arXiv:2303.05766v1 [math.NT] 10 Mar 2023

三重积情形中的高阶扩张群

LI CAI 和 YANGYU FAN

摘要：在这篇短文中，我们计算所有不可约表示的高阶扩张群，并推导出三重乘积情形下有限长度表示的重数公式。

目录

1. 引言2. 证明 1
参考文献 3
9

1. 引言

设 F 是一个 p-adic 域。设 L/F 是一个三次étale扩张， D/F 是一个四元数代数。设$G = \mathrm{Res}_{L/F}D^\times$ 和 $H = D^\times$。注意， Z_G 的中心与 H 的交为 $Z_H = \mathbb{G}_m$。记 Rep($F^\times\backslash G(F)$) 为光滑 $F^\times\backslash G(F)$-表示范畴。

在这篇简短的注记中，我们证明高阶 Ext 群消失

$$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = 0, \quad i > 0.$$

对任意泛型 $\pi \in$ Rep($F^\times\backslash G(F)$)均成立。结合局部迹公式方法的结果，我们得到了任意不可约 $\pi \in$Rep($F^\times\backslash G(F)$) 的重数公式。

为陈述这一结果，我们引入更多记号。对任意不可约 $\pi \in$ Rep($F^\times\backslash G(F)$)，考虑其几何重数

$$m_{\mathrm{geo}}(\pi) = \sum_{T\in\mathcal{T}} |W(H,T)|^{-1} \int_{F^\times\backslash T(F)} c_\pi(t) D^H(t) dt$$

其中

- 支撑 $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G,H)$是 H中的一组环面。若 D 是分裂的， $\mathcal{T}$由 $F^\times$ 和非分裂 t
  H中的极大环面。若 D 是非分裂的，则 $\mathcal{T}$由 H中的非分裂极大环面组成。
- $W(H,T) = N_H(T)/Z_H(T)$.
- c_π 是 G（F）的半单轨迹上的正则化特征（见 [12, 定义 2。5]）。
- $D^H(t) = |\det(1-\mathrm{ad}(t))|_{\mathfrak{h}/\mathfrak{h}_t}|$是 $H(F)$的半单轨迹上的魏尔判别式。
- 测度 dt的归一化方式使得体积 Vol($F^\times\backslash T(F)$ dt) $= 1$。

借助局部迹公式方法，Wan 证明了以下关于温和表示的重数公式:

定理 1.1 (Wan [11], C.2 和 C.3)。 对于任意不可约温和的 $\pi \in$ 表示范畴($F^\times\backslash G(F)$)，

$$m(\pi) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = m_{\mathrm{geo}}(\pi).$$

注 1.2。 事实上，结合 Prasad 的结果，上述重数公式对泛型表示也成立[8, 9] （参见 [11, 注 C. 2.3]）。

一般而言，猜想 [10, 猜想 7.1] （针对 Gan-Gross-Prasad 模型）和 [12, 猜想 7.6] （针对所有球对）认为，重数公式应当对所有有限长度的 $\pi \in$ 表示范畴($F^\times\backslash G(F)$) 成立，其中重数 $m(\pi)$ 由欧拉-庞加莱数取代

$$\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) := \sum_{i\geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}).$$

从哲学角度看，这样的重数公式可以视为一种黎曼-罗赫定理（见 [10,注 7.2]）。

例 1.3. 假设 D 分裂，且 $L = E \oplus F$，其中 E/F 是一个二次域扩张。令$\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2 \in$ 表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$，其中

- $\pi_1 = I_{\mathrm{GL}_2(E)\, B(E)}\, \chi_1 \boxtimes \chi_2 \in$ 表示范畴$(F^\times\backslash \mathrm{GL}_2(E))$ 为特征χ_1、χ_2的归一化抛物诱导：$E^\times \to \mathbb{C}^\times$ 满足 $\chi_1\chi_2|_{F^\times} = 1$;
- $\pi_2 = \mathbb{C} \in$表示范畴$(F^\times\backslash \mathrm{GL}_2(F))$ 为平凡表示。

Then

$$\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash \mathrm{GL}_2(F)}(\pi_1, \mathbb{C}).$$

置 $\chi' := \chi_1\overline{\chi_2}$ 其中 $-$ 表示关于 E/F的伽罗瓦共轭。众所周知（例如参见[6, 定理 5。2]） $m(\pi) \le 1$，且等号成立当且仅当 $\chi_1|_{F^\times} = \chi_2|_{F^\times} = 1$ 或 $\chi' = 1$。

另一方面，根据抛物诱导的正则化特征的一个性质 [12, 命题 2.7]

$$m_{\mathrm{geo}}(\pi) = \frac{1}{2}\int_{F^\times\backslash E^\times} c_\pi(t) D^H(t) dt = \frac{1}{2}\int_{F^\times\backslash E^\times} (\chi'(t) + \chi'(\bar{t})) dt.$$

特别地，$m_{\mathrm{geo}}(\pi) \le 1$，且等号成立当且仅当 $\chi' = 1$。

因此，在 $\chi' \neq 1$和 $\chi_1|_{F^\times} = \chi_2|_{F^\times} = 1$的情形下，

$$m(\pi) \neq m_{\mathrm{geo}}(\pi).$$

这与定理1.1 相容，因为 π_2 （因此 π）既非泛型也非温和。

以下是本文的主要结果。

定理 1.4. 对于任意不可约 $\pi \in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$，若 D分裂，则其为泛型，

$$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = 0, \quad i \ge 1.$$

此外，对于任意有限长度的 $\pi \in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$，重数公式成立

$$\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = m_{\mathrm{geo}}(\pi).$$

注1.5. 此前，

- 惠特克模型的消失结果已知：若 G 是定义在 F 上的连通拟分裂约化群，$B = TN$是 G的一个博雷尔子群，ψ是 $N(F)$上的泛型特征，则对任意不可约表示 $\pi \in \mathrm{Rep}(G(F))$ 以及任意 $i \ge 1$，由[10, 命题 2.8]

$$\mathrm{Ext}^i_{N(F)}(\pi, \psi^{-1}) \cong \mathrm{Ext}^i_{G(F)}\left(i_{N(F)}^{G(F)}\psi, \pi^\vee\right) \cong \mathrm{Ext}^i_1(\pi_{N,\psi}, \mathbb{C}) = 0.$$

对于一般线性群的 Gan-Gan-Prasad 模型，消失结果由 Chan-Savin [5] 得出。

- 目前已知的 [12, 猜想 7.6] 的情形只有群情形 [10, 命题 2.1(4)]，、惠特克模型 [12, 第 8 节1], 以及一般线性群的 Gan-Gross-Prasad 模型（[10, 定理 4.2]，并且注意，在这种情况下，$\mathcal{T} = \mathcal{T}(G, H)$ 的支撑 $m_{\text{几何}}$ 为 $\{1\}$）。

我们说明定理 1.4 的证明。事实上，已知当 $i \ge 2$ 时，对于任意 π，$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = 0$（见 [10, 命题 2.9]，，另见下文命题 2.1(1)）；若 π 为超尖点，则 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = 0$（见 [3, 定理 5.4. 1]，，另见下文命题 2.1(1)）。消失结果的证明可归结为证明：对于非超尖点 π，$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = 0$。为此，我们运用标准工具：Bernstein-Zelevinsky 的几何引理和 Schneider-Stuhler 对偶（[7, 定理 2]，另见下文定理 2.2）。有了这些消失结果后，注意到等式两边都是可加的，且在非分歧扭曲族中保持不变，便可由温和版本（定理 1.1）推出有限长度表示的重数公式。

事实上，对于所有不可约的 $\pi \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash G(F))$ 表示以及所有 i，我们都计算了 $\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C})$。这些结果结合 Schneider-Stuhler 对偶，给出了不可约 $\mathrm{GL}_2(F)$-子表示在不可约 $\mathrm{GL}_2(E)$-表示中的完整分类，这与 [7, 命题 9.1] 类似，适用于 $L = F \oplus F \oplus F$ 的情形（事实上，[7, 命题 9.1] 中还额外要求满足中心特征条件：$\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2 \boxtimes \pi_3$ 的中心特征平凡。这里不再要求这一条件）。

命题 1.6. 假设 $L = E \oplus F$ 和 D 是分裂的。对于不可约的 $\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2 \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash G(F))$，$\pi_2^\vee$ 是 π_1 的一个 $\mathrm{GL}_2(F)$-子表示，当且仅当

- $\pi_1 = \xi \circ$ 行列式和 $\pi_2 = \xi^{-1}|_{F^\times} \circ$ 行列式；或
- $\pi_2^\vee$ 是超尖点表示，并且是 $\pi_1|_{\mathrm{GL}_2(F)}$ 的一个商表示；或者

- $\pi_2 = \mathrm{St}_F \otimes \xi$, $\pi_1 = I_{\mathrm{GL}_2(E)\ B(E)}\ \chi_1 \boxtimes \chi_2$ 使得 $\xi\chi_1|_{F^\times} = \xi\chi_2|_{F^\times} = 1$ 且 $\xi_E\chi' \neq 1$。这里，$\xi_E = \xi \circ N_{E/F}$、 $\chi' = \chi_1\overline{\chi_2}$和 St_F是 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的 *Steinberg* 表示。

致谢 本工作深受 [10] 和 [7] 之惠，这一点显而易见。我们感谢田野教授始终如一的鼓励，也感谢陈其源教授给予的宝贵讨论。

2. 证明

对于任意定义在 F 上的约化群 Γ 以及任意中心特征 ω: $Z_\Gamma(F) \to \mathbb{C}^\times$，令 $\mathrm{Rep}(\Gamma(F)\ \omega)$ 表示 $\mathrm{Rep}(\Gamma(F))$ 的全子范畴，其中对象满足 $Z_\Gamma(F)$ 通过 ω 作用。对于任意对象 $\pi, \pi' \in \mathrm{Rep}(\Gamma(F)\ \omega) \subset \mathrm{Rep}(\Gamma(F))$，令 $\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi,\pi')$（分别为 $\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi,\pi')$）表示范畴 $\mathrm{Rep}(\Gamma(F)\ \omega)$（分别为 $\mathrm{Rep}(\Gamma(F))$）中的第 i 个扩张群。令 $\Gamma'(F)$ 为 p-进群 $\Gamma(F)$ 的一个闭子群，其模特征为 $\delta_{\Gamma'}$。注意，当 Γ' 为约化群时， $\delta_{\Gamma'}$ 是平凡的。用 $I^{\Gamma(F)}_{\Gamma'\ F}(\ )$（分别用 $i^{\Gamma(F)}_{\Gamma'\ F}(\ )$）表示归一化诱导（分别为紧诱导）。注意，对于任意 $\sigma \in \mathrm{Rep}(\Gamma'(F))$，$(i^{\Gamma(F)}_{\Gamma'\ F}(\ )\sigma)^\vee = I^{\Gamma(F)}_{\Gamma'\ F}(\ )\sigma^\vee$，其中 $-^\vee$ 表示相应范畴中的光滑对偶。此外，若 $\Gamma' = MN$ 是一个抛物子群，其 Levi 因子为 M，则用 J_N 表示关于 Γ' 的归一化 Jacquet 函子。

我们记录以下将频繁用到的 Ext 群的一些基本性质。

命题 2.1. 关于 *Ext* 群，我们有以下结果。

(1) 对任意不可约 $\pi \in$表示范畴$(\Gamma(F))$、光滑的 $\pi' \in$表示范畴$(\Gamma(F))$ 以及任意 $i >$的分裂秩 Z_Γ

$$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi,\pi') \cong \mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi',\pi) = 0.$$

若 π 是超尖点且具有中心特征 ω，则 π 既是射影对象，也是内射对象，属于表示范畴$(\Gamma(F)\ \omega)$。特别地，对任意 $i \geq 1$

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi,\pi') \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi',\pi) = 0.$$

(2) 对任意 $\pi \in$表示范畴$(\Gamma(F)\ \omega)$、 $\sigma \in$表示范畴$(\Gamma(F)\ \omega^{-1})$ 以及任意 $i \geq 0$

$$\mathrm{Ext}^i_{Z_\Gamma(F)\backslash\Gamma(F)}(\pi\otimes\sigma,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi,\sigma^\vee) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega^{-1})}(\sigma,\pi^\vee).$$

(3) 限制函子 表示范畴$(\Gamma(F))$ $\to$表示范畴$(\Gamma'(F))$ 将射影对象映为射影对象；归一化诱导函子 $I^{\Gamma(F)}_{\Gamma'\ F}(\ )$: 表示范畴$(\Gamma'(F))$ $\to$表示范畴$(\Gamma(F))$ 将内射对象映为内射对象。此外，对任意 $\sigma \in$ 表示范畴$(\Gamma'(F))$、 $\pi \in$ 表示范畴$(\Gamma(F))$ 以及任意 $i \geq 0$

$$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}\left(\pi, I^{\Gamma(F)}_{\Gamma'(F)}\sigma\right) \cong \mathrm{Ext}^i_{\Gamma'(F)}\left(\pi, \sigma\otimes\delta^{1/2}_{\Gamma'}\right).$$

当 $\Gamma' = MN$ 是一个 *Levi* 因子为 M 的抛物子群时，归一化 *Jacquet* 函子 J_N: 表示范畴$(\Gamma(F))$ $\to$表示范畴$(M(F))$ 将射影对象映为射影对象。对于任意 $\sigma \in$表示范畴$(M(F))$以及任意 $i \geq 0$

$$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}\left(\pi, I^{\Gamma(F)}_{\Gamma'(F)}\sigma\right) \cong \mathrm{Ext}^i_{M(F)}(J_N(\pi),\sigma).$$

证明。 超尖点表示的性质可参见 [3, 定理 5.4.1]。其他结果总结于 [10, 第 2] 节。 □

对于任意不可约的 $\pi \in$表示范畴$(\Gamma(F)\ \omega)$，令 $d(\pi)$（分别为 $d'(\pi)$）表示 Z_M（分别为 $Z_M \cap [\Gamma,\Gamma]$）的分裂秩，其中 M 是承载 π 的尖点支撑的任意 Levi 子群。计算高阶 Ext 群的关键要素是以下 Schneider-Stuhler 对偶定理。

定理 2.2 (定理 1,2 见 [7])。 设 $\pi \in$表示范畴$(\Gamma(F)\ \omega)$ 是任意不可约表示，且 $D(\pi)$是 π 的 *Aubert-Zelevinsky* 对合。则

- 对于任意 $\pi' \in$表示范畴$(\Gamma(F))$，$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi,\ \pi') = 0$对于 $i > d(\pi)$以及对于 $0 \leq i \leq d(\pi)$，存在一个非退化配对

$$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi,\pi') \times \mathrm{Ext}^{d(\pi)-i}_{\Gamma(F)}(\pi', D(\pi)) \to \mathrm{Ext}^{d(\pi)}_{\Gamma(F)}(\pi, D(\pi)) \cong \mathbb{C},$$

- 对于任意 $\pi' \in \mathrm{Rep}(\Gamma(F)\ \omega)$，$\mathrm{Ext}^i{}_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F)\ \omega)}(\pi,\ \pi') = 0$对于 $i > d'(\pi)$以及对于 $0 \leq i \leq d'(\pi)$，存在一个非退化配对

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi,\pi') \times \mathrm{Ext}^{d'(\pi)-i}_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi', D(\pi)) \to \mathrm{Ext}^{d'(\pi)}_{\mathrm{Rep}(\Gamma(F),\omega)}(\pi, D(\pi)) \cong \mathbb{C}.$$

注记 2.3. 一般而言，非退化性意味着：若 $\pi' = \varinjlim_n \pi'_n$ 是有限生成 $\Gamma(F)$-子模 π'_n 的归纳极限，则

$$\mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi,\pi') = \varinjlim_n \mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi,\pi'_n), \quad \mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi', D(\pi)) = \varprojlim_n \mathrm{Ext}^i_{\Gamma(F)}(\pi'_n, D(\pi))$$

是有限维 $\mathbb{C}$空间的归纳极限（分别地，射影极限），而配对是这些有限维空间上完美配对的直接极限。

在三重乘积情形中，Aizenbud-Sayag 的结果 [1] 保证了下文所有 Ext 群均为有限维，且非退化性具有通常的含义。

下文中，我们将重点讨论三重乘积情形。

情形 D 非分裂时，证明很直接。

命题 2.4. 假设 D 非分裂。那么对任意不可约的 $\pi \in$ 表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$，

$$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0, \quad i > 0.$$

证明。 注意到 $Z_H\backslash H$ 是各向异性的。于是由命题 2.1 (1)， $\mathbb{C}$ 是内射的，结论随即得出。 □

为处理 D 分裂情形，我们需要考虑以下 Waldspurger 环面情形。

引理 2.5. 假设 D 是分裂的。设 $K \subset D$ 是一个 *étale* 二次 F-代数，并将 $F^\times$ 对角嵌入到$D^\times(F) \times K^\times$ 中。那么对于任意泛型不可约 $\pi \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash(D^\times(F) \times K^\times))$，

$$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash K^\times}(\pi,\mathbb{C}) = 0, \quad i \geq 1.$$

证明。 假设 $\pi = \sigma \boxtimes \xi$ 满足 $\sigma \in \mathrm{Rep}(D^\times(F))$ 且 $\xi \in \mathrm{Rep}(K^\times)$。若 K/F 是一个域扩张，则$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash K^\times}(\sigma\boxtimes\xi,\mathbb{C}) = 0$，其中 $i \geq 1$ 由命题 2.1 (1) 得出。

若 $K = F \oplus F$， $\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash K^\times}(\sigma\boxtimes\xi,\mathbb{C}) = 0$，其中 $i \geq 2$ 由命题 2.1 (1) 得出。对于 $i = 1$，可将定理 2.2 应用于 $\mathbb{C} \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash K^\times)$，其中 $d(\mathbb{C}) = 1$ 且 $D(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$。于是有

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash K^\times}(\sigma\boxtimes\xi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash K^\times}(\mathbb{C}, \sigma\boxtimes\xi) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{K^\times}(\xi^{-1},\sigma).$$

将 $K^\times$ 与分裂环面 $T(F)$ 对应，并令 $\mathcal{K}(\sigma)$ 为 σ的 Kirillov 模型。记 $\xi = \xi_1 \boxtimes \xi_2$。于是根据 [2, 命题 4.7。2]，

$$\mathrm{Hom}_{T(F)}(\xi^{-1}, \mathcal{K}(\sigma)|_T) = \{\phi \in \mathcal{K}(\sigma) \mid \phi(ax) = \xi_1^{-1}(a)\phi(x) \text{ for any } a \in F^\times\} = 0.$$

□

假设 D 是分裂的。根据命题 2.1(1)，对 $i \geq 2$， $\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$。下文将逐一计算 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})$。令 $T \subset B \subset \mathrm{GL}_2$分别为对角环面和上三角矩阵群， St_F为 $\mathrm{GL}_2(F)$ 的 Steinberg 表示， $|\cdot|_F$为 $F^\times$ 上的模特征。

命题 2.6。 假设 D 是分裂的，且 L/F 是三次域扩张。那么对于 $\pi \in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$中的不可约对象，$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = 0$。

证明。 根据命题 2.1 (1,3)（ H 的模特征是平凡的），当 π 是超尖点时，

$$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash G(F)}(\pi, I^{G(F)}_{H(F)}\mathbb{C}) = 0.$$

若 π是一维的，则根据定理 2.2对于 $\mathbb{C} \in$表示范畴$(F^\times\backslash H(F))$，其中 $D(\mathbb{C}) = \mathrm{St}_F$且$d(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$，

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathrm{St}_F,\pi) = 0.$$

注意，当 π 是特殊级数时，则 $\pi \hookrightarrow I^{\mathrm{GL}_2}_{(L)\,B(L)}\chi_1 \boxtimes \chi_2$ 且$\chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|_L$。因此，只需证明对于 $\pi = I^{\mathrm{GL}_2}_{(L)\,B(L)}\chi \in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$，其中 $\chi = \chi_1 \boxtimes \chi_2$ 且$\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\cdot|_L^{-1}$，

$$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0.$$

根据几何 度量引理（参见 [9, 第 6 节。1]），存在一个 $F^\times\backslash H(F)$-表示 s

$$0 \to i^{H(F)}_{F^\times}\mathbb{C} \to \pi \to I^{H(F)}_{B(F)}\chi\delta_B \to 0$$

其中 δ_B 是 $B(F)$ 的模特征。该短正合列导出一个长正合列 nce

$$0 \to \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B,\mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) \to \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(i_{F^\times}^{H(F)}\mathbb{C},\mathbb{C}) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B,\mathbb{C}) \to \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) \to \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(i_{F^\times}^{H(F)}\mathbb{C},\mathbb{C}) \to 0.$$

根据命题2.1(2,3),

$$\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(i_{F^\times}^{H(F)}\mathbb{C},\mathbb{C}) = \mathbb{C}, \quad \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(i_{F^\times}^{H(F)}\mathbb{C},\mathbb{C}) = 0.$$

注意到

- if π is reducible, $I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B$ is irreducible;
- if π is irreducible, we may assume $I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B$ is irreducible by replacing χ by χ^w, the twisting of χ by $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, if necessary.

Thus

$$\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B,\mathbb{C}) = 0.$$

此外，根据定理 2.2 对于 $\mathbb{C} \in$表示范畴$(F^\times\backslash H(F))$，其中 $D(\mathbb{C}) =\mathrm{St}_F$且 $d(\mathbb{C}) = 1$,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\mathrm{St}_F, I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B) = 0.$$

因此，$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$和 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$。 □

命题 2.7。假设 D 是分裂的，且 $L = E \oplus F$。对于 $\pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2 \in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$ 不可约，维数$_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\ \mathbb{C}) \le 1$，等号成立当且仅当

- $\pi_2 = \xi\circ\det$, $\pi_1 = I_{B(E)}^{\mathrm{GL}_2(E)}\chi_1\boxtimes\chi_2$ *such that* $\chi_1|_{F^\times}\xi = \chi_2|_{F^\times}\xi = 1$ *and* $\xi_E\chi' \neq 1$ *(See Proposition 1.6 for the notations* ξ_E *and* χ'*); or*
- $\pi_1 = \xi\circ\det$ *and* $\pi_2 = \mathrm{St}_F \otimes \xi^{-1}|_{F^\times}$.

证明。记 ω^{-1} 为 π_2的中心特征。于是由命题 2.1 (2)

$$\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1,\pi_2^\vee)$$

并且若 π_1或 π_2是超尖点表示，则 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$。

当 π_1 是一维表示时，由定理 2.2 可知，对于 $\mathbb{C} \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash H(F))$，其中 $D(\mathbb{C}) = \mathrm{St}_F$ 且$d(\mathbb{C}) = 1$,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathrm{St}_F,\pi) \le 1$$

其中等号成立当且仅当 $\pi_1 = \xi\circ\det$ 且 $\pi_2 = \mathrm{St}_F \otimes \xi^{-1}|_{F^\times}$。

注意，当 π_1 是特殊级数时，$\pi \hookrightarrow I^{\mathrm{GL}_2(E)\ B(E)}\chi_1\boxtimes\chi_2$ 且 $\chi_1\chi_2^{-1} = |\cdot|_E$。因此只需考虑 $\pi_1 = I^{\mathrm{GL}_2(E)\ B(E)}\chi$ 对于 $\chi = \chi_1\boxtimes\chi_2$，其中 $\chi_1\chi_2^{-1} \neq |\cdot|_E^{-1}$。由几何引理（见[9, 第 4 节。1]），存在一个 $H(F)$-表示的正合列

$$0 \to i_{E^\times}^{H(F)}\chi' \to \pi_1 \to I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B^{1/2} \to 0.$$

根据命题 2.1(2,3) 和引理 2.5,

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(i_{E^\times}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi',\pi_2^\vee) \cong \mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C});$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(i_{E^\times}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi',\pi_2^\vee) \cong \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C}) = 0;$$

$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(H(F)\ \omega)}(I^{\mathrm{GL}_2}(F)\ B(F)\ \chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(T(F)\ \omega^{-1})}(J_N(\pi_2)\ \delta_B^{-1/2}\chi^{-1}) \cong \mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash T(F)}(J_N(\pi_2)\otimes\delta_B^{1/2}\chi,$ $\mathbb{C})$。然后由定理 2.2，对 $\mathbb{C} \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash T(F))$，其中 $D(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ 且 $d(\mathbb{C}) = 1$,

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{H(F)}(I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee) \le 1$$

当且仅当 $\delta_B^{-1/2}\chi^{-1}|_{T(F)}$是 $J_N(\pi_2)$ 的乔丹因子时，等号成立。由长正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{H(F)}(I^{H(F}_{\ )B(F)}\chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee) \to \mathrm{Hom}^{H(F)}(\pi_1,\pi_2^\vee) \to \mathrm{Hom}^{H(F)}(i_{E^\times}^{H(F)}\chi',\pi_2^\vee) \to$$
$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1,\pi_2^\vee) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(i_{E^\times}^{H(F)}\chi',\pi_2^\vee) \to 0,$$

可得

(i) $\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \text{维数}_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C}) \le 1$(ii) 除非 $\delta_B^{-1/2}\chi^{-1}|_{T(F)}$ 是 $J_N(\pi_2)$ 的一个乔丹因子，否则 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$,
(iii) 若 $\mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C}) = 0$,

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee).$$

若 $\delta_B^{-1/2}\chi^{-1}|_{T(F)}$是 $J_N(\pi_2)$ 的一个乔丹因子，且 $\pi_1 = I^{\mathrm{GL}_2(E)}{}_{B(E)}\chi$属于正合列

$$0\to \mathrm{St}_E\otimes\mu\to\pi_1\to\mu\to 0,$$

则有 $\pi_2 = I^{\mathrm{GL}_2(F)}{}_{B(F)}\chi^{-1}\delta_B^{-1/2}$是不可约的。于是由 Saito-Tunnell，$\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 1$，从而

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathrm{St}_E\otimes\mu,\pi_2^\vee) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\mathrm{St}_E\otimes\mu,\pi_2^\vee)+1.$$

注意

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(\mathrm{St}_E\otimes\mu,\pi_2^\vee) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\mathrm{St}_E\otimes\mu\otimes\pi_2,\mathbb{C})\le 1.$$

由诱导长正合列可推出 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\mathrm{St}_E\otimes\mu\otimes\pi_2,\mathbb{C}) = 0$，从而 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$ 正合列。

假设 $\pi_1 = I^{\mathrm{GL}_2(E)}{}_{B(E)}\chi$不可约。若 $\chi_1|_{F^\times}\neq\chi_2|_{F^\times}$，则通过将 χ替换为 χ^w，可以使 $\delta_B^{-1/2}\chi^{-1}|_{T(F)}$不同于 $J_N(\pi_2)$ 的乔丹-霍尔因子。于是，根据 (ii)，$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$。

现在进一步假设 $\xi^{-1} = \chi_1|_{F^\times} = \chi_2|_{F^\times}$。那么，$\delta_B^{-1/2}\chi^{-1}|_{T(F)}$是 $J_N(\pi_2)$ 的乔丹因子，当且仅当 $\pi_2 = \xi\circ\det$ 或 $\mathrm{St}_F\otimes\xi$。在 $\pi_2 = \mathrm{St}_F\otimes\xi$ 的情形下，

- 若 $\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 1$，则 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$，因为 $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi,\mathbb{C}) \le 1$;
- 若 $\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C}) = 0$，则由定理 2.2 可知，对于 $\mathrm{St}_F\in\mathrm{Rep}(F^\times\backslash H(F))$，其中 $D(\mathrm{St}_F) = \mathbb{C}$ 且 $d(\mathrm{St}_F) = 1$,

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) &= \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B^{1/2}\otimes\xi,\mathrm{St}_F)\\ &= \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\mathbb{C},I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\delta_B^{1/2}) = 0.\end{aligned}$$

在 $\pi_2 = \xi\circ$行列式的情形下，我们将通过研究 $\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})$，给出 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ 的判据。由上述 (i) 可知，$\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C}) \le 1$，且等号成立当且仅当 $\xi_E\chi' = 1$。

若 $\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 1$，由于长正合列中的第二项重数为 ≤ 1，我们必有 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$。

若 $\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 0$，由于最后一个正合列中的末项消失，我们必有

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{E^\times}(\pi_2\otimes\chi',\mathbb{C}) = 0,\quad \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = \dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(I_{B(F)}^{H(F)}\chi\delta_B^{1/2},\pi_2^\vee).$$

于是容易看出，$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C}) = 1$当且仅当 $\chi|_{F^\times}\xi = 1$且 $\xi_E\chi'\neq 1$。

□

可以直接由命题 1.6推出命题 2.7。

命题 *1.6*的证明。 记 π_2 的中心特征为 ω^{-1}。根据定理2.2,

- 当 π_2 为超尖点时，由命题 2.1 (1),

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_2^\vee,\pi_1)\cong\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_1,\pi_2^\vee);$$

- 当 π_2 为非超尖点时， $d(\pi_2) = 1$ 且

$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_2^\vee,\pi_1)$ =维数$_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1,D(\pi_2^\vee))$ =维数$_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi_1\otimes D(\pi_2)\ \mathbb{C})$。

由于 $D(\xi\circ$行列式$) = \mathrm{St}_F\otimes\xi$ 且 $D(\mathrm{St}_F\otimes\xi) = \xi\circ$ 行列式，结论立即由命题 2.7得出。 □

命题 2.8。 假设 D 是分裂的，且 $L = F\oplus F\oplus F$。对于 $\pi = \pi_1\boxtimes\pi_2\boxtimes\pi_3\in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$ 中具有$\pi_i\in$表示范畴$(\mathrm{GL}_2(F))$ 不可约表示的对象，维数$_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\ \mathbb{C}) \le 1$ 等式成立当且仅当在重新排序和扭曲意义下，

- $\pi_1 =\mathrm{St}_F$ 和 $\pi_2 = \pi_3 = \mathbb{C}$，或者
- $\pi_1 = \pi_2^\vee$ 是主系列，且 $\pi_3 = \mathbb{C}$。

证明。 记 π_3 的中心特征为 ω^{-1}。由命题 2.1 (i) (ii)

$$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)$$

并且若 π_3 是超尖点，则 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})=0$。下文中，我们假设 π_i 都不是超尖点。若 π_3 是一维表示，由扭曲可不妨设其为 $\mathbb{C}$，则

$$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega_1)}(\pi_1,\pi_2^\vee)$$

其中 ω_1 是 π_1的中心特征。由定理 2.2 对 $\pi_2^\vee$,

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})\le 1$$

等号成立当且仅当经过重新排序和扭曲后,

- $\pi_1=\mathrm{St}_F$ 和 $\pi_2=\mathbb{C}$,
- $\pi_1=\pi_2^\vee$ 是主系列。

若 π_1、π_2 是特殊级数，由扭曲可假设它们为 St_F，且 π_3 是泛型的，则由 [8,引理 5.4], 存在一个 $\mathrm{GL}_2(F)$-表示的正合列

$$0\to\mathrm{St}_F\to i_{T(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}\mathbb{C}\to\pi_1\otimes\pi_2\to 0,$$

从而导出长正合列

$$\begin{aligned}0\to&\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)\to\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(i_{T(F)}^{H(F)}\mathbb{C},\pi_3^\vee)\to\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\mathrm{St}_F,\pi_3^\vee)\to\\&\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)\to\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(i_{T(F)}^{H(F)}\mathbb{C},\pi_3^\vee)\to\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F))}(\mathrm{St}_F,\pi_3^\vee)\to 0.\end{aligned}$$

由引理 2.5,

$$\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(i_{T(F)}^{H(F)}\mathbb{C},\pi_3^\vee)=0,\quad \mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(i_{T(F)}^{H(F)}\mathbb{C},\pi_3^\vee)=\mathbb{C}.$$

Thus

- 当 $\pi_3=\mathrm{St}_F$，$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi,\ \mathbb{C})=0$根据 [8,定理 1.2]，因此 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})=0$,
- when $\pi_3\neq\mathrm{St}_F$, $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi|_H,\mathbb{C})=\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\mathrm{St}_F,\pi_3^\vee)=0$.

若 $\pi_1=I^{\mathrm{GL}_2(F)}_{B(F)}\xi_1$，$\pi_2=I^{\mathrm{GL}_2(F)}_{B(F)}\xi_2$ 且 π_3 是泛型的。那么根据几何引理（参见 [8, 第 5] 节），存在一个 $\mathrm{GL}_2(F)$-表示的正合列

$$0\to i_{T(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2^w)\to\pi_1\otimes\pi_2\to I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2\delta^{1/2})\to 0,$$

从而得到一个长正合列

$$\begin{aligned}0\to&\mathrm{Hom}_{H(F)}(I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2\delta_B^{1/2}),\pi_3^\vee)\to\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)\to\\&\mathrm{Hom}_{H(F)}(i_{T(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2^w),\pi_3^\vee)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2\delta_B^{1/2}),\pi_3^\vee)\to\\&\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(i_{T(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2^w),\pi_3^\vee)\to 0.\end{aligned}$$

由命题2.1 (2)(3),

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(i_{T(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2^w),\pi_3^\vee)=\mathrm{Ext}^i_{F^\times\backslash T(F)}(\pi_3\otimes\xi_1\xi_2^w,\mathbb{C}).$$

此外，由定理 2.2可知，对于 $\pi_3^\vee\in$表示范畴$(F^\times\backslash H(F)\ \omega)$，其中 $d(\pi_3^\vee)=1$,

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2\delta_B^{1/2}),\pi_3^\vee)=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(I_{B(F)}^{\mathrm{GL}_2(F)}(\xi_1\xi_2\delta_B^{1/2}),\pi_3^\vee).$$

由引理 2.5，可得

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)&=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})-\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash T(F)}(\pi_3\otimes\xi_1\xi_2^w,\mathbb{C})\\&=\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})-1\ge 0.\end{aligned}$$

由于 $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi|_H,\mathbb{C})\le 1$，因此 $\mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi,\mathbb{C})=\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}(H(F),\omega)}(\pi_1\otimes\pi_2,\pi_3^\vee)=0$。交换 π_i 的角色即可得出结论。 □

我们立即得到以下推论，它略微推广了 [7, 命题 9。1] (去掉中心特征条件)。

推论 2.9。 设 $\pi=\boxtimes_{i=1}^3\pi_i\in$表示范畴$(F^\times\backslash G(F))$是一个不可约光滑表示。那么， $\pi_3^\vee$是 $\pi_1\otimes\pi_2$ 的 $\mathrm{GL}_2(F)$-子表示，当且仅当

- $\pi_3^\vee$是超尖点表示，并且是 $\pi_1\otimes\pi_2$的一个商表示;
- $\pi_3^\vee=\mathrm{St}_F\otimes\xi$，且 $\pi_1=\pi_2^\vee\otimes\xi$ 是主系列;

- π_1 或者 π_2 是一维的，且 $\pi_3^\vee \cong \pi_1 \otimes \qquad \pi_2$.

证明。 记 π_3 的中心特征为 ω^{-1}。由定理 2.2 和命题 2.1 (2),

- 当 π_3 是超尖点时,

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_3^\vee, \pi_1 \otimes \pi_2) = \mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_1 \otimes \pi_2, \pi_2^\vee),$$

- 当 π_3 是非超尖点时,

$$\mathrm{Hom}_{H(F)}(\pi_3^\vee, \pi_1 \otimes \pi_2) = \mathrm{Ext}^1_{F^\times\backslash H(F)}(\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes D(\pi_3), \mathbb{C}).$$

于是该结论可由命题2.8立即推出。 □

定理 *1.4*的证明。 泛型表示的高阶 Ext 群消失性由命题 2.6、2.7和2.8证明。特别地，对于 $\pi \in \mathrm{Rep}(F^\times\backslash G(F))$ 温和的,

$$m(\pi) = \mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}).$$

因此，由温和表示的重数公式（定理 1.1），

$$\mathrm{EP}_{F^\times\backslash H(F)}(\pi, \mathbb{C}) = m(\pi) = m_{\mathrm{geo}}(\pi).$$

对于 G 的任意 Levi 子群 M，记 $\mathrm{Tmp}(F^\times\backslash M(F))$ 为 $\widehat{\ }$ $_{\mathrm{un}}F^\times\backslash M(F)$ 上的温和表示集合，并记 $F^\times\backslash M(F)$ 为 $F^\times\backslash M(F)$ 上的非分歧特征集合。考虑 $\mathrm{Rep}(F^\times\backslash G(F))$ 的子范畴 $\mathrm{Rep}^0(F^\times\backslash G(F))$，其对象为满足以下条件的 $I_P^G(\sigma\otimes\chi)$: $P = MN$ 是 $\widehat{\ }$ $_{\mathrm{un}}G$ 的抛物子群， $\sigma \in \mathrm{Tmp}(F^\times\backslash M(F))$，且 $\chi \in F^\times\backslash M(F)$。下面给出两个引理。

引理 2.10. $\mathrm{Rep}(F^\times\backslash G(F))$ 中有限长度表示的阿贝尔子范畴的 *Grothendieck* 群可由 表示范畴$^0(F^\times\backslash G(F))$ 生成。

证明。 对于任意特征 ω: $F^\times \to \mathbb{C}^\times$, 令 $\mathrm{Rep}^0(D^\times(F)\ \omega) := \mathrm{Rep}(D^\times(F)\ \omega) \cap \mathrm{Rep}^0(D^\times(F))$。根据不可约 $D^\times(F)$-表示的分类，对于任意不可约 $\pi \in \mathrm{Rep}(D^\times(F)\ \omega)$，存在 $\pi_0 \in \mathrm{Rep}^0(D^\times(F)\ \omega)$，使得 π_0 的半单化是 π 与另一个属于 $\mathrm{Rep}^0(D^\times,\omega)$ 的不可约表示的直和。引理由此即得。□

引理 2.11. 取某个 *Levi* M的 G的 $\sigma \in \mathrm{Tmp}(F^\times\backslash M(F))$，并考虑非分歧扭曲族 $\pi_\chi = I_P^G\sigma\otimes\chi \in$表示范畴$^0(F^\times\backslash G(F))$，其中 $\chi \in \widehat{F^\times\backslash M}(F)_{\mathrm{un}}$。对于任意 $T \in \mathcal{T}$，函数

$$\chi \mapsto c_{\pi_\chi}|_T$$

为常数。特别地，非分歧扭曲族的几何重数是常数，也就是说，函数

$$\chi \mapsto m_{\mathrm{geo}}(\pi_\chi)$$

为常数。

证明. 关于抛物诱导的正则化特征，我们有以下事实 [12, 命题 2.7]. 设 $\pi = I_P^G\sigma$是一个有限长度 $G(F)$-表示，由 $P = MN$诱导而来。那么对于任意半单的 $x \in G(F)$

$$D^G(x)^{1/2}c_\pi(x) = \sum_{y\in\mathfrak{X}_M(x)} D^M(y)^{1/2}c_\sigma(y)$$

其中 $\mathfrak{X}_M(x)$ 是 $M(F)$ 中与 x 共轭的元素关于 $M(F)$-共轭类的代表元集合，这里的共轭是指 $G(F)$-共轭。

设 $T \in \mathcal{T}$。若对于任意 $t \in T(F)$， $\mathfrak{X}_M(t)$ 为空，则对于任意 χ， $c_{\pi_\chi}|_T = 0$。假设存在 $t \in T(F)$，使得 $\mathfrak{X}_M(t)$ 非空，或者等价地说，存在一个从 T 到 M 的嵌入。当且仅当以下条件成立时，这种情况才会发生:

- $M = G$;
- $L = E \oplus F$、 $T = E^\times$ 和 $M = A_E \times D^\times$，其中 A_E 是 $\mathrm{GL}_{2,\ E}$ 的对角环面。在这种情况下,

$$\mathfrak{X}_M(t) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & \bar{t} \end{pmatrix}, t \right), \quad \left(\begin{pmatrix} \bar{t} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}, t \right) \right\}.$$

要证明 $c_{\pi_\chi}|_T$ 对 $M(F)$ 上任意非分歧特征 χ 都保持不变，只需证明

$$F^\times\backslash T(F) \subset \left(F^\times\backslash M\right)^0 = \bigcap_{\mu\in\mathrm{Rat}(F^\times\backslash M)} \ker|\mu|$$

其中 Rat $(F^\times\backslash M)$ 是 M 上的有理特征群。由于 $F^\times\backslash T$ 是各向异性的，$\mathrm{Rat}(F^\times\backslash T) = 0$，因此对任意 $\mu \in$ Rat $(F^\times\backslash M)$， $\mu(t) = 1$，对任意 $t \in T$ 均成立。□

现在，由于重数公式两边都是可加的，根据 (1)，我们只需考虑 表示范畴$^0(F^\times\backslash G(F))$中的表示，也就是温和表示的非分歧扭曲。根据 (2)，几何重数在一个非分歧扭曲族中保持不变。同时，已知欧拉-庞加莱数在一个非分歧扭曲族中保持不变（更一般的情形见 [1, 定理 E(4)] 或[4, 命题 3。18]因此，温和表示的重数公式蕴含了任意不可约表示的公式。

□

注2.12。 事实上，几何重数的恒定性一般成立。证明方法与上述特殊情形引理2.11 类似（注意，一般而言，任意满足 T 属于支撑 $\mathcal{T}(G,\ H)$的环面$T/Z_{G,\ H}$ 都是各向异性的。参见 [12, 定义 4。3]。）

参考文献

[1] A. Aizenbud 和 E. Sayag， p-进群表示论中的同调重数。（英文摘要）《数学杂志》294（2020），第 1–2 期，451–469。[2] D. Bump，《自守形式与表示》，剑桥高等数学研究丛书，第 55 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997。xiv +574 页。ISBN：0-521-55098-X[3] W.A. Casselman，《 p-进约化群容许表示理论导论》，1995 年草稿，见 https://secure.math.ubc.ca/~cass/research/pdf/p-adic-book.pdf [4] L. Cai 和 Y. Fan，《球簇上的典范局部周期族》，arXiv:2107.05921。[5] K. Chan、G. Savin，(GL$_{n+1}(F)$, GL$_n(F)$) 的消失 Ext 分支定理。《杜克数学杂志》170（2021），第 10 期，2237–2261。[6] N. Matringe， p-进域上 GL(n) 的区分泛表示，《国际数学研究通知》（2011），第 1 期，74–95。[7] M. Nori 和 D. Prasad，关于 Schneider–Stuhler 对偶定理，《纯粹与应用数学杂志》，第 2020 卷，762，2020，261–280 页。[8] D. Prasad，GL(

2 ϵ 75 1990 1,) 表 1 46

示的三线性形式与局部因子。《数学汇刊》（），第 - 期。[9] D. Prasad，局部域上 GL2 表示的不变形式。《美国数学杂志》（），第 - 期。[10] D. Prasad，分支律的 Ext 类比。（英文摘要）《2018 年里约热内卢国际数学家大会论文集》，第二卷，特邀报告，1367–1392，世界科学出版社，哈肯萨克（新泽西州），2018。[11] C. Wan，Ginzburg-Rallis 模型的局部迹公式与重数一定理，博士论文，2017。[12] C. Wan，关于球簇的重数公式，已被《欧洲数学会杂志》接收。

多学科研究院，北京国家应用数学中心，首都师范大学，北京，10048，中华人民共和国电子邮箱：caili@cnu.edu.cn

多学科研究院，北京国家应用数学中心，首都师范大学，北京，10048，中华人民共和国电子邮箱：b452@cnu.edu.cn; fanyangyu@amss.ac.cn