arXiv:2303.05770v1 [math.GT] 10 Mar 2023

# 辫群表示的Long-Moody构造与Katz中间卷积

Kazuki Hiroe*和 Haru Negami †

摘要

Long和Moody提出的Long-Moody构造是一种获得辫群表示的方法。此外，Katz提出的Katz中间卷积被认为是一种在 $\mathbb{C}\backslash\{n\text{点}\}$ 上构造局部系统的方法。本文阐明这两种方法可以自然地统一起来，并定义一个新的函子，称为 Katz-Long-Moody 函子。该函子将Katz 算法的框架扩展到各种拓扑空间上局部系统的范畴，例如，与简单魏尔斯特拉斯多项式相关联的 $B_n$-丛、纤维型超平面配置的补空间、实心环面中的链环补空间等。

## 目录

1 扭曲Long-Moody 函子 **5**

1.1 辫群在自由群上的 Artin 表示 $B_n \curvearrowright F_n$ . . . . . 5 1.2 Long-Moody 函子.7 1.2.1 自由群的 Long-Moody诱导表示与增广理想.7 1.2.2 乘法映射.8 1.3 扭曲 Long-Moody 函子.9 1.3.1 扭曲 Long-Moody 函子.9 1.3.2 增广理想与乘法映射. 11

2 欧拉 r 变换与扭曲 Long-Moody 函子 1 **3**

2.1 同调欧拉变换.13 2.2 Mod$_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的欧拉变换函子.14 2.2.1 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)\ d)$ 和 $C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); k)$ 上的作用 . . . . . 15 2.2.2 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 上的作用.16 2.2.3 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 上的作用.18 2.2.4 Mod$_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的欧拉变换函子.19 2.3 欧拉变换与扭曲 Long-Moody 函子.19

*K. H. 获得 JSPS KAKENHI 资助，项目编号为 20K03648。千叶大学数学与信息学系，日本千叶县千叶市稻毛区弥生町 1-33，邮编 263-8522。邮箱：kazuki@math.s.chiba-u.ac.jp

†H. N. 获得 ANRI奖学金资助。千叶大学数学与信息学系，日本千叶县千叶市稻毛区弥生町 1-33，邮编 263-8522。邮箱：21wm0102@student.gs.chiba-u.jp

2.3.1 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的开覆盖.19 2.3.2 Pochhammer 周期.21 2.3.3 K¨unneth 公式.24 2.3.4 欧拉变换与扭曲 Long-Moody 函子 . . . . . 25

3 Katz-Long-Moody 函子 27

4 中间卷 积与 Katz-Long-Moody 函子 **30**
4.1 同调中间卷积.31 4.2 欧拉变换作为 Borel-Moore 同调.32 4.3 同调中间卷积与 Katz-Long-Moody 函子之间的等价.33

5 子范畴 范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ **35**
5.1 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 的定义.36 5.2 Mod 中的 Katz-Long-Moody 函子$^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ .36 5.3 定理 5.7 的证明.39 5.4 $F_n$-不可约性.44

6 通过 Katz-Long-Moody 函子构造局部系统 **44**
6.1 $F_n \rtimes B_n$ 作为基本群.45 6.2 多项式覆盖的补空间.46 6.3 纤维型配置的补空间.47 6.4 实心环面中闭辫子的补空间.48 6.5 通过刚性局部系统构造非刚性局部系统的整表示.48

# 引言

Katz 在其著名著作 [14] 中介绍了一套构造$\mathbb{C}\backslash\{n$点上的局部系统的工具$\}$。这套高效的工具及其构造局部系统的算法，分别称为 Katz中间卷积和 Katz 算法。这套工具不仅在数论中发挥重要作用，也应用于数学的诸多领域。

与此同时，Long 和 Moody 介绍了一种在 [18] 中构造辫群表示的方法，它是 Burau 表示的一种自然推广。这种 Long-Moody构造被认为是获得辫群表示的有效方法。例如，Burau 表示、Gassner表示、Jones表示等，均可通过 Long-Moody构造获得，参见 [18], [1]。此外，它在结不变量（参见 [5] 和 [24], ）及同调稳定性（参见 [22], ）等方面也有许多应用。

本文阐明，Katz 与 Long-Moody 的这两种看似不同的工具，可通过扭曲同调理论自然地统一起来。这使我们能够将 Katz 算法推广到不仅适用于 $\mathbb{C}\backslash\{n$点上的局部系统$\}$，还适用于许多其他拓扑空间上的局部系统，而这些空间的基本群与辫群有关。

更准确地说，下面来阐述我们的结果。取一对 $(G,\alpha)$，其中 $G$ 是一个群， $\alpha\colon G\to \mathrm{Aut}^{\mathbf{Grp}}(F_n)$ 是一个同态，且它可经由 Artin 表示$\theta\colon B_n\hookrightarrow \mathrm{Aut}^{\mathbf{Grp}}(F_n)$ 分解。于是我们可以定义半直积 $F_n\rtimes_\alpha G$。特别地，

当 $G$ 是一个秩为 $s$的自由群 $F_s$ 时，映射 $\alpha\colon F_s \to B_n$ 称为与 $\rho := \theta \circ \alpha\colon F_s \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(F_n)$ 相关联的辫单值映射；该映射由 Moishezon [19]引入，用于显式描述平面代数曲线的基本群，另见 Cohen 和 Suciu 的[4] 。更一般地，当 $G$ 是一个具有 CW 复形同伦型的拓扑空间的基本群时，群 $F_n \rtimes_\alpha G$ 是 Hansen[7]意义下某个多项式覆盖之补空间的基本群。

接下来，我们将构造以下函子，作为辫群表示的 Long-Moody构造的一种推广。

定理0.1（扭曲 Long-Moody 函子）。设 $k$ 为一个域，并取 $\lambda \in k^\times$。那么，存在一个端函子 $\mathcal{LM}_\lambda$，作用于左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模范畴，并满足以下性质。

1. 假设 $(G, \alpha) = (B_n, \theta)$。那么，函子 $\mathrm{Res}^{k[F_n \rtimes_\alpha B_n]}_{k[B_n]} \circ \mathcal{LM}_\lambda$ 同构于 Long-Moody 函子。
2. 假设 $G = \{e\}$，并将 $F_n \rtimes_\alpha \{e\}$ 与 $F_n$ 等同。那么，函子 $\mathcal{LM}_\lambda$ 同构于 Dettweiler-Reiter 在 *[6]* 中引入的卷积函子。

这里，对于环 $P \subset R$，$\mathrm{Res}^R_P$ 是从左 $R$-模范畴到左 $P$-模范畴的限制函子。

我们将此函子称为 $\mathcal{LM}_\lambda$ 扭曲 Long-Moody 函子。

上述卷积函子由 Dettweiler-Reiter 提出，旨在为其在 [6]中的设定下定义 Katz中间卷积做准备。根据 [6], 中 Katz中间卷积的定义，我们将利用扭曲 Long-Moody 函子定义一个新函子，并证明该函子将 Katz 算法推广到 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。

定理0.2. 取 $\lambda \in k^\times$。在左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模范畴中，存在一个满子范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$，并且该子范畴上存在一个端函子 $\mathcal{KLM}_\lambda$，满足以下性质。

1. 假设 $G = \{e\}$ 并将 $F_n \rtimes_\alpha \{e\}$ 与 $F_n$等同。则函子 $\mathcal{KLM}_\lambda$ 与 *[6]*中引入的 Katz中间卷积函子同构。
2. （可乘性）。对于 $\lambda$、$\tau \in k^\times$，我们有同构

$$\mathcal{KLM}_\lambda \circ \mathcal{KLM}_\tau \cong \mathcal{KLM}_{\lambda\tau}$$

作为 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 上的端函子。

3. （自等价）。对于 $\lambda \in k^\times$，$\mathcal{KLM}_\lambda$ 是范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的一个自等价，而 $\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}$ 是一个逆函子。

我们称此函子 $\mathcal{KLM}_\lambda$ 为 Katz-Long-Moody 函子。

Katz中间卷积与 Burau 表示之间的相似性，V¨olklein 已在 [25]中指出。我们的 Katz-Long-Moody 函子定义基于 V¨olklein 的这一思想，并将他对 Katz中间卷积与辫群表示之间关系的洞见加以推广。

与通常的Katz中间卷积一样，我们将证明Katz-Long-Moody 函子保持不可约性。

定理 0.3. 若左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$ 是 $F_n$-不可约的，则对于任意 $\lambda \in k^\times$， $\mathcal{KLM}_\lambda(V)$都是 $F_n$-不可约的。

这里， $F_n$-不可约是一个稍强的条件，它蕴含通常意义下的不可约性。因此，Katz-Long-Moody 函子使我们能够在各种拓扑空间上构造许多不可约的$k$-局部系统。

我们还将给出 Katz-Long-Moody 函子的一个同调解释，这一解释自然源自 Katz 最初以 pervers 层来定义中间卷积的方式。令 $Q_n = \{1, \dots, n\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中点的集合。另考虑黎曼球面 $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ 上点的集合$Q^{0,\ n^\infty} = \{0, 1, \dots, n, \infty\}$。对于由 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 中 2 个点构成的构形空间 $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) = \{(t, z) \in (\mathbb{C}\backslash Q_n)^2 \mid t \neq z\}$，我们考虑投影映射 $\mathrm{pr}_t\colon \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) \ni (t, z) \mapsto t \in \mathbb{C}\backslash Q_n$、$\mathrm{pr}_{t-z}\colon \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) \ni (t, z) \mapsto t - z \in \mathbb{C}^\times$，以及嵌入 $\iota\colon \mathbb{P}^1\backslash Q^{0,\ n^\infty} \ni t \mapsto (t, 0) \in \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$。

于是，对于左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$ 以及由特征 $\chi_\lambda\colon \pi_1(\mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z} \to k^\times$ 确定、满足 $\chi_\lambda(1) = \lambda$ 的定义在 $\mathbb{C}^\times$ 上的库默尔局部系统 $K_\lambda$，我们通过带局部系统系数的同调群定义新的左$k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模：

$$\mathcal{MC}_\lambda(V) = \mathrm{Im}\left(H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^{0,\infty}; \iota^*(\mathrm{pr}_t^*(V) \otimes_k \mathrm{pr}_{t-z}^*(K_\lambda))) \longrightarrow H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^{0,\infty}; \iota^*(\mathrm{pr}_t^*(V) \otimes_k \mathrm{pr}_{t-z}^*(K_\lambda)))\right).$$

这里， $H_1^{\mathrm{BM}}$表示 Borel-Moore 同调群，或者等价地，表示局部有限链的同调群。接下来我们将证明以下结论。

定理 0.4. 对于 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$， $\mathcal{KLM}_\lambda$ 和 $\mathcal{MC}_\lambda$ 作为左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模范畴上的端函子是同构的。

正如我们将在本文最后一节说明的，对于若干组 $(G, \alpha)$，左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模的范畴与某些重要拓扑空间上的 $k$-局部系统范畴同构。因此，我们可以为这些局部系统建立 Katz 算法的框架。一个典型例子是 Hansen 意义下与简单魏尔斯特拉斯多项式相关联的 $B_n$-丛。已知某些超平面配置补空间可表示为这类 $B_n$-丛。例如，纤维型超平面配置补空间具有 $B_n$-丛结构。另一方面，特别是对于超平面配置补空间，Haraoka 定义了一个类似 Katz 中间卷积的构造，即在 [8] 上超平面配置补空间的对数联络的中间卷积。在某些情况下，Katz-Long-Moody 函子将通过黎曼–希尔伯特对应，为 Haraoka 的这一中间卷积提供局部系统层面的对应构造。

此外，我们将说明，左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模的范畴可以与实心环面中链环补空间上的 $k$-局部系统范畴等同。注意，实心环面中的链环补空间等价于 $S^3$ 中混合链环的补空间，参见 [17]。已有许多方法可用于获得纽结群的不可约表示，例如参见 Kronheimer 和 Mrowka [16]、Klassen [15]、Herald [11]，以及 Heusener [12] 中的参考文献；而 Katz-Long-Moody 函子则提供了一种获得纽结群不可约表示的新方法。

Katz-Long-Moody 函子也有助于求出带有附属参数的微分方程解的积分表示。一般而言，不能指望带有附属参数的微分方程都能有以某些初等函数为被积函数的积分表示解。正如我们将在本文中

所阐述的，然而，Katz-Long-Moody 函子将提供一种方法，用以找到某些特殊的非刚性局部系统，而这些局部系统所对应的微分方程可能存在积分表示形式的解。

致谢 作者感谢 Arthur Souli´e 和 Akihiro Takano 就 Long-Moody 函子进行了宝贵的讨论。K. H. 感谢 Koki Ito、Yosuke Ohyama 和 Claude Sabbah 对其在斯特拉斯堡大学会议上的报告提出了建设性意见。H. N. 感谢 Shunya Adachi、Saiei-Jaeyeong Matsubara-Heo 和 Hiroshi Ogawara 在熊本大学研讨会上提出的各种意见。最后，作者向 Yoshishige Haraoka 和 Toshio Oshima 致以敬意，感谢他们在 KZ 型方程中间卷积方面的启发性工作。

# 1 扭曲 Long-Moody 函子

Long 和 Moody 在论文 [18] 中引入了一个函子，它作用于混合辫群 $B_{1,n} \cong F_n \rtimes B_n$ 的线性表示范畴与 $B_n$ 的线性表示范畴之间。我们将考虑这个函子的一个轻微推广，并称之为扭曲 Long-Moody 函子，同时说明这个新函子的若干性质。

## 1.1 辫群 $B_n$ 在自由群$F_n$上的 Artin 表示

与正整数 $n \geq 2$ 相关联的 Artin辫群 $B_n$ 是由生成元 $\sigma_1$、$\sigma_2$、.....、$\sigma_{n-1}$ 及辫关系 $n-1$ 定义的群

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j &= \sigma_j\sigma_i \quad \text{for all } i,j = 1,2,\dots,n-1 \text{ with } |i-j|>2, \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i &= \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \quad \text{for all } i = 1,2,\dots,n-2. \end{aligned}$$

现在我们回顾 $B_n$ 在秩为 $n$的自由群 $F_n$ 上的 Artin 表示。我们取$x_1$、.....、$x_n$ 作为 $F_n$的一组自由生成元。设 $Q_n$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的点集 $a_i := (i, 0), i = 1, 2, \dots, n$，且 $D$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一个闭欧几里得圆盘，其圆心为 $((n-1)/2, 0)$，并且 $Q_n$ 包含在其内部。我们将拓扑对 $(D, Q_n)$ 的映射类群记作 $\mathfrak{M}(D, Q_n)$，它由保持边界 $\partial D$ 上每一点不动的拓扑对 $(D, Q_n)$ 的自同胚的同伦类组成。对每个 $i = 1, \dots, n-1$，我们定义元素 $\tau_i \in \mathfrak{M}(D, Q_n)$，称为半扭转，定义如下。我们可以假设 $D$ 的半径足够大，并将 $\mathbb{R}^2$ 与复平面 $\mathbb{C}$ 视为拓扑空间同胚。令 $c_i := (a_{i+1} - a_i)/2$，于是我们定义同胚 $\tau_i \colon D \to D$ 如下：

$$\tau_i(z - c_i) := \begin{cases} z - c_i & (|z - c_i| \geq 1) \\ \exp(-2\pi i |z - c_i|)(z - c_i) & (\frac{1}{2} \leq |z - c_i| < 1) \\ -(z - c_i) & (|z - c_i| \leq \frac{1}{2}) \end{cases}.$$

于是可知，这些半扭转 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ 生成群 $\mathfrak{M}(D, Q_n)$，且对应关系

$$\begin{array}{rccc} \eta \colon & B_n & \longrightarrow & \mathfrak{M}(D, Q_n) \\ & \sigma_i & \longmapsto & \tau_i \end{array}$$

延伸为群同构。

已知以 $d \in \partial D$ 为基点的基本群 $\pi_1(D\backslash Q_n, d)$同构于自由群 $F_n$。为精确描述该同构，我们固定基点 $d = ((n-1)/2, -R)$，其中 $R$ 是 $D$的半径。然后，对于每个 $i = 1, \ldots, n$，我们取以 $d$ 为基点的闭路 $\gamma_i\colon [0,1] \to D\backslash Q_n$，如下所示。固定一个充分小的 $\epsilon > 0$，使得对于所有 $i = 1, \ldots, n$， $D_{<\epsilon}(a_i) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_i| < \epsilon\}$ 都位于 $D$ 内，且与其他 $D_{<\epsilon}(a_j)$（$j \neq i$）没有交点。令 $\iota_i$ 为 $D_{<\epsilon}(a_i)$与连接 $d$ 和 $a_i$的线段$\overline{d\,a_i}$ 的交点。然后，我们取闭路$\gamma_i\colon [0,1] \to D\backslash Q_n$，以 $d$为基点，使其同伦于这样一条路径：沿线段 $\overline{d\,a_i}$ 从$d$走到 $\iota_i$，沿圆 $\partial D_{<\epsilon}(a_i)$顺时针绕 $a_i$ 一周，最后沿线段$\overline{d\,a_i}$从 $\iota_i$返回 $d$。于是已知 $\pi_1(D\backslash Q_n, d)$由 $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$自由生成。因此，对应关系 $\pi_1(D\backslash Q_n, d) \ni \gamma_i \mapsto x_i \in F_n$延伸为群同构。

路径 $\alpha, \beta\colon [0,1] \to X$在满足 $\alpha(1) = \beta(0)$ 的拓扑空间 $X$中的乘积 $\alpha \cdot \beta\colon [0,1] \to X$ 定义为

$$\alpha \cdot \beta(t) := \begin{cases} \alpha(2t) & (t \in [0, 1/2]) \\ \beta(2t-1) & (t \in [1/2, 1]) \end{cases}.$$

连续映射 $\phi\colon X \to Y$将路径 $\gamma\colon [0,1] \to X$推前所得的路径记作 $\phi_*(\gamma) := \phi \circ \gamma\colon [0,1] \to Y$。由于基点 $d \in \partial D$在 $\mathfrak{M}(D, Q_n)$下保持不变，推前定义了群同态

$$\begin{array}{rccc} \theta\colon & \mathfrak{M}(D, Q_n) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(\pi_1(D\backslash Q_n, d)) \\ & \phi & \longmapsto & \phi_* \end{array},$$

众所周知，该映射是单射，并由以下关系刻画：

$$\theta(\tau_i)(\gamma_j) = \begin{cases} \gamma_{i+1} & j = i \\ \gamma_{i+1}^{-1}\gamma_i\gamma_{i+1} & j = i+1 \\ \gamma_j & j \neq i, i+1 \end{cases}.$$

这里，$\mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(G)$表示群 $G$的自同构群。于是，在上述识别 $\pi_1(D\backslash Q_n, d) \cong F_n$和 $\mathfrak{M}(D, Q_n) \cong B_n$下，此映射 $\theta$诱导出单射群同态

$$\theta_{\mathrm{Artin}}\colon B_n \hookrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(F_n),$$

这称为 $B_n$ 在 $F_n$上的 Artin 表示。

我们将这一 Artin 表示扩展到如下的一些其他群。

**定义 1.1**（群 $G$ 在 $F_n$上的 Artin 表示）。对于群 $G$，如果群同态 $\alpha\colon G \to$ 自同构群$\mathbf{Grp}(F_n)$，或由它们构成的对 $(G, \alpha)$，满足 $\alpha$ 经由 $B_n$的 Artin 表示 $\theta_{\mathrm{Artin}}\colon B_n \hookrightarrow$ 自同构群$\mathbf{Grp}(F_n)$分解，则称其为 Artin 表示。也就是说，存在群同态 $\alpha_{B_n}\colon G \to B_n$，使得图表

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{Aut}_{\mathbf{Grp}}(F_n) \\ {\scriptstyle \alpha_{B_n}}\downarrow & \nearrow_{\theta_{\mathrm{Artin}}} & \\ B_n & & \end{array}$$

交换的。这里注意到，$\alpha_{B_n}$ 是唯一的，因为 $\theta_{\mathrm{Artin}}$ 是单射。

## 1.2 Long-Moody 函子

考虑外半直积 $F_n \rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n$，若不致混淆，我们将其简记为 $F_n \rtimes B_n$。回顾一种从 $F_n \rtimes B_n$ 的表示构造 $B_n$ 表示的方法，该方法称为辫群表示的Long-Moody构造，由Long和Moody于 [18]提出。

### 1.2.1 Long-Moody诱导表示与自由群的增广理想

我们回顾一下 Long-Moody诱导表示的定义。

定义 1.2（Long-Moody诱导表示）。设 $k$ 是一个域，$V$ 是一个 $k$-向量空间，且 $\rho$: $F_n \rtimes B_n \to \mathrm{Aut}_k(V)$ 是一个群同态。这里，$\mathrm{Aut}_k(V)$ 是 $k$- 向量空间 $V$ 的自同构群。则与 $\rho$ 相关联的 Long-Moody诱导表示是如下线性表示

$$\rho^{\mathrm{LM}} \colon B_n \to \mathrm{Aut}_k(V^{\oplus n})$$

定义在 $B_n$ 上，其定义为

$$\rho^{\mathrm{LM}}(\sigma_i) \colon = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \rho(\sigma_i) & & & \\ & \rho(\sigma_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho(\sigma_i) \end{matrix}}^{i-1} & & & \\ & \begin{matrix} 0 & \rho(\sigma_i x_i) \\ \rho(\sigma_i) & \rho(\sigma_i) - \rho(\sigma_i x_{i+1}) \end{matrix} & & \\ & & \overbrace{\begin{matrix} \rho(\sigma_i) & & & \\ & \rho(\sigma_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho(\sigma_i) \end{matrix}}^{n-i-1} \end{pmatrix}$$

对于 $i = 1, \ldots, n-1$。这里右侧的矩阵是分块矩阵，其元素属于 $\mathrm{Aut}_k(V)$。

这可以看作 Burau 表示的一种推广。事实上，表示 $\rho$ 是一维的，由此得到的 $\rho^{\mathrm{LM}}$ 恰好是 Burau 表示。在论文 [18], 中介绍了定义 $\rho^{\mathrm{LM}}$ 的几种方法。其中，我们将介绍以下利用 $F_n$ 的增广理想构造的方法。

令 $k[G]$ 表示由域 $k$ 上的群 $G$ 生成的群环。群同态 $\rho_V \colon G \to \mathrm{Aut}_k(V)$ 从 $G$ 到 $k$- 向量空间 $V$ 的自同构群的映射，会在 $V$ 上诱导出左 $k[G]$- 模结构，反之亦然。我们通常不区分这两者。令 $I_G$ 为群环 $k[G]$ 的增广理想，它是由增广映射的核定义的双边理想

$$k[G] \ni \sum_{g \in G} r_g g \longmapsto \sum_{g \in G} r_g \in k.$$

让我们回到定义 1.2 中的设定。将 $V$ 视为由表示 $\rho$ 给出的左 $k[F_n \rtimes B_n]$-模，然后考虑向量空间 $I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V$。我们在 $I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V$ 上定义左 $k[B_n]$-模结构如下

$$b \cdot (i \otimes v) := \theta_{\mathrm{Artin}}(b)(i) \otimes (b \cdot v) \qquad (b \in B_n,\, i \in I_{F_n},\, v \in V).$$

由于 $I_{F_n}$ 作为右 $k[F_n]$-模由 $x_i - 1, i = 1, \ldots, n$ 自由生成，因此线性映射 $k$

$$I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \ni \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1) \otimes v_i \longmapsto (v_1, \ldots, v_n) \in V^{\oplus n} \tag{1}$$

是一个同构，通过它，$V^{\oplus n}$ 被赋予了 $B_n$的作用。直接计算可知，这个 $B_n$在 $V^{\oplus n}$ 上的作用与 Long-Moody 诱导表示 $\rho^{\mathrm{LM}}$一致： $B_n \to \mathrm{Aut}_k(V^{\oplus n})$。

我们可以将这一过程稍作推广，如下所示。设 $F_n \rtimes_\alpha G$ 是与 Artin 表示（$G, \alpha$）相关联的半直积群，并取一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$。那么，通过 Artin 表示 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}(F_n)$， $I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V$ 具有自然的 $k[G]$-模结构。

定义 1.3（Long-Moody 函子）。对于一个 $k$-代数 $R$，我们用 $\mathrm{Mod}_R$表示左$R$-模的范畴。设（$G, \alpha$）是作用在 $F_n$上的 Artin 表示。于是我们定义函子 $\mathcal{LM}\colon \mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \to \mathrm{Mod}^{k[G]}$ 如下：

1. $$\mathcal{LM}(V) := I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V$$
   对于 $V \in \mathscr{O}(\mathrm{Mod}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]})$,
2. $$\mathcal{LM}(\phi) := \mathrm{id}_{I_{F_n}} \otimes \phi \in \mathrm{Hom}_{k[G]}(\mathcal{LM}(V), \mathcal{LM}(W))$$
   对于 $V, W \in \mathscr{O}(\mathrm{Mod}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]})$ 和 $\phi \in \mathrm{Hom}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}(V, W)$,

并将此函子称为 Long-Moody 函子。这里， $\mathscr{O}(\mathcal{C})$ 表示范畴 $\mathcal{C}$ 中对象的类。

注意，增广理想 $I_{F_n}$ 作为右 $k[F_n]$-模是平坦的，因为它是自由的。因此，由与平坦模 $I_{F_n}$ 的张量积定义的 Long-Moody 函子是一个正合函子。

### 1.2.2 乘法映射

设 $(G, \alpha)$ 是作用在 $F_n$ 上的 Artin 表示，且 $V$ 是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。于是我们定义一个从 $\mathcal{LM}(V)$ 到 $V$ 的 $k$-线性映射，定义如下：

$$\nabla\colon I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \ni \sum_i f_i \otimes v_i \longmapsto \sum_i f_i \cdot v_i \in V,$$

我们称之为乘法映射。此外，这是一个 $k[G]$-模同态，因为我们有

$$\begin{aligned}\nabla\left(g\cdot\left(\sum_i f_i\otimes v_i\right)\right)&=\nabla\left(\sum_i \alpha(g)(f_i)\otimes g\cdot v_i\right)=\sum_i \alpha(g)(f_i)\cdot(g\cdot v_i)\\&=\sum_i(\alpha(g)(f_i)\cdot g)\cdot v_i=\sum_i(g\cdot f_i)\cdot v_i\\&=g\cdot\sum_i f_i\cdot v_i=g\cdot\nabla\left(\sum_i f_i\otimes v_i\right)\end{aligned}$$

对于任意的 $g\in G$ 和 $\sum_i f_i\otimes v_i\in I_{F_n}\otimes_{k[F_n]}V$。

## 1.3 扭曲的 Long-Moody 函子

Long-Moody 函子是 $\mathrm{Mod}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 和 $\mathrm{Mod}^{k[G]}$ 之间的一个函子。我们可以用显然的方式将其扩展为 $\mathrm{Mod}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 的端函子。也就是说，利用 $I_{F_n}$ 作为双边理想所具有的左 $k[F_n]$-模结构，我们可以在 $\mathcal{LM}(V)=I_{F_n}\otimes_{k[F_n]}V$ 上定义左 $F_n$-模结构；该结构显然与 $k[G]$-模结构相容，因此 $\mathcal{LM}(V)$ 可以视为一个左 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模。

现在我们将介绍这种左 $k[F_n]$-模结构的一个扭曲版本，它与 $k[G]$-模结构相容。

### 1.3.1 扭曲的 Long-Moody 函子

固定一个元素 $\lambda\in k^\times$，并考虑以下函数

$$\lambda_{\geq i}\colon\{1,\dots,n\}\ni j\mapsto\begin{cases}\lambda & \text{if } j\geq i,\\ 1 & \text{if } j<i,\end{cases}$$

对于 $i=0$，1，……，$n$。接着，我们定义 $F_n$ 在 $I_{F_n}$ 上的左作用如下：

$$x_i\circ_\lambda(x_j-1):=\lambda_{\geq i}(j)x_i(x_j-1)-(\lambda_{\geq(i-1)}(j)-1)(x_j-1)\qquad(i,j=1,\dots,n).$$

如果 $\lambda=1$，此作用就与 $k[F_n]$ 的左理想 $I_{F_n}$ 上 $F_n$ 的通常左作用一致。

命题 1.4。$F_n$ 的左作用 $\circ_\lambda$ 与通过 Artin 表示 $\alpha$ 给出的 $G$-作用相容。也就是说，图表

$$\begin{array}{ccc}I_{F_n} & \xrightarrow{\alpha(g)} & I_{F_n}\\ \downarrow{\scriptstyle x\circ_\lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(g)(x)\circ_\lambda}\\ I_{F_n} & \xrightarrow{\alpha(g)} & I_{F_n}\end{array}$$

对于任意 $g\in G$ 和 $x\in F_n$ 都是交换的。

证明。只需考虑 $(G,\alpha)=(B_n,\theta_{\mathrm{Artin}})$ 的情形，这可通过直接计算得出。或者，我们可以使用命题 2.20 中给出的 $I_{F_n}$ 的同调解释，该命题将在后文出现。

□

这个命题使我们能够将 $I_{F_n}$ 视为左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。为强调这个模结构取决于 $\lambda \in k^\times$ 的选择，我们特别将此 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模记作 $I_{F_n,\ \lambda}$。于是，对于左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$，我们可以将 $I_{F_n,\ \lambda} \otimes_{k[F_n]} V$ 视为左 $k[F_n \rtimes G]$- 模。

注 1.5. 令 $\rho\colon F_n \rtimes_\alpha G \to$ 自同构群$_k(V)$ 和 $\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}\colon F_n \rtimes_\alpha G \to$ 自同构群$_k(I_{F_n,\ \lambda} \otimes_{k[F_n]} V)$ 为与左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$和 $I_{F_n,\ \lambda} \otimes_{k[F_n]} V$相关的同态。那么，在同构 (1) 下的识别 $I_{F_n,\ \lambda} \otimes_{k[F_n]} V \cong V^{\oplus n}$ 给出以下矩阵表示

$$\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_i) = \begin{pmatrix} & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ \lambda(\rho(x_1)-1) & \cdots & \lambda(\rho(x_{i-1})-1) & \lambda\rho(x_i) & \rho(x_{i+1})-1 & \cdots & \rho(x_n)-1 \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

对于 $i = 1, \ldots, n$。右侧这些矩阵本质上与 Dettweiler-Reiter 论文 [6] 中出现的矩阵相同。我们还可以验证

$$\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_1 \cdots x_n) - \lambda \cdot \mathrm{id}_{V^{\oplus n}} = \begin{pmatrix} \rho(x_2 \cdots x_n) & & & \\ & \rho(x_3 \cdots x_n) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{id}_V \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda(\rho(x_1)-1) & \lambda(\rho(x_2)-1) & \cdots & \lambda(\rho(x_n)-1) \\ \lambda(\rho(x_1)-1) & \lambda(\rho(x_2)-1) & \cdots & \lambda(\rho(x_n)-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda(\rho(x_1)-1) & \lambda(\rho(x_2)-1) & \cdots & \lambda(\rho(x_n)-1) \end{pmatrix}.$$

定义 1.6（扭曲 Long-Moody 函子）。对于一个 $\lambda \in k^\times$，函子$\mathcal{LM}_\lambda$: $\mathbf{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \to \mathbf{Mod}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 定义为

1. $$\mathcal{LM}_\lambda(V) := I_{F_n,\lambda} \otimes_{k[F_n]} V$$
   对于 $V \in \mathscr{O}(\mathbf{Mod}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]})$,

2. $$\mathcal{LM}_\lambda(\phi) := \mathrm{id}_{I_{F_n,\lambda}} \otimes \phi \in \mathrm{Hom}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}(\mathcal{LM}_\lambda(V), \mathcal{LM}_\lambda(W)),$$
   对于 $V, W \in \mathscr{O}(\mathbf{Mod}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]})$ 和 $\phi \in \mathbf{Hom}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}(V, W)$,

称为相对于 $\lambda$ 或 $\lambda$ 的扭曲 Long-Moody 函子。

这里我们指出，扭曲 Long-Moody 函子与通常的 Long-Moody 函子一样，也是一个正合函子。

### 1.3.2 增广理想与乘法映射

正如前面所见，乘法映射 $\nabla$ 是一个 $k[G]$-模同态。当我们考虑 $F_n$ 对增广理想的扭曲作用时，乘法映射$\nabla$ 还会成为一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态，如下所示。

引理 1.7. 取 $x \in F_n$ 和 $g, h \in I_{F_n}$。则以下扭曲结合律成立，

$$(x \circ_\lambda g) \circ_\mu h = x \circ_{\lambda\mu} (g \circ_\mu h).$$

证明。我们可以假设，对于某些 $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$，有 $x = x_i$, $g = x_j - 1$, $h = x_k - 1$。首先注意到

$$\begin{aligned}(x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1) &= \mu_{\geq j}(k) x_j (x_k - 1) - \mu_{\geq (j-1)}(k)(x_k - 1) \\ &= \mu_{\geq j}(k)((x_j - 1)(x_k - 1) + (x_k - 1)) - \mu_{\geq (j-1)}(k)(x_k - 1) \\ &= \mu_{\geq j}(k)(x_j - 1)(x_k - 1) + (\mu_{\geq j}(k) - \mu_{\geq (j-1)}(k))(x_k - 1) \\ &= \begin{cases} \mu_{\geq j}(k)(x_j - 1)(x_k - 1) & \text{if } j \neq k, \\ \mu (x_j - 1) x_j - (x_j - 1) & \text{if } j = k. \end{cases}\end{aligned}$$

这里，最后一个方程由以下事实得出

$$\nu_{\geq i}(j) - \nu_{\geq (i-1)}(j) = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i, \\ \nu - 1 & \text{if } j = i, \end{cases} \quad \text{for } \nu \in k^\times. \tag{2}$$

因此，无论如何，我们都可以写成 $(x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1) = (x_j - 1)r$，其中 $r \in k[F_n]$。因此我们有

$$\begin{aligned} x_i \circ_{\lambda\mu} ((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)) &= x_i \circ_{\lambda\mu} (x_j - 1) r \\ &= (\lambda\mu)_{\geq i}(j) x_i (x_j - 1) r - ((\lambda\mu)_{\geq (i-1)}(j) - 1)(x_j - 1) r \\ &= (\lambda\mu)_{\geq i}(j) x_i ((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)) \\ &\qquad - ((\lambda\mu)_{\geq (i-1)}(j) - 1)((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)). \end{aligned} \tag{3}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} &(x_i \circ_\lambda (x_j - 1)) \circ_\mu (x_k - 1) \\ &\quad = (\lambda_{\geq i}(j) x_i (x_j - 1) - (\lambda_{\geq (i-1)}(j) - 1)(x_j - 1)) \circ_\mu (x_k - 1) \\ &\quad = \lambda_{\geq i}(j) x_i \circ_\mu ((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)) - (\lambda_{\geq (i-1)}(j) - 1)(x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1) \\ &\quad = \lambda_{\geq i}(j) \mu_{\geq i}(j) x_i ((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)) \\ &\qquad - (\lambda_{\geq i}(j) \mu_{\geq (i-1)}(j) - \lambda_i(j) + \lambda_{\geq (i-1)}(j) - 1)((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)). \end{aligned} \tag{4}$$

现在请注意，

$$\lambda_{\geq i}(j) \mu_{\geq i}(j) = (\lambda\mu)_{\geq i}(j) \tag{5}$$

$$\lambda_{\geq i}(j) \mu_{\geq (i-1)}(j) - \lambda_i(j) + \lambda_{\geq (i-1)}(j) - 1 = (\lambda\mu)_{\geq (i-1)}(j) - 1. \tag{6}$$

这里第二个方程由方程 (2) 推出。

比较方程 (3) 至 (6)，我们得到所需的方程

$$x_i \circ_{\lambda\mu} ((x_j - 1) \circ_\mu (x_k - 1)) = (x_i \circ_\lambda (x_j - 1)) \circ_\mu (x_k - 1).$$

□

该引理表明，乘法映射 $\nabla$ 定义了如下左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态。

命题 1.8. 对于 $\lambda$、$\mu \in k^\times$，乘法映射

$$\nabla\colon I_{F_n,\lambda} \otimes_{k[F_n]} I_{F_n,\mu} \longrightarrow I_{F_n,\lambda\mu}$$

是左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态。

证明. 如前所述， $\nabla$ 是一个 $k[G]$-模同态。因此，我们需要验证 $\nabla$ 与 $k[F_n]$ 在 $I_{F_n,\lambda}\otimes_{k[F_n]} I_{F_n,\mu}$ 和 $I_{F_n,\lambda\mu}$ 上的左作用相容，这由引理 1.7 可得。

□

注 1.9. 由命题 1.8 可知，乘法映射定义了函子之间的自然变换

$$\nabla\colon \mathcal{LM}_\lambda \circ \mathcal{LM}_\mu \longrightarrow \mathcal{LM}_{\lambda\mu}.$$

我们介绍乘法映射的一些性质，后文将会用到。

命题 1.10. 对于左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$，设 $\rho_V\colon F_n \to \mathrm{Aut}_k(V)$ 为相应的群同态。

1. 乘法映射 $\nabla\colon I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \to V$ 的像为

$$\mathrm{Im}\,(\rho_V(x_1) - 1) + \cdots + \mathrm{Im}\,(\rho_V(x_1) - 1).$$

此外，核为

$$\left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in V^{\oplus n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} (x_i - 1)v_i = 0 \right\},$$

在同构 (1) 下通过识别 $I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \cong V^{\oplus n}$ 得到。

2. 取 $\lambda, \mu \in k^\times$。那么乘法映射 $\nabla\colon \mathcal{LM}_\lambda \circ \mathcal{LM}_\mu(V) \to \mathcal{LM}_{\lambda\mu}(V)$ 的核为

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \left( (x_i - 1) \otimes \mathrm{Ker}\,(\rho_V^\mu(x_i) - 1) \right).$$

这里，$\rho_V^\mu\colon F_n \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{LM}_\mu(V))$ 是由左侧 $F_n$ 在 $\mathcal{LM}_\tau(V)$ 上的作用诱导的群同态；对于 $x \in I_{F_n}$ 和子空间 $W \subset V$，我们定义 $x \otimes W := \{x \otimes w \mid w \in W\}$。

证明。第一个断言根据 $\nabla$的定义显然成立。第二个断言由以下事实可得

$$\mathrm{Im}\,(\rho_V^\mu(x_i) - 1) \subset (x_i - 1) \otimes V$$

这一点可以从注 1.5 中出现的 $\rho_V^\mu(x_i)$ 的矩阵表示轻易看出。

□

# 2 E欧拉变换与扭曲 Long-Moody 函子

欧拉变换是分析中的经典工具，其定义如下：

$$\phi(z) \longmapsto \int_C \phi(t)(t-z)^{\lambda}\,dt$$

对于 $\lambda \in \mathbb{C}$ 以及一个合适的积分路径 $C$。这种形式最著名的积分之一，可能就是高斯超几何函数 $F(\alpha,\beta,\gamma;\ z)$ 的积分表示，

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_1^{\infty} t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}\,dt,$$

它在某些合适的复数 $\alpha,\beta,\gamma$ 以及多值函数 $t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}$ 的一个分支的选择下成立。

本节将给出这一欧拉变换的同调解释，并说明扭曲 Long-Moody 函子可以由这一同调欧拉变换得到。

## 2.1 同调欧拉变换

在本文中，拓扑空间 $X$ 上取值于 $k$ 向量空间的局部常值层统称为 $X$ 上的 $k$ 局部系统。若 $X$ 是连通拓扑流形，则众所周知，$X$ 上的 $\mathcal{L}$ 局部系统在 $d \in X$ 处的茎 $\mathcal{L}_d$ 具有左 $k[\pi_1(X,d)]$- 模的结构；反过来，任意左 $k[\pi_1(X,d)]$- 模 $L_d$ 都可以看作某个局部系统在 $d$ 处的茎。因此，我们通常不区分二者。

定义 2.1（库默尔局部系统）。设 $\omega$ 是 $\mathbb{C}^{\times}$ 中沿单位圆逆时针绕原点一周的闭路，基点为 1。对于一维表示 $\rho\colon \pi_1(\mathbb{C}^{\times},1) \to \mathrm{GL}_1(k)$，相应的 $\mathbb{C}^{\times}$ 上的局部系统称为库默尔局部系统，记为 $K_\lambda$，其指标为 $\lambda := \rho(\omega) \in k^{\times}$。

考虑 $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) = \{(t,z) \in \mathbb{C}^2 \mid t \neq z \text{ 和 } t,z \notin Q_n\}$，即 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 中 2 个点的构形空间，并分别用 $\mathrm{pr}_t$ 和 $\mathrm{pr}_z$ 表示 $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$ 的第一和第二个投影。我们还考虑映射

$$\mathrm{pr}_{t-z}\colon \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n) \ni (t,z) \longmapsto t-z \in \mathbb{C}^{\times}.$$

设 $L$ 是 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 上的一个 $k$-局部系统，$K_\lambda$ 是一个库默尔局部系统，接着我们考虑由下式定义的 $\mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$ 上的 $k$-局部系统

$$C_\lambda(L) := \mathrm{pr}_t^*(L) \otimes_k \mathrm{pr}_{t-z}^*(K_\lambda).$$

令 $Q_n(z) := Q_n \cup \{z\}$ 为 $z \in \mathbb{C}\backslash Q_n$。那么，我们可以自然地将纤维 $\mathrm{pr}_z^{-1}(z)$ 识别为 $\mathbb{C}\backslash Q_n(z)$，并通过这一识别得到嵌入映射 $\iota_z\colon \mathbb{C}\backslash Q_n(z) \hookrightarrow \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$。

定义 2.2（局部系统的同调欧拉变换）。对于每个开圆盘$D_{<r}(z) \subset \mathbb{C}\backslash Q_n$，我们将嵌入 $\iota_{r,z}\colon (\mathbb{C}\backslash Q_n)\backslash D_{<r}(z) \hookrightarrow \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$ 定义为 $(\mathbb{C}\backslash Q_n)\backslash D_{<r}(z) \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash Q_n(z)$ 与 $\iota_z\colon \mathbb{C}\backslash Q_n(z) \hookrightarrow \mathcal{F}_2(\mathbb{C}\backslash Q_n)$ 的复合。随后，我们将该开集与具有局部系数的奇异同调群

$$H_1((\mathbb{C}\backslash Q_n)\backslash D_{<r}(z); \iota_{r,z}^*(C_\lambda(L)))$$

对应起来。对于每个开圆盘 $D_{<r}(z) \subset \mathbb{C}\backslash Q_n$，均如此。由于开圆盘 $D_{<r}(z)$ 构成 $\mathbb{C}\backslash Q_n(z)$ 中的开集基，我们可以将这一对应层化；于是 $\mathcal{E}_\lambda(L)$ 表示由此得到的 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 上的层，它是一个 $k$-局部系统，其在 $z \in \mathbb{C}\backslash Q_n$ 处的茎同构于 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(z); \iota_z^*(C_\lambda(L)))$。我们称这个 $k$-局部系统 $\mathcal{E}_\lambda(L)$ 为局部系统 $L$ 相对于库默尔局部系统 $K_\lambda$ 的同调欧拉变换。

局部系数同调群有许多等价的定义，本文采用其中以下定义。对于连通拓扑流形 $X$ 和一个 $k$-局部系统 $L$，我们将 $L$ 视为左 $k[\pi_1(X,x)]$-模，其中取其在 $x$处的茎。于是，取值于 $L$ 的奇异 $n$-链构成的 $k$-向量空间为

$$C_n(X;L) := C_n(\widetilde{X};k) \otimes_{\pi_1(X,x)} L$$

其中，$C_n(X;k)$ 是万有覆盖$\pi_X\colon X \to X$ of $X$ 上通常的奇异 $n$-链所构成的 $k$-向量空间。于是，$H_*(X;L)$ 定义为链复形$C_*(X;L)$ 的同调群。

在 $C_n(X;L)$ 的定义中，$C_n(X;k)$ 按照如下方式视为右 $k[\pi_1(X,x)]$-模。考虑自然同构

$$\delta\colon \pi_1(X,x) \longrightarrow \mathrm{Deck}(\pi_X)$$

其中，$\mathrm{Deck}(\pi_X)$ 是 $\pi_X\colon X \to X$ 的覆盖变换群。由于 $\delta$ 的定义取决于 $\bar{x} \in \pi_X^{-1}(x)$ 的选取，为确保准确，我们在此给出精确定义。对于每个 $\gamma \in \pi_1(X,x)$，如下将 $\delta(\gamma) \in \mathrm{Deck}(\pi_X)$ 与之关联。对于每个$\sim c \in X$，考虑从 $\bar{x}$ 到 $c$ 的路径 $\sigma_c\colon [0,1] \to X$，该路径在同伦意义下唯一。于是，$\delta(\gamma)(c) \in X$ 是将 $\gamma \cdot (\pi_X)_*(\sigma_c)$ 提升到 $X$ 后，从 $\bar{x}$ 出发所得的端点。

Now 我们定义 $\pi_1(X,x)$ 在奇异 $n$-单形集合 $S_n($ 上的右作用 $\widetilde{X})$ by

$$S_n(\widetilde{X}) \times \pi_1(X,x) \ni (\sigma,\gamma) \longmapsto \delta(\gamma^{-1})_*(\sigma) \in S_n(\widetilde{X})$$

，该作用扩展为 $\pi_1(X,x)$ 在 $C_n(X;k)$ 上的右作用。这里，对于拓扑空间之间的连续映射$\phi\colon X_1 \to X_2$，我们用 $\phi_*\colon S_n(X_1) \ni \sigma \mapsto \phi \circ \sigma \in S_n(X_2)$ 表示奇异单形的诱导映射，该映射线性扩展为链的 $k$-线性映射$\phi_*\colon C_n(X_1;k) \to C_n(X_2;k)$。

## 2.2 Mod$^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的 Euler变换函子

上一节将同调欧拉变换 $\mathcal{E}_\lambda$ 引入为 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 上 $k$-局部系统范畴的端函子。我们说明，这个函子自然地扩展为 Mod$^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的端函子。

设 $(G,\alpha)$ 是 $F_n$ 上的一个 Artin 表示，$V$ 是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。那么，在识别 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n,d) \cong \pi_1(D\backslash Q_n,d) \cong F_n$ 后，$V$ 可视为一个左 $k[\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n,d)]$-模。因此，我们得到 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 上的局部系统 $\mathcal{E}_\lambda(V)$，其在 $z \in \mathbb{C}\backslash Q_n$ 处的茎为同调群

$$\mathcal{E}_\lambda(V)_z = H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(z); \iota_z^*(C_\lambda(V)))$$

出现了。我们将看到，这个同调群自然地带有一个$F_n \rtimes_\alpha G$的作用。

为准确说明，我们取 $z \in \mathbb{C}\backslash Q_n$ 为原点 0，并用 $a_0$ 表示它：$= z = 0$。我们取闭圆盘 $D$，使其足够大，能够包含 $Q_n(a_0) = \{a_0 =$

$0, a_1 = 1, \ldots, a_n = n\}$ 位于其内部。按照第1节中的记法，对于每个 $i = 0, 1, \ldots, n-1$，我们用 $\tau_i$ 表示交换 $a_i$ 和 $a_{i+1}$ 的半扭转。于是 $\mathfrak{M}(D, Q_n(a_0))$ 由 $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ 生成，并包含由 $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ 生成的 $\mathfrak{M}(D, Q_n)$ 作为子群。通过同构 $\mathfrak{M}(D, Q_n(a_0)) \cong B_{n+1}$，与半扭转 $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ 对应的 $B_{n+1}$ 的生成元分别记为 $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$。由于 $\mathfrak{M}(D, Q_n(a_0))$ 中的元素在 $\partial D$ 上是恒等映射，我们可以将它们视为 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的自同胚，只需在 $D$ 外将其延拓为恒等映射。作为 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$ 的一组生成元，我们取环绕 $a_i, i = 0, 1, \ldots, n$ 的闭路，记为 $\gamma_i$，与第1节中的记法相同。

### 2.2.1 $F_n \rtimes_\alpha G$ 对 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$ 和 $C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); k)$ 的作用

考虑由 $\sigma_0^2, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ 在 $B_{n+1}$ 中生成的子群，并将其记为 $B_{1,n}$。由此可见，$x_1 := \sigma_0^2, x_2 := \sigma_1 x_1 \sigma_1^{-1}, \ldots, x_n := \sigma_{n-1} x_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1}$ 生成自由群 $F_n$，而 $B_{1,n}$ 分解为内部半直积 $B_{1,n} = F_n \rtimes B_n$，其中 $B_n$ 通过 Artin 表示作用于 $F_n$。于是，$F_n \rtimes_\alpha G$ 作用于 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$，即得到群同态

$$\eta \colon F_n \rtimes_\alpha G \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbf{Top}}(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0))$$

它是以下映射的复合；第一个是映射

$$F_n \rtimes_\alpha G \ni (x, g) \mapsto (x, \alpha(g)) \in F_n \rtimes B_n,$$

第二个是包含 $F_n \rtimes B_n \cong B_{1,n} \subset B_{n+1} \cong \mathfrak{M}(D, Q_n(a_0))$，最后一个是包含 $\mathfrak{M}(D, Q_n(a_0)) \hookrightarrow$ 自同构群 $\mathbf{Top}(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0))$。这里，$\mathrm{Aut}_{\mathbf{Top}}(X)$ 表示拓扑空间 $X$ 的自同胚群。由此映射，我们可以定义 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$ 上的如下左作用，

$$(F_n \rtimes_\alpha G) \times \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) \ni (h, \gamma) \longmapsto \eta(h)_*(\gamma) \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d).$$

此外，我们按如下方式定义 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); k)$ 上的作用。固定一个元素 $\bar{d} \in \pi^{-1}_{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}(d)$。然后，对于每个 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$，令 $\eta(h) \colon \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) \to \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 为满足 $\eta(h)(d) = d$ 的 $\pi_{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} \circ \eta(h) \colon \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) \to \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的唯一提升。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} & \xrightarrow{\overline{\eta(h)}} & \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}} \\ \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) & \xrightarrow{\eta(h)} & \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) \end{array}$$

提升的唯一性推出 $(\eta(h))^{-1} = \eta(h^{-1})$ 和 $\eta(h_1) \circ \overline{\eta(h_1)} = \eta(\overline{h_1 h_2})$，其中 $\overline{h, h_1, h_2} \in F_n \rtimes_\alpha G$。因此，$\bar{\eta} \colon F_n \rtimes_\alpha G \to$ 自同构群 $\mathbf{Top}(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0))$ 成为群同态，并定义 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $S_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0))$ 上的左作用，定义如下：

$$(F_n \rtimes_\alpha G) \times S_n(\widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}) \ni (h, \sigma) \longmapsto \bar{\eta}(h)_*(\sigma) \in S_n(\widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}),$$

它线性延拓为对 $C_n(\widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}; k)$。

现在我们回想一下，这个 $\bar{\eta}$ 与同构 $\delta \colon \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) \to$ 覆盖变换群 $(\pi_{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)})$ 相容，也就是说，我们有如下内容。

引理 2.3。图表

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} & \xrightarrow{\bar{\eta}(h)} & \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} \\ \downarrow{\scriptstyle \delta(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle \delta(\eta(h))_*(\gamma))} \\ \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} & \xrightarrow{\bar{\eta}(h)} & \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} \end{array}$$

对每个 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$ 和 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$，都是交换的。

证明。这是众所周知的。 □

### 2.2.2 $F_n \rtimes_\alpha G$-作用于 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$

定义群同态 $\tilde{\eta}$: $F_n \rtimes_\alpha G \to$ 自同构群$_k(V \otimes K_\lambda)$ 如下:

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(x)(v \otimes \kappa) &:= v \otimes \kappa && \text{for } x \in F_n, \text{ and } v \otimes \kappa \in V \otimes_k K_\lambda, \\ \tilde{\eta}(g)(v \otimes \kappa) &:= gv \otimes \kappa && \text{for } g \in G, \text{ and } v \otimes \kappa \in V \otimes_k K_\lambda. \end{aligned}$$

接着验证 $\tilde{\eta}$ 与 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) = V \otimes_k K_\lambda$ 上的 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$-作用相容。具体而言，图表

$$\begin{array}{ccc} \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) & \xrightarrow{\tilde{\eta}(h)} & \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) \\ \downarrow{\scriptstyle \gamma\cdot} & & \downarrow{\scriptstyle \eta(h)_*(\gamma)\cdot} \\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) & \xrightarrow{\tilde{\eta}(h)} & \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) \end{array}$$

对每个 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$ 和 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$，都是交换的。

回顾一下，$\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 是一个 $k[\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)]$-模，它作为 $k$-向量空间等于 $V \otimes_k K_\lambda$，并且 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$ 在 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 上的作用定义为

$$\gamma \cdot (v \otimes \kappa) = (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma) \cdot v \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma) \cdot \kappa$$

对于 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0, d))$, $v \in V$ 和 $\kappa \in K_\lambda$。

首先考察同态 $(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*$: $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$。由于 $\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0}$ 是包含映射 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash Q_n$，且 $\gamma_0$ 在 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 中与 $\mathbb{C}\backslash Q_n$ 中的常值路径同伦，因此可以看出，群同态 $(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*$ 与投影映射一致

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{pr}_0\colon & F_{n+1} = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle & \longrightarrow & F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \\ & x_i & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \\ x_i & \text{otherwise} \end{cases} \end{array},$$

其中包含映射 $\mathrm{inc}_0$: $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle \ni x_i \mapsto x_i \in F_{n+1} = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$是一个收缩同态，即 $\mathrm{pr}_0 \circ \mathrm{inc}_0 = \mathrm{id}_{F_n}$。

将 $\mathfrak{M}(D, Q_n(a_0))$ 中的元素视为复平面 $\mathbb{C}$ 的自同胚。由于 $\mathfrak{M}(D, Q_n(a_0))$ 的子群 $B_{1,n}$ 保持 $Q_n$ 不变，因此它不仅作用于 $D\backslash Q_n(a_0)$，也作用于 $D\backslash Q_n$。于是我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0}} & \mathbb{C}\backslash Q_n \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) & \xrightarrow{\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0}} & \mathbb{C}\backslash Q_n \end{array}$$

对于每个 $\sigma \in B_{1,\ n}$。

引理 2.4。 $B_n$ 是$B_{1,\ n}$ 的子群，它通过 Artin 表示作用于 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$。由 $x_1 = \sigma_0^2$、$x_2 = \sigma_1 x_1 \sigma_1^{-1}$、……、$x_n = \sigma_{n-1} x_{n-1} \sigma_{n-1}^{-1}$ 生成的 $B_{1,\ n}$ 的子群 $F_n$ 在 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$上平凡作用。

证明。上述交换图诱导出交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*} & \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma^*} \\ \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) & \xrightarrow{(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*} & \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \end{array} .$$

那么这 个图表告诉我们，映射 $\sigma_*\colon \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$ 分解为 s

$$\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \xrightarrow{\mathrm{inc}_0} \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)) \xrightarrow{\sigma_*} \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)) \xrightarrow{(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*} \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$$

对每个 $\sigma \in B_{1,\ n}$。这立即证明了第一个断言。

另一方面，由于我们有

$$(\sigma_0^2)_*(\gamma_i) = \begin{cases} \gamma_1^{-1}\gamma_0\gamma_1 & \text{if } i = 0, \\ (\gamma_0\gamma_1)^{-1}\gamma_1(\gamma_0\gamma_1) & \text{if } i = 1, \\ \gamma_i & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \text{for } \gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d),$$

方程 $(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma_0) = 1$ 表明 $(x_1)_* = (\sigma_0^2)_*\colon \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$ 是恒等映射。由此归纳可得，所有 $(x_i)_*\colon \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d)$ 对 $i = 1, \ldots, n$ 也都是恒等映射。□

以下是该引理的直接推论。

推论 2.5. 通过同构 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \ni \gamma_i \mapsto x_i \in F_n$，我们将$\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{Grp}}(F_n)$视为群同态 $\alpha\colon G \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{Grp}}(\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d))$。于是方程

$$(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_* \circ \eta(g)_*(\gamma) = \alpha(g)((\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma))$$

对所有 $g \in G$ 和 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)\ d)$均成立，即图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) & \xrightarrow{\eta(g)_*} & \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d) \\ \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*} \\ \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) & \xrightarrow{\alpha(g)} & \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n, d) \end{array}$$

是交换的。此外，对于 $x \in F_n$，我们有

$$(\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_* \circ \eta(x)_*(\gamma) = (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma).$$

接下来我们来看同态 $(\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*\colon \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)\ d) \to \pi_1(\mathbb{C}^\times, d - a_0)$。与上文类似，我们可以看到群同态 $(\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*$与投影映射重合

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{pr}^0\colon & F_{n+1} = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle & \longrightarrow & F_1 = \langle x \rangle \\ & x_i & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{if } i = 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} , \end{array}$$

其中包含映射 $\mathrm{inc}^0$: $F_1 = \langle x \rangle \ni x \mapsto x_0 \in F_{n+1} = \langle x_0, x_1, \ldots, x_n \rangle$ 是一个收缩同态。

同胚 $\mathbb{C} \ni z \to z - a_0 \in \mathbb{C}$ 使我们能够定义子群 $B_{1,\ n}$ 在群 $\mathsf{G}$（$D, Q_n(a_0)$）上的作用，该作用通过 $\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0}$: $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ 与其在 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 上的作用相容。因此，仿照引理 2.4 和推论 2.5，我们得到以下引理及其推论。

引理 2.6. $B_{1,\ n}$ 在 $\pi_1(\mathbb{C}^\times, d - a_0)$ 上的作用是平凡的。

推论 2.7. 对所有 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$，我们有

$$(\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_* \circ \eta(h)_*(\gamma) = (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma).$$

结合推论 2.5 和推论 2.7，我们得到以下所需结果。

**P**命题 2.8. 对每个 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$ 和 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)\ d)$，图表

$$\begin{array}{ccc} \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) & \xrightarrow{\tilde{\eta}(h)} & \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \gamma\cdot} & & \big\downarrow{\scriptstyle \eta(h)_*(\gamma)\cdot} \\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) & \xrightarrow{\tilde{\eta}(h)} & \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) \end{array}$$

是交换的。

证明。任取 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$，并将 $h = xg$ 写作 $x \in F_n$ 和 $g \in G$。于是我们有

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(h)(\gamma \cdot (v \otimes \kappa)) &= \tilde{\eta}(x) \circ \tilde{\eta}(g)((\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma) \cdot v \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma)\kappa) \\ &= g \cdot ((\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma) \cdot v) \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma)\kappa \\ &= \alpha(g)((\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\gamma))g \cdot v \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma)\kappa \\ &= (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_* \circ \eta(g)_*(\gamma) \cdot g \cdot v \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma)\kappa \\ &= (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_* \circ \eta(x)_* \circ \eta(g)_*(\gamma) \cdot g \cdot v \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\gamma)\kappa \\ &= (\mathrm{pr}_t \circ \iota_{a_0})_*(\eta(h)_*(\gamma)) \cdot g \cdot v \otimes (\mathrm{pr}_{t-z} \circ \iota_{a_0})_*(\eta(h)_*(\gamma))\kappa \\ &= \eta(h)_*(\gamma) \cdot (g \cdot v \otimes \kappa) \\ &= \eta(h)_*(\gamma) \cdot \tilde{\eta}(h)(v \otimes \kappa) \end{aligned}$$

对所有 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)\ d)$ 和 $v \otimes \kappa \in V \otimes K_\lambda = \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 均成立。这里，第四个和第五个方程中用到了推论 2.5，第六个方程中用到了推论 2.7。 □

### 2.2.3 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 上的作用

我们定义 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在 $C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)) \otimes_k (V \otimes_k K_\lambda)$ 上的一个左作用如下:

$$h \cdot (\sigma \otimes w) := \bar{\eta}(h) \circ \sigma \otimes \tilde{\eta}(h)(w) \qquad \text{for } \sigma \in C_n(\mathbb{C}\backslash\widetilde{Q_n(a_0)}),\ w \in V \otimes_k K_\lambda,\ \text{and } h \in F_n \rtimes_\alpha G.$$

那么，下面的命题保证这会在$C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$上诱导出左 $F_n \rtimes_\alpha G$ 作用。

命题 2.9。投影映射的核

$$\pi\colon C_n(\mathbb{C}\backslash\widetilde{Q_n(a_0)}) \otimes_k (V \otimes_k K_\lambda) \to C_n(\mathbb{C}\backslash\widetilde{Q_n(a_0)}) \otimes_{k[\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0),d)]} \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$$

在左侧 $F_n \rtimes G$-作用下保持不变。

证明。任取 $\sigma \in C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0))$、$w \in V \otimes_k K_\lambda$ 和 $\gamma \in \pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0), d)$。那么对于 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$，我们有

$$\begin{aligned}
&h \cdot (\sigma \cdot \gamma \otimes w - \sigma \otimes \gamma \cdot w) \\
&\quad = h \cdot (\delta(\gamma^{-1}) \circ \sigma \otimes w - \sigma \otimes \gamma \cdot w) \\
&\quad = \bar{\eta}(h) \circ \delta(\gamma^{-1}) \circ \sigma \otimes \tilde{\eta}(h)(w) - \bar{\eta}(x) \circ \sigma \otimes \tilde{\eta}(h)(\gamma \cdot w) \\
&\quad = \delta(\eta(x)_*(\gamma^{-1})) \circ \bar{\eta}(x) \circ \sigma \otimes \tilde{\eta}(h)(w) - \bar{\eta}(x) \circ \sigma \otimes \eta(x)_*(\gamma) \cdot \tilde{\eta}(h)(w) \\
&\quad = (\bar{\eta}(x) \circ \sigma) \cdot \eta(x)_*(\gamma) \otimes \tilde{\eta}(h)(w) - (\bar{\eta}(x) \circ \sigma) \otimes \eta(x)_*(\gamma) \cdot \tilde{\eta}(h)(w) \in \operatorname{Ker} \pi
\end{aligned}$$

如所期望。 □

### 2.2.4 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$的Euler变换函子

$C_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$上的左 $F_n \rtimes_\alpha G$作用与边界映射相容，因此它在 $H_n(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$上诱导出左 $F_n \rtimes_\alpha G$作用。

定义 2.10（$k[F_n \rtimes_\alpha G]$的Euler变换函子）。对于 $\lambda \in k^\times$，我们定义函子 $\mathcal{E}_\lambda$: Mod $_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \to \mathbf{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$，其定义为

$$\mathcal{E}_\lambda(V) := H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \quad \text{for } V \in \mathscr{O}(\mathbf{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}).$$

此外，对于 $\phi \in \mathrm{Hom}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}(V, W)$，我们通过由$\phi$: $V \to W$诱导的同态 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \to H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(W)))$，定义 $\mathcal{E}_\lambda(V) \in \mathrm{Hom}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}(\mathcal{E}_\lambda(V), \mathcal{E}_\lambda(W))$。

## 2.3 欧拉变换与扭曲的 Long-Moody 函子

波赫哈默尔围道积分是描述高斯超几何函数 $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_1^\infty t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}\, dt$ 关于参数 $\alpha$、$\beta$ 和 $\gamma$的积分表示的解析延拓的经典工具。我们将说明，波赫哈默尔围道积分给出了同调群 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 的标准直和分解。

### 2.3.1 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的开覆盖

取一个开覆盖 $\mathbb{C} = X_1 \cup Y_1$，使得

1. $X_1$ 和 $Y_1$ 连通；2. $X_1 \cap Q_n(a_0) = \{a_0, a_1\}$、$Y_1 \cap Q_n(a_0) = \{a_0, a_2, \ldots, a_n\}$ 和 $d \in X_1 \cap Y_1$；3. $X_1 \backslash \{a_0, a_1\}$、$Y_1 \backslash \{a_0, a_2, \ldots, a_n\}$ 和 $X_1 \cap Y_1 \backslash \{a_0\}$ 分别包含 $\gamma_0 \cup \gamma_1$、$\gamma_0 \cup \gamma_2 \cup \ldots \cup \gamma_n$ 和 $\gamma_0$ 作为形变收缩。

设 $X_1^* := X_1 \backslash \{a_0, a_1\}$ 和 $Y_1^* := Y_1 \backslash \{a_0, a_2, \ldots, a_n\}$。我们来考虑 Mayer–Vietoris 正合序列

$$\begin{aligned}
H_1(X_1^* \cap Y_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_1^* \cap Y_1^*}) &\to H_1(X_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_1^*}) \oplus H_1(Y_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{Y_1^*}) \\
&\to H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \to H_0(X_1^* \cap Y_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_1^* \cap Y_1^*}),
\end{aligned}$$

其中 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_X$表示通过包含映射 $\iota_X$: $X \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 将 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 拉回到子空间 $X \subset \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 上。然后在假设 $\lambda \neq 1$ 成立的情况下，我们可以证明如下结论。

命题 2.11. 假设 $\lambda \neq 1$。那么上述 Mayer–Vietoris 正合序列给出了 $k$-线性同构

$$H_1(X_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_1^*}) \oplus H_1(Y_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{Y_1^*}) \cong H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))).$$

证明。只需证明 $H_i(X_1^* \cap Y_1^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_1^* \cap Y_1^*}) = \{0\}, i = 0, 1$。

首先回顾一下，带有 $k[\pi_1(X)]$-模 $W$ 的第 0 阶同调群 $H_0(X;\ W)$ 与 $W/W^0$ 作为向量空间同构，其中 $W^0$ 是由 $(x-1)\cdot w$ （ $x \in \pi_1(X)$ 且 $w \in V$）生成的 $W$ 的子空间。由于 $\pi_1(X_1^* \cap Y_1^*, d)$ 的生成元 $\gamma_0$ 在 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_1^* \cap Y_1^*}$ 上的作用等于标量 $\lambda$ 的乘法，假设 $\lambda \neq 1$ 推出方程 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) = \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))^0$,，这表明 $H_0(X_1^* \cap Y_1^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(L))|_{X_1^* \cap Y_1^*}) = \{0\}$。

对于一阶同调群，由以下著名引理和假设$\lambda \neq 1$可推出 $H_1(X_1^* \cap Y_1^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ $\cong \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))^{\pi_1(X_1^* \cap Y_1^*,\ d)} = \{0\}$。这里，对所有 $h \in H\}$，$W^H := \{w \in W \mid h \cdot w = w$ 是群 $H$ 的 $k[H]$-模 $W$ 的 $H$-不变子空间。 □

引理 2.12. 取点 $s_0 := (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ 以及闭路 $\omega\colon [0,1] \ni t \mapsto \widetilde{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)} \in \mathbb{R}^2$，其中 $S^1$。设 $\pi_{S^1}\colon S_1 \to S^1$ 为万有覆盖。固定一点$\sim\tilde{s}_0 \in \pi_{S^1}^{-1}(s_0)$，并将从 $\tilde{s}_0$ 出发的 $\omega$ 到 $S^1$ 的提升记作 $\tilde{\omega}$。那么，对于左 $k[\pi_1(S^1, s_0)]$- 模 $W$，映射

$$W^{\pi_1(S^1, s_0)} \ni v \longmapsto \widetilde{\omega} \otimes v \in H_1(S^1; W)$$

是一个 $k$-线性同构。

证明。这是代数拓扑中的一个标准事实，参见 [10] 。 □

考察 $H_1(Y_1^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{Y_1^*})$，并取一个开覆盖 $Y_1 = X_2 \cup Y_2$，使得

1. $X_2$ 和 $Y_2$ 是连通的,
2. $X_2 \cap Q_n(a_0) = \{a_0, a_2\}$, $Y_2 \cap Q_n(a_0) = \{a_0, a_3, \ldots, a_n\}$ and $d \in X_2 \cap Y_2$,
3. $X_2\backslash\{a_0, a_2\}$、 $Y_2\backslash\{a_0, a_3, \ldots, a_n\}$和 $X_2 \cap Y_2\backslash\{a_0\}$ 分别包含$\gamma_0 \cup \gamma_2$、 $\gamma_0 \cup \gamma_3 \cup \ldots \cup \gamma_n$和 $\gamma_0$ 作为形变收缩。

令 $X_2^* := X_2\backslash\{a_0, a_2\}$ 和 $Y_2^* := Y_2\backslash\{a_0, a_3, \ldots, a_n\}$。那么，与上面相同的论证给出直和分解

$$H_1(X_2^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_2^*}) \oplus H_1(Y_2^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{Y_2^*}) \cong H_1(Y_1^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))).$$

反复进行这一过程，我们得到如下直和分解

$$H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} H_1(X_i^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*}) \tag{7}$$

在假设 $\lambda \neq 1$ 成立的条件下，其中 $X_1^*$、 $X_2^* \ldots$、 $X_n^*$ 是如上所定义的 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的开覆盖。

### 2.3.2 Pochhammer 周期

对于包含 $d$ 的道路连通子空间 $U \subset \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$，我们将包含映射 $\widetilde{\ }$ 记为 $\iota_U$：$U \hookrightarrow \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$，并考虑万有覆盖 $\pi_U\colon U \to U$。固定一点 $\bar{d}_U \in \pi_U^{-1}(d)$，并将 $\iota_U \circ \pi_U$ 到万有覆盖 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的、把 $\bar{d}_U$ 映到 $d$ 的唯一提升记为 $\widetilde{\iota_U}$。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U} & \xrightarrow{\widetilde{\iota_U}} & \widetilde{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_U} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)}} \\ U & \xrightarrow{\iota_U} & \mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) \end{array}$$

对于一条从 $d$ 出发、位于 $U$ 中的路径 $\gamma$，$\widetilde{\gamma}$ 表示从 $\bar{d}_U$ 出发的 $\gamma$ 到 $U$ 的唯一提升。于是，$\widetilde{\iota_{U*}}(\widetilde{\gamma})$ 是从 $d$ 出发的 $\gamma$ 到 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 的提升。

对于群 $H$ 中的两个元素 $a$、$b$，我们将它们的交换子记作 $[a,b] := a^{-1}b^{-1}ab$。

定义 2.13（Pochhammer 循环）。对于 $c \in \iota_{a_0}^*(C_\sigma(V))$，1-链 $[\gamma_0,\gamma_i]\otimes c \in C_1(X_i^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\sigma(V))|_{X_i^*})$ 称为 $X_i^*$ 中的 Pochhammer 周期。此外，1-链 $\widetilde{\iota_{X_i^*}}_*([\gamma_0,\gamma_i])\otimes c \in C_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\sigma(V)))$ 称为 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 中的 Pochhammer 周期。

如下文所示，Pochhammer 循环不只是链，而是真正的循环。

引理 2.14. 对于 $c \in \iota_{a_0}^*(C_\sigma(V))$，我们考虑 $[\gamma_0,\gamma_i]\otimes c \in C_1(X_i^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*})$。那么，$[\gamma_0,\gamma_i]\otimes c$ 是一个循环，也就是说，它属于边界映射 $\partial_1\colon C_1(X_i^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*}) \to C_0(X_i^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*})$ 的核。

同样，Pochhammer 循环 $\widetilde{\iota_{X_i^*}}_*([\gamma_0,\gamma_i])\otimes c$ 在 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0)$ 中也是一个循环。

证明。第二个断言由第一个断言推出，因为 $\widetilde{\iota_{X_i^*}}$ 诱导出一个链映射。下面证明第一个断言。由于 $\gamma_0$ 在 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 上的作用是乘以标量 $\lambda$，因此我们得到所需结论：

$$\begin{aligned} \partial_1(\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes c) &= \widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}(0)\otimes c - \widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}(1)\otimes c \\ &= \bar{d}_{X_i^*}\otimes c - [\gamma_0,\gamma_i]\cdot\bar{d}_{X_i^*}\otimes c \\ &= \bar{d}_{X_i^*}\otimes c - \bar{d}_{X_i^*}\otimes[\gamma_0,\gamma_i]^{-1}\cdot c \\ &= \bar{d}_{X_i^*}\otimes c - \bar{d}_{X_i^*}\otimes(\gamma_i^{-1}\gamma_0^{-1}\gamma_i\gamma_0)\cdot c \\ &= \bar{d}_{X_i^*}\otimes c - \bar{d}_{X_i^*}\otimes\lambda^{-1}\cdot\lambda(\gamma_i^{-1}\cdot\gamma_i)c \\ &= \bar{d}_{X_i^*}\otimes c - \bar{d}_{X_i^*}\otimes c = 0. \end{aligned}$$

□

由此可知，$H_1(X_i^*;\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*})$ 由 Pochhammer 周期生成，如下所示。

命题 2.15。在假设 $\lambda \neq 1$ 成立的条件下，映射

$$\mathrm{Poch}_i\colon \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) \ni c \longmapsto \widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes c \in H_1(X_i^*;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*})$$

是一个线性同构。

在证明这一点之前，我们先准备以下引理。

引理 2.16. 设 $\lambda \neq 1$。取一个开覆盖 $X_i^* = U_{a_i} \cup U_{a_0}$ where$U_{a_i}$ （分别为 $U_{a_0}$）是 $X_i^*$ 与 $a_i$ （分别为 $a_0$）在 $\mathbb{C}$ 中的一个开邻域的交。我们假设 $U_{a_i}$ 和 $U_{a_0}$ 分别以 $\gamma_i$ 和 $\gamma_0$ 为变形收缩，并进一步假设交集 $U_{a_i} \cap U_{a_0}$ 是单连通的。那么存在一个同构

$$H_1(X_i^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*}) \xrightarrow{\sim} H_0(U_{a_i} \cap U_{a_0}; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{U_{a_i} \cap U_{a_0}}).$$

特别地，我们有向量空间 $H_1(X_i^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*}) \cong \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 的同构。

证明。第二个断言由第一个断言立即推出，因为由 $U_{a_i} \cap U_{a_0}$ 的单连通性可得 $H_0(U_{a_i} \cap U_{a_0}; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{U_{a_i} \cap U_{a_0}}) \cong \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$。

为简单起见，我们记 $\bar{V} = \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$。回顾 $\gamma_0 \cdot v = \lambda v$ 对所有 $v \in V$ 均成立，且 $\bar{V}$ 也有 $\lambda \neq 1$，我们得到 $H_0(X_i^*; \bar{V}|_{X_i^*}) = \{0\}$ 和 $H_j(U_{a_0}; \bar{V}|_{U_{a_0}}) = \{0\}$, $j = 0, 1$，如命题 2.11 所示。因此，Mayer–Vietoris 长正合列给出了以下正合序列。

$$\begin{aligned}\{0\} \to H_1(U_{a_i}; \bar{V}|_{U_{a_i}}) \to H_1(X_i^*; \bar{V}|_{X_i^*}) \\ \xrightarrow{\delta} H_0(U_{a_i} \cap U_{a_0}; \bar{V}|_{U_{a_i} \cap U_{a_0}}) \to H_0(U_{a_i}; \bar{V}|_{U_{a_i}}) \to \{0\}\end{aligned}$$

$\bar{V}$ 考虑乘法映射 $(\gamma_i - 1)$ : $V \ni v \mapsto (\gamma_i - 1)v \in V$，于是得到

$$\begin{aligned}H_1(U_{a_i}; \bar{V}|_{U_{a_i}}) &\cong \{v \in \bar{V} \mid (\gamma_i - 1) \cdot v = 0\} = \operatorname{Ker}(\gamma_i - 1), \\ H_0(U_{a_i}; \bar{V}|_{U_{a_i}}) &\cong \bar{V}/\{(\gamma_i - 1)v \mid v \in \bar{V}\} = \operatorname{Coker}(\gamma_i - 1),\end{aligned}$$

因为 $U_{a_i}$ 与 $S^1$同伦等价。因此可得

$$H_1(U_{a_i}; \bar{V}|_{U_{a_i}}) \cong \operatorname{Ker}(\gamma_i - 1) \cong \operatorname{Coker}(\gamma_i - 1) \cong H_0(U_{a_i}; \bar{V}|_{U_{a_i}})$$

因为每个向量空间都是内射模和投射模，因此向量空间的一个自同态的核和余核一般是同构的。

因此我们得到 $\operatorname{Ker}\delta \cong \operatorname{Coker}\delta$。此外，由于向量空间是内射模和投射模，我们有同构

$$\begin{aligned}H_1(X_i^*; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*}) &\cong \operatorname{Coim}\delta \oplus \operatorname{Ker}\delta, \\ H_0(U_{a_i} \cap U_{a_0}; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{U_{a_i} \cap U_{a_0}}) &\cong \operatorname{Im}\delta \oplus \operatorname{Coker}\delta.\end{aligned}$$

那么同构 $\operatorname{Ker}\delta \cong \operatorname{Coker}\delta$ 和 $\operatorname{Coim}\delta \cong \operatorname{Im}\delta$ 诱导出所需的同构。□

对于连通流形 $X$ 的子空间 $C \subset X$， $S_n^C(\widetilde{X})$ 表示满足 $\operatorname{Im}(\pi_X \circ \sigma) \subset C$ 的所有奇异$_\sim n$-单形 $\sigma$ 的集合，而 $C_n^C(X; k)$ 表示由 $S_n^C(\widetilde{X})$ 自由生成的 $k$-向量空间。对于 $k$-局部系统 $L$，我们定义 $C_n^C(X; L) := C_n^C(\widetilde{X}; k) \otimes_{k[\pi_1(X)]} L$。以下结果是 Mayer–Vietoris 长正合列的一个重要引理，众所周知，其证明与通常带常系数的奇异同调群的证明类似。

引理 2.17. 设 $X$ 为一个拓扑流形， $X = A \cup B$ 为一个开覆盖。设 $L$ 是 $X$ 上的 $k$-局部系统。我们在向量空间 $C_n(X; L)$ 中考虑和 $C_n^A(X; L) + C_n^B(X; L)$。则有如下结论。

1. 包含映射 $C_n^A(X;L)+C_n^B(X;L)\hookrightarrow C_n(X;L)$ 诱导出同调群的同构。

2. 我们有一个短正合列

$$\{0\}\to C_n(A\cap B;L|_{A\cap B})\xrightarrow{f} C_n(A;L|_A)\oplus C_n(B;L|_B)\xrightarrow{g} C_n^A(X;L)+C_n^B(X;L)\to\{0\}.$$

这里，$f$、$g$ 定义如下。映射 $g$ 是由包含映射 $*\hookrightarrow X$（其中 $*=A$、$B$）诱导的映射 $C_n(*;L|_*)$ 和$\to C_n^*(X;L)$ 之和，而 $f$ 是由包含映射 $A\cap B\hookrightarrow *$（其中 $*=A$、$B$）诱导的映射$C_n(A\cap B;L|_{A\cap B})$ 和 $\to C_n(*;V|_*)$ 之差。

现在我们回到命题的证明。

命题 2.15 的证明。引理 2.16 告诉我们，$H_1(X_i^*;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{X_i^*})$ 作为向量空间与 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 同构。因此，利用向量空间的自由性，我们只需验证映射 $\mathrm{Poch}_i$ 的单射性。

我们记 $V=\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$。假设 $v\in V$满足 $\mathrm{Poch}_i(v)=0$，并将证明 $v=0$。我们取与引理 2.16 中相同的覆盖 $X_i^*=U_{a_i}\cup U_{a_0}$。考虑交换图

$$\begin{array}{ccccc}
C_2(U_{a_i}\cap U_{a_0}) & \xrightarrow{f_2} & C_2(U_{a_i})\oplus C_2(U_{a_0}) & \xrightarrow{g_2} & C_2^{U_{a_i}}(X_i^*)+C_2^{U_{a_0}}(X_i^*)\\
\downarrow\partial_2 & & \downarrow\partial_2 & & \downarrow\partial_2\\
C_1(U_{a_i}\cap U_{a_0}) & \xrightarrow{f_1} & C_1(U_{a_i})\oplus C_1(U_{a_0}) & \xrightarrow{g_1} & C_1^{U_{a_i}}(X_i^*)+C_1^{U_{a_0}}(X_i^*)\\
\downarrow\partial_1 & & \downarrow\partial_1 & & \downarrow\partial_1\\
C_0(U_{a_i}\cap U_{a_0}) & \xrightarrow{f_0} & C_0(U_{a_i})\oplus C_0(U_{a_0}) & \xrightarrow{g_0} & C_0^{U_{a_i}}(X_i^*)+C_0^{U_{a_0}}(X_i^*)
\end{array},$$

由引理 2.17 得出。为简便起见，我们省略系数 $V$。注意到水平正合列是正合的，并且 $f_i$ 是单射，$g_i$ 是满射。

根据假设，$\mathrm{Poch}_i(v)=\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes v$ 与 0 同调等价。因此，由 $g_2$ 的满射性可知，存在 $\sigma_2\in C_2(U_{a_1};V|_{U_{a_1}})\oplus C_2(U_{a_0};V|_{U_{a_0}})$，使得 $[\gamma_0,\gamma_i]\otimes v=\partial_2\circ g_2(\sigma_2)$。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes v&=\widetilde{\gamma_0^{-1}}\otimes v+\widetilde{\gamma_i^{-1}}\otimes(\gamma_0\cdot v)+\widetilde{\gamma_0}\otimes(\gamma_i\gamma_0\cdot v)+\widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_0^{-1}\gamma_i\gamma_0\cdot v)\\&=\left(\widetilde{\gamma_i^{-1}}\otimes\lambda c+\widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_i\cdot v)\right)+\left(\widetilde{\gamma_0^{-1}}\otimes v+\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i\cdot v)\right),\end{aligned}$$

这表明

$$g_1\left(\left(\widetilde{\gamma_i^{-1}}\otimes\lambda v+\widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_i\cdot v)\right)+\left(\widetilde{\gamma_0^{-1}}\otimes v+\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i\cdot v)\right)\right)=\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes v.$$

由图表的交换性，我们还有 $g_1\circ\partial_2(\sigma_2)=[\gamma_0,\gamma_i]\otimes v$。因此，由 $f_1$ 的单射性可知，存在唯一的 $\sigma_1\in C_1(U_{a_i}\cap U_{a_0};V|_{U_{a_i}\cap U_{a_0}})$，使得

$$f_1(\sigma_1)=\left(\widetilde{\gamma_i^{-1}}\otimes\lambda v+\widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_i\cdot v)\right)+\left(\widetilde{\gamma_0^{-1}}\otimes v+\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i\cdot v)\right)-\partial_2(\sigma_2).$$

顺便一提，$\left(\widetilde{\gamma_i^{-1}} \otimes \lambda c + \widetilde{\gamma_i} \otimes (\gamma_i \cdot v)\right) + \left(\widetilde{\gamma_0^{-1}} \otimes v + \widetilde{\gamma_0} \otimes \lambda(\gamma_i \cdot v)\right) \in C_1(U_{a_1};\, V|_{U_{a_1}}) \oplus C_1(U_{a_0};\, V|_{U_{a_0}})$ 在边界映射 $\partial_1$ 下的像为

$$\left(\bar{d}_{U_{a_i}} \otimes -(\lambda-1)(\gamma_i-1)v\right) + \left(\bar{d}_{U_{a_0}} \otimes (\lambda-1)(\gamma_i-1)v\right),$$

它是 $f_0$ 作用于 $d_{U_{a_i}\cap U_{a_0}} \otimes -(\lambda-1)(\gamma_i-1)v \in C_0(U_{a_i}\cap U_{a_0};\, V|_{U_{a_i}\cap U_{a_0}})$ 的像。于是，由 $f_0$ 的单射性可得

$$\partial_1(\sigma_1) = \bar{d}_{U_{a_i}\cap U_{a_0}} \otimes -(\lambda-1)(\gamma_i-1)v.$$

因此，由以下两个事实可得 $(\lambda-1)(\gamma_i-1)v = 0$。其一，我们有 $C_0(U_{a_i}\cap U_{a_0};\, V|_{U_{a_i}\cap U_{a_0}}) = C_0(U_{a_i}\cap U_{a_0};\, k) \otimes_k V$，因为 $U_{a_i}\cap U_{a_0}$是单连通的。其二，对于 0-连通拓扑空间 $Y$，边界映射 $\partial_1\colon C_1(Y;\, k) \to C_0(Y;\, k)$ 的像等于增广映射 $\epsilon\colon C_0(Y;\, k) \ni \sum_{\sigma\in S_0(Y)} r_\sigma \cdot \sigma \mapsto \sum_{\sigma\in S_0(Y)} r_\sigma \in k$ 的核。

因此，由于 $\lambda \neq 1$，我们得到 $(\gamma_i-1)v = 0$，此外还得到 $\partial_1 \circ f_1(\sigma_1) = f_0 \circ \partial_1(\sigma_1) = 0$。这意味着

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1(\widetilde{\gamma_i^{-1}} \otimes \lambda v + \widetilde{\gamma_i} \otimes (\gamma_i \cdot v)) = \partial_1(\widetilde{\gamma_i^{-1}} \otimes \lambda v + \widetilde{\gamma_i} \otimes v) \\ &= \partial_1(-\widetilde{\gamma_i} \otimes \lambda v + \widetilde{\gamma_i} \otimes v) = \partial_1(\widetilde{\gamma_i} \otimes (1-\lambda)v) \end{aligned}$$

这表明，由于条件 $(\gamma_i-1)v = 0$，我们可以应用引理 2.12 得到 $(1-\lambda)v = 0$。因此，我们如期得到 $v = 0$。 □

将此命题与直和分解 (7) 结合起来，我们得出，$H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 的一组基由 Pochhammer 周期给出。

**定理 2.18.** 设 $V$ 是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$。由于作为向量空间有 $\iota_{a_0}(C_\lambda(V)) = V \otimes_k K_\lambda \cong V$，我们将 $\iota_{a_0}(C_\lambda(V))$ 与 $V$ 等同。于是

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Poch}\colon & V^{\oplus n} & \longrightarrow & H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}(C_\lambda(V))) \\ & (v_1,\dots,v_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]} \otimes v_i \end{array}$$

是一个向量空间同构。

### 2.3.3 K¨unneth 公式

考虑 $\mathcal{E}_\lambda(k[F_n]) = H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))$。由于 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])) = k[F_n] \otimes_k K_\lambda$ 具有自然的 $k[F_n]$-双模结构，因此 $C_m(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n]))) = C_m(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, k) \otimes_{k[\pi_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0),\, d)]} \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n]))$ 可自然地视为右 $k[F_n]$-模，而且同调群 $H_m(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))$ 具有诱导的右 $k[F_n]$-模结构。

那么，定理 2.18 表明，第一同调群 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))$ 是自由右群 G- $k[F_n]$ 模，由此我们得到以下 K¨unneth 公式。

**命题 2.19.** 设 $V$ 是一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$。那么存在一个同构

$$H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n]))) \otimes_{k[F_n]} V \xrightarrow{\sim} H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))).$$

证明. 定理 2.18 表明， $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))$ 是由 $[\gamma_0,\gamma_i]\otimes \mathbf{1}$（对应于 $i=1,\ldots\ldots,n$）生成的自由右 $k[F_n]$-模，其中 $\mathbf{1}\in \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])) = k[F_n]\otimes_k K_\lambda$ 是带有 $1\in k[F_n]$ 和 $1\in k = K_\lambda$ 的 $1\otimes 1$。

因此， $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))\otimes_{k[F_n]} V$中的每个元素都可以唯一地写成 $\sum_{i=1}^n([\gamma_0,\gamma_i]\otimes \mathbf{1})\otimes v_i$ 的形式，其中 $v_i\in V$，于是我们可以定义映射

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))\otimes_{k[F_n]} V & \longrightarrow & H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \\ \sum_{i=1}^n([\gamma_0,\gamma_i]\otimes \mathbf{1})\otimes v_i & \longmapsto & \sum_{i=1}^n [\gamma_0,\gamma_i]\otimes(v_i\otimes 1)\end{array}$$

根据定理 2.18，这是一个同构。 □

### 2.3.4 欧拉变换与扭曲 Long-Moody 函子

我们给出欧拉变换函子与扭曲 Long-Moody 函子之间的函子等价。

命题 2.20. 取 $\lambda\in k^\times\backslash\{1\}$。那么映射

$$\begin{array}{rccc}\Phi\colon & H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n]))) & \longrightarrow & I_{F_n,\lambda} \\ & \sum_{i=1}^n([\gamma_0,\gamma_i]\otimes(x^{(i)}\otimes\kappa^{(i)})) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n(x_i-1)(\kappa^{(i)}x^{(i)})\end{array}$$

是一个左$k[F_n\rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n]$-模同构。其中 $x^{(i)}\in k[F_n]$ 和 $\kappa^{(i)}\in k = K_\lambda$。此外，这是一个右 $k[F_n]$-模同构。

证明。定理 2.18 表明， $\Phi$ 是右 $k[F_n]$-模同构。因此，只需证明 $\Phi$ 是左$k[F_n\rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n]$-模同态。

注意，对于 $\chi\in\iota_{a_0}(C_\lambda(k[F_n]))$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes\chi &= \widetilde{\gamma_0^{-1}}\otimes\chi + \widetilde{\gamma_i^{-1}}\otimes(\gamma_0\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_0}\otimes(\gamma_i\gamma_0\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_0^{-1}\gamma_i\gamma_0\cdot\chi) \\ &= -\widetilde{\gamma_0}\otimes(\gamma_0\cdot\chi) - \widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_i\gamma_0\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_0}\otimes(\gamma_i\gamma_0\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_0^{-1}\gamma_i\gamma_0\cdot\chi) \\ &= -\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda\chi - \widetilde{\gamma_i}\otimes\lambda(\gamma_i\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_i}\otimes(\gamma_i\cdot\chi) \\ &= \widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i-1)\cdot\chi + \widetilde{\gamma_i}\otimes(1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)\end{aligned}$$

在 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}(C_\lambda(k[F_n])))$中。于是有

$$\begin{aligned}&\sigma_j\cdot(\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes\chi) \\ &= \sigma_j\cdot(\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i-1)\cdot\chi + \widetilde{\gamma_i}\otimes(1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)) \\ &= \bar\eta(\sigma_j)_*(\widetilde{\gamma_0})\otimes\tilde\eta(\sigma_j)(\lambda(\gamma_i-1)\cdot\chi) + \bar\eta(\sigma_j)_*(\widetilde{\gamma_i})\otimes\tilde\eta(\sigma_j)((1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)) \\ &= \widetilde{\gamma_0}\otimes\tilde\eta(\sigma_j)(\lambda(\gamma_i-1)\cdot\chi) + \begin{cases}\widetilde{\gamma_{i+1}}\otimes\tilde\eta(\sigma_i)((1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)) & \text{if } j=i, \\ (\widetilde{\gamma_{i+1}^{-1}\cdot\gamma_i\cdot\gamma_{i+1}})\otimes\tilde\eta(\sigma_{i+1})((1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)) & \text{if } j=i+1, \\ \widetilde{\gamma_i}\otimes\tilde\eta(\sigma_j)((1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)) & \text{otherwise,}\end{cases}\end{aligned}$$

对于 $j=1,\ldots,n-1$。

现在来看 $j=i$ 的情形。于是我们有

$$\begin{aligned}&\widetilde{\gamma_0}\otimes\tilde\eta(\sigma_i)\cdot(\lambda(\gamma_i-1)\cdot\chi) + \widetilde{\gamma_{i+1}}\otimes\tilde\eta(\sigma_i)((1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi)) \\ &\qquad = \widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_{i+1}-1)\cdot\tilde\eta(\sigma_i)(\chi) + \widetilde{\gamma_{i+1}}\otimes(1-\lambda)\gamma_{i+1}\cdot\tilde\eta(\sigma_i)(\chi) \\ &\qquad = \widetilde{[\gamma_0,\gamma_{i+1}]}\otimes\tilde\eta(\sigma_i)(\chi).\end{aligned}$$

也来看一下 $j = i+1$ 的情形。类似地，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\gamma_0} \otimes \tilde{\eta}(\sigma_j)(\lambda(\gamma_i - 1)\cdot\chi) + (\widetilde{\gamma_{i+1}^{-1}\cdot\gamma_i\cdot\gamma_{i+1}}) \otimes \tilde{\eta}(\sigma_{i+1})((1-\lambda)(\gamma_i\cdot\chi))\\ = \cdots\\ = \widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]} \otimes \tilde{\eta}(\sigma_i)(\gamma_i\cdot\chi) + \widetilde{[\gamma_0,\gamma_{i+1}]} \otimes \tilde{\eta}(\sigma_i)((1-\gamma_{i+1})\cdot\chi).\end{aligned}$$

因此，若将左 $k[F_n \rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n]$-模 $\mathcal{E}_\lambda(V)$ 对应的群同态记作 $\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}$：$F_n \rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n \to \mathrm{Aut}_k(\mathcal{E}_\lambda(V))$，则在通过同构 Poch 得到的识别 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n]))) \cong k[F_n]^{\oplus n}$ 下，可得以下矩阵表示：

$$\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(\sigma_i) = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}\sigma_i & & & \\ & \sigma_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_i\end{matrix}}^{i-1} & & & \\ & \begin{matrix}0 & \sigma_i x_i\\ \sigma_i & \sigma_i - \sigma_i x_{i+1}\end{matrix} & & \\ & & \overbrace{\begin{matrix}\sigma_i & & & \\ & \sigma_i & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_i\end{matrix}}^{n-i-1} \end{pmatrix}$$

其中 $i = 1$、.....、$n-1$。这里注意到，通过同构 $\phi$：$\iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])) = k[F_n] \otimes_k K_\lambda \ni x \otimes \kappa \mapsto \kappa x \in k[F_n]$，我们有

$$\begin{aligned}\phi(\tilde{\eta}(b)(\chi)) &= b\cdot\phi(\chi) && \text{for } b \in B_n,\\ \phi(\tilde{\eta}(x)(\chi)) &= \phi(\chi) && \text{for } x \in F_n,\\ \phi(\gamma_i\cdot\chi) &= x_i\cdot\phi(\chi) && \text{for } x_i \in F_n,\ i = 1,\dots,n,\\ \phi(\gamma_0\cdot\chi) &= \lambda\cdot\phi(\chi).\end{aligned}$$

由于上述矩阵与 Long-Moody 函子的矩阵相同，因此可知 $\Phi$：$H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\, \iota_{a_0}(C_\lambda(k[F_n]))) \to I_{F_n,\ \lambda}$ 是一个左 $k[B_n]$-模同构。

下面验证 $\Phi$ 也是一个左 $k[F_n]$-同构。回顾 $x_1 = \sigma_0^2$，我们有

$$\begin{aligned}&x_1\cdot(\widetilde{[\gamma_0,\gamma_1]}\otimes v)\\ &\quad= \sigma_0^2\cdot(\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_1-1)\cdot v + \widetilde{\gamma_1}\otimes(1-\lambda)(\gamma_1\cdot v))\\ &\quad= \bar{\eta}(\sigma_0^2)_*(\widetilde{\gamma_0})\otimes\lambda\cdot\tilde{\eta}(\sigma_0^2)((\gamma_1-1)\cdot v) + \bar{\eta}(\sigma_0^2)_*(\widetilde{\gamma_1})\otimes(1-\lambda)\cdot\tilde{\eta}(\sigma_0^2)(\gamma_1\cdot v)\\ &\quad= (\widetilde{\gamma_1^{-1}\cdot\gamma_0\cdot\gamma_1})\otimes(\lambda(\gamma_1-1)v) + (\widetilde{(\gamma_0\cdot\gamma_1)^{-1}\cdot\gamma_1}\cdot(\gamma_0\cdot\gamma_1))\otimes(1-\lambda)(\gamma_1\cdot v)\\ &\quad= \cdots\\ &\quad= \widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_1-1)\cdot(\lambda\gamma_1\cdot v) + \widetilde{\gamma_1}\otimes(1-\lambda)\gamma_1\cdot(\lambda\gamma_1\cdot v)\\ &\quad= \widetilde{[\gamma_0,\gamma_1]}\otimes\lambda\gamma_1\cdot v,\end{aligned}$$

其中我们注意到，对于任意 $w \in \bar{V}$，$\tilde{\eta}(\sigma_0^2)(w) = \tilde{\eta}(x_1)(w) = w$。类似地，我们还有

$$x_1\cdot(\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes v) = \widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes v + \widetilde{[\gamma_0,\gamma_1]}\otimes(\gamma_i-1)\cdot v$$

对于 $i=2,\dots,n$。因此我们得到矩阵表示,

$$\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(x_1)=\begin{pmatrix}\lambda x_1 & (x_2-1) & \cdots & (x_n-1)\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix},$$

而这种矩阵形式告诉我们

$$\begin{aligned}\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(x_2)=\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(\sigma_1x_1\sigma_1^{-1})&=\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(\sigma_1)\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(x_1)\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(\sigma_1^{-1})\\ &=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ \lambda(x_1-1) & \lambda x_2 & (x_3-1) & \cdots & (x_n-1)\\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

并且归纳可得

$$\rho_\lambda^{\mathrm{Euler}}(x_i)=\begin{pmatrix}1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ \lambda(x_1-1) & \cdots & \lambda(x_{i-1}-1) & \lambda x_i & x_{i+1}-1 & \cdots & x_n-1\\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix},$$

对于 $i=3$、…、$n$。这些矩阵与注 1.5 中的矩阵完全相同，因此我们得到 $\Phi$ 是一个 $k[F_n]$-模同构。 □

定理 2.21. 令我们取 $\lambda\in k^\times\backslash\{1\}$。那么这个同构

$$\Phi\colon H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\iota_{a_0}(C_\lambda(k[F_n])))\longrightarrow I_{F_n,\lambda}$$

命题 2.20 中的同构诱导出函子同构

$$\widetilde{\Phi}\colon\mathcal{E}_\lambda\longrightarrow\mathcal{LM}_\lambda.$$

证明. 对于每个 $V\in\mathscr{O}(\mathrm{Mod}^{k[F_n\times_\alpha G]})$，同构 $\Phi$ 和命题 2.19 中的 K¨unneth 公式给出了所需的同构

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\lambda(V)&=H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\\ &\cong H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(k[F_n])))\otimes_{k[F_n]}V\cong I_{F_n,\lambda}\otimes_{k[F_n]}V=\mathcal{LM}_\lambda(V).\end{aligned}$$

□

# 3 Katz-Long-Moody 函子

显而易见， $\mathcal{LM}_\lambda(V)$ 或等价地说 $\mathcal{E}_\lambda(V)$ 含有一些平凡子模。因此，Long和Moody 以及 Katz 都考虑了约化过程，以消除这些

平凡子模。我们将说明，这些约化过程定义了 $\mathrm{Mod}^{k[F_n \rtimes G]}$ 的一个新端函子。

我们首先回顾 [18] 中定义的约化 Long-Moody 函子。对于左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$，我们将 $\mathcal{LM}(V)$ 中的子空间视为一个向量空间，其定义如下：

$$V^{[\infty]} := \{(x_1x_2\cdots x_n - 1) \otimes v \in I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \mid v \in V\}.$$

回顾到，对任意 $g \in G$，我们都有 $\alpha(g)(x_1\cdots x_n) = x_1\cdots x_n$，因为 $\alpha$ 是一个 Artin 表示，因此我们看到 $V^{[\infty]}$ 也是一个 $k[G]$-模的子空间。于是，约化 Long-Moody 函子 $\mathcal{LM}^{\mathrm{red}}$: $\mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \to \mathrm{Mod}^{k[G]}$ 定义如下：

$$\mathcal{LM}^{\mathrm{red}}(V) := \left(I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V\right) / V^{[\infty]}.$$

然而，一般而言，$V^{[\infty]}$ 在 $F_n$ 的 $\lambda$-扭曲作用下并不保持不变；也就是说，作为左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$- 模，$V^{[\infty]}$ 不是 $\mathcal{LM}_\lambda(V) = I_{F_n,\ \lambda} \otimes_{k[F_n]} V$ 的子空间。因此，要考虑扭曲情形下约化 Long-Moody 函子的类似构造，我们需要寻找其他子空间。

考虑 $F_n$-不变子空间 $\mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n}$，它属于 $\mathcal{LM}_\lambda(V)$。显然，子空间 $\mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n}$ 是 $\mathcal{LM}_\lambda(V)$ 的一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-子模。此外，当 $\lambda \neq 1$ 时，这个子模有如下描述。

命题 3.1（Dettweiler-Reiter，[6] 中的引理 2.7）。假设 $\lambda \neq 1$。那么有

$$\mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n} = \{(x_1x_2\cdots x_n - 1) \otimes v \in I_{F_n} \otimes_{k[F_n]} V \mid (\lambda x_1x_2\cdots x_n)\cdot v = v\}.$$

证明。由 [6] 中的引理 2.4 和 2.7 可直接得到。 □

由此命题可知，当 $\lambda \neq 1$ 时，$F_n$-不变子空间 $\mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n}$ 是 $V^{[\infty]}$ 的一个子空间。

接下来考虑以下子空间

$$\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]} := \left\{ w \in \mathcal{LM}_\lambda(V) \,\middle|\, x_j \cdot w = \begin{cases} \lambda w & \text{if } j = i \\ w & \text{otherwise} \end{cases} \right\}$$

对于 $i = 1$、.....、$n$。于是可见，和 $\sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$ 成为一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-子模，如下所示。

**Le理 3.2.** 和 $\sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$ 在 $\mathcal{LM}_\lambda(V)$ 上关于 $G$ 的作用下是封闭的 .

证明. 取 $w \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$ 和 $g \in G$。由于 $\alpha(g) \in B_n$，存在对称群中一个次数为 $n$ 的元素 $s_g \in \mathfrak{S}_n$，使得对所有 $j = 1, \ldots, n$，$\alpha(g^{-1})(x_j)$ 与 $x_{s_g(j)}$ 在 $F_n$ 中共轭。也就是说，对于每个 $j = 1, \ldots, n$，存在 $x^{[g,j]} \in F_n$ 使得 $\alpha(g^{-1})(x_j) = g^{-1}x_jg = x^{[g,j]}x_{s_g(j)}(x^{[g,j]})^{-1}$。于是我们有

$$\begin{aligned} x_j(gw) &= g(g^{-1}x_jg)w \\ &= g(x^{[g,j]}x_{s_g(j)}(x^{[g,j]})^{-1})w \\ &= g(x_{s_g(j)}w) \\ &= \begin{cases} \lambda gw & \text{if } s_g(j) = i \\ gw & \text{otherwise} \end{cases}. \end{aligned}$$

第三个等式是因为 $F_n$ 的每个元素都以标量倍数的形式作用于 $\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$。这说明 $gw \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[s_g^{-1}(i)]}$，因此 $\sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$ 在 $G$ 的作用下封闭。

□

注意，如果 $\lambda = 1$，那么 $\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]} = \sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]} = \mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n}$。另一方面，当 $\lambda \neq 1$ 时，和 $\sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$ 变为直和 $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$，且每个直和项 $\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$ 都有如下描述。

命题 3.3. 我们有包含映射

$$\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]} \supset \{(x_i - 1) \otimes v \in I_{F_n,\lambda} \otimes_{k[F_n]} V \mid v \in V^{x_i}\}$$

对 $i = 1, \ldots, n$。这里我们令 $V^x := \{v \in V \mid xv = v\}$ 对 $x \in F_n$。特别地，当 $\lambda \neq 1$ 时，这些包含映射就是等式。

证明。包含关系 $\supset$ 显然。因此，假设 $\lambda \neq 1$，我们来证明反向包含关系。取 $v \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$。根据由 (1) 得到的识别 $I_{F_n,\lambda} \otimes_{k[F_n]} V \cong \bigoplus_{i=1}^n V$，可写作 $v = (v_1, \ldots, v_n)$，我们将证明，对于 $j \neq i$，有 $v_i \in V^{x_i}$ 和 $v_j = 0$。

由于 $v \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$，我们有

$$\sum_{l<j} \lambda(x_l - 1)v_l + (\lambda x_j - 1)v_j + \sum_{l>j} (x_l - 1)v_l = \begin{cases} (\lambda - 1)v_i & \text{if } j = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{8}$$

由这些等式可得

$$\begin{aligned} v_l - x_{l+1}v_{l+1} &= 0 \qquad \text{for } l \neq i-1, i, \\ v_{i-1} - (x_i - 1)v_i &= 0, \\ x_{i+1}v_{i+1} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

第一个和第三个等式表明，对 $l \geq i+1$. 有 $v_l = 0$。接着，若 $i = 1$，则得到 $x_1v_1 = v_1$ 和 $v_j = 0, j \neq 0$，如所需。我们假设 $i > 1$。来看 (8) 中的等式 $l = 1$ 和 $l = i$，于是得到等式

$$\begin{aligned} (\lambda x_1 - 1)v_1 + (x_2 - 1)v_2 + \cdots + (x_i - 1)v_i &= 0 \\ \lambda(x_1 - 1)v_1 + \lambda(x_2 - 1)v_2 + \cdots + \lambda(x_i - 1)v_i &= 0, \end{aligned}$$

由此推出 $x_1v_1 = 0$，即 $v_1 = 0$。因此，方程 (9) 中的第一个方程表明 $v_1 = \cdots = v_{i-1} = 0$。于是我们得到 $x_iv_i = v_i$。 □

作为 Dettweiler-Reiter 在 [6] 以及 V¨olklein 在 [25], 定义的中卷积函子的类似物，我们考虑 $\mathbf{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的如下端函子。

定义 3.4（Katz-Long-Moody 函子）。取 $\lambda \in k^\times$。函子

$$\mathcal{KLM}_\lambda \colon \mathbf{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]} \to \mathbf{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$$

定义为

$$\mathcal{KLM}_\lambda(V) := \mathcal{LM}_\lambda(V) / \left( \sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]} + \mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n} \right)$$

称为与 $\lambda$ 相关联的约化扭曲 Long-Moody 函子，或 Katz-Long-Moody 函子。有时我们简称此函子为 KLM 函子。

我们将商映射记为

$$\theta_V^\lambda \colon \mathcal{LM}_\lambda(V) \longrightarrow \mathcal{KLM}_\lambda(V),$$

这给出了函子 $\mathcal{LM}_\lambda$ 和 $\mathcal{KLM}_\lambda$之间的一个自然变换 .

特别是对于 $\lambda = 1$，KLM 函子也由如下乘法映射导出。设 $\lambda = 1$。那么乘法映射 $\nabla\colon I_{F_n,\ 1} \otimes_{k[F_n]} V \to V$成为一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态。因此序列

$$0 \to \operatorname{Ker}\nabla \to I_{F_n,1} \otimes_{k[F_n]} V \xrightarrow{\nabla} V \to \operatorname{Coker}\nabla \to 0$$

是一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模的正合序列。

另一方面，我们有 $\sum_{i=1}^n \mathcal{LM}_1(V)^{[i]} + \mathcal{LM}_1(V)^{F_n} = \mathcal{LM}_1(V)^{F_n}$，当 $\lambda = 1$ 时。此外，注 1.5 表明，$v \in \mathcal{LM}_1(V)^{F_n}$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^n (x_i - 1)v_i = 0$，其中我们通过同构 (1) 将 $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V^{\oplus n}$ 记作。因此我们有

$$\operatorname{Ker}\theta_V^1 = \mathcal{LM}_1(V)^{F_n} = \left\{ (v_1, \ldots, v_n) \in V^{\oplus n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^n (x_i - 1)v_i = 0 \right\} = \operatorname{Ker}\nabla$$

由命题 1.10 得出。因此我们得到如下结论。

命题 3.5。设 $V$ 是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。考虑乘法映射 $\nabla\colon I_{F_n,\ 1} \otimes_{k[F_n]} V \to V$，它是一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态。则有

$$\mathcal{KLM}_1(V) \cong \operatorname{Coim}\theta_V^1 = \operatorname{Coim}\nabla \cong \operatorname{Im}\nabla \subset V.$$

特别地，当 $\operatorname{Coker}\nabla = \{0\}$ 时，我们有

$$\mathcal{KLM}_1(V) \cong V.$$

KLM 函子不是正合的。不过，以下结论成立。

命题 3.6（参见 [6] 中的引理 2.8 和 [25]中的第 2.1 节）。考虑一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态 $\phi\colon V \to W$。那么，诱导同态$\mathcal{KLM}_\lambda(\phi)\colon \mathcal{KLM}_\lambda(V) \to \mathcal{KLM}_\lambda(W)$ 在 $\phi$为单射（分别为满射）时，也是单射（分别为满射）。

证明。注意，我们有以下交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda(V) & \longrightarrow & \mathcal{KLM}_\lambda(V) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{LM}_\lambda(\phi)|_{\operatorname{Ker}\theta_V^\lambda}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{LM}_\lambda(\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{KLM}_\lambda(\phi)} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\theta_W^\lambda & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda(W) & \longrightarrow & \mathcal{KLM}_\lambda(W) & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

其中水平正合列是正合的。

假设 $\phi$ 是单射。由于 $\mathcal{LM}_\lambda$ 是正合函子，$\mathcal{LM}_\lambda(\phi)$ 是单射。此外，我们有

$$\operatorname{Im}\mathcal{LM}_\lambda(\phi)|_{\operatorname{Ker}\theta_V^\lambda} = \operatorname{Im}\mathcal{LM}_\lambda(\phi) \cap \operatorname{Ker}\theta_W^\lambda$$

根据 [6]中的引理 2.8。于是，通过追图可知 $\mathcal{KLM}_\lambda(\phi)$ 是单射。

接下来，我们假设 $\phi$ 是满射。由 $\mathcal{LM}_\lambda$ 的正合性可知，$\mathcal{LM}_\lambda(\phi)$ 是满射。因此，上述图表直接表明 $\mathcal{KLM}_\lambda(\phi)$ 是满射。 □

# 4 中间卷积与 Katz-Long-Moody 函子

在著作 [14]，中，Katz 通过对 pervers 层进行中间延拓运算，引入了中卷积函子的概念；这种中卷积函子被广泛认为是欧拉变换的一种精妙推广。本节将通过扭曲同调理论来阐释 Katz 的中间卷积，并说明这种同调中间卷积等价于 KLM 函子。

## 4.1 同调中卷积

我们沿用第 2 节中的记号。将黎曼球面记作 $\mathbb{P}^1 := \mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$。根据恒等式 $\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0) = \mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0)$，令 $Q_n^\infty := Q_n \sqcup \{\infty\}$ 且 $Q_n^\infty(a_0) := Q_n^\infty \sqcup \{a_0\}$，我们将 $H_1(\mathbb{C}\backslash Q_n(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 改写为 $\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0)$ 上的同调群 $H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$。

我们还考虑 Borel-Moore 同调群 $H_*^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$，它们是由相对链的射影极限所定义的链复形的同调群

$$C_*^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) := \varprojlim C_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), (\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

当 $K$ 遍历 $\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0)$ 的紧子集所构成的有向集时。那么典范投影映射

$$C_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \to C_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), (\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

诱导出同调群的自然映射

$$H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \to H_*^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))).$$

回顾一下第 2.2.1 节中给出的群同态 $\eta\colon F_n \rtimes_\alpha G \to \mathrm{Aut}^{\mathrm{Top}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))$。与第 2.2.3 节中的情形一样，这个 $\eta$ 诱导出映射

$$\begin{aligned} &C_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), (\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K; \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \\ &\qquad\longrightarrow C_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), (\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash \eta(h)(K); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \end{aligned}$$

对于 $h \in F_n \rtimes_\alpha G$。由于在上述映射中 $\eta(h)(K)$ 仍然是紧的，这些映射定义了 $F_n \rtimes_\alpha G$ 在此射影系统上的作用。因此，我们可以将射影极限 $H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 视为一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模，并将典范映射 $H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \longrightarrow H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 视为一个 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态。

定义 4.1（同调中间卷积函子）。对于 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$，我们定义函子 $\mathcal{MC}_\lambda\colon \mathrm{Mod}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]} \to \mathrm{Mod}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$，如下所示：

$$\mathcal{MC}_\lambda(V) := \mathrm{Im}\left(H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \longrightarrow H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\right)$$

对于 $V \in \mathscr{O}(\mathrm{Mod}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]})$。此外，对于 $\phi \in \mathrm{Hom}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}(V, W)$，我们定义 $\mathcal{MC}_\lambda(\phi) \in \mathrm{Hom}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}(\mathcal{MC}_\lambda(V)\ \mathcal{MC}_\lambda(W))$，其定义为由交换图表诱导的同态

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) & \longrightarrow & H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \\ \downarrow{\scriptstyle H_1(\phi)} & & \downarrow{\scriptstyle H_1^{\mathrm{BM}}(\phi)} \\ H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(W))) & \longrightarrow & H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(W))) \end{array},$$

其中，水平映射是典范映射，垂直映射是由$\phi$诱导的映射。我们称此函子为同调中间卷积。

注 4.2. 积分表示

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_1^\infty t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}\,dt$$

高斯超几何函数的这一公式仅在 Re $(\gamma-\alpha)$, Re $\alpha>0$ 时成立，此条件保证积分收敛。然而，超几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+(n-1))\beta(\beta+1)\cdots(\beta+(n-1))}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+(n-1))n!}z^n$$

对于 $\alpha$、$\beta\in\mathbb{C}$ 和 $\gamma\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 均有定义。因此，上述方程右侧的积分可以作解析延拓；众所周知，这一解析延拓由下式给出

$$\begin{aligned}\int_{[\gamma_1,\gamma_\infty]} & t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}\,dt\\ &=(1-e^{2\pi i\alpha})(1-e^{2\pi i(\gamma-\alpha)})\int_1^\infty t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-z)^{-\beta}\,dt \quad (10)\end{aligned}$$

其中，$[\gamma_1,\gamma_\infty]$ 是波赫哈默尔围道，由顺时针环绕 1 的闭路径 $\gamma_1$ 和同样环绕 $\infty$ 的闭路径 $\gamma_\infty$ 组成。

如前所见，同调群 $H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 可以视为沿波赫哈默尔围道积分的类似物。另一方面，众所周知，Borel-Moore 同调群与局部有限链的同调群同构；在我们的设定下，后者对应于连接$Q_n^\infty(a_0)$ 中各点的通常路径积分。也就是说，我们可以粗略地说，方程 (10) 左侧对应于 $H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$，即定义同调中间卷积的映射的定义域；右侧则对应于$H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$，即中间卷积映射的目标。因此，我们对中间卷积的定义为经典公式 (10) 提供了同调解释。

## 4.2 欧拉变换作为 Borel-Moore 同调

我们用 $D_{<r}^*(a):=\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z-a|<r\}$ 表示以 $a$ 为中心、半径为 $r$ 的穿孔圆盘（若 $a\in\mathbb{C}$），用 $D_{<r}^*(\infty):=\{z\in\mathbb{C}\mid 1/r<|z|\}$ 表示（若 $a=\infty$）。取 $\varepsilon>0$ 并定义

$$D_{<\varepsilon}^*(Q_n^\infty(a_0)):=\bigsqcup_{i=0}^{n}D_{<\varepsilon}^*(a_i)\sqcup D_{<\varepsilon}^*(\infty).$$

还定义 $K_m:=(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0))$，其中 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ 是 $\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0)$ 的紧子集。由此得到紧子集的递增序列 $K_1\subset K_2\subset\cdots$，其并集为 $\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0)$，以及射影极限

$$\varprojlim_{K_m}H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))).$$

存在自然映射

$$H_*^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\longrightarrow\varprojlim_{K_m}H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

根据射影极限的泛性质。由于射影极限函子与同调函子不相容，在一般情况下，这个映射未必是同构。不过，我们可以证明如下结论。

命题 4.3. 自然映射

$$H_*^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \longrightarrow \varprojlim_{K_m} H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

是一个同构。

证明。为简便起见，我们省略同调群的系数。取 $0<\varepsilon<\varepsilon'<1/2$，并回忆一下，$D^*_{<\varepsilon'}(Q_n^\infty(a_0))$ 是 $D^*_{<\varepsilon}(Q_n^\infty(a_0))$ 的变形收缩。于是映射

$$H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m)\to H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_{m'})$$

由映射 $(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m)\to(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_{m'})$ 诱导的映射对每个 $2<m'\le m\in\mathbb{Z}_{\ge1}$ 都是一个同构。因此我们得到

$$\varprojlim_{K_m}{}^1 H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))=\{0\},$$

其中 $\varprojlim^1$ 是极限函子 $\varprojlim$ 的第一个导出函子 $R^1\varprojlim$。由 [23] 中的定理 7.3 即可得到结论。□

推论 4.4. 对所有 $m>2$，投影映射

$$H_*^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\longrightarrow H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

都是同构。

证明. 如上面的命题证明所示，映射

$$H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m)\to H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_{m'})$$

对每个 $2<m'\le m$ 都是同构。这说明投影映射

$$\varprojlim_{K_m} H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$
$$\to H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_{m'};\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

对 $m'>2$ 是同构。因此，上述命题给出了所需结果。□

## 4.3 同调中间卷积与 Katz-Long-Moody 函子的等价性

现在我们回顾一下

$$H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0))\backslash K_m;\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$
$$=H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0),D^*_{<1/m}(Q_n^\infty(a_0));\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))).$$

那么，该映射的核

$$H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\longrightarrow H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$$

定义 4.1 中的量可通过以下相对同调的长正合列$H_*(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0)\,D^*_{<1/m}(Q_n^\infty(a_0));\ \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))$ 计算得到。

命题 4.5. 取 $m \in \mathbb{Z}_{>2\circ}$ 则有方程

$$\begin{aligned}&\operatorname{Ker}\left(H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \longrightarrow H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\right) = \\ &\quad \operatorname{Im}\left(H_1(D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0)); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0))}) \to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\right).\end{aligned}$$

证明。回顾相对同调群的长正合列

$$\begin{aligned}\cdots \to H_1(D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0)); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0))}) &\to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \\ &\to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0)); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \to \cdots.\end{aligned}$$

我们还回顾交换图

$$\begin{array}{ccc} H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) & \longrightarrow & H_1^{\mathrm{BM}}(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0)); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \end{array}$$

根据推论 4.4，其垂直映射是同构。于是得到所需结果。 □

~定理 4.6。取 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$。同构 $\Phi\colon \mathcal{E}_\lambda \to \mathcal{LM}_\lambda$ 诱导出一个同构

$$\widehat{\Phi}\colon \mathcal{MC}_\lambda \to \mathcal{KLM}_\lambda.$$

证明。取一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$和一个固定的 $m \in \mathbb{Z}_{>2\circ}$。命题 4.5 告诉我们，投影映射 $\Theta_V^\lambda\colon \mathcal{E}_\lambda(V) \to \mathcal{MC}_\lambda(V)$ 的核等于

$$\operatorname{Im}\left(H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0), D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0)); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\right).$$

现在我们断言

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\left(H_1(D_{<1/m}^*(a_i); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(a_i)}) \to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\right) \\ &\qquad = \{\widetilde{[\gamma_0, \gamma_i]} \otimes v \in H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \mid v \in (\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_i}\}\end{aligned}$$

对于 $i = 1, \ldots, n$，以及

$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\left(H_1(D_{<1/m}^*(\infty); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<\varepsilon}^*(\infty)}) \to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\right) \\ &\qquad = \{\widetilde{[\gamma_0, \gamma_\infty]} \otimes v \in H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))) \mid v \in (\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_\infty}\}\end{aligned}$$

其中 $\gamma_\infty$ 是与 $(\gamma_0 \cdots \gamma_n)^{-1}$ 同伦的路径的同伦类。

假设该结论成立。由于 $D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0))$ 是 $D_{<1/m}^*(a_i)$、$i = 0$、…、$n$ 和 $D_{<1/m}^*(\infty)$ 的不交并，因此我们有

$$\begin{aligned}&H_1(D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0)); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(Q_n^\infty(a_0))}) \\ &\quad = \bigoplus_{i=0}^n H_1(D_{<1/m}^*(a_i); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(a_i)}) \oplus H_1(D_{<1/m}^*(\infty); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(\infty)}).\end{aligned}$$

注意，由于 $\lambda \neq 1$，$H_1(D_{<1/m}^*(a_0); \iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D_{<1/m}^*(a_0)}) = \{0\}$。另请注意，同构 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)) = V \otimes_k K_\lambda \cong V$将 $(\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_i}$映射到 $V^{x_i}$，对于

$i=1,\dots,n$，以及 $(\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_\infty}$ 映射到 $V^{\lambda x_1\cdots x_n}$，因为 $\gamma_0$ 在 $\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))$ 上的作用是乘以标量 $\lambda$。因此，根据该断言，$\Phi$ 将 $\mathrm{Im}\,(H_1(D^*_{<1/m}(Q_n^\infty(a_0));\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D^*_{<1/m}(Q_n^\infty(a_0))})\to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))))$ 双射地映射到 $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}\oplus\mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n}$。

因此存在唯一的同态 $\Phi_V\colon \mathcal{MC}_\lambda(V)\to\mathcal{KLM}_\lambda(V)$，使得图表

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\Theta_V^\lambda & \longrightarrow & \mathcal{E}_\lambda(V) & \xrightarrow{\Theta_V^\lambda} & \mathcal{MC}_\lambda(V) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\Phi}_V|_{\Theta_V^\lambda}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\Phi}_V} & & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\Phi}_V} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda(V) & \xrightarrow{\theta_V^\lambda} & \mathcal{KLM}_\lambda(V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

交换；特别地，由于图表中左侧和中间的竖直态射都是同构，这个 $\Phi_V$ 是同构。

接下来只需证明该断言。由于 $D^*_{<1/m}(a_i)$、$i=1$、…、$n$ 和 $D^*_{<1/m}(\infty)$ 都与 $S^1$ 同伦等价，引理 2.12 表明

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(H_1(D^*_{<1/m}(a_i);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D^*_{<1/m}(a_i)})\to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))))\\ =\{\widetilde{\gamma_i}\otimes v\in H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\mid v\in(\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_i}\}\end{aligned}$$

对于 $i=1$、…、$n$，以及

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(H_1(D^*_{<1/m}(\infty);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))|_{D^*_{<1/m}(\infty)})\to H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V))))\\ =\{\widetilde{\gamma_\infty}\otimes v\in H_1(\mathbb{P}^1\backslash Q_n^\infty(a_0);\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))\mid v\in(\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_\infty}\}.\end{aligned}$$

如同命题 2.20 证明的第一部分，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{[\gamma_0,\gamma_i]}\otimes v&=\widetilde{\gamma_0}\otimes\lambda(\gamma_i-1)\cdot v+\widetilde{\gamma_i}\otimes(1-\lambda)(\gamma_i\cdot v)\\&=\widetilde{\gamma_i}\otimes(1-\lambda)v\end{aligned}$$

对于 $v\in(\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_i}$ 和 $i=1$、…、$n$，类似地

$$\widetilde{[\gamma_0,\gamma_\infty]}\otimes v=\widetilde{\gamma_\infty}\otimes(1-\lambda)v$$

对于 $v\in(\iota_{a_0}^*(C_\lambda(V)))^{\gamma_\infty}$。那么由于 $\lambda\neq1$，结论得证。 □

# 5 $\overset{\mathrm{NT}}{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 的模子范畴

在 [14]，中，Katz 引入了某些称为性质 $\wp$ 的条件，以确保中间卷积函子具有良好的行为。作为这些条件的类比，Dettweiler-Reiter [6] 和 V¨olklein [25] 定义了 $\mathrm{Mod}^{k[F_n]}$ 的一个满子范畴，并证明了中间卷积函子在该子范畴中具有许多良好性质。本节将把这个子范畴扩展为 $\mathrm{Mod}^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 的一个满子范畴，并展示 Katz-Long-Moody 函子在该子范畴中的基本性质。

## 5.1 $\mathrm{NT}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$的定义

考虑从 $F_n$ 到无限循环群 $F_1 = \langle x \rangle$ 的投影映射，其定义如下:

$$\begin{aligned} p_i\colon \quad F_n &\longrightarrow & F_1 \\ x_j &\longmapsto \quad p_i(x_j) := \begin{cases} x & \text{if } j = i \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}, \end{aligned}$$

它扩张为群同态。

定义 5.1（几乎平凡的模，V¨olklein [25]）。若存在一个一维的 $k[F_1]$-模 $K$，使得左 $k[F_n]$- 模 $V$ 与某个 $p_i^*(K)$ 同构，则称 $V$ 几乎平凡，其中 $i = 1, \ldots, n$。

对于左 $R$-模 $M$和环同态 $\phi\colon P \to R$， $\phi^*(M)$ 表示 $M$ 的拉回模。也就是说， $\phi^*(M) = M$ 作为阿贝尔群，而 $P$- 模结构定义为 $p \cdot m := \phi(p) \cdot m$，其中 $p \in P$ 和 $m \in M$。

定义 5.2（参见 Katz，《[14]》中的引理 2.6.14 和推论 2.6.15；V¨olklein，《[25]》第 2.2 节；Dettweiler-Reiter，《[6]》第 3 节）。若左 $k[F_n]$-模 $V$ 满足性质（$P1$），则称其满足

$$\mathrm{Hom}_{k[F_n]}(T, V) = \{0\}$$

对于所有几乎平凡模 $T$。类似地，我们称左 $k[F_n]$-模 $V$ 满足性质 $(P2)$，如果

$$\mathrm{Hom}_{k[F_n]}(V, T) = \{0\}$$

对于所有几乎平凡模 $T$。

令 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 为 $\mathrm{Mod}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 的满子范畴，其对象由满足 $(P1)$ 和 $(P2)$ 的 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模 $V$ 构成，其中我们通过包含 $k[F_n] \hookrightarrow k[F_n \rtimes_\alpha G]$ 将 $V$ 视为一个 $k[F_n]$-模。

注 5.3. 设 $V$ 是一个左 $k[F_n]$-模，且 $\rho_V\colon F_n \to \mathrm{Aut}_k(V)$ 是诱导群同态。那么，性质 $(P1)$ 等价于

$$(\mathrm{Ker}\,(\rho_V(x_i) - \tau)) \cap \bigcap_{j \neq i} \mathrm{Ker}\,(\rho_V(x_j) - 1) = \{0\} \tag{11}$$

f对于所有 $i = 1, \ldots, n$ 及 $\tau \in k^\times$。类似地，性质 $(P2)$ 等价于 t

$$(\mathrm{Im}\,(\rho_V(x_i) - \tau)) + \sum_{j \neq i} \mathrm{Im}\,(\rho_V(x_j) - 1) = V \tag{12}$$

对于所有 $i = 1, \ldots, n$ 及 $\tau \in k^\times$。

## 5.2 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$中的 Katz-Long-Moody 函子

下述命题保证满子范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 在 Katz-Long-Moody 函子作用下保持不变。

命题 5.4（参见 [14], 中的推论 6.2.7、[25], 中的引理 2.2 以及[6]中的命题 3.4）。设 $V$是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$- 模，且 $\lambda \in k^\times$。若 $V$ 具有性质（$P1$），则 $\mathcal{KLM}(V)$ 也具有该性质。类似地，若 $V$具有性质（$P2$），则 $\mathcal{KLM}(V)$也具有该性质。

证明。首先假设 $\lambda = 1$。若对于一个几乎平凡模 $T$，$\mathrm{Hom}^{k[F_n]}(T, V) = \{0\}$，则由于 $\mathcal{KLM}_1(V)$ 同构于 $V$ 的一个子模（由命题 3.5 可知），我们有 $\mathrm{Hom}^{k[F_n]}(T, \mathcal{KLM}_1(V)) = \{0\}$。另一方面，若对于任意几乎平凡模 $T$，$\mathrm{Hom}^{k[F_n]}(V, T) = \{0\}$，则由命题 1.10 和命题 3.5 可得 $\mathcal{KLM}_1(V) \cong V$。因此，对于任意几乎平凡模 $T$，我们有 $\mathrm{Hom}^{k[F_n]}(\mathcal{KLM}_1(V)\ T) = \{0\}$

接下来我们假设 $\lambda \neq 1$。我们只需证明：如果 $V$ 具有性质（$P1$），那么 $\mathcal{KLM}_\lambda$（$V$）也具有性质（$P1$）。对偶论证表明，性质（$P2$）在 KLM 函子下保持不变。

我们通过同构 (1) 将 $\mathcal{LM}_\lambda$（$V$）与 $V^{\oplus n}$ 等同。令 $\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}$: $F_n \rtimes_\alpha G \to$自同构群$_k$（$V^{\oplus n}$）为相应的群同态，其中 $\mathcal{LM}_\lambda$（$V$）。要证明条件 (11) 对 $\mathcal{KLM}_\lambda$（$V$）成立，只需验证以下断言对任意 $i = 1$、.....、$n$ 和 $\tau \in k^\times$均成立。也就是说，若 $v \in \mathcal{LM}_\lambda$（$V$）满足

$$(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_i) - \tau)v \in \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda, \quad (\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_j) - 1)v \in \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda,$$

for $j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{i\}$，则 $v \in$核 $\theta_V^\lambda$.。此断言由以下引理推出 . □

在证明上述命题中的断言之前，我们先准备一个引理。

引理 5.5. 设 $V$ 是左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模，且 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$。若 $v \in \mathcal{LM}_\lambda(V)$ 满足：对所有 $x \in F_n$，均有 $(x-1)v \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$，则 $v \in \mathrm{Ker}\,\theta_V^\lambda$。

证明. 根据假设，对所有 $i = 1, \ldots, n$，我们有 $(x_i - 1)v \in \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]}$。由于 $(x_i - 1)v \in (x_i - 1) \otimes V$ 且 $((x_i - 1) \otimes V) \cap \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]} = \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$，我们有 $(x_i - 1)v \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$。令 $w_i := (x_i - 1)v$, $i = 1, \ldots, n$，并令 $w := \sum_{i=1}^n w_i$。则 $w \in \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]}$，此外，由于 $w_j \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]}$，我们有 $(x_i - 1)w = \sum_{j=1}^n (x_j - 1)w_j = (x_i - 1)w_i = (\lambda - 1)w_i$。因此得到

$$(x_i - 1)(v - (\lambda - 1)^{-1}w) = w_i - (\lambda - 1)^{-1}(\lambda - 1)w_i = 0 \quad \text{for all } i = 1, \ldots, n,$$

这表明 $v = (\lambda - 1)^{-1}w + (v - (\lambda - 1)^{-1}w) \in \bigoplus_{j=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]} + \mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n} =$核 $\theta_V^\lambda$。

□

现在我们来证明上述断言

引理 5.6. 设 $V$是满足（$P1$）的左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda \in k^\times\backslash\{1\}$。任意取 $v \in \mathcal{LM}_\lambda(V)$、$\tau \in k^\times$和 $i \in \{1, \ldots, n\}$。那么，若满足

$$(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_i) - \tau)v \in \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda, \quad (\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_j) - 1)v \in \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda, \tag{13}$$

对于 $j \in \{1, \ldots, n\}\backslash\{i\}$，则 $v \in$核 $\theta_V^\lambda$.

证明。现在我们断言，$(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_j) - 1)v \in$核 $\theta_V^\lambda$等价于 $(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_j) - 1)v \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]}$。由于 $(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_j) - 1)v \in (x_j - 1) \otimes V$，该断言可由以下方程推出

$$((x_j - 1) \otimes V) \cap \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda = \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]} \tag{14}$$

该结论在条件 (11) 下成立。不满足条件 (11) 时，根据定义，包含关系 $\supset$ 显然成立。下面证明包含关系 $\subset$。取 $(x_j - 1) \otimes v_j \in ((x_j - 1) \otimes V) \cap$核 $\theta_V^\lambda$。于是，根据命题 3.1 和 3.3，我们可以将其写为 $(x_j - 1) \otimes v_j = \sum_{l=1}^n (x_l - 1) \otimes (k_l + (x_{l-1} \cdots x_n) \cdot u)$，其中 $k_l \in V^{x_l}$和 $u \in V^{\lambda x_1 \cdots x_n}$。那么，对于 $l \neq j$，有 $k_l + (x_{l-1} \cdots x_n) \cdot u = 0$，即 $(x_{l-1} \cdots x_n) \cdot u \in V^{x_l}$。这说明 $u \in V^{x_l} =$核 $(\rho_V(x_l) - 1)$

对于 $l \neq j$和 $u \in V^{\lambda x_j} =$核 $(\rho_V(x_j) - \lambda^{-1})$。那么，关于 $V$的条件 (11) 蕴含 $u = 0$, 这表明包含关系 $((x_j - 1) \otimes V) \cap$核 $\theta_V^\lambda \subset \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]}$。因此，我们得到方程 (14)。

假设对于 $\tau = 1$，条件 (13) 成立，即对于所有 $x \in F_n$，我们都有 $(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x)-1)v \in \theta_V^\lambda$。于是，由上述断言可知 $(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x) - 1)v \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$，而引理 5.5 表明 $v \in \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda$，这正是所需结论。

接下来，假设对于 $\tau \neq 1$，条件 (13) 成立。于是，由上述断言可知，对于 $j \neq i$, 存在 $k_j \in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[j]}$，使得 $(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_j) - 1)v = (x_j - 1) \otimes k_j$。在同构 (1) 给出的识别 $\mathcal{LM}_\lambda(V) \cong V^{\oplus n}$ 下，我们将 $v = (v_1, \ldots, v_n) \in V^{\oplus n}$ 记作。又将 $(\rho_\lambda^{\mathrm{LM}}(x_i) - \tau)$ $v = v^{(0)} + v^{(\infty)}$ 记作 $v^{(0)} = (v_1^{(0)}, \ldots, v_n^{(0)}) \in \bigoplus_{l=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[l]}$, $v^{(\infty)} = (v_1^{(\infty)}, \ldots, v_n^{(\infty)})$ $\in \mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n}$。于是，这些方程导出以下方程。

$$\sum_{l<i} \lambda(x_l - 1)v_l + (\lambda x_i - \tau)v_i + \sum_{l>i} \lambda(x_l - 1)v_l = v_i^{(0)} + v_i^{(\infty)} \tag{15}$$

$$(1 - \tau)v_j = v_j^{(0)} + v_j^{(\infty)} \qquad \text{for } j \neq i \tag{16}$$

$$\sum_{l<j} \lambda(x_l - 1)v_l + (\lambda x_j - 1)v_i + \sum_{l>k} \lambda(x_l - 1)v_l = k_j \qquad \text{for } j \neq i \tag{17}$$

将方程 (16) 代入 (15) 和 (17)，此外还可得到以下结果。

$$\begin{aligned}
(\lambda x_i - \tau)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - \lambda v_i^{(\infty)}) &= v_i^{(0)} + v_i^{(\infty)} \\
\lambda(x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(\lambda v_{i-1}^{(\infty)} - \lambda v_i^{(\infty)}) &= k_j + (1 - \lambda)(1 - \tau)^{-1}v_j^{(0)} \quad \text{for } j < i \\
(x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - v_i^{(\infty)}) &= k_j + (1 - \lambda)(1 - \tau)^{-1}v_j^{(0)} \quad \text{for } j > i
\end{aligned} \tag{18}$$

这里我们利用了 $v_l^{(0)} \in V^{x_l}$ and $x_l \cdot v_l^{(\infty)} = v_{l-1}^{(\infty)}$ 这一事实，并形式上令 $v_0^{(0)} = \lambda^{-1}v_n^{(\infty)}$。由于 $k_j, v_j^{(0)} \in V^{x_j}$，方程 (18) 导出

$$(x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - v_i^{(\infty)}) = (\frac{\tau}{\lambda} - 1)v_1 + v_1^{(0)} + (1 - \frac{\tau}{\lambda})(1 - \tau)^{-1}v_i^{(\infty)} \tag{19}$$

$$(x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - v_i^{(\infty)}) \in V^{x_j} \quad \text{for } j \neq i \tag{20}$$

此外，方程 (19) 表明 $(x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - v_i^{(\infty)}) \in V^{\frac{\tau}{\lambda}x_i}$。因此，关于 $V$ 的条件 (11) 蕴含

$$(x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - v_i^{(\infty)}) \in V^{\frac{\tau}{\lambda}x_i} \cap \bigcap_{j \neq i} V^{x_j} = \{0\},$$

也就是说，我们有

$$(x_i - 1)(v_i - (1 - \tau)^{-1}v_i^{(\infty)}) = (x_i - 1)u_i + (1 - \tau)^{-1}(v_{i-1}^{(\infty)} - v_i^{(\infty)}) = 0. \tag{21}$$

最后，回想起根据 (16)，对于 $j \neq i$，我们有 $v_j - (1 - \tau)^{-1}v_j^{(\infty)} = (1 - \tau)^{-1}v_j^{(0)} \in V^{x_j}$；根据 (21)，有 $v_i - (1 - \tau)^{-1}v_i^{(\infty)} \in V^{x_i}$，由此可得

$$v = (v - (1 - \tau)^{-1}v^{(\infty)}) + (1 - \tau)^{-1}v^{(\infty)} \in \bigoplus_{l=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(V)^{[l]} \oplus \mathcal{LM}_\lambda(V)^{F_n} = \operatorname{Ker}\theta_V^\lambda$$

正如所期望的。 □

下面的基本定理表明，Katz-Long-Moody 函子给出了范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 的一个非平凡自等价。这是对 [14], 中定理 2.9.7、 [25], 中定理 2.4 以及 [6] 中定理 3.5 的自然推广。

定理 5.7. 取 $\lambda,\tau\in k^\times$。则有如下结论。

1. 作为端函子，$\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$, $\mathcal{KLM}_\lambda\circ\mathcal{KLM}_\tau$ 和 $\mathcal{KLM}_{\lambda\tau}$ 同构。
2. 函子 $\mathcal{KLM}_\lambda$ 是范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$的自等价。特别地， $\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}$ 是一个逆函子。

第二个断言由第一个断言推出，其证明将在下一节给出。除了针对 $\mathbb{C}\backslash\{n$-点$\}$上的局部系统的 Katz 算法外，我们还有另一种称为乘法的运算，其定义如下

$$\mathcal{M}ul_\chi\colon \mathbf{Mod}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}\ni V\longmapsto \chi\otimes_{\mathbb{C}} V\in\mathbf{Mod}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$$

对于任意的一维模 $\chi\in$Mod$^{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$。反复应用这些 KLM 函子和乘法函子，我们可以构造出无穷多个两两不同构的 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模组成的族。

## 5.3 定理 5.7 的证明

本节旨在证明定理 5.7 的第一个断言。

引理 5.8. 设 $V$ 是一个满足 $(P1)$ 的左 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda\in k^\times\backslash\{1\}$。若 $v\in V$ 满足

$$(x_1\cdots x_n-1)\otimes v\in\bigoplus_{i=1}^n\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]},$$

则 $v=0$。

证明. 在同构 (1) 下，我们可以写成

$$(x_1\cdots x_n-1)\otimes v=((x_2\cdots x_n)\cdot v,(x_3\cdots x_n)\cdot v,\dots,v)\in V^{\oplus n}.$$

于是，由于 $v\in\bigoplus_{i=1}^n\mathcal{LM}_\lambda(V)^{[i]}$，我们得到

$$x_n\cdot v=v,\ x_{n-1}x_n\cdot v=x_{n-1}v=v,\ \dots\ ,(x_2\cdots x_n)\cdot v=v,$$

即，$(x_1\cdots x_n-1)\otimes v=(v,\dots,v)$。由此可得 $v\in\bigcap_{i=1}^n\mathrm{Ker}\,(x_i-1)=\{0\}$，即$v=0$.

□

引理 5.9. 设 $V$是满足 $(P1)$ 的左 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda,\tau\in k^\times\backslash\{1\}$。考虑由 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模组成的交换图,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\lambda(V)} & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda\circ\mathcal{LM}_\tau(V) & \xrightarrow{\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)}} & \mathcal{KLM}_\lambda\circ\mathcal{LM}_\tau(V) & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{LM}_\lambda(\theta^\tau_V)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{LM}_\lambda(\theta^\tau_V)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{KLM}_\lambda(\theta^\tau_V)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\,\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\lambda(V)} & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda\circ\mathcal{KLM}_\tau(V) & \xrightarrow{\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}} & \mathcal{KLM}_\lambda\circ\mathcal{KLM}_\tau(V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其水平正合列均为正合的。那么左侧垂直映射

$$\mathcal{LM}_\lambda(\theta^\tau_V)\colon\mathrm{Ker}\,\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)}\longrightarrow\mathrm{Ker}\,\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}$$

是满射。

证明。首先我们断言

$$\theta_V^\tau\colon \mathcal{LM}_\tau(V)^{x_i} \longrightarrow \mathcal{KLM}_\tau(V)^{x_i}$$

对任意 $i = 1, \dots, n.$ 都是满射。由于 $\theta_V^\tau\colon \mathcal{LM}_\tau(V) \to \mathcal{KLM}_\tau(V)$ 是满射，存在 $\bar{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)$，使得对任意 $w \in \mathcal{KLM}_\tau(V)^{x_i}$，$\theta_V^\tau(\bar{w}) = w$。于是可得$0 = (x_i - 1)w = \theta_V^\tau((x_i - 1)\bar{w})$，即 $(x_i - 1)\bar{w} \in \operatorname{Ker}\theta_V^\tau$。应用引理 5.6 中的方程 (14)，得到 $(x_i - 1)\bar{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}$。因此，令 $\tilde{w} := (x_i - 1)\bar{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}$，便得到

$$(x_i - 1)(\bar{w} - (\tau - 1)^{-1}\tilde{w}) = \tilde{w} - (\tau - 1)^{-1}(\tau - 1)\tilde{w} = 0.$$

也就是说，$\hat{w} := \bar{w} - (\tau - 1)^{-1}\tilde{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{x_i}$。由于 $\tilde{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]} \subset$属于 $\operatorname{Ker}\theta_V^\tau$，我们有$\theta_V^\tau(\hat{w}) = \theta_V^\tau(\bar{w}) = w$，这就证明了所述结论。

回顾

$$\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{[i]} = \{(x_i - 1) \otimes w \mid w \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{x_i}\},$$
$$\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V))^{[i]} = \{(x_i - 1) \otimes w \mid w \in \mathcal{KLM}_\tau(V)^{x_i}\},$$

$i = 1, \dots, n$，以及 $\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau) = \mathrm{id}_{I_{F_n,\lambda}} \otimes \theta_V^\tau$，我们可以得出

$$\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)\colon \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{[i]} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V))^{[i]}$$

根据上述断言，这是满射。

接下来我们断言

$$\theta_V^\tau\colon \mathcal{LM}_\tau(V)^{\lambda x_1 \cdots x_n} \longrightarrow \mathcal{KLM}_\tau(V)^{\lambda x_1 \cdots x_n}$$

这是满射。与上述断言类似，存在 $\bar{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)$，使得对于任意 $w \in \mathcal{KLM}_\tau(V)^{\lambda x_1 \cdots x_n}$，都有 $\theta_V^\tau(\bar{w}) = w$。于是可得 $(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)\bar{w} \in$核 $\theta_V^\tau$。考虑情形 $\lambda\tau = 1$。在此情形下，注 1.5 中 $x_1 \cdots x_n - \tau = x_1 \cdots x_n - \lambda^{-1}$ 的矩阵表示表明 $(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)\bar{w} \in (x_1 \cdots x_n - 1) \otimes V$。因此，由于 $(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)\bar{w} \in$核 $\theta_V^\tau = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]} \oplus \mathcal{LM}_\tau(V)^{F_n}$，引理 5.8 推出 $(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)\bar{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{F_n}$。令 $\tilde{w} := (\lambda x_1 \cdots x_n - 1)\bar{w}$。于是得到

$$(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)(\bar{w} - (\lambda - 1)^{-1}\tilde{w}) = \tilde{w} - (\lambda - 1)^{-1}(\lambda - 1)\tilde{w} = 0.$$

因此 $\bar{w} - (\lambda - 1)^{-1}\tilde{w} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{\lambda x_1 \cdots x_n}$和 $\theta_V^\tau(\bar{w} - (\lambda - 1)^{-1}\tilde{w}) = \theta_V^\tau(\bar{w}) = w$，如所需。此外，我们考虑情形 $\lambda\tau \neq 1$。在此情形下，由 $w^{(0)} \in \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}$和 $w^{(\infty)} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{F_n}$，可将 $(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)\bar{w} = w^{(0)} + w^{(\infty)}$写为。于是我们得到

$$(\lambda x_1 \cdots x_n - 1)(\bar{w} - (\lambda\tau - 1)^{-1}w^{(0)} - (\lambda - 1)^{-1}w^{(\infty)}) =$$
$$w^{(0)} + w^{(\infty)} - (\lambda\tau - 1)^{-1}(\lambda\tau - 1)w^{(0)} - (\lambda - 1)^{-1}(\lambda - 1)w^{(\infty)} = 0.$$

因此 $\bar{w} - (\lambda\tau - 1)^{-1}w^{(0)} - (\lambda - 1)^{-1}w^{(\infty)} \in \mathcal{LM}_\tau(V)^{\lambda x_1 \cdots x_n}$和 $\theta_V^\tau(\bar{w} - (\lambda\tau - 1)^{-1}w^{(0)} - (\lambda - 1)^{-1}w^{(\infty)}) = \theta_V^\tau(\bar{w}) = w$。因此，在任何情况下，我们都得到了所要证明的结论。

这一断言确保

$$\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)\colon \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{F_n} \longrightarrow \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V))^{F_n}$$

如上所述是满射。

因此我们得出结论：

$$\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)\colon \operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)} \longrightarrow \operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}$$

是满射。 □

引理 5.10. 设 $V$ 是满足 $(P2)$ 的左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda$、$\tau \in k^\times$。则乘法映射

$$\nabla\colon \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)) \longrightarrow \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)$$

是满射。此外，如果 $\lambda \neq 1$，我们得到短正合列

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{[i]} \to \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)) \xrightarrow{\nabla} \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V) \to 0.$$

证明。为简便起见，我们将 $V^{\oplus n}$ 记作 $W$，并通过同构 (1) 将 $\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))$ 视为 $W^{\oplus n}$，同时将 $\mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)$ 视为 $W$。那么乘法映射可写成以下形式，

$$\begin{array}{rccc} \nabla\colon & W^{\oplus n} & \longrightarrow & W \\ & (w_1,\dots,w_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n (\rho_\tau^{\mathrm{LM}}(x_i)-1)w_i \end{array}.$$

对于 $(w_1,\dots,w_n) \in W^{\oplus n}$，我们将 $w_i = (v_1^{(i)},\dots,v_n^{(i)})$ 记作 $\in V^{\oplus n} = W$。那么注 1.5 中 $\rho_\tau^{\mathrm{LM}}(x)$ 的矩阵表示告诉我们

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (\rho_\tau^{\mathrm{LM}}(x_i)-1)w_i = \big( & (\tau x_1 - 1)v_1^{(1)} + (x_2-1)v_2^{(1)} + \cdots (x_n-1)v_n^{(1)}, \\ & \tau(x_1-1)v_1^{(2)} + (\tau x_2 - 1)v_2^{(2)} + \cdots (x_n-1)v_n^{(2)}, \\ & \cdots, \\ & \tau(x_1-1)v_1^{(n)} + \tau(x_2-1)v_2^{(n)} + \cdots (\tau x_n - 1)v_n^{(n)} \big). \end{aligned}$$

因此，性质 $(P2)$ 蕴含 $\nabla$ 是满射。

第二个断言由命题 1.10 和 3.3 得出。 □

引理 5.11。设 $V$ 是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda, \tau \in k^\times$ 使得 $\lambda \neq 1$。考虑乘法映射 $\nabla\colon \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)) \longrightarrow \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)$。那么有包含

$$\nabla(\operatorname{Ker} \mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)) \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{[i]},$$

这就是该方程，尤其是当 $\lambda\tau \neq 1$ 时。

证明。注意，我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} \mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau) &= \mathcal{LM}_\lambda(\operatorname{Ker} \theta_V^\tau) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}) \oplus \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)^{F_n}) \end{aligned}$$

因为扭曲 Long-Moody 函子是可加且正合的。令 $W := V^{\oplus n}$，并将$\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))$ 视为 $W^{\oplus n}$，此外，根据同构 (1)，将 $\mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)$ 视为 $W = V^{\oplus n}$。于是命题 3.3 告诉我们

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}) =$$

$$\{(w_1,\dots,w_n) \in W^{\oplus n} \mid w_i = (v_1^{(i)},\dots,v_n^{(i)}) \text{ with } v_j \in \operatorname{Ker}(\rho_V(x_j)-1),\ i,j = 1,\dots,n\},$$

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{[i]} = \{(v_1,\dots,v_n) \in V^{\oplus n} \mid v_i \in \operatorname{Ker}(\rho_V(x_i)-1),\ i = 1,\dots,n\},$$

其中 $\rho_V$ ： $F_n \rtimes_\alpha G \to$ 自同构群$_k(V)$ 是诱导群同态。于是我们有 t

$$\begin{array}{rccc} \nabla\colon & \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}) & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{[i]} \\ & (w_1,\dots,w_n) & \longmapsto & (\lambda-1)\sum_{i=1}^n w_i \end{array}$$

是良定义的，而且特别是在 $\lambda\tau \neq 1$ 时是满射。因此由命题 3.3 得到所需结果。

□

推论 5.12. 设 $V$ 是一个左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda$、$\tau \in k^\times$ 使得 $\lambda \neq 1$。我们考虑乘法映射

$$\nabla\colon \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)) \longrightarrow \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V).$$

于是我们有

$$\nabla^{-1}(\operatorname{Ker}\theta_V^{\lambda\tau}) = \operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)} + \operatorname{Ker}\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau).$$

证明. 首先我们证明

$$\nabla^{-1}(\mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{F_n}) = \operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)}. \tag{22}$$

取 $w \in$ Ker $\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)}$，并根据直和分解 Ker $\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)} = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{[i]} \oplus \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{F_n}$ 将其写成相应形式。再回想引理 5.10 中的 Ker $\nabla = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{[i]}$，我们有

$$x\nabla(w) = x\nabla(w^{(\infty)}) = \nabla(xw^{(\infty)}) = \nabla(w^{(\infty)}) = \nabla(w)$$

对任意 $x \in F_n$，即 $\nabla(w) \in \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{F_n}$。因此 $\nabla^{-1}(\mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{F_n}) \supset$ 核 $\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)}$.反过来，取 $w \in \nabla^{-1}(\mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{F_n})$。于是我们有

$$(x-1)w \in \operatorname{Ker}\nabla = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V))^{[i]},$$

对任意 $x \in F_n$。因此，引理 5.5 表明 $w \in$ 核 $\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)}$。因此我们得到方程 (22)。

若 $\lambda\tau = 1$，则核 $\theta_V^{\lambda\tau} = \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{F_n}$。此外，引理 5.11 告诉我们

$$\nabla(\operatorname{Ker}\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)) \subset \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{[i]} \subset \operatorname{Ker}\theta_V^{\lambda\tau}.$$

因此，方程 (22) 给出了所需的方程。

接下来，我们假设 $\lambda\tau \neq 1$，并证明

$$\nabla^{-1}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{[i]}) = \operatorname{Ker}\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau) + \operatorname{Ker}\nabla. \tag{23}$$

由于核 $\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)^{[i]}) \oplus \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)^{F_n})$，包含 $\supset$ 由引理 5.11 得出。取 $w \in \nabla^{-1}(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V)^{[i]})$。引理 5.11 再次蕴含，存在 $\bar{w} \in$ 核 $\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)$，使得 $\nabla(\bar{w}) = \nabla(w)$，这意味着$w - \bar{w} \in$ 核 $\nabla$，即 $w \in$ 核 $\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau) +$ 核 $\nabla$。因此我们得到反向包含$\subset$，从而得到等式 (23)。

总之，等式 (22) 和 (23) 给出了所需的方程。 □

考虑唯一的 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态

$$\widetilde{\nabla}\colon \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) \longrightarrow \mathcal{KLM}_{\lambda\tau}(V)$$

使得下图交换。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda(\operatorname{Ker}\theta_V^\tau) & \longrightarrow & \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)) & \xrightarrow{\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)} & \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\nabla}} & & \\
0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\theta_V^{\lambda\tau} & \longrightarrow & \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V) & \xrightarrow{\theta_V^{\lambda\tau}} & \mathcal{KLM}_{\lambda\tau}(V) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

推论 5.13. 设 $V$ 是满足 $(P1)$ 的左 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模。取 $\lambda, \tau \in k^\times \backslash \{1\}$。则存在唯一的 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模单射同态

$$\widehat{\nabla}\colon \mathcal{KLM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) \longrightarrow \mathcal{KLM}_{\lambda\tau}(V)$$

使得图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) & \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} & \mathcal{KLM}_{\lambda\mu}(V) \\
{\scriptstyle \theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}}\downarrow & \nearrow_{\widehat{\nabla}} & \\
\mathcal{KLM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) & &
\end{array}$$

交换。

证明. 回顾下列交换图。

$$\begin{array}{ccccc}
0 & & 0 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{LM}_\lambda(\operatorname{Ker}\theta_V^\tau) & \xrightarrow{\nabla} & \operatorname{Ker}\theta_V^{\lambda\tau} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{LM}_\tau(V)) & \xrightarrow{\nabla} & \mathcal{LM}_{\lambda\tau}(V) & & \\
\downarrow{\scriptstyle \mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_V^{\lambda\tau}} & & \\
\mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) & \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} & \mathcal{KLM}_{\lambda\tau}(V) & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & &
\end{array}$$

由推论 5.12，得到

$$\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau)^{-1}(\operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}) = \operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{LM}_\tau(V)} + \operatorname{Ker}\mathcal{LM}_\lambda(\theta_V^\tau) = \nabla^{-1}(\operatorname{Ker}\theta_V^{\lambda\tau}).$$

这个方程、引理 5.9 以及上述交换图表明

$$\operatorname{Ker}\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)} = \operatorname{Ker}\widetilde{\nabla}. \tag{24}$$

因此，$\nabla$ 通过映射 $\theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}$进行因子分解；也就是说，存在唯一的单射 $k[F_n \rtimes_\alpha G]$-模同态

$$\widehat{\nabla}\colon \mathcal{KLM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) \longrightarrow \mathcal{KLM}_{\lambda\tau}(V)$$

且下图交换。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{LM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) & \xrightarrow{\widetilde{\nabla}} & \mathcal{KLM}_{\lambda\mu}(V) \\ {\scriptstyle \theta^\lambda_{\mathcal{KLM}_\tau(V)}}\downarrow & \nearrow_{\widehat{\nabla}} & \\ \mathcal{KLM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V)) & & \end{array}$$

□

现在我们可以完成定理 5.7 的证明了。设 $V$ 是 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$ 中的一个对象。取 $\lambda$, $\tau\in k^\times$。若 $\lambda=1$ 或 $\tau=1$，则命题 3.5 表明，乘法映射给出函子 $\mathcal{KLM}_\lambda\circ\mathcal{KLM}_\tau$ 与 $\mathcal{KLM}_{\lambda\tau}$ 之间的同构。因此，我们可以假设 $\lambda,\tau\in k^\times\backslash\{1\}$。接着，推论 5.13 表明，乘法映射诱导出单射的 $k[F_n\rtimes G]$-模同态

$$\widehat{\nabla}\colon \mathcal{KLM}_\lambda(\mathcal{KLM}_\tau(V))\longrightarrow\mathcal{KLM}_{\lambda\tau}(V)$$

$\widehat{\ }$，由引理 5.10 可知它是满射，也就是说，$\nabla$ 给出函子 $\mathcal{KLM}_\lambda\circ\mathcal{KLM}_\tau$ 与 $\mathcal{KLM}_{\lambda\tau}$ 之间的同构。

## 5.4 $F_n$-不可约性

下面引入 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模的 $F_n$-不可约性。

定义 5.14（$F_n$-不可约性）。对于左 $k[F_n\rtimes G]$-模 $V$，若 $V$ 没有非平凡的 $k[F_n]$-子模，则称 $V$ 是 $F_n$-不可约的。

显然，如果 $V$是 $F_n$-不可约的，那么 $V$作为一个 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模是不可约的。此外，我们可以看到，如果 $V$是 $F_n$-不可约的，那么 $V$是范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n\rtimes_\alpha G]}$中的一个对象。

由此可知，$F_n$-不可约性在 KLM 函子作用下保持不变，如下所示。下面是定理 5.7 的直接推论。

推论 5.15（参见 [14], 中的定理 2.9.8、[25], 中的推论 2.5，以及[6]中的推论 3.6）。如果左 $k[F_n\rtimes_\alpha G]$-模 $V$是 $F_n$-不可约的，那么对于任意 $\lambda\in k^\times$，$\mathcal{KLM}_\lambda(V)$ 都是 $F_n$-不可约的。

证明。假设 $\mathcal{KLM}_\lambda(V)$不是 $F_n$-不可约的。那么它包含一个不可约的$k[F_n]$-子模 $\widetilde{W}$。现在将 $\mathcal{KLM}_\lambda(V)$和 $\widetilde{W}$视为 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n]}$中的对象，并对它们应用 $\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}$。由于 Katz-Long-Moody 函子是范畴 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{NT}}_{k[F_n]}$上的自等价，包含关系得以保持，也就是说，我们有 $\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}(\widetilde{W})\subset\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}\circ\mathcal{KLM}_\lambda(V)\cong V$。此外，由于 $\mathcal{KLM}_\lambda\circ\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}(W)\cong W$，$\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}(W)\neq\{0\}$。因此可得出结论：$V$包含非平凡的 $k[F_n]$-子模 $\mathcal{KLM}_{\lambda^{-1}}(W)$。

□

# 6 通过 Katz-Long-Moody 函子构造局部系统

众所周知，Katz中间卷积是一种相当高效的工具，可用于在 $\mathbb{C}\backslash\{n$ 点上构造局部系统}并研究其性质。这种工具被称为

一个专门的名称，即 Katz 算法。另一方面，我们已经看到，Katz中间卷积和用于辫群表示的 Long-Moody 函子的许多优良性质，在我们的 KLM 函子框架下得到了自然统一。因此，我们可以通过 KLM 函子将 Katz 算法扩展到许多其他局部系统。也就是说，如果 $F_n \rtimes_\alpha G$ 是拓扑空间 $X$ 的基本群，那么范畴 $\mathbf{Mod}^{k[F_n \rtimes_\alpha G]}$ 等价于 $X$ 上取值于 $k$- 向量空间的局部系统范畴。因此，如果我们反复对 $X$ 上的一个局部系统应用 KLM 函子和乘法函子，就能得到 $X$ 上无穷多个互不同构的局部系统。

## 6.1 $F_n \rtimes B_n$ 作为基本群

下面说明，$F_n \rtimes B_n$ 可以视为某个拓扑空间的基本群。令 $B^n(\mathbb{C})$ $= \{\{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathbb{C} \mid c_i \neq c_j,\ i \neq j\}$ 为 $\mathbb{C}$中无序$n$ 点的构形空间。这里，我们通过双射 $B^n(\mathbb{C}) \ni \{c_1, \dots, c_n\} \mapsto [(c_1, \dots, c_n)] \in \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid a_i \neq a_j$（其中 $i \neq j\}/\mathfrak{S}_n$）将 $B^n(\mathbb{C})$视为一个拓扑空间。像之前一样，取$a_i = (i, 0) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}, i = 1, \dots, n$，并令 $\mathbf{a} := \{a_1, \dots, a_n\} \in B^n(\mathbb{C})$。那么，对 $B^n(\mathbb{C})$中任意一条以 $\mathbf{a}$ 为基点的闭路 $\gamma$，都定义了几何辫

$$b_\gamma \colon [0,1] \ni t \longmapsto (\gamma(t), t) \in B^n(\mathbb{C}) \times [0,1]$$

且这一对应关系定义了同构 $\pi_1(B_n(\mathbb{C}), \mathbf{a}) \cong B_n$。

我们来考虑另一个拓扑空间

$$B^{1,n}(\mathbb{C}) := \{(z, \{c_1, \dots, c_n\}) \in \mathbb{C} \times B^n(\mathbb{C}) \mid z \notin \{c_1, \dots, c_n\}\}.$$

那么投影映射

$$b_n \colon B^{1,n}(\mathbb{C}) \ni (z, \{c_1, \dots, c_n\}) \longmapsto \{c_1, \dots, c_n\} \in B^n(\mathbb{C})$$

是一个局部平凡纤维化，其纤维为 $\mathbb{C}\backslash\{n$ 个点$\}$，而截面

$$s_{b_n} \colon B^n(\mathbb{C}) \ni \{c_1, \dots, c_n\} \longmapsto \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |c_i|, \{c_1, \dots, c_n\}\right) \in B^{1,n}(\mathbb{C})$$

定义了分裂短正合列

$$1 \to \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}, s_{b_n}(\mathbf{a})) \to \pi_1(B^{1,n}(\mathbb{C}), s_{b_n}(\mathbf{a})) \to \pi_1(B^n(\mathbb{C}), \mathbf{a}) \to 1.$$

这里注意到，$n$ 个点组成的集合 $\mathbf{a}$ 在前几节中记作 $Q_n$，而$D\backslash Q_n = \underline{D\backslash\{a_1}, \dots, a_n\}$ 是 $\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}$ 的一个变形收缩。因此，线段 $d\, s_{b_n}(\mathbf{a})$ 定义了同构

$$\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}, s_{b_n}(\mathbf{a})) \cong \pi_1(D\backslash Q_n, d) = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = F_n.$$

上述分裂正合序列给出了直和分解

$$\pi_1(B^{1,n}(\mathbb{C}), s_{b_n}(\mathbf{a})) \cong \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}, s_{b_n}(\mathbf{a})) \rtimes \pi_1(B^n(\mathbb{C}), \mathbf{a})$$

其中，$\pi_1(B^n(\mathbb{C}), \mathbf{a})$ 对 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}, s_{b_n}(\mathbf{a}))$ 的作用由 Artin 表示给出，依据识别 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{a_1, \dots, a_n\}, s_{b_n}(\mathbf{a})) \cong F_n$和 $\pi_1(B^n(\mathbb{C}), \mathbf{a}) \cong B_n$。因此我们得到同构

$$\pi_1(B^{1,n}(\mathbb{C}), s_{b_n}(\mathbf{a})) \cong F_n \rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n,$$

这给出了将 $F_n \rtimes_{\theta_{\mathrm{Artin}}} B_n$ 实现为 $B^1$的基本群，$^n$( $\mathbb{C})$.

## 6.2 多项式覆盖的补空间

回顾一下 Hansen 引入的多项式覆盖，见 [7]。设 $X$ 是一个 0-连通拓扑空间。简单魏尔斯特拉斯多项式是一个形如 $X\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$的函数 $f$

$$f(x,z)=z^n+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)z^i,\quad (x,z)\in X\times\mathbb{C},$$

其中 $a_i\colon X\to\mathbb{C}$, $i=1,\ldots,n$ 是连续函数，并且对于任意 $x\in X$，关于 $z$ 的多项式 $f(x,z)$ 都没有重根。对于简单魏尔斯特拉斯多项式 $f$，映射

$$z_f\colon X\ni x\longmapsto\{z\in\mathbb{C}\mid f(x,z)=0\}\in B^n(\mathbb{C})$$

称为与 $f$ 关联的根映射。于是已知

$$e_f\colon E_f:=\{(x,z)\in X\times\mathbb{C}\mid f(x,z)=0\}\ni(x,z)\longmapsto x\in X$$

成为一个 $n$ 重覆盖，见 [7]。此外，已知补空间 $C_f:=(X\times\mathbb{C})\backslash E_f$ 定义了如下的纤维丛。

定理 6.1（Hansen [7],Møller [20], Cohen-Suciu [4]）。投影映射

$$c_f\colon C_f=\{(x,z)\in X\times\mathbb{C}\mid f(x,z)\neq 0\}\ni(x,z)\longmapsto x\in X$$

是一个局部平凡丛，其结构群为 $B_n$，纤维为 $\mathbb{C}\backslash\{n\text{ 个点 }\}$。此外，该纤维化有一个截面 $s_f\colon X\to C_f$，定义如下

$$s_f(x):=\left(x,1+\sum_{z\in z_f(x)}|z|\right)\in C_f,$$

由此诱导出分裂短正合列

$$1\to\pi_1(\mathbb{C}\backslash z_f(x),s_f(x))\to\pi_1(C_f,s_f(x))\to\pi_1(X,x)\to 1$$

对任意固定的 $x\in X$ 以及直和分解

$$\pi_1(C_f,s_f(x))\cong\pi_1(\mathbb{C}\backslash z_f(x),s_f(x))\rtimes\pi_1(X,x).$$

在这里，半直积中的 $\pi_1(X,x)$ 通过 Artin 表示作用于 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash z_f(x),\ s_f(x))$

$$\pi_1(X,x)\xrightarrow{z_{f*}}\pi_1(B^n(\mathbb{C}),z_f(x))\xrightarrow{\theta_{\mathrm{Artin}}}\mathrm{Aut}(F_n)$$

在 自然识别 $\pi_1(\mathbb{C}\backslash z_f(x),\ s_f(x))\cong F_n$ 和 $\pi_1(B^n(\mathbb{C}),\ z_f(x))\cong B_n$ .

定义 6.2（多项式补空间纤维化）。设 $X$ 是一个 0-连通拓扑空间，且 $f\colon X\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个简单魏尔斯特拉斯多项式。则称上文定义的纤维化 $c_f\colon C_f\to X$ 为关于 $f$ 的多项式补空间纤维化。

注意到，先前定义的纤维化 $b_n\colon B^{1,\ n}(\mathbb{C})\to B^n(\mathbb{C})$ 是相对于简单魏尔斯特拉斯多项式的多项式补空间纤维化

$$B^n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}\ni(\{c_1,\ldots,c_n\},z)\longmapsto\prod_{i=1}^{n}(z-c_i)\in\mathbb{C},$$

且任意多项式补空间纤维化 $c_f$: $C_f \to X$ 都可以通过根映射 $z_f$: $X \to B^n(\mathbb{C})$ 对 $b_n$ 作拉回得到，即我们有 $c_f = z_f^*(b_n)$ 和 $C_f = z_f^*(B^{1,\ n}(\mathbb{C}))$，参见 [20]。

此外，我们注意到，多项式覆盖的补空间在拉回下封闭。具体而言，设 $\phi$: $Y \to X$ 是 0-连通拓扑空间之间的连续映射，且 $c_f$: $C_f \to X$ 是关于简单魏尔斯特拉斯多项式 $f$的多项式补空间纤维化。那么 $g := f \circ (\phi \times \mathrm{id}_{\mathbb{C}})$ : $Y \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$再次成为简单魏尔斯特拉斯多项式，并且我们可以看到 $c_g = \phi^*(c_f)$ 和 $C_g = \phi^*(C_f)$。

因此可以得出结论：对于 $F_n$上的 Artin 表示 $(G, \alpha)$，如果 $G$ 是一个拓扑空间 $Y$ 的基本群，且该空间具有 CW 复形的同伦型，那么存在一个简单魏尔斯特拉斯多项式 $f$: $Y \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 以及相应的纤维化 $c_f$: $C_f \to Y$，使得

$$\pi_1(C_f) \cong F_n \rtimes_\alpha G. \tag{25}$$

证明如下。回顾一个众所周知的事实：对于每个群同态$\alpha$: $\pi_1(Y, y) \to \pi_1(B^n(\mathbb{C})\ \alpha(y))$，存在一个连续映射 $\phi$: $Y \to B^n(\mathbb{C})$，使其在同伦等价意义下满足 $\alpha = \phi_*$，例如参见 [10] 。那么，将 $b_n$: $B^{n,\ 1}(\mathbb{C}) \to B^n(\mathbb{C})$ 沿 $\phi$ 拉回，即定义了多项式补空间纤维化 $c_f$: $C_f \to Y$，其中 $\phi$: $Y \to B^n(\mathbb{C})$ 是根映射。因此，定理 6.1 给出了所需的同构 (25)。

## 6.3 纤维型配置的补空间

我们回顾一下，纤维型配置的补空间的基本群具有形式 $F_n \rtimes_\alpha G$，并带有某些 Artin 表示（$G$，$\alpha$）。

定义 6.3（严格线性纤维化配置）。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 分别是 $\mathbb{C}^{l+1}$ 和 $\mathbb{C}^l$ 中的超平面配置。若存在同构 $\mathbb{C}^{l+1} \cong \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}$，且满足以下条件，则称 $\mathcal{A}$ 严格线性纤维化于 $\mathcal{B}$ 之上。具体而言，在上述选定的识别 $\mathbb{C}^{l+1} \cong \mathbb{C}^l \times \mathbb{C}$ 下，投影 $p$: $\mathbb{C}^l \times \mathbb{C} \ni (x, z) \mapsto x \in \mathbb{C}^l$ 满足 $p(\mathbb{C}^{l+1} \backslash \mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \backslash \mathcal{B}$，并且 $p$: $\mathbb{C}^{l+1} \backslash \mathcal{A} \to \mathbb{C}^l \backslash \mathcal{B}$ 是一个局部平凡纤维化，其纤维为 $\mathbb{C} \backslash \{n$ 个点 $\}$，其中 $n$ 是某个正整数。

令 $\mathcal{F}_n(\mathbb{C}) := \{(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n \mid c_i \neq c_j,\ \ i \neq j\}$ 表示 $n$ 个点在 $\mathbb{C}$ 中的构形空间。由此可见，投影 $f_n$: $\mathcal{F}_{n+1}(\mathbb{C}) \ni (c_1, \ldots, c_n, c_{n+1}) \mapsto (c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ 是关于简单魏尔斯特拉斯多项式 $\mathcal{F}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \ni ((c_1, \ldots, c_n)\ z) \mapsto \prod_{i=1}^n (z - c_i) \in \mathbb{C}$ 的多项式补空间纤维化。接下来 Cohen 的结果保证上述纤维化 $p$: $\mathbb{C}^{l+1} \backslash \mathcal{A} \to \mathbb{C}^l \backslash \mathcal{B}$ 是一个多项式补空间纤维化。

定理 6.4（Cohen [3]）。设 $\mathcal{A}$是 $\mathbb{C}^{l+1}$中的一个由 $m+n$个超平面组成的超平面配置， $\mathcal{B}$是 $\mathbb{C}^l$ 中的一个由 $m$ 个超平面组成的超平面配置。假设 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{B}$上严格线性纤维化。那么定义 6.3 中的纤维化 $p$: $\mathbb{C}^{l+1} \backslash \mathcal{A} \to \mathbb{C}^l \backslash \mathcal{B}$ 是多项式补空间纤维化 $f_n$: $\mathcal{F}_{n+1}(\mathbb{C}) \to \mathcal{F}_n(\mathbb{C})$ 的拉回。

那么，上一节的结果表明，存在一个 Artin 表示$\alpha$: $\pi_1(\mathbb{C}^l \backslash \mathcal{B}) \to$ 自同构群$(F_n)$，且基本群 $\pi_1(\mathbb{C}^{l+1} \backslash \mathcal{A})$ 分解为半直积

$$\pi_1(\mathbb{C}^{l+1} \backslash \mathcal{A}) \cong F_n \rtimes_\alpha \pi_1(\mathbb{C}^l \backslash \mathcal{B}).$$

现在我们来介绍纤维型配置。

定义 6.5（纤维型配置）。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{C}^l$中的一个超平面配置。如果存在一列 $(\mathcal{A}_k)_{k=1,\dots,l}$ 超平面配置，分别位于 $\mathbb{C}^k$、 $k=1$、……、 $l$中，使得 $\mathcal{A}_l=\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_{k+1}$ 对 $\mathcal{A}_k$ 是严格线性纤维化的，其中 $k=1$、……、 $l-1$，则称 $\mathcal{A}$ 为纤维型配置。

上述讨论表明，如果 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{C}^l$中的一个纤维型配置， $l\geq 2$，那么存在一列 Artin 表示 $\alpha_k$: $\pi_1(\mathbb{C}^k\backslash\mathcal{A}_k)\to \mathrm{Aut}(F_{d_k})$，其中包含一些正整数 $d_k, k=1,\dots,l$，并且有

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{A}) &\cong F_{d_{l-1}}\rtimes_{\alpha_{l-1}}\pi_1(\mathbb{C}^{l-1}\backslash\mathcal{A}_{l-1})\\ &\cong F_{d_{l-1}}\rtimes_{\alpha_{l-1}}F_{d_{l-2}}\rtimes_{\alpha_{l-2}}\pi_1(\mathbb{C}^{l-2}\backslash\mathcal{A}_{l-2})\\ &\cdots\\ &\cong F_{d_{l-1}}\rtimes_{\alpha_{l-1}}F_{d_{l-2}}\rtimes_{\alpha_{l-2}}\cdots\rtimes_{\alpha_1}\pi_1(\mathbb{C}\backslash\mathcal{A}_1)\\ &\cong F_{d_{l-1}}\rtimes_{\alpha_{l-1}}F_{d_{l-2}}\rtimes_{\alpha_{l-2}}\cdots\rtimes_{\alpha_1}F_{d_0}.\end{aligned}$$

这里，我们令 $d_0$ 等于 $\mathbb{C}$中点集 $\mathcal{A}_1$ 的基数。
注 6.6. 辫子配置 $\mathcal{A}^{\mathrm{br}}_{\mathbb{C}}:=\{(x_1,\dots,x_l)\in\mathbb{C}^l\mid\prod_{i\leq i<j\leq l}(x_i-x_j)=0\}$是纤维型配置的典型例子，众所周知，$\mathcal{A}^{\mathrm{br}}_{\mathbb{C}}$的补空间的基本群同构于次数为 $l$的纯辫群。在论文 [9], 中，Haraoka 将 $\mathbb{C}^l\backslash\mathcal{A}^{\mathrm{br}}_{\mathbb{C}}$ 上的 $k$-局部系统范畴的一个端函子定义为 Katz中间卷积的推广。于是我们可以验证，在这种情况下，Haraoka 的中间卷积与我们的 KLM 函子同构。详细内容将在第二作者即将发表的论文 [21]中讨论。

## 6.4 实心环面中闭辫的补空间

我们回顾一下，实心环面中闭辫补空间的基本群具有以下形式 $F_n\rtimes_\alpha G$，其对应的 Artin 表示为 $(G,\alpha)$。

对于 $\beta\in B_n$，我们将 $\beta$ 在实心环面 $T:=D\times S^1$ 中的闭包记作 $\hat{}\,\beta$。于是可以看到，投影 $T\backslash\hat{}\,\beta\to S^1$ 成为一个纤维丛，其纤维为 $D\backslash\{n\text{ 点 }\}$。对于一点 $d\in\partial D$，我们可以取该丛的截面 $s_d$: $S^1\ni x\mapsto(d,x)\in T\backslash\hat{}\,\beta$，它对应于 $T$ 的经线。因此我们得到分裂短正合列

$$1\to\pi_1(D\backslash\{n\text{-points}\},d)\to\pi_1(T\backslash\hat{\beta},s_d(s))\to\pi_1(S^1,s)\to 1$$

对于固定的 $s\in S^1$，以下结论成立。

定理 6.7（例如参见 Birman [2] ）。取 $\beta\in B_n$，并将相应的实心环面中的闭辫 $T:=D\times S^1$ 记作 $\hat{}\,\beta$。那么，补空间的基本群具有如下直和分解,

$$\pi_1(T\backslash\hat{\beta})\cong F_n\rtimes_{\phi_\beta}\mathbb{Z},$$

其中，Artin 表示 $\phi_\beta$: $\mathbb{Z}\to$ 自同构群$(F_n)$ 由 $1\mapsto\theta_{\mathrm{Artin}}(\beta)$ 定义。

## 6.5 通过刚性局部系统构造非刚性局部系统的整表示

众所周知， $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 上的秩二不可约局部系统可实现为高斯超几何微分方程的解层，是 Katz 意义下刚性局部系统的典型例子 $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 。

另一方面，$\mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\}$ 上某个固定 $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ 的秩 2 局部系统被认为是非刚性局部系统的首个例子。我们称这些局部系统为 Heun 局部系统，因为它们对应于 Heun 微分方程的解层。

或许不能指望与非刚性局部系统对应的线性微分方程的解，能够像高斯超几何函数那样具有积分表示，其被积函数由某些初等函数表达。不过，我们的 KLM 函子给出了一些非刚性局部系统的特殊例子，它们所对应的微分方程的解可能具有积分表示。

取一个群同态 $\alpha \in \mathrm{Hom}(F_3, B_4)$，并像之前一样选取一个连续映射$\phi_\alpha\colon \mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\} \to B^4(\mathbb{C})$，使得 $(\phi_\alpha)_* = \alpha$。令 $p_\alpha\colon X_\alpha \to \mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\}$ 为 $b_4\colon B^{1,\,4}(\mathbb{C}) \to B^4(\mathbb{C})$ 关于 $\phi_\alpha\colon \mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\} \to B^4(\mathbb{C})$ 的拉回。然后，定理 6.1 中的截面 $s_\alpha\colon \mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\} \to X_\alpha$ 给出如下直和分解

$$\pi_1(X_\alpha) \cong F_4 \rtimes_\alpha \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\})$$

如前所述。假设存在一个特征 $\chi\colon F_4 \rtimes_\alpha \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\}) \to \mathbb{C}^\times$使得

$$\chi(x_i) = 1 \text{ for } i = 1, 4, \quad \chi(x_i) \neq 1 \text{ for } i = 2, 3.$$

那么，若取 $\tau \in \mathbb{C}^\times\backslash\{\chi(x_1x_2x_3x_4)^{-1}\}$，直接计算可知 $\mathcal{KLM}_\tau(\chi)$ 成为一个秩为 2 的局部系统。因此，关于截面 $s_\alpha\colon \mathbb{C}\backslash\{0,1,\lambda\} \to X_\alpha$ 的拉回局部系统 $s_\alpha^*(\mathcal{KLM}_\tau(\chi))$ 给出了一个 Heun 局部系统。由于 $\mathcal{KLM}_\tau(\chi)$ 可视为一个以秩为 1 的局部系统为系数的 Borel-Moore 同调群的子空间，我们可以得出结论：$\mathcal{KLM}_\tau(\chi)$ 给出了这个特殊 Heun 局部系统的积分表示，其被积函数为秩为 1 的局部系统。

# 参考文献


[1] Bigelow, S., Tian, J. P., 辫群的广义 Long-Moody 表示，《当代数学通讯》10 (2008)，增刊 1，1093–1102。[2] Birman, J. S.,《辫子、链环与映射类群》，《数学年刊研究》第 82 号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1974。ix+228 页。[3] Cohen, D. C.，纤维型配置与轨道配置空间的单值化，《数学论坛》13 (2001)，第 4 期，505–530。[4] Cohen, D. C., Suciu, A.，平面代数曲线与超平面配置的辫单值化，《瑞士数学评论》72 (1997)，第 2 期，285–315。[5] Conway, A.，Burau 映射与扭 Alexander 多项式，《爱丁堡数学会会刊》（第 2 辑）61 (2018)，第 2 期，479–497。[6] Dettweiler, M., Reiter, S.，Katz 算法及其在逆伽罗瓦问题中的应用，《符号计算杂志》30 (2000)，第 6 期，761–798。[7] Hansen, V. L.，《辫子与覆盖：选讲》，伦敦数学会学生教材第 18 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1989。x+191 页。

[8] Haraoka, Y.，具有沿超平面配置的对数奇点的完全可积系统的中间卷积，《超平面配置——札幌 2009》，《纯数学高级研究》，62 (2012)，109–136。[9] Haraoka, Y.，KZ 方程的乘法中间卷积，《数学杂志》294 (2020)，第 3–4 期，1787–1839。[10]Hatcher, A.，《代数拓扑》，剑桥大学出版社，剑桥，2002。xii+544 页。[11] Herald, C. M.，具有非恒定等变符号的纽结补空间的不可约表示的存在性，《数学年刊》309 (1997)，第 1 期，21–35。[12] Heusener, M. 关于纽结群的 $SL_n(\mathbb{C})$–表示空间的一些最新结果，《谱理论与几何研讨会论文集》，32 (2014-2015)，137–161。[13] Kassel, C., Turaev, V.，《辫群》，《数学研究生教材》第 247 卷，施普林格，纽约，2008。xii+340 页。[14] Katz, N.，《刚性局部系统》，《数学年刊研究》第 139 号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1996。viii+223 页。[15] Klassen, E. P.，$SU(2)$ 中的纽结群表示，《美国数学会汇刊》326 (1991)，第 2 期，795–828。[16] Kronheimer, P. B., Mrowka, T. S.，德恩手术、基本群与 SU(2)，《数学研究快报》11 (2004)，第 5–6 期，741–754。[17] Lambropoulou, S. S. F.，实心环面链环与 $\mathscr{B}$ 型 Hecke 代数，《量子拓扑会议论文集》（堪萨斯州曼哈顿，1993），225–245，世界科学出版社，里弗埃奇，新泽西州，1994。[18] Long, D. D.，构造辫群表示，《分析与几何通讯》2 (1994)，第 2 期，217–238。[19] Moishezon, B. G.，稳定分支曲线与辫单值性，《代数几何》（伊利诺伊州芝加哥，1980），第 107–192 页，《数学讲义》第 862 卷，施普林格，1981。[20] Møller, J. M.，多项式补空间，《应用拓扑学》31 (1989)，第 2 期，149–158。[21] Negami, H.，辫群表示的 Long-Moody构造与 KZ 型方程的 Haraoka 的乘法中间卷积，准备中。[22] Souli´e, A.，Long-Moody构造与多项式函子，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》69 (2019)，第 4 期，1799–1856。[23] Spanier, E.，具有局部系数的奇异同调与上同调及流形对偶性，《太平洋数学杂志》160 (1993)，第 1 期，165–200。[24]Takano, A.，Long-Moody构造与扭阿历山大不变量，arXiv:2111.12303，(2021)。[25] V¨olklein, H.，辫群与线性刚性，《几何专论》84 (2001)，第 1–3 期，135–150。