\forall u \in \mathcal{W}(G_x, x) \forall e \in E_o(T(u)),\ \phi((u, ue)) = (\phi(u), \phi(ue))$$

这显然使 ϕ 成为一个树同态；又由于它在边和顶点上都是双射，因此它是一个树同构。事实 $\phi(\epsilon_x) = w$ 表明 ϕ 是有根的。 □

如果将上述引理与这样一个事实结合起来：余有限不可逃逸子空间是有限个半树的不交并，且每条路径最终都会落入其中一棵树，那么我们可以推断：

引理 8. 设 (G,S)、(H,R) 是两个有根图，且展开树 $\mathsf{T}(G,S)$、$\mathsf{T}(H,R)$ 几乎同构，那么存在子集 $M \subseteq VG$ 和 $M' \subseteq VH$，使得在 $\mathsf{T}(G,S)$、$\mathsf{T}(H,R)$ 中分别存在余有限不可逃逸子空间 B、B' 的基，并且 $M = T[B]$ 和 $M' = T[B']$，且有：

$$\forall m \in M, \exists m' \in M',\ \mathcal{T}(G_m, m) \cong_R \mathcal{T}(H_{m'}, m')$$

若 G 和 H 均为非冗余的，我们进一步有一个双射 $\pi : M \to M'$，使得。

$$\forall m \in M G_m \cong_R H_{\pi(m)}$$

证明。由于根据引理 5，$\mathsf{T}(G,S)$ 与 $\mathsf{T}(H,R)$ 几乎同构，因此我们有两个余有限不可逃逸子空间 $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T}(G,S)$ 和 $\mathsf{S}' \subseteq \mathsf{T}(H,R)$，以及一个同构 $\Phi : \mathsf{S} \to \mathsf{S}'$。现在令 B 和 B' 分别为 S 和 S' 的基，我们注意到 $\Phi[B] = B'$。注意，我们有：

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{b \in B} \mathcal{T}(G,S)_b \qquad \mathcal{S}' = \bigsqcup_{b' \in B'} \mathcal{T}(H,R)_{b'}$$

并集是互不相交的。此外，由于同构必须保持序 $\leq_p$，对于每个 $b \in B$，我们必须有：

$$\Phi(\mathcal{T}(G,S)_b) = \Phi(\{w \in \mathcal{T}(G,S) \mid b \leq_p w\}) = \\ \{w' \in \mathcal{T}(H,R) \mid \Phi(b) \leq_p w'\} = \Phi(\mathcal{T}(H,R)_{\Phi(b)})$$

因此，$\mathsf{T}(G,S)_b \cong_R \mathsf{T}(H,R)^{\Phi(b)}$，通过 $\Phi|_{\mathcal{T}(G,S)_b}$。
因此，令 $m = T(b) \in VG$ 且 $m' = T(\Phi(b)) \in VH$，由引理 7 可得：

$$\mathcal{T}(G_m, m) \cong_R \mathcal{T}(G,S)_b \cong_R \mathcal{T}(H,R)_{\Phi(b)} \cong_R \mathcal{T}(H_{m'}, m')$$

因此，令 $M \coloneqq T[B]$ 和 $M' \coloneqq T[B']$，我们便得到引理的第一部分，因为对于任意 $m \in M$，都有某个 $b_m \in B$ 使得 $m = T(b_m)$，于是 $m' = T(\Phi(b_m)) \in M'$ 就是我们要找的元素。
对于引理的第二部分，假设 G 和 H 都是非冗余的。首先注意到，对每个 $x \in VG$ G_x，它也都是非冗余的，因为如果在 G_x 上存在某个非边塌缩等价关系，我们可以轻易地将其扩展到整个 G，且它仍然是不折叠边的，因为对于每个 $y \in VG_x$：$E_o(y) \subseteq G_{x^\circ}$ 因此，由于 G 是非冗余的，任何这样的关系都必定是平凡的。类似地，对每个 $x \in VH$ H_x，它也都是非冗余的。因此，如果我们像之前那样有 $M \coloneqq T[B]$ 和 $M' \coloneqq T[B']$，那么对于任意两个 b_1、$b_2 \in B$，有 $T(b_1) = T(b_2)$ 当且仅当 $T(\Phi(b_1)) = T(\Phi(b_2))$，这是因为 G 和 H 都是非冗余的（由引理 2 第 1 部分和引理 7 可知）：

$$T(b_1) = T(b_2) \iff \mathcal{T}(G,S)_{b_1} \cong_R \mathcal{T}(G,S)_{b_2} \\ \iff \mathcal{T}(H,R)_{\Phi(b_1)} \cong_R \mathcal{T}(G,S)_{\Phi(b_2)} \iff T(\Phi(b_1)) = T(\Phi(b_2))$$

因此，函数 $\pi : M \to M'$ 定义为 $\pi(m) = T(\Phi(b_m))$，其中 $b_m \in B$ 是满足 $T(b_m) = m$ 的某个元素，它是良定义且单射的。它也是满射的，因为对于每个 $m' \in M$，都存在某个 $b'_{m'} \in B'$ 使得 $T(b'_{m'}) = m'$；又由于 $\Phi[B] = B'$，我们有某个 $b \in B$ 使得 $\Phi(b) = b'_{m'}$，因此 $\pi(T(b)) = T(b'_{m'}) = m'$。

对于任意 $m \in M$，根据 π 的定义以及我们先前的讨论，可以看出：

$$\mathcal{T}(G_m, m) \cong_R \mathcal{T}(H_{\pi(m)}, \pi(m))$$

并且由于根据推论1，G_m 和 $H_{\pi(m)}$ 均为非冗余，因此我们必有：

$$G_m \cong_R H_{\pi(m)}$$

□

现在我们可以确定一类图：若该类中的两个图以某个根为基准的展开树几乎同构，则这两个图同构：

定义 9. 设 G 是一个有根的图。若对于每个 $v \in VG$，只要 $G_v = G$，就存在某个 $w \in N_o(v)$ 使得 $G_w = G$，则称其为强健根化的。若一个（无根）图 G 满足以下条件之一，则称其为鲁棒的：每个包含极大的半图 G_v（即 G_v 使得 $\forall w \in VG$, $G_v \subseteq G_w \hat{\Rightarrow} G_v = G_w$）都是强健根化的；或者仅由一个顶点构成且没有边。

注意，一个图是强健根化的，当且仅当它有一个根 v，使得 $E_t(v) \neq \varnothing$。

定理 7. 对于任意有限的非冗余鲁棒根图 G, H，以及 G, H（分别为 G, H 的根） S_G, S_H，若 $\mathsf{T}(G, S_G)$ 几乎同构于 $\mathsf{T}(H, S_H)$，则 $G \cong H$

证明. 为了借助引理 7 证明该定理，我们首先证明：

断言 8. 对于任意有限的强健根化图 G 和任意根 $S \in G$，对于余有限不可逃逸子空间的任意基 $B \subseteq \mathsf{T}(G, S)$，存在一个 G的根 R，使得 $R \in T[B]$。

证明. 我们通过对 $s_B \coloneqq \sum_{b \in B} |b|$进行归纳法来证明。我们还定义 $m_B \coloneqq \max\{|b| \mid b \in B\}$。

在归纳的起始步骤中，注意到若 $s_B = 0$，则 $m_B = 0$ 我们必须有$B = \{\epsilon_{S_G}\}$，因此 $M = \{S\}$，所以 M 包含一个根 S_G。
在归纳步骤中，我们假设 $s_B > 0$，因此 $m_B > 0$，所以由于B 是一个基，我们必须有 $\epsilon_S \notin B$。设 $b_m \in B$ 是一条路径，使得 $|b_m| = m_b$；由于$\epsilon_{S_G} \notin B$，我们必须有 $|b_m| > 0$，因此存在一条路径 $w \in \mathsf{W}(G, S)$ 和一条边 $e \in EG$，满足 $o(e) = T(w)$，使得 $b_m = we$。现在，对于任意其他满足 $o(e') = T(w)$ 的 $e' \in EG$，由于 B 是一个基，we' 要么在 B中有一个真前缀，要么是 B中某个词的真前缀，要么属于 B。如果 we' 在 B中有一个真前缀 $b' <_p we'$，那么我们也必须有 $b' \leq_p w$，因此 $b' <_p we$；但这与 B 是一个基这一事实矛盾。如果 we' 是某个 $b' \in B$ 的真前缀，那么我们必须有 $|b_m| = |we| = |we'| < |b'|$；但由于 $|b_m|$ 在$\{|b| \mid b \in B\}$中是极大的，这就产生了矛盾。因此我们必须有 $\forall e' \in E_o(T(w))$ $we' \in B$。现在，若我们定义：

$$B' \coloneqq B \setminus \{we' \mid e' \in E_o(T(w))\} \cup \{w\}$$

注意到 $s_{B'} < s_B$ 和 $m_{B'} \leq m_B$。为证明这是一个基，取两个元素b'_1、$b'_2 \in B'$，使得 $b'_1 \leq_p b'_2$。若有 b'_1、$b'_2 \in B$，那么由于 B是一个基，我们必有 $b'_1 = b'_2$。若 $b'_1 = w$，由于 $|b'_1| \leq |b'_2|$ 和 $|b'_2| \leq m_{B'} \leq m_B = |w| + 1 = |b'_1| + 1$，我们必有 $b'_2 = w = b'_1$ 或 $b'_2 = we$，其中某个 $e \in E_o(T(w))$. 然而，由于对于所有 $e \in E_o(T(w))$，都有 $we \notin B$，我们必有 $b'_2 = b'_1$。若 $b'_2 = w$，那么也有 $b'_1 \leq_p we$；因此，若 $b'_1 \in B$，我们必有 $b'_1 = we \notin B'$，这与假设矛盾，所以必有 $b'_1 \notin B$，从而得到 $b'_1 = w = b'_2$。因此 B' 是一个基。为证明 B' 是余有限空间的一个基，注意到 B' 显然是有限的，因为 B。此外，为证明不可逃逸性，我们注意到 $\mathsf{T}(G, S)$ 中的任意顶点都与 B' 中的某个元素，或与形如 we'的某个元素 $\leq_p$可比；然而，若它

与某个 we' 可比，它也与 $w \in B'$可比。因此 B' 是一个具有 $s_{B'} < s_B$ 的不可逃逸余有限空间的基，所以根据归纳法，对于 G 的某个根 R，有：

$$R \in T[B'] = T[B] \setminus N_o(T(w)) \cup \{T(w)\}$$

如果 $R \in T[B]$，则我们就完成了；否则 $R = T$（w），但由于 G 是强健根化的，因此必定存在另一个根 $R' \in N_o$（T（w））$\subset T[B]$。由此可知，$T[B]$ 包含一个根。

□

现在取 G、H，使它们是有限的、强健根化的非冗余对象，且根分别为 S_G、S_H，满足树 T（G、S_G）与 T（H、S_H）几乎同构。因此，根据引理 8，我们有一些基 B_G、B_H，它们是余有限不可逃逸子空间，并且存在一个双射 $\pi : M_G \to M_H$，其中 $M_G = T[B_G]$ 和 $M_H = T[B_H]$，使得对每个 $m \in M_G$ $G_m \cong H_{\pi(m)}$ 都成立。然而，根据上面的断言，对于某些根 $R_G \in M_G$ 和 $R_H \in M_H$，我们有 $G_{R_G} = G \cong G_{\pi(R_G)}$ 以及 $G_{\pi^{-1}(R_H)} \cong H = H_{R_H}$。又由于同构图的顶点数相同，且任何子图的顶点数都不超过其所属图的顶点数，因此我们有：

$$|VG| = |VH_{\pi(R_H)}| \leq |VH| = |VG_{\pi^{-1}(R_H)}| \leq |VG|$$

因此我们有 $|VH_{\pi(R_H)}| = |VH|$，但由于 $H_{\pi(R_H)}$ 是 H 的顶点诱导子图，我们因此必须有 $H_{\pi(R_H)} = H$，所以 $G \cong H$。 □

请注意，上述定理的逆命题不一定成立，因为有时对于图 G 的两个不同的根 $S \neq R$，树 T (G, S) 和 T (G, R) 并非几乎同构，参见第 5 节。稍后我们将说明如何判定两个根何时会生成几乎同构的展开树。

为了更好地理解两个不一定是强健根化的图何时会生成几乎同构的展开树，我们引入多个图的蜘蛛乘积：

定义 10. 对于任意图 $G_1, G_2, \ldots, G_n$，任意 $k_1, k_2, \ldots k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$，以及任意函数 $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$：

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \rho_i : \{1, \ldots, k_i\} \to VG_i$$

我们可以将蜘蛛积 $(G, S) := (G_1, k_1, \rho_1) \ldots, (G_n, k_n, \rho_n)$ 定义如下：

$$VG := \{S\} \sqcup \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} VG_i$$

$$EG := \{(S, \rho_i(j), j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k_i\} \sqcup \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} EG_i$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall e \in EG_i,\ (o_G(e) := o_{G_i}(e)) \wedge (t_G(e) := t_{G_i}(e))$$

$$\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq k_i,\ (o((S, \rho_i(j), j)) := S) \wedge (t((S, \rho_i(j), j)) := \rho_i(j))$$

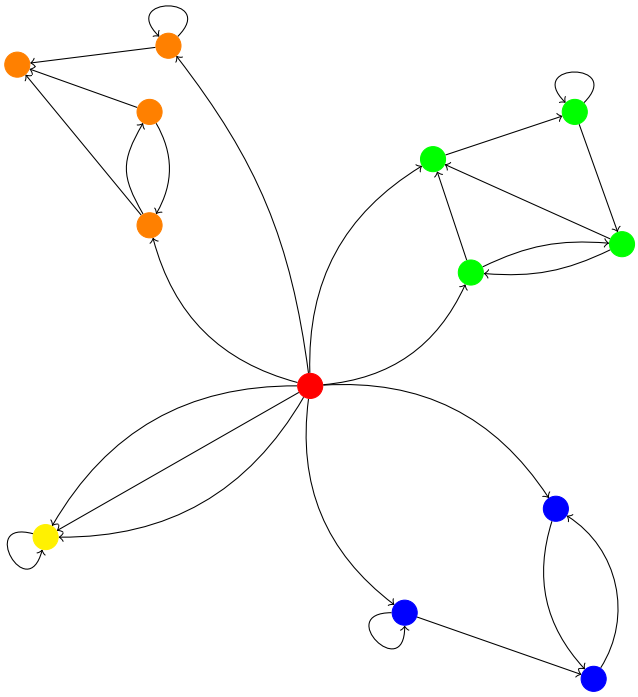


图 2：蜘蛛积的一个例子

为了使蜘蛛积 $(G_1,k_1,\rho_1)\ldots,(G_n,k_n,\rho_n)$ 成为以 S 为根的有根图，我们必须对每个 $i\in\{1,\ldots,n\}$ 满足：

$$\bigcup_{j=1}^{k_i}(G_i)_{\rho(j)}=G_i$$

除非另有说明，以下均假设这一点成立。

我们约定，如果对某个 $1\le i\le n$ 有 $k_i=0$，就直接删去蜘蛛积中对应的分量，即：

$$\langle\!\langle(G_1,\rho_1,k_1),\ldots,(G_i,\rho_i,0),\ldots(G_n,\rho_n,k_n)\rangle\!\rangle:=\\ \langle\!\langle(G_1,\rho_1,k_1),\ldots,(G_{i-1},\rho_{i-1},k_{i-1}),(G_{i+1},\rho_{i+1},k_{i+1}),\ldots(G_n,\rho_n,k_n)\rangle\!\rangle$$

注意，交换蜘蛛积中各分量的顺序不会改变其结构。还要注意，取各分量的并集也不会改变其结构，即：

$$\langle\!\langle(G_1,\rho_1,k_1),\ldots,(G_i,\rho_i,k_i),(G_{i+1},\rho_{i+1},k_{i+1})\ldots(G_n,\rho_n,k_n)\rangle\!\rangle:=\\ \langle\!\langle(G_1,\rho_1,k_1),\ldots,(G_i\sqcup G_{i+1},\rho_i\oplus\rho_{i+1},k_i+k_{i+1}),\ldots(G_n,\rho_n,k_n)\rangle\!\rangle$$

这里，对于任意 $\gamma:\{1,\ldots,k\}\to X$ 和 $\delta:\{1,\ldots,l\}\to Y$，函数 $\gamma\oplus\delta:\{1,\ldots,k+l\}\to X\cup Y$ 定义如下：

$$\gamma\oplus\delta(i):=\begin{cases}\gamma(i), & \text{if } 1\le i\le k\\ \delta(i-k), & \text{if } k<i\le k+l\end{cases}$$

因此，在考察蜘蛛积时，我们可以假设各分量是连通的。

我们对蜘蛛积的第一个观察是，沿非边塌缩等价关系对蜘蛛积取商，会得到另一个蜘蛛积。

引理 9. 对于任意蜘蛛积 $(G,S)=(G_1,k_1,\rho_1)\ldots,(G_n,k_n,\rho_n)$ 以及任意非边塌缩等价关系 $\sim$，使得 $[S]_\sim=\{S\}$，存在另一个蜘蛛积 (H,R)，使得：

$$(G/\!\sim,[S]_\sim)\cong_R(H,R)$$

证明. 首先注意，对于任意顶点 v，使得 $S\sim v$，必有 $v=S$.[¯] 因此，若定义子图 $S:=(\{S\}\cup N_o(S)\ E_o(S))$，就可以将[¯]等价关系 $\sim$限制到 $G\setminus S$，并定义 $H_0:=(G\setminus S)/\!\sim_\circ$ 取 $k_0:=k_1+k_2+\cdots+k_n$，并令 $\rho_0:\{1,\ldots,k_0\}\to VH_0$ 为如下定义的函数：

$$\forall 1\le i\le n,\forall 1\le l\le k_i,\ \rho_0(\sum_{1\le j<i}k_j+l)=\rho_i(l)$$

为了证明 $(G/\!\sim,[S]_\sim)\cong_R(H_0,k_0,\rho_0)$，我们将定义如下函数：

$$\forall x\in EG/\!\sim\sqcup VG/\!\sim,\ \Phi(x):=\begin{cases}R, & x=[S]_\sim\\ (R,\rho_0(\sum_{1\le j<i}k_j+l),\sum_{1\le j<i}k_j+l), & x=[(S,\rho_i(l),l)]\\ x, & \text{else}\end{cases}$$

¯由于正如我们所指出的，$\sim$ 在 S 上是平凡的，因此这是良定义的，也是一个同构。 □

我们在此稍微滥用一下术语：如果某个蜘蛛积不允许存在如上引理所述的非平凡等价关系，就称其为非冗余。这并不总是等同于通常意义上的非冗余，但这意味着，任何不等于整个图的半图都是非冗余的。

我们可以证明，非同构的非冗余蜘蛛积具有非同构的展开树。原因如下：若两个非冗余蜘蛛积（G,S）和（H,R）具有相同的展开树，那么存在某些非边塌缩等价关系 $\sim_G$ 和 $\sim_H$，使得（$G/\sim_G,[S]_{\sim_G}$） $\cong_R$（$H/\sim_H,[R]_{\sim_H}$）。然而，由于它们是非冗余蜘蛛积，$\sim_G$ 和 $\sim_H$ 限制在非根顶点上时必定是平凡的。因此，它们要么都平凡，要么将根与一个非根顶点关联起来，并在所有其他顶点上保持平凡。若它们都平凡，那么显然（G,S） $\cong_R$（H,R）。两种等价关系中不可能只有一个是非平凡的，因为若对某个 $v \neq S$有 $S \sim_G v$，则有 $N_t([S]_{\sim_G}) = N_t([v]_{\sim_G}) \neq \varnothing$，因为 $N_t(v) \neq \varnothing$，而从 S 到 v 存在一条路径。然而，由于 $N_t(R) = \varnothing$，不存在一个将 R 映射到 $[S]_{\sim_G}$的 H 与 $G/\sim_G$ 之间的同构。这与（$G/\sim_G,[S]_{\sim_G}$） $\cong_R$（$H/\sim_H,[R]_{\sim_H}$）矛盾。

如果两个等价关系都非平凡，令 $\phi_{\sim} : G/\sim_G \to H/\sim_H$ 为我们可以定义的有根同构，并将 ϕ 定义为从 G 到 H 的同构。我们可以定义 $\phi(S) = R$，并且对于任意顶点 $v \neq S$：将 $\phi(v)$ 定义为满足 $[\phi(v)]_{\sim_H} = \phi([v]_{\sim_G})$ 的唯一顶点。类似地，我们可以定义 ϕ 的边分量。这就得到了一个有根同构。
现在我们可以证明，图 G 的每棵展开树都几乎同构于由若干有根图的蜘蛛积所得到的展开树，这些有根图要么是鲁棒图，要么仅由一个没有边的顶点组成。

引理 10. 对于任意有根图 (H,R)，存在 $k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{Z}_{>0}$、鲁棒图 $G_1,\ldots,G_n$，以及函数 $\rho_1,\ldots,\rho_n$，如蜘蛛积的定义中所述，使得：

$$(G,S) := \langle\!\langle (G_1,\rho_1,k_1),\ldots,(G_n,\rho_n,k_n) \rangle\!\rangle$$

展开树 $\mathsf{T}(H,R)$ 几乎同构于 $\mathsf{T}(G,S)$。

证明。为了证明该引理，我们首先需要确定对于哪些顶点x，图 H_x 是强健根化的。

断言 9. 对于任意顶点 $x \in VH$，使得存在一条非空路径 $p \in \mathsf{W}(H)$，且 $O(p) = x = T(p)$，半图 H_x 是强健根化的。

证明。根据以下事实，这一点立即成立：在 H_x 中，x 是一个具有非空入邻域的根（即 $N_t(v) \neq \varnothing$）。 □

现在定义：

$$M_1 = \{x \in VH \mid \exists p \in \mathcal{W}(H),\ (p \neq \epsilon_x) \wedge (O(p) = x = T(p))\}$$

and:

$$M_2 = \{x \in VH \mid E_o(x) = \varnothing\}$$

并令 $M := M_1 \cup M_2$。现在我们可以定义：

$$\mathcal{S}_M = \{w \in \mathcal{W}(H,R) \mid \exists u \leq_p w,\ T(u) \in M\}$$

容易看出这是一个子空间，因为对于任意 $w \in \mathsf{S}_M$ 和任意 $w \leq_p w'$，我们都有某个 $u \in \mathsf{W}(H,R)$，使得 $T(u) \in M$，从而 $u \leq_p w \leq_p w'$，因此得到 $u \leq_p w'$，也就是 $u \in \mathsf{S}_M$。

现在证明 S_M 不可逃逸。取某个 $u \in \mathsf{W}(H,R)$，并考察集合：$V\mathsf{W}(H,R)_u = \{w \in \mathsf{W}(H,R) \mid u \leq_p w\}$。
如果存在某个词 $w \in V\mathsf{W}(H,R)_u$，使得 $T(w) \in M_2$，那么 $u \leq_p w \in \mathsf{S}_M$。
如果情况并非如此，我们将构造一个路径序列 $w_1, w_2, \cdots \in V\mathsf{W}(H,R)_u$，使得 $w_1 \leq_p w_2 \leq_p w_3 \leq_p \ldots$。我们可以递归地定义这个序列：先取 $w_1 := u$；当我们已经为某个 $i \in \mathsf{N}$ 定义了 w_i 时，由于 $w_i \in V\mathsf{W}(H,R)_u$，根据先前的假设，我们有 $T(w_i) \notin M_2$，于是取某个$e_i \in E_o(w_i)$。然后，若定义 $w_{i+1} = w_i e_i$，则有 $w_i \leq_p w_{i+1}$。这样便构造出了该序列。现在取顶点 $T(w_1)\ T(w_2) \cdots \in VG$；由于 G是一个有限图，我们必有某个 $j < k \in \mathsf{N}$，使得 $T(w_j) = T(w_k)$。令 $u_{jk} \in \mathsf{W}(G)$ 满足 $w_k = w_j u_{jk}$。注意，u_{jk}非空，且 $O(u_{jk}) = T(w_j) = T(w_k) = T(u_{jk})$，因此必有 $T(w_j) \in M_1$，从而 $u \leq_p w_j \in \mathsf{S}_M$。

现在，为了证明 S_M 是余有限的，我们注意到集合：

$$B_M := \{w \in \mathcal{T}(H,R) \mid (T(w) \in M) \wedge (\forall u <_p w,\ T(u) \notin M)\}$$

是该子空间的一组基。为了证明它是有限集，我们注意到，对于任意满足 $m := |u| > |VH| + 1$ 的 $u \in \mathsf{T}(H,R)$，可以写成 $u = e_1 e_2 \ldots e_m$，并注意到顶点 $t(e_1), \ldots, t(e_{m-1}) \in VH$ 不可能全都互不相同。因此，取 $j < k < m$ 使得 $t(e_j) = t(e_k)$；于是令 $w = e_1 \ldots e_k <_p u$，我们看到 $T(w) \in M_1$，因为 $e_{j+1} \ldots e_k$ 是一个以 $T(w)$ 为起点和终点的非空循环。因此，由于 $w <_p u$，我们有 $u \notin B_M$。所以必有 $B_M \subseteq \{w \in \mathsf{T}(H,R) \mid |w| \leq |VH|\}$，这是一个有限集。这就证明了 S_M 的余有限性。
现在设 $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathsf{W}(H,R)$ 为路径，使得 $B_M = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$。现在我们可以通过令 $\rho_i(1) = T(w_i)$，为每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$ 定义函数 $\rho_i : \{1\} \to H_{T(w_i)}$。现在我们可以设：

$$(G,S) := \langle\!\langle (H_{T(w_1)}, T(w_1), 1), \ldots (H_{T(w_n)}, T(w_n), 1) \rangle\!\rangle$$

现在我们可以将 $\mathsf{T}(G,S)$ 的子空间定义为：

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathcal{T}(G,S) \mid \exists 1 \leq i \leq n,\ T(u) \in VH_{T(w_i)}\}$$

注意：

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{1 \leq i \leq n} T(G,S)_{(S,T(w_i),1)}$$

因此它是一个余有限子空间，并且由于 $\mathsf{W}(G,S)$ 中每个长度大于 1 的词都属于 S。

现在由引理 7 可得

$$\mathcal{S} = \bigsqcup_{1\le i\le n} \mathcal{T}(G,S)_{(S,T(w_i),1)} \cong \bigsqcup_{1\le i\le n} \mathcal{T}(G_{T(w_i)}, T(w_i))$$

但由于对于每个 $1 \le i \le n$，我们都有 $G_{T(w_i)} = H_{T(w_i)}$：

$$\bigsqcup_{1\le i\le n} \mathcal{T}(G_{T(w_i)}, T(w_i)) = \bigsqcup_{1\le i\le n} \mathcal{T}(H_{T(w_i)}, T(w_i)) = \bigsqcup_{w\in B_M} \mathcal{T}(H_{T(w)}, T(w)) \cong \bigsqcup_{w\in B_M} \mathcal{T}(H,R)_w = \mathcal{S}_M$$

因此 $\mathsf{S} \cong \mathsf{S}_M$，所以树 $\mathsf{T}(H,R)$ 和 $\mathsf{T}(G,S)$ 几乎同构。

□

根据上述引理，如果我们想研究标签正则树的几乎自同构类，只需考察蜘蛛积的展开树，其中各分量都是鲁棒的。考察无汇点图时，可以假设积的各分量都不是仅含一个顶点且没有边的图。此外，利用引理 9，我们还可以假设这些积是非冗余的。

特别地，我们可以假设积的各分量都是非冗余的。对于任意图 G，我们定义其顶点子集：

$$VG^m := \{v \in VG \mid G_v \text{ is inclusion maximal}\}$$

为了证明：如果两个非冗余蜘蛛积生成了几乎同构的展开树，那么这两个积的分量同构，我们需要一个关于非冗余图的基本结果：

引理 11. 设 G、H 是两个非冗余图，使得

$$\forall v \in VG^m \exists v' \in VH,\ G_v \cong_R H_{v'}$$
$$\forall w' \in VH^m \exists w \in VG,\ H_{w'} \cong_R G_w$$

那么我们必有：

$$G \cong H$$

证明. 为了构造 G 与 H 之间的同构，我们将考察图 $F := G \sqcup H$（不失一般性地假设 G 和 H 不相交），并令 $\sim$ 为一个与 $\sim_V = \sim_o$ 对应的非边塌缩等价关系。由于 G 和 H 都是非冗余的，我们必有：

$$\forall x_1, x_2 \in VG \sqcup EG,\ (x_1 \sim x_2) \iff (x_1 = x_2)$$
$$\forall y_1, y_2 \in VG \sqcup EG,\ (y_1 \sim y_2) \iff (y_1 = y_2)$$

因此，对于 G 中的每个顶点 v，至多有一个 $v' \in VH$ 满足 $v \sim_o v'$（否则，我们就会通过传递性违反上述陈述）。要证明这样的 v'

确实存在，我们考察某个满足 $G_v \subseteq G_u$ 的 $u \in VG^m$ ；由于存在满足条件的某个 $u' \in VH$ ，使得有根同构 $\phi : G_u \to H_{u'}$ 存在。因此，我们有某个满足

$$F_{v'} = H_{v'} = \phi(G_v) \cong_R G_v = F_v$$

因此我们必须有 $v \sim_o v'$ （即 $v \sim v'$）。
因此存在一个单射 $\pi_V : VG \to VH$ ，使得 $\forall v \in VGv \sim \pi(v)$；由于交换 G 和 H 后可以逆向进行这一构造，它实际上是一个双射。此外，由于对每个 $e \in EG$ ，$\sim$ 都是不折叠边的，因此存在唯一的 $e' \in E_o(\pi(o(e)))$，使得 $e \sim e'$ ；并且由于 $\pi(o(e))$ 是 VH 中唯一一个与 $o(e)$ 满足 $\sim$ 关系的元素，因此这是唯一满足 $e \sim e'$ 的 $e' \in EH$。由此我们得到一个单射 $\pi_E : EG \to EH$ ，使得 $\forall e \in EGe \sim \pi(e)$；同样，由于上述构造可逆， π_E 实际上是一个双射。
因此，若令 $\pi = (\pi_V, \pi_E)$，则它是 G 与 H 之间的图同构，这里用到了 $\sim$ 是图等价关系这一事实。 □

现在我们可以证明，如果两个蜘蛛积生成了几乎同构的展开树，那么它们的分量的不交并同构。

引理 12. 对于任意两个具有鲁棒分量的非冗余蜘蛛积:

$$(G, S) := \langle\!\langle (G_1, \rho_1, k_1), \ldots, (G_n, \rho_n, k_n) \rangle\!\rangle$$
$$(H, R) := \langle\!\langle (H_1, \sigma_1, l_1), \ldots, (H_m, \sigma_m, l_m) \rangle\!\rangle$$

其中 $G_1, \ldots G_n, H_1, \ldots, H_m$ 两两不相交，且:

$$\mathcal{T}(G, S) \cong_A \mathcal{T}(H, R)$$

我们必有:

$$\bigsqcup_{i=1}^{n} G_i \cong \bigsqcup_{j=1}^{m} H_j$$

证明. 设 S、R 分别是 T (G, S) 和 T (H, R) 的余有限不可逃逸子空间，使得存在一个同构:

$$\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$$

令 B, C 分别为 S、R 的基。现在任取 $1 \le i \le n$ 个 $v \in N_o(S)$，并对任意满足存在此类边的 $k \le k_i$ ，考虑 T $(G, S)_{(S,v,k)} \cap B$。现在令 ϕ_v : T $(G, S)^{(S,v,k)} \to$ T (G_v, v) = T $((G_i)_v, v)$ 为引理 7 的证明中给出的同构。可以看出， ϕ_v(T $(G, S)_{(S,v,k)} \cap B$) 是一个不可逃逸余有限子空间的基；又因为 G_i 是鲁棒的，根据定理 7 证明中的第一项断言，存在某个 $y \in \phi_v$(T $(G, S)_{(S,v,k)} \cap B$)，使得 T(y) 是 $(G_i)_v$ 的根。现在令 $x \in$ T $(G, S)_{(S,v,k)} \cap B$ 满足 $\phi_v(x) = y$，那么 $T(x) = T(y)$，且 $G_T(x) = (G_i)^{T(y)} = (G_i)_{v_\circ}$ 现在由于 T $(G, S)_x \subseteq$ S，我们可以考察 Φ(T $(G, S)_x$)。由于 Φ 是一个同构，这也将是一个半树，其根位于基中的某个点，因此令 $z \in C$ 满足 Φ(T $(G, S)_x$) = T $(H, R)_z$

因此，我们再次可以应用引理 7，并利用 H 和 G 非冗余这一事实，得到 $G_{T(x)} \cong H_{T(z)}$。令 j 满足 $T(z) \in H_j$，我们得到：

$$(G_i)_v = G_{T(x)} \cong H_{T(z)} = (H_j)_{T(z)}$$

现在，对于任意 $w \in VG_i^m$，我们都有某个 $v \in N_o(S)$，使得 $(G_i)_w = (G_i)_v$，因此我们有某个 H_j 和某个 $u \in H_j$，使得

$$(G_i)_v = (G_i)_w \cong (H_j)_u$$

并且，通过将 $(H_j)_u$ 的根改为 v 的像，我们可以假设存在某个 $u' \in H_j$，使得

$$(G_i)_v \cong_R (H_j)_{u'}$$

因此，每个 G_i 的每个包含极大的半图都与某个 H_j 的某个半图有根同构。

反转前面的论证（我们可以通过交换 G 和 H，并用 Φ^{-1} 替换 Φ 来实现这一点），还可得出，每个 H_j 的每个包含极大的半图都与某个 G_i 的某个半图同构。

因此，当我们定义 $\tilde{G} := \bigsqcup_{i=1}^n G_i$ 和 $\tilde{H} := \bigsqcup_{j=1}^m H_j$ 时，可以注意到：

$$V\tilde{G}^m = \bigsqcup_{i=1}^n VG_i^m$$
$$V\tilde{H}^m = \bigsqcup_{j=1}^m VH_j^m$$

因此，利用引理 11，我们得到：

$$\tilde{G} \cong \tilde{H}$$

□

因此，将每个分量拆分为其连通部分并重新排列后，我们可以假设，任何两个具有鲁棒分量且生成几乎同构展开树的蜘蛛积 (G,S)、(H,R) 都具有如下形式：

$$(G,S) := \langle\!\langle (G_1,\rho_1,k_1),\ldots,(G_n,\rho_n,k_n) \rangle\!\rangle$$
$$(H,R) := \langle\!\langle (G_1,\sigma_1,l_1),\ldots,(G_n,\sigma_m,l_m) \rangle\!\rangle$$

其中每个 G_i 都是连通且鲁棒的。
为了回答这类蜘蛛积何时几乎同构，我们需要引入图幺半群（沿用 [1] 中的定义）。

定义 11. 对于任意图 G，图幺半群 $\mathbf{M}(G)$ 是由顶点 VG 生成的交换幺半群，其关系如下：

$$\forall v \in VG \text{ s.t. } E_o(v) \neq \varnothing,\ v = \sum_{e \in E_o(v)} t(e)$$

现在，我们可以将幺半群的结构与展开树的子空间及其基的结构联系起来。

引理 13. 对于任意图 G 和任意根 $S \in VG$，对于 $\mathsf{T}(G,S)$ 的不可逃逸余有限子空间的每个基 B，我们有：

$$S = \sum_{p \in B} T(p)$$

证明。我们将对 $s_B := \sum_{p \in B} |p|$ 进行归纳来证明该引理。由定理 7 的证明可知，存在一条路径 $p \in \mathsf{T}(G,S)$，其中 $E_o(T(p)) \neq \varnothing$，使得 $\{pe \mid o(e) = T(p)\} \subseteq B$，于是：

$$B' := B \setminus \{pe \mid o(e) = T(p)\} \cup \{p\}$$

也是一个余有限不可逃逸子空间的基，其中含有 $s_{B'} < s_B$；因此由归纳法，在 $\mathsf{M}(G)$ 中有：

$$S = \sum_{q \in B'} T(q) = T(p) + \sum_{q \in B' \setminus \{p\}} T(q)$$

根据图幺半群的定义，我们有：

$$S = T(p) + \sum_{q \in B' \setminus \{p\}} T(q) = \sum_{e \in E_o(T(p))} T(pe) + \sum_{q \in B' \setminus \{p\}} T(q) = \sum_{q \in B} T(q)$$

□

上述引理的逆命题可以表述如下：

引理 14. 对于任意图 G 及其任意两个根 S, R，若 G 满足在 $\mathsf{M}(G)$ 中：

$$S = R$$

则在 $\mathsf{T}(G,S)$ 中存在一个余有限不可逃逸子空间的基 B_S，并且在 $\mathsf{T}(G,R)$ 中存在一个余有限不可逃逸子空间的基 B_R，且二者之间存在一个双射：

$$\pi : B_S \to B_R$$

使得 $\forall p \in B_S,\ T(p) = T(\pi(p))$

证明。为证明这一点，我们将考察 VG 上的自由交换幺半群：$\mathsf{F}(G)$，并定义集合 $R_0 \subseteq \mathsf{F}(G) \times \mathsf{F}(G)$ 如下：

$$R_0 := \{\Big(s + v, s + (\sum_{e \in E_o(v)} t(e))\Big) \in \mathcal{F}(G) \times \mathcal{F}(G) \mid s \in \mathcal{F}(G), v \in VG, E_o(v) \neq \varnothing\}$$

在 [1, 引理 4.3] 中已证明，若两个形式和 $s, s' \in \mathsf{F}(G)$ 在 $\mathsf{M}(G)$ 中相等，则存在两个有限序列：$s = s_0, s_1, \ldots, s_n \in \mathsf{F}(G)$ 和 $s' = s'_0, s'_1, \ldots, s'_m \in \mathsf{F}(G)$，使得 $(s_0, s_1) \ldots, (s_{n-1}, s_n), (s'_0, s'_1) \ldots, (s'_{m-1}, s_m) \in R_0$ 且 $s_n = s'_m$ 属于 $\mathsf{F}(G)$。

因此，我们需要证明，对于任意这样的序列，若 $s_0 = S$ 则 $s_n = \sum_{p \in B} T(p)$，其中某个不可逃逸余有限子空间存在一组基。对此可对 n 进行归纳。

归纳从 $n = 0$ 开始时，我们只需取 $B = \{\epsilon_S\}$。

对于归纳步骤，取 $n > 0$，根据归纳假设，我们有一个不可逃逸余有限子空间 B' 的基，使得 $s_{n-1} = \sum_{p' \in B'} T(p')$。因此，根据 R_0 的定义，我们有某个 $q \in B'$，满足 $E_o(T(q)) \neq \varnothing$：

$$s_n = \sum_{p' \in B' \setminus \{q\}} T(p') + \sum_{e \in o^{-1}(\{T(q)\})} t(e) = \sum_{p \in B' \setminus \{q\} \cup \{qe | o(e) = T(q)\}} T(p)$$

现在，若我们定义 $B := B' \setminus \{q\} \cup \{qe \in \mathsf{T}(G, S) \mid o(e) = T(q)\}$，可以看出这是一个余有限不可逃逸子空间的基，因为 B' 是。由此可得所述结论。

因此，若在 G 中有两个根 S、R，使得 $S = R$ 属于图幺半群，那么我们有一个 $\mathsf{T}(G, S)$ 中余有限不可逃逸子空间的基 B_S，以及一个 $\mathsf{T}(G, R)$ 中余有限不可逃逸子空间的基 B_R，且在 $\mathsf{F}(G)$ 中：

$$\sum_{p \in B_S} T(p) = \sum_{p \in B_R} T(p)$$

根据定义，这意味着我们有一个双射：

$$\pi : B_S \to B_R$$

使得 $\forall p \in B_S,\ T(p) = T(\pi(p))$，如所需。 □

现在我们可以将图幺半群与几乎同构联系起来：

定理 10. 对于任意非冗余图 G，以及任意两个根 S, R，展开树 $\mathsf{T}(G, S)$、$\mathsf{T}(G, S)$ 几乎同构，当且仅当：

$$S = R$$

在图幺半群中。

证明. 对于“仅当”方向，假设 $\mathsf{T}(G, S)$、$\mathsf{T}(G, S)$ 几乎同构，并取某些余有限子空间 $\mathsf{S} \subseteq \mathsf{T}(G, S)$、$\mathsf{S}' \subseteq \mathsf{T}(G, R)$，它们之间存在一个同构：

$$\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$$

令 B, B' 分别为 S 和 S' 的基。由于 $\Phi[B] = B'$，这就给出了 $\pi := \Phi|_B$ 与 B 之间的一个双射 B'。此外，由引理 7 可得 $\forall b \in B,\ \mathsf{T}(G_{T(b)}, T(b)) \cong_R \mathsf{T}(G_{T(\pi(b))}, T(\pi(b)))$，因此，由于 G 是非冗余的，我们必有 $T(b) = T(\pi(b))$。所以我们有：

$$\sum_{p \in B} T(p) = \sum_{p' \in B'} T(p')$$

在图幺半群中。引理 13 给出：

$$S = \sum_{p \in B} T(p) = \sum_{p' \in B'} T(p') = R$$

对于逆命题，我们从引理 14 中取一些余有限不可逃逸子空间 S ⊆ T (G, S)、S′ ⊆ T (G, R)，使得对于它们各自的基 B, B'，有一个双射：

$$\pi : B \to B'$$

使得 $\forall p \in B_S,\ T(p) = T(\pi(p))$。因此，由引理 7 可得 T (G, S)$_p$ ≅ T (G, R)$_{\pi(p)}$。由于这些半树是 S 和 S′ 的连通分支，这就给出了它们之间的一个同构。因此，树 T (G, S) 和 T (G, R) 几乎同构。

□

如果将此定理与定理 7 结合起来，我们就可以对强健根化图的展开树进行分类。该分类将每棵这样的树唯一地关联到一个元组，该元组由一个非冗余鲁棒根图和图幺半群中的一个元素组成，且该元素等于此图的某个根。要对一般的展开树进行分类，我们必须推广上述结果。

引理 15. 对于任意图 G、任意正整数 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 以及任意函数 $\rho : \{1, \ldots, k\} \to VG$ 使得

$$\bigcup_{1 \le i \le k} G_{\rho(i)} = G$$

对于 T ((G, k, ρ) S) 的某个余有限不可逃逸子空间的每个基 B，我们都有：

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(i) = \sum_{b \in B} T(b)$$

在 M(G) 中

证明。首先注意，如果 M((G, k, ρ)) 中的任意两个和 $s, t \in$ F(G) 相等，那么根据引理 4.3]，我们有 $s = s_0, s_1 \ldots s_n, t = t_0, t_1, \ldots, t_m \in$ F((G, k, ρ))，使得 $s_n = t_m$，并且

$$(s_0, s_1), \ldots, (s_{n-1}, s_n), (t_0, t_1), \ldots, (t_{m-1}, t_m) \in R_0(\langle\langle (G, k, \rho) \rangle\rangle)$$

其中 R_0 的定义与引理 14 的证明中相同。然而，由于 S 没有入边，且 s, t 在和中没有 S，因此 $s_1, \ldots, s_n$ 和 $t_1, \ldots, t_m$ 也都没有。于是我们有

$$(s_0, s_1), \ldots, (s_{n-1}, s_n), (t_0, t_1), \ldots, (t_{m-1}, t_m) \in R_0(G)$$

从而得到 $s = t \in$ M(G)。因此，只需证明引理中的等式在 M((G, k, ρ)) 中成立。

为此，我们注意到，在 M((G, k, ρ)) 中：

$$S = \sum_{e \in E_o(S)} t(e) = \sum_{i=1}^{k} t((S, \rho(i), i)) = \sum_{i=1}^{k} \rho(i)$$

根据引理 13，我们在 M((G, k, ρ)) 中得到：

$$S = \sum_{p \in B} T(p)$$

由此可得：

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(i) = \sum_{b \in B} T(b)$$

在 M((G, k, ρ)) 中，因此也在 M(G) 中。 □

同理，我们可以将引理 14 推广如下：

引理 16. 对于任意非冗余图 G、任意两个 $k, l \in \mathbb{Z}_{>0}$，以及任意两个函数 $\rho : \{1, \ldots, k\} \to VG$, $\sigma : \{1, \ldots, l\} \to VG$，使得

$$\bigcup_{1 \le j \le l} G_{\sigma(j)} = \bigcup_{1 \le i \le k} G_{\rho(i)} = G$$

若有：

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(i) = \sum_{j=0}^{l} \sigma(j)$$

在 M(G) 中，则对于：

$$(G_\rho, S_\rho) := \langle\!\langle (G, \rho, k) \rangle\!\rangle$$
$$(G_\sigma, S_\sigma) := \langle\!\langle (G, \sigma, l) \rangle\!\rangle$$

树 T (G_ρ, S_ρ)、T (G_σ, S_σ) 几乎同构。

证明。首先定义：

$$s_1 := \sum_{i=1}^{k} \rho(i)$$
$$r_1 := \sum_{j=1}^{l} \sigma(j)$$

由 [1, 引理 4.3]，因为 $s_1 = r_1$ 属于 M(G)，所以我们有 F(G) 的两个有限序列：$s_1, \ldots, s_n$ 和 $r_1, \ldots, r_m$，使得 $(s_1, s_2) \ldots, (s_{n-1}, s_n) \in R_0(G)$，$(r_1, r_2) \ldots, (r_{m-1}, r_m) \in R_0(G)$，且 $s_n = r_m$ 属于 F (G)。现在，若令 $s_0 = S_\rho$，则 $(s_0, s_1) \in R_0(G_\rho)$，因此 $(s_0, s_1) \ldots, (s_{n-1}, s_n) \in R_0(G_\rho)$。由引理 14 的证明中相同的论证可知，存在 T (G_ρ, S_ρ) 的某个余有限不可逃逸子空间的基 B_ρ，使得

$$s_n = \sum_{b \in B_\rho} T(b)$$

类似地，我们也有 T（G_σ, S_σ）的余有限不可逃逸子空间的一组基 B_σ，使得

$$r_m = \sum_{b \in B_\sigma} T(b)$$

并且由于 $s_n = r_m \in$ F (G)，我们有一个双射：

$$\pi : B_\rho \to B_\sigma$$

其中 $\forall p \in B_\rho$, $T(p) = T(\pi(p))$。这便给出了以基 B_ρ 和 B_σ为基的余有限不可逃逸子空间之间的一个同构。因此，树 $\mathsf{T}(G_\rho, S_\rho)$ 和 $\mathsf{T}(G_\sigma, S_\sigma)$ 几乎同构。 □

这为我们提供了一种方法，可以判断具有相同分量的两个蜘蛛积何时几乎同构：

定理 11. 对于任意两个非冗余蜘蛛积：

$$(G_\rho, S_\rho) := \langle\!\langle (G_1, \rho_1.k_1), \ldots, (G_n, \rho_n.k_n) \rangle\!\rangle$$
$$(G_\sigma, S_\sigma) := \langle\!\langle (G_1, \sigma_1.l_1), \ldots, (G_n, \sigma_n.l_n) \rangle\!\rangle$$

那么 $\mathsf{T}(G_\rho, S_\rho)$ 与 $\mathsf{T}(G_\sigma, S_\sigma)$ 几乎同构，当且仅当对于每个 $m \in \{1, \ldots, n\}$，都有：

$$\sum_{i=1}^{k_m} \rho_m(i) = \sum_{j=1}^{l_m} \sigma_m(j)$$

属于 $\mathsf{M}(G_m)$。

证明. 我们先证明定理在 $n = 1$ 的情形下成立。对此，取 $G := G_1$。

蕴含关系的“若”方向直接由引理 16 得出。对于逆命题，我们可以取不可逃逸余有限子空间 $\mathsf{S}_\rho \subsetneq \mathsf{T}(G_\rho, S_\rho)$ 和 $\mathsf{S}_\sigma \subsetneq \mathsf{T}(G_\sigma, S_\sigma)$，使它们同构。设 B_ρ 和 B_σ 为它们的基，于是存在一个双射：

$$\pi : B_\rho \to B_\sigma$$

使得 $\forall b \in B_\rho$，$\mathsf{T}(G_\rho, S_\rho)_b \cong_R \mathsf{T}(G_\sigma, S_\sigma)_{\pi(b)}$。然而，由于 G 是非冗余的，且每个 $b \in B_\rho$ 都有 $T(b) \in G$（因为这些子空间不等于整棵树），根据引理 7 $T(b)$，必有 $= T(\pi(b))$。因此：

$$\sum_{b \in B_\rho} T(b) = \sum_{b' \in B_\sigma} T(b')$$

在 $\mathsf{M}(G)$ 中，因此根据引理 15，我们有：

$$\sum_{i=1}^{k_1} \rho_1(i) = \sum_{b \in B_\rho} T(b) = \sum_{b' \in B_\sigma} T(b') = \sum_{j=1}^{l_1} \sigma_1(j)$$

在 $\mathsf{M}(G)$ 中，从而在 $n = 1$ 的情形下得到该定理。
现在，为了证明一般性结果，只需证明以下断言：断言 12。$\mathsf{T}(G_\rho, S_\rho)$ 和 $\mathsf{T}(G_\sigma, S_\sigma)$ 几乎同构，当且仅当对每个 $i \in \{1, \ldots, n\}$，$\mathsf{T}((G_i, \rho_i, k_i))$ 和 $\mathsf{T}((G_i, \sigma_i, l_i))$ 几乎同构。

证明。这里，我们将把 $\mathsf{T}((G_i,\rho_i,k_i))$ 和 $\mathsf{T}((G_i,\sigma_i,l_i))$ 分别视为 $\mathsf{T}(G_\rho,S_\rho)$ 和 $\mathsf{T}(G_\sigma,S_\sigma)$ 的子树，它们包含同一个根。

因此，对于同构的余有限不可逃逸子空间 $\mathsf{S}^\rho \subsetneq \mathsf{T}(G_\rho,S_\rho)$ 和 $\mathsf{S}^\sigma \subsetneq \mathsf{T}(G_\sigma,S_\sigma)$，子图 $\mathsf{S}_i^\rho := \mathsf{S}^\rho \cap \mathsf{T}((G_i,\rho_i,k_i)) \subseteq \mathsf{T}((G_i,\rho_i,k_i))$ 和 $\mathsf{S}_i^\sigma := \mathsf{S}^\sigma \cap \mathsf{T}((G_i,\sigma_i,k_i)) \subseteq \mathsf{T}((G_i,\sigma_i,k_i))$ 是余有限不可逃逸子空间。现在，若取一个同构 $\Phi : \mathsf{S}^\rho \to \mathsf{S}^\sigma$，则对于任意路径 $p \in V\mathsf{S}^\rho$，都有：$(G_\rho)_{T(p)} \cong_R (G_\sigma)_{T(\Phi(p))}$，因为这些图是非冗余的。

然而，由于 S_σ 不包含 ϵ_{S_σ}，我们必须有 $T(\Phi(p)) \neq S_\sigma$，从而得到 $(G_\sigma)_{T(\Phi(p))} = (G_\rho)_{T(\Phi(p))}$。因此，由于 G_ρ 是非冗余的，我们有 $T(p) = T(\Phi(p))$。因此，任取 $p \in \mathsf{S}_i^\rho$，我们必有 $T(\Phi(p)) \in G_i$，进而有 $\Phi(p) \in (G_i,\sigma_i,k_i)$。因此，函数 $\Phi|_{\mathcal{S}_i^\rho}$ 是 S_i^ρ 与 S_i^σ 之间的同构，这表明 $\mathsf{T}((G_i,\rho_i,k_i))$ 与 $\mathsf{T}((G_i,\sigma_i,k_i))$ 几乎同构。对于逆命题，取 S_i^ρ 和 S_i^σ 分别为 $\mathsf{T}((G_i,\rho_i,k_i))$ 与 $\mathsf{T}((G_i,\sigma_i,l_i))$ 的余有限不可逃逸子空间，使得对每个 $1 \le i \le n$，$\mathsf{S}_i^\rho \cong \mathsf{S}_i^\sigma$。现在令 $\Phi_i : \mathsf{S}_i^\rho \to \mathsf{S}_i^\sigma$ 为这些子空间之间的同构。现在我们可以定义：

$$\mathcal{S}^\rho := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_i^\rho$$
$$\mathcal{S}^\sigma := \bigcup_{i=1}^n \mathcal{S}_i^\sigma$$

由于所有的 S_i^ρ、S_i^σ 都是余有限且不可逃逸的，子空间 S^ρ 和 S^σ 也都是余有限且不可逃逸的。我们可以通过对每个 $1 \le i \le n$ 设定 $\Phi|_{\mathcal{S}_i^\rho} := \Phi_i$ 来定义函数 $\Phi : \mathsf{S}^\rho \to \mathsf{S}^\sigma$。由于所有 S_i^ρ 的交集仅由顶点 ϵ_{S_ρ} 构成，且对于每个 $1 \le i \le n$，我们有 $\Phi_i(\epsilon_{S_\rho}) = \epsilon_{S_\sigma}$，因此 Φ 是良定义的。此外，Φ 是同构，因为所有的 Φ_i 都是同构。这表明 $\mathsf{T}(G_\rho,S_\rho)$ 和 $\mathsf{T}(G_\sigma,S_\sigma)$ 几乎同构。 □

现在，若对于每个 $m \in \{1,\dots,n\}$，我们有：

$$\sum_{i=1}^{k_m} \rho_m(i) = \sum_{j=1}^{l_m} \sigma_m(j)$$

那么，由于我们已经证明每个 $\mathsf{T}((G_m,\rho_m,k_m))$ 和 $\mathsf{T}((G_m,\sigma_m,l_m))$ 几乎同构，我们得到 $\mathsf{T}(G_\rho,S_\rho)$ 和 $\mathsf{T}(G_\sigma,S_\sigma)$ 几乎同构。反过来，若 $\mathsf{T}(G_\rho,S_\rho)$ 和 $\mathsf{T}(G_\sigma,S_\sigma)$ 几乎同构，则 $\mathsf{T}((G_m,\rho_m,k_m))$ 和 $\mathsf{T}((G_m,\sigma_m,l_m))$ 必须几乎同构。因此，正如我们已经证明的，对于每个 $m \in \{1,\dots,n\}$：

$$\sum_{i=1}^{k_m} \rho_m(i) = \sum_{j=1}^{l_m} \sigma_m(j)$$

□

由于根据引理 10，每棵标签正则有向树都几乎同构于一个非冗余蜘蛛积，其分量鲁棒且连通。

根据引理 12，这些分量在同构意义下是唯一的。最后，根据定理 11，只要顶点的和在图幺半群中保持不变，我们就可以改变根所连接的顶点。这使我们能够将每棵标签正则有向树与一个唯一的连通鲁棒非冗余图有限集相关联，该有限集的并集也是非冗余的；此外，还关联一个由这些图幺半群中的元素构成的集合，其中每个元素都可以写成顶点之和，且这些顶点对应的半图覆盖整个图。

现在我们可以看出，为了确定两个有根图何时具有几乎同构的展开树，必须通过引理 15 找到一个由连通鲁棒图构成的蜘蛛积，使其展开树与原图的展开树几乎同构。现在，我们可以将每个蜘蛛积化简为非冗余蜘蛛积。如果蜘蛛积的同构分量之间不存在一一对应关系，那么这些展开树就不可能几乎同构。如果存在这样的对应关系，我们就可以按照定理 11 比较每个分量中邻居的和（在该分量的幺半群中）。

这概述了一种用于确定两个图是否具有几乎同构展开树的算法。由于该算法涉及求解某个交换有限生成幺半群中的字问题，而这是一个复杂度呈指数级的问题 [8], ，这或许表明，判断两个图是否具有几乎同构的展开树无法在多项式时间内完成。

5 例子

作为例子，我们可以关注仅有 2 个顶点的图。

因此，我们取邻接矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 我们将记作

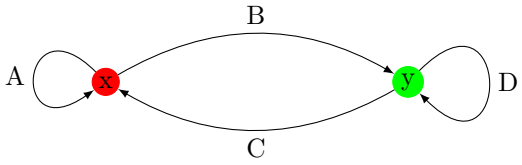


图 3：一个有两个顶点的图，其中 A, B, C, D 表示边的重数

该图的顶点为 x, y。由于该图上的任何非平凡非边收缩等价关系 $\sim$ 都必须满足 $x \sim y$。因此，我们必有 $A + B = |E_o(x)| = |E_o(y)| = C + D$。

反过来，如果事实上有 $A+B=C+D=:N$，我们记作：

$$E_o(x)=:\{e_1,\ldots,e_N\} \text{ and } E_o(y)=:\{d_1,\ldots,d_N\}$$

我们可以通过设定 $\sim$ 来定义等价关系 $x\sim y$：

$$\forall i\in\{1,\ldots,N\},\ e_i\sim d_i$$

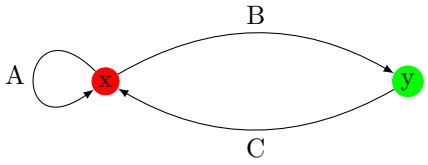
显然，这实际上是一种非边折叠关系。对该等价关系取商后，我们得到一个只有一个顶点且带有 N 个环的图，显然它是非冗余的。因此，两个各有 2 个顶点的图 G、H，其基于 x 的展开树几乎同构，当且仅当它们的邻接矩阵分别为 $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}A' & B'\\ C' & D'\end{pmatrix}$，且满足

$$A+B=C+D=A'+B'=C'+D'$$

或者 $A=A'$、$B=B'$、$C=C'$ 和 $D=D'$。

现在，为了判断两个具有两个顶点的图的展开树何时几乎同构，我们假设它们是非冗余的，即 $A+B\neq C+D$。那么，如果一个具有两个顶点的图中以任意根为基点的展开树与另一个具有两个顶点的图的展开树同构，则这两个图必定同构。因此，我们只需判断以一个根为基点的展开树是否与以另一个根为基点的展开树同构。此外，为使 x 和 y 都成为根，我们可以假设 B、$C>0$。我们需要通过考察 $x=y$ 在图幺半群中何时成立，来判断以 x 为基点的展开树何时与以 y 为基点的展开树几乎同构。为此，我们将应用 [9, 第 6] 章中的 CPC 算法，它可以生成幺半群的规范表示，从而求解字问题。此外，通过交换 x 和 y，我们还可以假设 $A\geq D$。

首先，我们来看当 $D=0$ 时会发生什么；在这种情况下，图如下所示：



图幺半群由以下等式给出：

$$\begin{cases}x=Ax+By\\ y=Cx\end{cases}$$

这些等价于：

$$\begin{cases}x=(A+BC)x\\ y=Cx\end{cases}$$

因此，该幺半群只包含 x 的倍数，并且当且仅当 M、$N \neq 0$ 且 $M \equiv N$ 模 $A + CB$，或 $M = N = 0$ 时，$Mx = Nx$ 成立。由此可见，由于 $y = Cx$，若要使 $x = y$ 成立，就必须有 $C = 1$，或者 $B = 1$ 且 $A = 0$。因此，只有在这些情况下，基于 x 和 y 的展开树才彼此几乎同构。
现在我们可以假设 A、$D > 0$，并且通过交换 x 和 y，可以假设 $A \geq D$。

我们的主要例子族是满足 $B = 1$ 和 $D = 2$ 的那些例子。于是，图幺半群由以下关系给出：

$$\begin{cases} x = Ax + y \\ y = Cx + 2y \end{cases} \tag{1}$$

我们可以将 $A = C + N + 1$ 写成 $N = A - C - 1$。存在某个 k 和 $0 \leq r < N$，使得 $kN = A + r$。现在重复之前的计算，得到：

$$x = Cx + (A + r)x + y + x = (C + 2 + r)x$$

so:

$$x = (C + 1 + N)x + y = x + (N - r - 1)x + y = (N - r)x + y$$

and:

$$(r + 2)x + y = (C + r + 2)x + 2y = x + 2y$$

如果将此代入 1 中的第二个方程，我们得到：

$$y = Cx + 2y = (C - 1)x + x + 2y = (C - 1)x + (r + 2)x + y = (C + r + N)x + 2y = (C+r+N-1)x+(x+2y) = (C+r+N-1)x+(2x+y) = (C+r+N+1)x+y = (r+1)x$$

我们还有：

$$x = (N - r)x + y = (N + 1)x$$

现在，为了证明 $x \neq y$，我们必须证明 1 中的条件可由以下条件推出，因而与之等价：

$$\begin{cases} x = (N + 1)x \\ y = (r + 1)x \end{cases} \tag{2}$$

这可以通过迭代来证明：

$$Ax + y = (A + r + 1)x = (kN + 1)x = ((k - 1)N + 1)x = \cdots = (0N + 1)x = x$$

and:

$$Cx + 2y = (C + 2r + 2)x = ((C + 1) + 2r + 1)x = (C + 1 + r + r + 1)x = ((k - 1)N + r + 1) = ((k - 2)N + r + 1)x = \cdots = (r + 1)x = y$$

因此，要使图幺半群中有 $Kx = Lx$（对于 K、$L > 0$），就必须有 $K \equiv L$ 模 N。所以，当且仅当 $r + 1 \equiv 1$ 模 N 时，才有 $x = y$；而且由于

$0 \le r < N$ 我们必须有 $r = 0$。因此，以 x 和 y 为基础的展开树几乎同构，当且仅当 $N|A$，也就是说 $A - C - 1|A$。现在注意，如果我们有一个含两个顶点的图 G，其邻接矩阵为：$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，且 $A - C \ge 0$ 和 $B - D \ge 0$，那么邻接矩阵为：$\begin{pmatrix} A - C & B - D + 1 \\ C & D \end{pmatrix}$ 的图与 G 具有相同的图幺半群，因为：

$$\begin{cases} x = Ax + By \\ y = Cx + Dy \end{cases}$$

等价于：

$$\begin{cases} x = (A - C)x + (B - D + 1)y \\ y = Cx + Dy \end{cases}$$

类似地，若有 $C - A \ge 0$ 和 $D - B \ge 0$，则邻接矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C - A + 1 & D - B \end{pmatrix}$ 的图也与 G 具有相同的图幺半群。只要 $B, C > 0$，这些约化就会使 $A + D$减小。因此，我们可以反复应用这些约化，得到一个满足以下条件之一的图：$A = 0$, $D = 0$，或 $(A - C)(B - D) < 0$。$A = 0$ 或 $D = 0$ 的情形此前已经处理过。现在，若 $(A - C)(B - D) < 0$，问题就变得更复杂了。我检查了 $A, B, C, D \le 100$的所有情形，并发现，对于每个满足 $A \ge D$ 且在图幺半群中有 $x = y$ 的此类图，都有 $B = 1$ 和 $D = 2$。由此我提出以下猜想：

猜想 1. 对于任意图 G，其顶点集为 $\{x, y\}$，邻接矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，且满足 $A \ge D$, $A, B, C, D > 0$ 和 $(A - C)(B - D) < 0$，当且仅当 $B = 1$, $D = 2$ 和 $(A - C - 1)|A$时，$x = y$ 属于 M(G)。

6 致谢

我谨向我的博士导师 George Willis、Colin Reid 和 Stephan Tornier 致谢，感谢他们在我撰写本文期间给予指导并为本文校对。我还要感谢 Roozbeh Hazrat 在一次“Symmetry in Newcastle”研讨会上向我介绍了图幺半群。最后一章的计算是在 GAP [4] 和 C++ 中完成的。本文的撰写得到了澳大利亚研究理事会 FL170100032 项目拨款的支持。

参考文献

[1] Pere Ara、M Angeles Moreno 和 Enrique Pardo。《图代数的非稳定 K 理论》。《代数与表示论》，10(2):157–178，2007年。

[2] Michael Codish、Graeme Gange、Avraham Itzhakov 和 Peter J Stuckey。《图中的对称性破缺：nauty 方法》。载于《约束编程原理与实践国际会议》，第157–172页。施普林格，2016年。[3] Luiz Gustavo Cordeiro、Daniel Gon ̧calves 和 Roozbeh Hazrat。《有向图的天赋幺半群及其在图代数中的应用》。《伊比利亚美洲数学杂志》，38(1):223–256，2021年。[4] GAP Group。《群、算法与编程》，4.12.2版，2022年。[5] William G Leavitt。《环的模类型》。《美国数学会汇刊》，103(1):113–130，1962年。[6] Waltraud Lederle。《汤普森群 V 的拓扑满群与 tdlc 完备化》。《数学年刊》，378(3):1415–1434，2020年。[7]Weimin Li。《具有正则幺半群的图》。《离散数学》，265(1):105–118，2003年。[8] Ernst W Mayr 和 Albert R Meyer。《交换半群与多项式理想字问题的复杂度》。《数学进展》，46(3):305–329，1982年。[9] Jos ́e Carlos Rosales 和 Pedro A Garc ́ıa-S ́anchez。《有限生成交换幺半群》。Nova 出版社，1999年。[10] Franco Scarselli、Marco Gori、Ah Chung Tsoi、Markus Hagenbuchner 和 Gabriele Monfardini。《图神经网络的计算能力》。《IEEE《神经网络汇刊》》，20(1):81–102，2009年。[11] Elizabeth A. Scott。《一种可用于构造有限表示无限单群的方法》。《代数杂志》，90(2):294–322，1984年。