arXiv:2303.05765v1 [math.GR] 10 Mar 2023

˜群的 B_0-不变量的子群定理

ZEINAB ARAGHI ROSTAMI、MOHSEN PARVIZI 和 PEYMAN NIROOMAND

Abstract. U. Jezernik 和 P. Moravec 已证明，若 G 是一个有限群，且有一个指数为 n的子群 H，那么 Bogomolov 乘子的第 n 次幂 ˜ $\mathcal{G}$, $B_0(G)^n$ 同构于 $B_0(H)$的一个子群。本文旨在为中心对中心的 w 群簇证明一个类似结果，其中 w是任意外交换子字。

1. 引言与预备知识

诺特问题 [13] 是不变量理论中的一个基本问题，它询问 G-不变量函数域 $\mathbb{C}(V)^G$ 是否是 $\mathbb{C}$上的纯超越扩张，其中 G 是给定的有限群？Artin 和 Mumford 在[2] 引入了这一问题的一个障碍 $H^2_{nr}(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，称为域扩张 $\mathbb{C}(V)^G/\mathbb{C}$的非分歧布劳尔群。Bogomolov 在 [4] 证明，非分歧上同调群 $H^2_{nr}(\mathbb{C}(V)^G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$与 $B_0(G) = \bigcap_{A\leq G} \ker res^G_A$规范同构，其中 A 是 G的一个阿贝尔子群，且 $res^G_A : H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$是通常的上同调限制映射。 $B_0(G)$定义为 G的 Schur 乘子 $\mathcal{M}(G) = H^2(G, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$的子群。Kunyavskii 在 [8] 将 $B_0(G)$命名为 G的 Bogomolov 乘子。Moravec 在 [11]˜证明，在有限群类中，群 $B_0(G) = \mathcal{M}(G)/\mathcal{M}_0(G)$与 $B_0(G)$非规范同构，其中 Schur 乘子 $\mathcal{M}(G)$同构于由 $x \wedge y \to [x, y]$给出的 $\ker(G \wedge G \to [G, G])$，而 $\mathcal{M}_0(G)$是 $\mathcal{M}(G)$的一个子群，定义为 $\mathcal{M}_0(G) =< x \wedge y \mid [x, y] = 0,\ x, y \in G >$。Moravec 在 [11] 证明，若$F/R$是群 G的一个自由表示，则 $\tilde{B}_0(G) \cong {}^{F'\cap R}_{<K\ F}(\ )_{\cap R>}$，且它是 G的一个不变量。最近，我们在 [1], 将 Bogomolov 乘子的概念推广到相对于群簇的情形。本文给出该主题的一些新结果，它们对应于 Jezernik 和 Moravec 在 [7] 以及 Bogomolov 在 [5]所得的 Bogomolov 乘子相关结果。这里我们介绍下一节所需的一些预备知识。

设 x 和 y 是群 G中的两个元素。那么 $[x, y]$，即 x的换位子

Key words and phrases. Bogomolov 乘子， $\tilde{B}_0$-不变量，外交换子字，VP 覆盖， ν-stem, Schur-Baer 类。

和 y分别表示元素 $x^{-1}y^{-1}xy$ 和 $y^{-1}xy$。更高权的左范数化交换子递归定义为 $[x_1, x_2, ..., x_n] =[[x_1, ..., x_{n-1}], x_n]$。若 M和 N是群 G的两个子群，则 $[M, N]$ 表示由所有满足 $m \in M$和 $n \in N$的交换子 $[m, n]$ 生成的 G 的子群。特别地，若 $M = N = G$，则 $[G, G]$（记作 G'）是 G的导出子群。下中心列和上中心列分别记作$\gamma_c(G)$，其中 $c \geqslant 1$，以及 $Z_d(G)$，其中 $d \geqslant 0$。设 F_∞ 是由可数无限集 $\{x_1, x_2, ...\}$自由生成的自由群。若 $u = u(x_1, ..., x_s)$ 和$v = v(x_1, ..., x_t)$是 F_∞中的两个字，则 u与 v的复合 $u\circ v$定义为

$$u\circ v = u(v(x_1, ..., x_t), ..., v(x_{(s-1)t+1}, ..., x_{st})).$$

特别地，若干幂零词的复合称为多重幂零词，即 $\gamma_{c_1+1,...,c_t+1} = \gamma_{c_1+1}\circ\gamma_{c_2+1}\circ...\circ\gamma_{c_t+1}$，其中 $\gamma_{c_i+1}(1 \leq i \leq t)$ 是一个由不同变量构成的幂零词。外交换子词递归定义如下。词 x_i 是一个权为一的外交换子词（或 o.c 词）。若 $u = u(x_1, ..., x_s)$ 和 $v = v(x_{s+1}, ..., x_{s+t})$ 分别是权为 s和 t的 o.c 词，则 $w(x_1, ..., x_{s+t}) = [u(x_1, ..., x_s)\ v(x_{s+1}, ..., x_{s+t})]$ 是一个权为 $s + t$的 o.c 词。

设 V 是 F_∞ 的一个子集，且 $\mathcal{V}$ 是由定律集 V 定义的群簇。P. Hall 在 [6] 中引入了与簇 $\mathcal{V}$ 和群 G 相关联的词子群 $V(G)$ 和边缘子群 $V^*(G)$ 的概念（更多信息请参见 [9, 12], ）。

设 G 是任意一个群，其自由表示为 $G \cong F/R$，且 V 是一组 o. c. 字。~ ~则相对于簇 $\mathcal{V}$，G 的 B_0-不变量 $\mathcal{V}B_0(G)$ 定义为

$$\mathcal{V}\tilde{B_0}(G) = \frac{R \cap V(F)}{< T(F) \cap R >},$$

其中 $T(F) = \{v(f_1, ..., f_s) \mid v \in V, f_i \in F, 1 \leq i \leq s\}$。

~我们在 [1], 中证明，群 G 的 B_0-不变量总是阿贝尔的，且与 G 所选的自由表示无关。作为一个特例，若 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔群簇，则 $A(F) = F'$ 且 $T(F) = \{[x, y] \mid x, y \in F\}$。因此，在有限~情形下，$G$ 的 B_0-不变量恰好就是 Bogomolov 乘子

$$\tilde{B_0}(G) \cong \frac{R \cap F'}{< T(F) \cap R >}$$

如果 $\mathcal{N}_c$ 是类不超过 $c \geq 1$ 的幂零群簇，那么 $N_c(F) = \gamma_{c+1}(F)$ 且 $T(F) = \{[x_1, ..., x_{c+1}] \mid x_i \in F, 1 \leq i \leq c + 1\}$。在这种情况下，这个乘子

˜称为 G 的 c-幂零 B_0-乘子，定义如下

$$\mathcal{N}_c\tilde{B_0}(G) = \tilde{B_0}^{(c)}(G) = \frac{R \cap \gamma_{c+1}(F)}{< T(F) \cap R >}.$$

命题 1.1（[1]-命题 3.6）。设 $\mathcal{V}$ 是由恒等律集 V 定义的群簇，且 G_1 和 G_2 是群。那么

$$\mathcal{V}\tilde{B_0}(G_1 \times G_2) \cong \mathcal{V}\tilde{B_0}(G_1) \times \mathcal{V}\tilde{B_0}(G_2).$$

定义 1.2（[1]-定义 4.1）。设 $\mathcal{V}$ 是一个群簇， Q 是一个群， N 是一个 Q-模。若 Q 中元素的平凡词在 G中有平凡的提升，则 N 对 Q 的扩张 $1 \to N \xrightarrow{\chi} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ 是 VP 扩张。

定义 1.3（[1]-定义 4.4）。若 $\chi(N) \subseteq V^*(G)$，则 N 对 Q 的 VP 扩张 $1 \to N \xrightarrow{\chi} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ 是边缘的。

命题 1.4（[1]-命题 4.5）。设 $1 \to N \xrightarrow{\chi} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ 是一个边缘扩张。当且仅当 $\chi(N) \cap T(G) = 1$时，该序列是 VP 扩张，其中$T(G) = \{v(f_1, ..., f_s) \mid f_i \in F, v \in V\}$。

定义 1.5（[1]-定义 4.6）。若群 G 的正规子群 N 使扩张 $1 \to N \to G \to G/N \to 1$ 成为 VP 扩张，则称 N 为 G 的 VP 子群。

注意，当 N 是 G 的边缘子群时， N 是 VP 子群，当且仅当 $N \cap T(G) = 1$。

定义 1.6。设 $1 \to N \xrightarrow{\chi} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$ 是一个边缘 VP 扩张。若 $\chi(N) \subseteq V(G)$，则称该序列为 $\mathcal{V}$-茎。

定义 1.7。每个满足 $N \cong \mathcal{V}B_0(G)$ 的 $\mathcal{V}$-茎边缘 VP 扩张 $1 \to N \xrightarrow{\chi} G \xrightarrow{\pi} Q \to 1$˜，称为 VP 覆盖；在这种情况下，称 G 为 Q 的 VP 覆盖群。

定义 1.8（[10]-定义 2.1）。设 $\mathcal{V}$ 是由定律集 V 定义的群簇。若边缘因子 $V^{*^G}(G)$ 有限，且其阶为 m，则称 $\mathcal{V}$ 为 Schur-Baer 群簇；此时，对任意群 G，词子群 $V(G)$ ~~也~~有限，且 $|V(G)| \mid m^k$， $k \in \mathbb{N}$。

I. Schur 在 [14] 证明了阿贝尔群簇具有 Schur-Baer 性质。此外，R. Baer 在 [3] 指出，由 o.c. 词定义的簇也具有这一性质。

定理 1.9（[9]-定理 1.17）。设 $\mathcal{V}$ 是由定律集 V定义的一个簇。则以下条件等价

(1) $\mathcal{V}$ 是一个 Schur-Baer 类；(2) 对任意有限群 G，贝尔不变量 $\mathcal{V}\mathcal{M}(G)$ 的阶整除 $|G|$的某个幂。

注 1.10. 我们知道，B_0不变量 $\mathcal{V}B_0(G)$ 是贝尔不变量 $\mathcal{V}\mathcal{M}(G)$ 的一个子群，因此，若 $\mathcal{V}$ 是一个 Schur-Baer 类，那么对于任意有限群 G，B_0不变量 $\mathcal{V}B_0(G)$ 的阶整除 $|G|$ 的某个幂。

2. 主要结果

2015 年，U. Jezernik 和 P. Moravec 在 [7], 中证明，若 G 是有限群，且 H 是 G 的指数为 n 的子群，则 $\tilde{B_0}(G)^n$ （Bogomolov 乘子的第 n 次幂）同构于 $B_0(H)$ 的一个子群。本节将把上述结果推广到由 w 给出的中心对中心群簇，其中 w 是任意外交换子字。

引理 2.1. 设 A 是 H 的边缘 VP 子群，即 $A \leq V^*(H)$ 且 $A \cap T(H) = 1$。若 $G \cong H/A$，则 $V(H) \cap A$ 是 $\mathcal{V}B_0(G)$ 的一个同态像。

证明。设 $H \cong F/R$ 是 H的一个自由表示。那么对于某个F的子群 K ，有 $A \cong K/R$。因此$G \cong F/K$ ，并根据定义

$$\mathcal{V}\tilde{B_0}(G) = \frac{K \cap V(F)}{< T(F) \cap K >} \quad ; \quad T(F) = \{v(f_1, ..., f_s) \mid v \in V, f_i \in F; 1 \leq i \leq s\}$$

以及 Dedekind 定律，我们有

$$\begin{aligned} V(H) \cap A = V(\frac{F}{R}) \cap \frac{K}{R} = \frac{V(F)R}{R} \cap \frac{K}{R} = \frac{V(F)R \cap K}{R} \\ = \frac{(V(F) \cap K)R}{R} \cong \frac{V(F) \cap K}{(V(F) \cap K) \cap R} = \frac{V(F) \cap K}{V(F) \cap R}. \end{aligned}$$

由于 K/R 是 F/R的一个边缘 VP 子群，根据 1.5，$(K/R) \cap T(F/R) = 1$。因此 $< T(F) \cap K > \subseteq R$。由此可得

$$V(H) \cap A = \frac{V(F) \cap K}{V(F) \cap R} \cong \frac{\frac{V(F) \cap K}{< T(F) \cap K >}}{\frac{V(F) \cap R}{< T(F) \cap K >}} = \frac{\mathcal{V}\tilde{B_0}(G)}{\frac{V(F) \cap R}{< T(F) \cap K >}}.$$

因此结论成立。 □

推论 2.2。设 $\mathcal{V}$ 是一个 Schur-Baer 类，G 是一个有限群。若 H 是一个群，且有边缘 VP 子群 A，使得$H/A \cong G$。那么 $V(H) \cap A$ 是同构于 $\mathcal{V}B_0(G)$的一个子群。

证明。根据引理 2.1，$V(H) \cap A$ 是 B_0-不变量 $\mathcal{V}B_0(G)$ 的一个同态像。此外，[1] 中的注 1.10 和定义 3.1 表明，$\mathcal{V}B_0(G)$ 是一个有限阿贝尔群。因此，根据有限阿贝尔群的性质，$V(H) \cap A$ 同构于 $\mathcal{V}B_0(G)$ 的一个子群。□

设 $\mathcal{W}$是由外交换子字 $w = w(x_1, ..., x_r)$ 定义的一个簇，$\mathcal{V}$ 是群的中心对中心 $\mathcal{W}$ 簇。我们可以看到，簇 $\mathcal{V}$ 由交换子词 $[w, x_1, x_2]$定义。这里我们研究这个簇。

引理 2.3（[10]-引理 3.5）。设 B 是群 E 的一个子群，且指数有限 n，并且 $\mathcal{V}$ 是与前文相同的某个群簇。若 $x \in V^*(E) \cap V(E)$，则对所有 $y_1, ..., y_r \in B$, $[w(y_1, ..., y_r)\ x^n] \in V(B)$。特别地，若 $L \subseteq V^*(E) \cap V(E)$，则 $[W(B)\ L^n] \subseteq V(B)$。

现在我们要证明本节的主要结果。

定理 2.4。设 $\mathcal{V}$ 是由交换子词定义的群簇，$[w, x_1, x_2]$ 与前文相同，并且 G 是一个具有 VP 覆盖 $1 \to L \to G^* \to G \to 1$的有限群。若 H 是 G 中指数为 n 的子群，并且对某个 G^*的子群 B， $H \cong \frac{B}{L}$，~ ~，则 $[W(B)\ \mathcal{V}B_0(G)^n]$ 同构于 $\mathcal{V}B_0(H)$的一个子群。

~证明。我们知道， $L \cong \mathcal{V}B_0(G)$， $L \leq V(G^*) \cap V^*(G^*)$ 和 $L \cap T(G^*) = 1$。由于 $[H : G] = n$，因此 $[G^* : B] = n$。此外，利用引理 2.3， $[W(B)\ L^n] \subseteq V(B)$。另一方面，我们有 $L \subseteq V^*(B)$ 和 $L \cap T(B) = 1$。因此， L 是 B 中的边缘 VP 子群。此外，由于簇 $\mathcal{V}$ 具有 Schur-Baer 性质，推论 2.2~ ~表明， $L \cap V(B)$ 同构于 $\mathcal{V}B_0(H)$ 的一个子群，并且 $[W(B)\ \mathcal{V}B_0(G)^n] \subseteq$~ ~$L \cap V(B)$。因此， $[W(B)\ \mathcal{V}B_0(G)^n]$ 同构于 $\mathcal{V}B_0(H)$ 的一个子群。□

现在给出以下推论，它们推广了[7] 中的命题 6.2 和 [5]中的引理 2.6。

推论 2.5. 设 G 是一个有限群， G_p 是 G的一个 Sylow p-子群。若 G~有一个 VP 覆盖 $1 \to L \to G^* \to G \to 1$，且满足 $G_p \cong B/L$。那么 $[W(B)\ \mathcal{V}B_0(G)_p]$ 与 $\mathcal{V}B_0(G_p)$的一个子群~同构。

证明. 设 G 是一个阶为 $p^\alpha n$的有限群，使得 $(p, n) = 1$。那么 $[G, G_p] = n$~，并且根据定理 1.9， $\mathcal{V}B_0(G)$ 的阶整除 $|G| = p^\alpha n$的某个幂。~ ~因此， $\mathcal{V}B_0(G)^n = \mathcal{V}B_0(G)_p$。故由定理 2.4 即可完成证明。□

推论 2.6. 在定理 2.4 的假设和记号下，若$\mathcal{V}\tilde{B}_0(G)^{[n]}$ 是 $\mathcal{V}\tilde{B}_0(G)$中所有阶与 n互素的元素所组成的集合，则$[W(B)\ \mathcal{V}\tilde{B}_0(G)^{[n]}]$ 同构于 $\mathcal{V}\tilde{B}_0(H)$的一个子群。

证明。我们知道， $G^{[n]}$ 是 G^n的一个子群。因此，利用定理 2.4 即可得到所需结论。□

推论 2.7. 根据定理 2.4 的假设和记号，设~ ~d和 e分别为 $[W(B)\ \mathcal{V}B_0(G)]$和 $\mathcal{V}B_0(H)$的指数。则 d整除 ne。特别地，当 H 是 G的循环子群时，d 整除 n。

~ ~证明。根据假设， $\mathcal{V}B_0(G) \cong L \leq V^*(G^*)$, $L \leq B$ 且 $\mathcal{V}B_0(G) \leq V^*(B)$。因此 Turner-Smith 定理 [15] 表明

$$[W(B), \mathcal{V}\tilde{B}_0(G)^n] = [W(B), \mathcal{V}\tilde{B}_0(G)]^n.$$

因此，利用定理 2.4，我们有

$$[W(B), \mathcal{V}\tilde{B}_0(G)]^n = [W(B), \mathcal{V}\tilde{B}_0(G)^n] \leq \mathcal{V}\tilde{B}_0(H)$$

因此， $[W(B)\ \mathcal{V}\tilde{B}_0(G)]^{ne} \leq \mathcal{V}\tilde{B}_0(H)^e = 1$，所以 d 整除 ne。 □

2002年，F. Bogomolov [[5]-引理 2.6] 证明，若 G 是有限群，且 G_p 是 G 的一个 Sylow p-子群，则 G ($i.e.\ B_0(G)_p$) 的 Bogomolov 乘子~的 Sylow p-子群同构于其~ Sylow p-子群 $B_0(G_p)$的 Bogomolov 乘子的一个子群。现在我们希望将这个问题推广到任意簇。

引理 2.8. 设 $G = H_1 \times H_2$ 是两个有限 p 群和 q 群~ ~H_1 与 H_2 的直积。则 $\mathcal{V}B_0(G)_p \cong \mathcal{V}B_0(G_p)$。

~ ~证明。我们知道 $\mathcal{V}B_0(G_p) = \mathcal{V}B_0(H_1)$。由命题 1.4，得到

$$\mathcal{V}\tilde{B}_0(H_1 \times H_2) \cong \mathcal{V}\tilde{B}_0(H_1) \oplus \mathcal{V}\tilde{B}_0(H_2).$$

~现在由注 1.10， $\mathcal{V}B_0(H_i)$ 是一个 p-群，并且是一个 q-群，其中 $i = 1$ 分别为 2。~ ~ ~因此 $\mathcal{V}B_0(G)_p \cong \mathcal{V}B_0(H_1) = \mathcal{V}B_0(G_p)$。 □

引理 2.9。设 G 是一个有限幂零群，且有一个 sylow p-子群 G_p。那么 ~ ~$\mathcal{V}B_0(G)_p \cong \mathcal{V}B_0(G_p)$。

证明。众所周知，有限幂零群是其 sylow$p$-子群的直积。因此 $G = G_{p_1} \times G_{p_2} \times ... \times G_{p_k}$。对 k 应用归纳法并使用引理 2.8，即可完成证明。□

推论 2.10。设 G 是一个有限幂零群。若 G~ 的每个 sylow p-子群都有平凡的 B_0 不变量，那么 G 也如此。

~证明。利用注 1.10， $\mathcal{V}B_0(G)$ 的阶整除 $|G|$ 的某个幂。现在由引理 2.9 得到结论。 □

References

[1] Z. Araghi Rostami, M.Parvizi, P. Niroomand, $\tilde{B_0}$-*invariant of groups*, 可见于 arxiv: 2211.08725。[2] M. Artin 和 D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are notrational*, 《伦敦数学会会刊》(3) 25（1972 年），75-95。[3] R. Baer, *Endlichkeitskrieterien fur kommutatorgruppen*, 《数学年刊》124（1952 年），161-177。

[4] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, 《数学评论》30（1988 年），455-485。[5] F. A. Bogomolov, J. Maciel, T. Petrov, *Unramified Brauer groups of finite simple groups oftype A_l*, 《美国数学杂志》126（2004），935–949。[6] P. Hall, '*Nilpotent Groups*, 加拿大数学大会，阿尔伯塔大学，1957 年；玛丽女王学院数学讲义，玛丽女王学院，伦敦，1970 年。[7] U. Jezernik, P. Moravec, *Commutativity preserving extensions of groups*, 《爱丁堡皇家学会会刊 A辑》148（2018），第 3 期，575-592。[8] B. Kunyavskii, *The Bogomolov multiplier of finite simple groups*, 《有理性问题的上同调与几何方法》，209-217，数学进展丛书，282，Birkhauser Boston, Inc, 波士顿，MA，2010。[9] C. R. Leedham-Green, S. Mckay, *Baer-invariants Isologism Varietal laws and Homology*, 《数学学报》137（1976），99-150。[10] M. R. R. Moghaddam, B. Mashayekhy 和 S. Kayvanfar, *Subgroup Theorems for the Baer-Invariant of Groups* , 《代数杂志》206（1998），17-32。[11] P. Moravec, *Unramified brauer groups of finite and infinite groups*, 《美国数学杂志》134（2012），1679–1704。[12] H. Neumann, *Varieties of Groups*, 柏林-海德堡-纽约：Springer，1967。[13] E. Noether, *Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe*, 《数学年刊》78（1916），221–229。[14] I. Schur, *Uber die darstellung der endlichen gruppen durch gebrochene lineare substitutionen*, 《纯粹与应用数学杂志》127（1904），20-50。[15] R.F. Turner-Smith, *Marginal subgroup properties for outer commutator words*, 《伦敦数学会会刊》14（1964），321-341。

Department of Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
Email address: araghirostami@gmail.com, zeinabaraghirostami@alumni.um.ac.ir
Department of Pure Mathematics, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran
Email address: parvizi@um.ac.irDepartment of Mathematics, Damghan University, Damghan, Iran*Email address*: niroomand@du.ac.ir