arXiv:2303.05773v1 [math.AG] 10 Mar 2023

代数算术几何中的局部系统讲座

H´EL`ENE ESNAULT

Abstract. [封底文案] 人们对光滑复代数簇的拓扑基本群知之甚少。一种研究方法是考察它在共轭作用下的复线性表示，也就是复局部系统。一个基本问题是辨认哪些局部系统源自几何，并进一步研究局部系统模空间中具有特殊算术性质的子轨迹。这正是深刻猜想所关注的对象。本讲义介绍拓扑基本群的一些性质，以及这些猜想带来的一些推论，尤其是某些特殊轨迹的稠密性、整性和晶性性质。

1. Lecture 1: General Introduction

连通有限 CW复形M 在一点 m处的拓扑基本群 $\pi_1(M,m)$，按照 Poincar´é 的定义，是一个有限表示群。反过来，任意有限表示群都是某个连通有限CW 复形的基本群。有限生成性使我们能够定义一个“模空间”（参数空间） $M_B(\pi_1(M,m)\ r)$, 其中包含该群所有秩为 r的半单复线性表示 $\rho:\pi_1(M,m) \to GL_r(\mathbb{C})$，并对共轭作用取商；等价地，它也包含所有秩为 r 的半单复局部系统 $\mathbb{L}$。它称为$\pi_1(M,m)$的特征簇，也称为秩为 r的 M 的贝蒂模空间，因为共轭作用消去了对 m的选择；它是一个定义在整数环 $\mathbb{Z}$上的有限型概形。

我们关注这样的情形： M 由光滑连通代数准射影簇 X 的复点 $X(\mathbb{C})$组成，其中该簇是有限型的，定义在复数域 $\mathbb{C}$上；此时， M 具有连通有限CW 复形的同伦型。对于代数来源 $M = X(\mathbb{C})$对拓扑基本群 $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))$所施加的限制，我们所知甚少。另一方面，有一类自然定义的局部系统 $\mathbb{L}$：将其限制到某个扎里斯基稠密开集 $U \hookrightarrow X$ 后，它们是 U 上的一个局部系统的子商（等价地，根据戴利涅半单性定理，是其直和项）；该局部系统来自光滑射影态射 $g: Y \to U$的纤维的上同调变分。这类 $\mathbb{L}$ 称为几何的。一个例子是 $U = X$ 且 g 在拓扑意义下也是有限的情形。此时， $\mathbb{L}$的单值化，即群 $\mathrm{Im}(\rho)$（定义到共轭为止），是有限群。根据黎曼存在定理，这等价于 g 是有限 ´étale的，因而将 $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))$与其有限群完备化 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$联系起来。后者是étale基本群，由格罗滕迪克定义；它本身又与 $X_{\mathbb{C}}$的函数域的伽罗瓦群相关。

因此，自然会尝试从 $M_B(X,r)$ 中挑出对应于几何的、甚至是有限局部系统的复点。更一般地，自然会尝试定义

高维几何子轨迹的概念。这显然是一项难以企及的任务，让人联想到 Hodge 猜想和 Tate 猜想：我们如何从 $\mathbb{L}$ 构造出 g？有若干猜想依赖于 $M_B(X,r)$ 的各个方面。

格罗滕迪克的 p-曲率猜想：它依赖于黎曼–希尔伯特对应，该对应将 $\mathbb{L}$ 的 $M_B(X,r)$的复点与 X 上的代数半单可积联络(E,∇)等同起来（为简单起见，假设 X 是射影的，以避免边界增长条件）：我们考虑所有足够大的素数 p 下模 p 的(E,∇)，并要求这个特征 $p>0$ 联络由平坦截面生成。这是最初的表述，应该能够刻画有限局部系统 $\mathbb{L}$。更一般地，为了刻画几何局部系统 $\mathbb{L}$，我们要求所有足够大的 p 下模 p 的(E,∇)带有滤过，使得其伴随分次由平坦截面张成。Katz 的工作大致（但略逊于此）表明，对于一个几何的 $\mathbb{L}$，可以通过几乎所有 p下模 p 的(E,∇)由其平坦截面生成来刻画其有限性；此后又有 Chudnovsky-Chudnovsky、Bost 和 Andr´e 关于可解情形的工作，以及 Kisin 提出的一些类似见解，但在这一思路上基本没有取得重大进展。

我们在第2讲中讨论了格罗滕迪克 p-曲率猜想的一种可能起源——这是我们目前的理解——并将其与克罗内克的经典有理性判据联系起来。在本讲中，我们还写出了格罗滕迪克p-曲率猜想的一种简化形式，它与一般形式等价。我们也讨论了 Katz 的证明，并给出略有不同的观点。

吉塞克-德容猜想：它仅依赖于拓扑基本群 $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C})$ 的有限生成性，这蕴含马尔采夫-格罗滕迪克定理： ´étale 基本群 $\pi_1(X_{\mathbb{C}},x_{\mathbb{C}})$ 控制着 $M_B(X,r)$ 的规模：若 $\pi_1(X_{\mathbb{C}},x_{\mathbb{C}})=\{1\}$，那么 $M_B(X,r)$ 仅由一点构成，即秩为 r 的平凡局部系统（事实上也不存在扩张）。Gieseker 猜想由 Mehta 合作解决，它断言在特征 $p>0$ 下，无穷小晶体也有类似结果；de Jong 猜想则预言等晶体也有类似结果，但其一般情形仍未解决（我们与志保一起取得了一些小进展）。它也¯与朗兰兹纲领有关：若基域为 $\mathbb{F}_p$，且等晶体带有弗罗贝尼乌斯结构，那么 ℓ-进伴随系统的存在性（由阿部合作证明，另见 Kedlaya）便证明了该猜想；这种伴随系统最初由 Deligne 在 Weil II 中预言。若能理解 de Jong 猜想在棱柱晶体上的推广，并使之涵盖其最初的表述，将会很有意义。

我们在第3讲中提到了 Mal˛cev-格罗滕迪克定理的证明。该证明依赖于拓扑基本群的有限生成性。我们概述了我与 Mehta 对吉塞克猜想的证明，其中 X 是光滑射影的。尽管 X 的几何基本群是拓扑有限生成的，但证明并未直接使用这一性质，而是利用了 Frobenius 除层的有界性。

特征为 $p>0$ 的代数闭域 k 上定义的光滑（准）射影簇 X 的（温和）基本群的拓扑性质：如前所述，如果 k 是复数域，那么 X 的拓扑基本群将是有限呈示的。利用 Lefschetz 理论以及从特征零到特征 $p>0$ 的格罗滕迪克专化同态，很容易看出， X 的（温和）基本群作为拓扑群是有限生成的。但事实不止如此，它还是有限呈示的，至少在

我们假设 X 具有良好的正规交叉紧化时是如此。这与经典的拓扑情形非常相似。

我们将在第4讲中介绍与 Shusterman 和 Srinivas 合作完成的证明。该证明依托 Lubotzky 的一项卓越定理，该定理从上同调角度刻画了这一性质。这种刻画带有动机论的意味，因为它表明，取值于秩为 r 、系数为 $\mathbb{F}_\ell$ 的连续表示的（温和）基本群的 H^2，随 r 线性增长，却无法感知 ℓ。事实上，证明对 ℓ 的独立性，最终依赖于 Weil 猜想中的 Deligne 纯性。对于 $\ell = p$ ，证明 r 的线性增长更具几何性质；若 X 不完备，则会用到良好紧化的存在性，以便对温和性作数值刻画。

根据 $\mathbb{C}$ 上的黎曼存在定理和基变换定理，代数闭域上特征零的光滑（准）射影簇的基本群，是一个有限呈示抽象群的有限群完备化。我们可以对离散群所具有的有限生成或有限呈示概念作调整，去掉 p 处的条件。这个定义是依据格罗滕迪克专化同态的性质构造的。由此得到 p' 有限生成群或有限呈示群的概念。即便仅从 p' 有限生成这一层面来看，这一性质也是 X 提升到特征零的障碍。

我们在第5讲中介绍与 Srinivas 和 Stix 合作对这一新定义的障碍所作的证明。归根结底，它再次依赖于一种动机性质，而这次该性质并非总能得到验证： X 的自同构群在其（第一） ℓ-进上同调上的表示与 ℓ 无关，但并非（总是）定义在 $\mathbb{Q}$ 上。

特殊轨迹的稠密性：对于 $\mathbb{C}$ 上光滑拟射影的 X ，Drinfeld 分析了 Betti 模空间 $M_B(X,r)$ 作为 $\mathbb{Z}$ 上概形时的一些算术性质。在 $M_B(X,r)$ 的特征为 ℓ 的良好闭点处，对于充分大的 p ，de Jong 猜想应用于 X 的模 p 约化，预言由该闭点定义的剩余表示存在许多形变，这些形变是取值于 ℓ-进层的，而该层具有算术性，也就是说，它受弗罗贝尼乌斯的某个幂作用。由于算术朗兰兹纲领，这些层于是是 Deligne 意义下的纯层；例如，若它们是半单的且 X 是射影的，则满足硬 Lefschetz 性质。B¨ockle-Khare 在特殊情形下证明了 de Jong 猜想，而 Gaitsgory 则利用几何朗兰兹纲领在一般情形下证明了该猜想（对 $\ell \geq 3$）。因此，可以利用这些（深刻的）算术方法，推出 $M_B(X,r)$ 的某些子轨迹的稠密性。

我们在第 6 讲中给出与 Kerz 合作的一个证明：在 $M_B(X,r)$ 中，对应于无穷远处单值变换拟幺的半单局部系统的复点集合是扎里斯基稠密的。该证明采用了 Drinfeld 的思想。这也促使我们将 mod p 约化上的 X 的算术 ℓ-进局部系统定义，转化为 $\mathbb{C}$ 上 X 的弱算术复局部系统这一概念。我们给出该定义，并给出与 de Jong 合作的证明： $M_B(X,r)$ 中弱算术局部系统的集合是扎里斯基稠密的。所有弱算术局部系统在无穷远处都具有拟幺幂单值，因此这一稠密性比前一种更强。在定义中，将复局部系统转化为 ℓ-进 ´étale 局部系统的方式，使我们无法得出弱算术局部系统至多可数的结论。

另一方面，Biswas-Gupta-Mj-Whang 证明了秩 2 的情形，而 Landes man-Litt 则证明了任意秩的情形：通过拓扑方法和霍奇理论方法，他们表明，在亏格为 ≥ 2 的几何泛曲线上，能够下降到万有曲线的低秩半单复局部系统是酉的。

有了这一点，我们在第 6 讲中介绍其证明思路，并将结论推广到任意秩：事实上，这些局部系统不仅是酉的，而且具有有限单值化。证明最终依赖于上同调刚性局部系统的整性；这是我与 Groechenig 合作证明的一条定理，将在第 7 讲中讲解。证明还表明，来自万有曲线的几何泛曲线上的局部系统不可能在 Betti 模空间中稠密，这与我早先和 Kerz 表达过的一种期望相反。

伴随系统与整性：复局部系统可以通过复数域的一个自同构 σ 进行扭曲：我们将拓扑局部系统底层线性表示的系数通过 σ 复合。如果现在考虑取值于系数属于某个拓扑域的线性群中的拓扑群表示，那么复合之后就会失去连续性。因此，我们无法定义扭曲的连续表示。Deligne 在 Weil II 中预言，尽管如此，在以下情形中仍然可行。假设拓扑群是定义在有限域 $\mathbb{F}_q$上的光滑拟射影簇 X¯的几何基本群，系数域是某个与 p互素的素数 ℓ 所对应的 ℓ进数域的代数闭包 $\mathbb{Q}_\ell$，而同构 σ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 与 $\mathbb{Q}_{\ell'}$之间的某个抽象同构¯ ¯。如果局部系统在弗罗贝尼乌斯的某个幂作用下保持不变，也就是说它是算术的，那么根据朗兰兹对应，闭点处弗罗贝尼乌斯元素作用的特征多项式是系数为代数数的多项式。因此，σ会将这些代数数映到其他代数数。此外，切博塔廖夫稠密性定理可通过这些多项式识别一个简单的 ℓ 进局部系统。于是 Deligne 猜想存在一个具有这些数据的简单 ℓ'进局部系统，并称之为（σ）-伴随系统。如果我们相信算术局部系统来自几何，那么至少对于整个 Gauss-Manin 系统，我们知道如何从 ℓ 过渡到 ℓ'。如果 X 的维数为 1，那么作为朗兰兹对应的推论，L. Lafforgue 证明了伴随系统的存在性；Drinfeld 在证明朗兰兹纲领的秩 2 情形后也采用了同样的方法。此外，算术局部系统来自几何。在更高维情形下并不存在朗兰兹纲领。由于缺乏任何几何支撑，Drinfeld 也证明了更高维情形下伴随系统的存在性。

我们将在第 7 讲介绍 Drinfeld 的证明的若干方面。起点是 L. Lafforgue 所得的维数为 1 的情形，见上文。问题在于如何粘合定义在所有曲线上的那些 ℓ'-进层，使它们在交集上相容。Drinfeld 构造了 Wiesend 所进行构造的一个非交换版本。他运用了切博塔廖夫密度定理的一个强形式：可以通过有限多个点来识别曲线上的一个 ℓ'-进局部系统。他还运用了 Deligne 早期的工作，该工作表明，对于给定的一个 ℓ-进局部系统，闭点处弗罗贝尼乌斯元素的特征多项式的系数都属于 $\mathbb{Q}$ 的一个有限型扩张。

Simpson 的动机性猜想：刚性局部系统。这些是 $M_B(X, r)$ 的零维分支。Simpson 预言它们全都是几何的。这一猜想依赖于 Katz 在 X 维数为 1 时所证明的相应定理；此时 X

必须是 $\mathbb{P}^1$ 中的一个开集（因此，在定义 $M_B(X,r)$ 时，必须固定无穷远处拟幺幂单值的共轭类）。它也依赖于 Simpson 对应：当 X 是射影时，该对应在实解析意义下将 $M_B(X,r)$ 与具有消失的陈类的半稳定 Higgs 丛的模空间等同起来。这些对象带有一个 $\mathbb{C}^\times$-流，因此，从 Higgs 侧来看，刚性局部系统在该流作用下是不变的。根据 Simpson 定理，这意味着它们源自可极化复 Hodge 结构变分。从这里到设想其几何性，只差一步。

在第 7 讲中，我们介绍了与 Groechenig 一起对动机性猜想的一个推论所作的证明，这个推论称为整性猜想，也由 Simpson 提出：刚性局部系统应当是整的。为此，我们将 ℓ-进局部系统模 p 降到 p 充分大。刚性意味着这个 ℓ-进局部系统实际上也是算术的，这一事实 Simpson 早已指出。随后我们取一个伴随系统，并将这个 ℓ'-局部系统重新诠释为初始复代数簇上的拓扑对象。要得出结论，我们需要这个新定义的拓扑系统也具有刚性。只有在附加假设下我们才能证明这一点：我们最初考虑的刚性局部系统是其模空间中的一个光滑点。这是一个上同调条件，我们称之为上同调刚性。

贝蒂模空间的整性：一个重要之处在于，刚性局部系统是算术的。另一方面，如上所述，作为 de Jong 猜想的一个推论，弱算术局部系统是稠密的。

在第 7 讲中，我们介绍与 de Jong 合作证明的结果：与不可约局部系统对应的贝蒂模空间整个开集具有整性。证明依赖于弱算术局部系统这一概念，并结合了证明（上同调）刚性局部系统整性的相同思路。这一性质的一个推论是，它在贝蒂模空间上提供了一个新的障碍，可用于判断一个有限表示群能否成为某个光滑复拟射影簇的拓扑基本群。

刚性局部系统的晶性：如果我们相信 Simpson 的动机性猜想，那么它应当有两个 p-进推论，一个涉及局部系统$\mathbb{L}$ 本身，另一个涉及借助黎曼–希尔伯特对应定义的平坦联络（E，∇）。事实上，如果这些数据最终来自某个光滑射影态射 $g: Y \to U$ 在某个稠密开集 $U \hookrightarrow X$上的 Gauss-Manin 系统的分解，那么当 p 足够大时，所有数据都有良约化。因此，人们预期，在 p 足够大时，局部系统在具有良约化的 X 的一个 p-进模型上的 p-完备化是晶体。与此同时，如果 g 没有良约化，但 X 有，那么人们预期，将联络限制到 p-进模型上，会得到一个带弗罗贝尼乌斯结构的等晶体。这两种性质在对“良” p的要求不那么精确的情况下，已由 Groechenig 与我们共同证明。

在第 8 讲中，我们给出 F-等晶体性质的一个证明。该证明依赖于 Stack Project 中几乎已有记载、且由 de Jong 告诉我的一个事实：如果 X 的整 p-进模型是非分歧的，并且 $p \geq 3$，那么弗罗贝尼乌斯会作用于其上定义的联络。由此可以事后证明，该联络模 p 约化的 p-曲率是幂零的。我们与 Groechenig 最初的证明则是先证明这一性质，过程稍微困难一些。然而，对于 p-进局部系统的晶性，就目前的知识而言，我们必须回到与 Groechenig 合作的证明；该证明沿着

沿 p 完备化展开，证明我们存在 Zuo 及其合作者意义下的周期性 Higgs-de Rham 流。

值得注意的是，在强上同调条件下，这个晶性证明很容易推广到非真光滑簇。我们没有在那些笔记中重现我们与 Groechenig 合作的证明。我们注意到，Pila-Shankar-Tsimerman 正是利用了这一性质来证明关于实秩为 ≥ 2 的 Shimura 簇的 Andr´e-Oort 猜想。

还有许多与笔记中讨论的主题相近、但未涉及的课题。其中之一涉及 Betti 模空间的某些特定子轨迹，我们称之为算术子轨迹，并与 Kerz 一起给出了定义。它将整 ℓ-进点的算术性概念推广到了 Betti 模空间中的高维子簇。在秩 1 的情形下，我们与 Kerz 证明了这些子轨迹是整个模空间中子环面的挠点平移，而整个模空间本身是一个环面。由于未能深入理解模空间更精细的几何性质，我们在高秩情形下无法沿此方向取得进展。另一个方向是思考 Petrov 的工作之后应有怎样的预期：Petrov 指出，广义 Fontaine-Mazur 猜想可以简单地表述为一种预测，即特征零下 X 光滑拟射影簇上几何不可约的 ℓ-进局部系统若具有算术性，实际上就应来自几何。若能从这个宏大猜想中找到一个小的推论，将有助于检验它是否符合实际。

最后，在第 10 讲中，我们提出了若干与各讲内容相关的问题和课题。

1.1. 致谢。特别衷心感谢 Michael Groechenig、Moritz Kerz，以及近来与我共同发展了本文部分数学内容的 Johan de Jong。这些讲义大量体现了我们共同发展并进一步分享的思想。

PierreDeligne 和 Vladimir Drinfeld 的思想影响深远，贯穿于讲义所阐述的整个思想体系。此外，我还要感谢 Pierre Deligne，他为讲义的初稿提供了一份详尽的评论和意见。

感谢 Tomoyuki Abe、Lars Kindler、Mark Kisin、Adrian Langer、Vikram Mehta（遗憾的是，他已不在人世）、志保、Mark Shusterman、Vasudevan Srinivas、JakobStix 与我合作完成的工作，这些工作均收录于讲义中。

更具体地说，我要感谢 Piotr Achinger、Yves Andr´e、Benjamin Bakker、Alexander Beilinson、Barghav Bhatt、Emmanuel Breuillard、Yohan Brunebarbe、Benjamin Church、Dustin Clausen、Marco D'Addezio、Pierre Deligne、Johan de Jong、Vladimir Drinfeld、Mikolaj Fraczyk、Michael Groechenig、Michael Harris、Lars Hesselholt、Moritz Kerz、Mark Kisin、Bruno Klingler、Raju Krishnamoorty、Aaron Landesman、Adrian Langer、Daniel Litt、Alexander Lubotzky、Akhil Mathew、John Morgan、Alexander Petrov、Jonathan Pila、Maxime Ramzi、Vasily Rogov、Will Sawin、Ananth Shankar、Carlos Simpson、Jacob Tsimerman、Vadim Vologodsky。我在不同阶段与他们交流，他们都以此为讲义的编纂作出了贡献。

我感谢哥伦比亚大学的数学家们。他们盛情邀请我于2020年秋季举办埃伦伯格讲座，这些讲座是本讲义的基础。由于疫情，我"用掉了"三位讲座主席：Michael Thaddeus、Robert Friedman 和 Johan de Jong。很抱歉给他们添了不少工作。最后，我于2022年秋季在 Johan "当政"期间来到这里。那段时光十分美好。

我感谢哥本哈根大学的数学家们。我于2021年秋季和2023年冬季在那里举办了埃伦伯格讲座的一个回响版。

我感谢所有聆听讲座并参与其中的学生、博士后和教职人员，是他们让讲座内容更加丰富多彩，也希望更加有趣。我也感谢两所机构的行政人员对我的热情接待。

感谢施普林格出版社允许我以较为口语化的方式撰写这些讲义，称作第1讲、第2讲，等等……若要理解某些证明的细节，我们总得回到原始文献中去。这些讲义尤其如此。撰写它们的目的，是传达一种哲学理念和一项研究计划；过去10到15年间，我与其他数学家共同发展了这项计划，并希望借此分享一些梦想。分享梦想，只能采用亲切的表达方式。

Contents

1. 第1讲：总论 1 1.1. 致谢 7 2. 第2讲：克罗内克有理性判别准则与格罗滕迪克 p-曲率猜想 10 2.1. 克罗内克判据 10 2.2. 格罗滕迪克 p-曲率猜想 12 2.3. 回到克罗内克解析判别准则：高斯-马宁联络 14 3. 第3讲：Mal˘cev-Grothendieck定理、其在特征 $p>0$下的变体、Gieseker猜想、de Jong 猜想，以及即将提出的猜想 17 3.1. 在 $\mathbb{C}$ 17上 3.2. 在特征 $p>0$ 17的代数闭域上 3.3. 在 p-进域上 19 4. 第4讲：关于特征零与 $p>0$ 20下基本群某些相似之处的插曲 4.1. Lubotzky 定理 20 4.2. 温和基本群 20 4.3. 格罗滕迪克专化同态，[SGA1], 第 X 篇，第 ´篇第 XIII 节 21 4.4. 有限生成 22 4.5. 定理 4.5 的证明，$\ell \neq p$ 部分。22 4.6. 定理 4.5 的证明，p 部分。23 5. 第5讲：关于特征零与 $p>0$ 26下基本群某些差异之处的插曲 5.1. Serre 构造 26 5.2. 各种障碍 26 5.3. 基于基本群结构的、提升到特征零的抽象障碍 26 5.4. 主要定义 27 5.5. 对 ℓ 的独立性与 Schur有理性 28 5.6. Roquette 曲线与 Serre 构造的结合 29 6. 第6讲：特殊轨迹的稠密性 30 6.1. 定义 30 6.2. 为什么要考虑无穷远处的拟幺幂单值变换 30 6.3. 拟幺幂局部系统的稠密性定理 31 6.4. 备注 32 6.5. 其他稠密或非稠密轨迹 33 6.6. 算术局部系统并不稠密：Biswas-Gupta-Mj-Whang 与 Landesman-Litt 的工作 35 6.7. 弱算术复局部系统 39 7. 第 7 讲：伴随系统、上同调刚性局部系统及贝蒂模空间的整性 42 7.1. 复数域一侧的动机 42 7.2. 有限域上的类比 43 7.3. 几何性 44 7.4. 关于 Drinfeld 的证明 44

7.5. 上同调刚性局部系统是整的，见 [EG18],定理 1.1 49 7.6. 整个贝蒂模空间的整性，见 [dJE22], 定理 1.1 50 7.7. 障碍 51 8. 第 8 讲：刚性局部系统与 F-等晶体 52 8.1. 晶体位、晶体与等晶体 52 8.2. 幂零晶体位点、晶体与等晶体 52 8.3. 弗罗贝尼乌斯在幂零晶体位点上的晶体集合上的作用 53 8.4. 弗罗贝尼乌斯在特征零下诱导上同调上的同构。54 8.5. [EG20], 定理 1.6 的证明 55 9. 第 9 讲：刚性局部系统、 Fontaine-Laffaille 模与晶体局部系统 57 9.1. 主要定理 57 9.2. 射影情形下 Simpson 对应与 Ogus-Vologodsky 对应的比较 59¯9.3. 射影情形下 X_s 上的周期 de Rham-Higgs 流与 $GL_r(\mathbb{F}_p)$-局部系统 60 ˆ ¯9.4. 射影情形下 X_W 上的周期 de Rham-Higgs 流与 $GL_r(W(\mathbb{F}_p))$-局部系统 60 9.5. 射影情形下从 X_K 上的晶体 p-进局部系统到 $X_{\bar{K}}$ 上的 p-进局部系统。61 10. 第 10 讲：评论与问题 63 10.1. 关于 p-曲率猜想（第2讲）63 10.2. 关于马尔采夫-Grothendieck定理及其在特征 $p > 0$ 下的推论（第3讲）63 10.3. 关于 Lubotzky 定理 4.2 63 10.4. 关于定理 4.7 64 10.5. 关于定理 5.3 和定理 5.10 64 10.6. 关于定理 6.2 64 10.7. 关于定理 7.6 及定理 7.8 的更详尽版本，见定理 [dJE22，定理 1.4] 6410.8. 关于定理 7.8 64 10.9. 关于第8讲和第9讲 64 参考文献 64

2. Lecture 2: Kronecker's Rationality Criteria and Grothendieck's p-Curvature Conjecture

Abstract. 我们回顾两个判据，一个称为解析判据，另一个称为代数判据，用以判断整数是否为单位根，以及代数数是否为有理数。这两个判据都可追溯到克罗内克。我们回顾格罗滕迪克的p-曲率猜想及其推广，同时避免给出特征 $p > 0$下联络的 p-曲率的一般定义。我们说明二者之间的联系，并提及 Katz 利用（某种推广的）解析判据给出的证明。

2.1. 克罗内克判据。设 $a \in \mathbb{C}$ 是一个复数，并将其写作$a = \exp(2\pi\sqrt{-1}b)$，其中 $b \in \mathbb{C}$ 模整数 $\mathbb{Z}$确定。我们列出关于 $a \in \mu_\infty \subset \mathbb{C}$的克罗内克判据，也就是说，判定 a 是否为单位根；等价地，这些判据也可用于判定 $b \in \mathbb{Q}$，即判定 b 是否为有理数。

¯2.1.1. 克罗内克解析判别准则， [Kro57]。回顾一下，复数的代数整数子环 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ 由满足方程 $f(a) = a^d + c_1 a^{d-1} + \ldots + c_d = 0$（其中 $c_i \in \mathbb{Z}$）的复数 $a \in \mathbb{C}$组成，而代数数子域 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ 由上述满足 $c_i \in \mathbb{Q}$的 a 组成。任意域自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ of $\mathbb{C}$ 都保持 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 不变。

¯命题 2.1. 假设 $a \in \mathbb{Z}$，那么 $a \in \mu_\infty$ 当且仅当对于任意 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$， $\sigma(a)$ 的复绝对值等于 1。

证明. 见 https://mathoverflow.net/questions/10911/english-reference-for-a-result-of-kronecker 对于如上所述的 $f = f_1$，我们记 $f_n(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i^n) \in \mathbb{C}[X]$ 对所有 $n \in \mathbb{N}_{>0}$成立，其中 $\alpha_1 = a$。 f_n 的系数是 α_i中的对称函数，因此可以表示为关于 c_i的有理系数多项式；另一方面，它们属于$\mathbb{Z}$，因此位于 $\mathbb{Z}$中，且范数有界。故这样的f_n只有有限多个，因此集合 $\{a^n, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$ 是有限的，从而位于 μ_∞中。□

¯2.1.2. 克罗内克的代数判据， [Bau04]。假设 $b \in \mathbb{Q}$，因此 b 属于数域 $\mathbb{Q}(b)$，其秩为 d。所以我们可以对几乎所有素数取其约化，也就是说，除数环 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$中的有限多个素数 $\mathfrak{p}$ 之外，对所有素数取约化。

命题 2.2. 如果对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$ 的几乎所有素数 $\mathfrak{p}$，(b 模 $\mathfrak{p}$) $\in \mathbb{F}_p \subset \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$，那么 $b \in \mathbb{Q}$。换言之：如果对于几乎所有p， b 在特征 p 下属于素域，那么它在特征零下也属于素域。

证明。将 b 乘以 $\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 中的一个元素后，不妨设 $b \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$，于是生成子环 $\mathbb{Z}[b] \subset \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$，它作为 $\mathbb{Z}$ 上的模是自由的，秩为 d；这也等于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$ 作为 $\mathbb{Z}$ 上的模的秩。因此，对于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$ 的除有限多个以外的所有素数 $\mathfrak{p}$， $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$ 由 (b 模 $\mathfrak{p}$) 在 $\mathbb{F}_p$ 上张成。所以，条件 (b 模 $\mathfrak{p}$) $\in \mathbb{F}_p \subset \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$ 等价于 (b 模 $\mathfrak{p}$) 完全分裂。由克罗内克密度定理可知，这意味着 $d = 1$。

□

2.1.3. 用微分方程表述克罗内克代数判据的转译。我们考虑复代数簇

$$X = \mathrm{Spec}\ \mathcal{O}(X),\ \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$$

以及其上的线性微分方程

$$(\star) \quad \frac{df}{f} = b\frac{dt}{t}$$

对某个 $b \in \mathbb{C}$ 成立。它的解析解为

$$f_\lambda(t) = \lambda t^b,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Then

引理 2.3. 对于 $\lambda \neq 0$, f_λ 是 $\mathcal{O}(X)$ 上的代数元，当且仅当 $b \in \mathbb{Q}$，当且仅当 f_λ 是 $\mathcal{O}(X)$ 上的整元。

证明. 若 $\mathbb{Q} \ni b = \frac{m}{n}$，$m, 0 \neq n \in \mathbb{Z}$，则 $f_\lambda^n \in \mathcal{O}(X)$，因此 f_λ 是 $\mathcal{O}(X)$ 上的整元。现在假设 f_λ 是 $\mathcal{O}(X)$ 上的代数元，因此特别地，f_λ 是 Laurent 幂级数域 $\mathbb{C}((t))$ 上的代数元，该域包含 $\mathcal{O}(X)$。因此 f_λ 定义了一个有限域扩张

$$\mathbb{C}((t)) \hookrightarrow \mathbb{C}((t))(f_\lambda).$$

由于嵌入

$$\cup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{C}((t^{1/n})) \hookrightarrow \overline{\mathbb{C}((t))}$$

是一个等式，$C((t))(f_\lambda)$ 必定是域 $\mathbb{C}((t^{1/n}))$ 之一，因此 $b \in \mathbb{Q}$，这也意味着 f_λ 是 $\mathcal{O}(X)$ 上的整元。

□

注记 2.4. 对于 $\lambda \neq 0$，以下条件等价：

(i) f_λ 在分式域 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(X)) = \mathbb{C}(t)$ 上代数；(ii) f_λ 在 $\mathcal{O}(X)$ 上整；(iii) $(\star)$ 的单值化是有限的。

证明. (i) $\Longrightarrow$ (ii)：f_λ作为 $(\star)$ 的解，在 X 上解析；由条件 (i)，f_λ 属于 $\mathbb{C}(t)$。因此 f_λ 属于整闭包 $\mathcal{O}(X) \subset \mathbb{C}(t)$。

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)：回忆引理 2.3，$f_\lambda = \lambda t^b$。由于 f_λ 在 $\mathcal{O}(X)$ 上整，它在 $\mathbb{C}((t))$ 上也整。因此由库默尔理论，$b \in \mathbb{Q}$。另一方面，f_λ 在路径 $\big(\gamma\colon [0\ 1] \to, \tau \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}\tau)\big)$ 上的限制 $\gamma^* f_\lambda$ 是函数$\big([0\ 1] \to \mathbb{C},\ \tau \mapsto \lambda\exp(2\pi\sqrt{-1}b\tau)\big)$。所以 γ 上的单值化 $a \in \mathbb{C}^\times$ 计算为以下比值

$$a = \gamma^* f_\lambda(\tau = 1)/\gamma^* f_\lambda(\tau = 0) = \exp(2\pi\sqrt{-1}b),$$

它是一个单位根。

(iii) $\Longrightarrow$ (i)：如果 a 是一个单位根，那么 b 是一个有理数，因此 (i) 成立。

□

¯现在我们假设 $b \in \mathbb{Q}$。对于 $\mathbb{Q}(b)$ 中几乎所有使下述讨论有意义的素数 $\mathfrak{p}$，也就是说，对于那些 b 在相应的 p-进域中是整的素数，我们考虑微分方程

$$(\star)_\mathfrak{p} \quad \frac{df}{f} = (b \bmod \mathfrak{p})\frac{dt}{t}$$

这只需将 $(\star)$ 视为定义在 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$ 上。我们记 $\mathcal{O}_\mathbb{Z}(X) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$，因此 $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}$。要使这些解有意义，唯一的办法是

$$\lambda t^b \text{ for } \lambda \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$$

要求它们属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p})$。对于 $\lambda\neq 0$ 中的 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$，$\lambda t^b$ 属于 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p})$，当且仅当 ($b$ 模 $\mathfrak{p}$) 属于 $\mathbb{F}_p\subset\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p}$。

我们现在总结一下讨论内容。

定理 2.5. 若 $b\in\mathbb{Q}$，则微分方程 $(\star)$ 在 $\mathcal{O}(X)$ 上有一个非平凡代数解，当且仅当对于几乎所有素数 $\mathfrak{p}\in\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}$，$(\star)_{\mathfrak{p}}$ 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p})$ 中有一个非平凡解。

注 2.6. 最后一个条件是存在一个非平凡解；等价地，由于该微分方程的秩为 1，这也意味着在 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p})$ 中存在一组完整的解。根据定义，这又等价于微分方程 $(\star)_{\mathfrak{p}}$ 的 p-曲率为零。这里我们不定义 p-曲率本身，因为我们并不需要曲率本身，只需要知道它为零（或在本讲后文中为幂零）的含义。

定理 2.5 的证明。$(\star)$ 在 $\mathcal{O}(X)$ 上有一组完整的代数解

if and only if

$b\in\mathbb{Q}$ (引理 2.3)

if and only if

(b 模 $\mathfrak{p}$) 对几乎所有 p 都有 $\in\mathbb{F}_p\subset(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p})$(命题 2.2)

if and only if

$(\star)_{\mathfrak{p}}$ 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)$ 中有一组完整的解 $\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b)}/\mathfrak{p})$（前面的讨论）。

□

格罗滕迪克的 p-曲率猜想的内容是预言，定理 2.5 可以推广到任意光滑复拟射影簇 X 以及任意线性微分方程 $(\star)$。我们将说明该猜想的表述及其一个推广，而完全不提及 p-曲率的定义。

2.2. 格罗滕迪克的 p-曲率猜想。我们先来表述一个事后看来与 p-曲率猜想等价的命题。

记 $X=$谱$\mathcal{O}(X)$ $X=$谱$\mathbb{C}[t,t^{-1},(t-1)^{-1}]$。接着我们提出线性微分方程

$$(\star)\quad \frac{df}{f}=b\frac{dt}{t}+c\frac{dt}{t-1}$$

此时

$$b=(b_{ij}),\ c=(c_{ij})\in M_r(\bar{\mathbb{Q}}).$$

对于几乎所有的素数 $\mathfrak{p}$（属于 $\mathbb{Q}(b_{ij},c_{ij})$ $1\leq i$），$j\leq r$ 在有意义的情况下，我们考虑微分方程

$$(\star)_{\mathfrak{p}}\quad \frac{df}{f}=(b \bmod \mathfrak{p})\frac{dt}{t}+(c \bmod \mathfrak{p})\frac{dt}{t-1}$$

它只不过是$(\star)$，但现在是在$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b_{ij})}/\mathfrak{p}$上考虑。我们记 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)=\mathbb{Z}[t,t^{-1},(t-1)^{-1}]$，于是 $\mathcal{O}(X)=\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{C}$。

我们称 $(\star)_p$ 具有一组完备解，若它有一组 r 解

$$(f_1,\dots,f_r),\ f_i\in\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b_{ij})}/\mathfrak{p}),$$

它们在$\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b_{ij})}/\mathfrak{p}$. 上线性无关。类似地，若 $(\star)$ 有一组 r 解 $(f_1,\dots,f_r)$，其中 f_i 在 $\mathcal{O}(X)$上是代数的，且这些解在 $\mathbb{C}$ 上线性无关，则称 $(\star)$ 具有一组完备代数解。

猜想 2.7. 微分方程 $(\star)$ 在 $\mathcal{O}(X)$ 上有一组完备的代数解，当且仅当 $(\star)_{\mathfrak{p}}$ 在 $\mathcal{O}_{\mathbb{Z}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_{\mathbb{Q}(b_{ij})}/\mathfrak{p})$ 上有一组完备的解（即其 p-曲率为零）。

格罗滕迪克猜想最初记载于 Katz 的文章 [Kat72, Introduction] 中：设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑拟射影簇，(E,∇) 是一个可积代数联络。设 S 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型概形，使得 $(X,(E,\nabla))$ 可下降为 $(X_S,(E_S,\nabla_S))$，并且在所有闭点 $s\in S$ 处都有良约化。那么，预期的结论就是以下猜想。

猜想 2.8（格罗滕迪克的 p-曲率猜想）。(E,∇) 有一组完备的代数解，当且仅当存在一个稠密开集 $S^\circ\subset S$，使得对所有 $s\in S^\circ$，X_s 上的约化 (E_s,∇_s) 有一组完备的解（即其 p-曲率为零）。

我们简要说明猜想 2.8 为何等价于其特例猜想 2.7。

断言 2.9（[Kat70, 定理 13.0]）。若存在稠密开集 $S^\circ\subset S$，使得对所有 $s\in S^\circ$，约化 (E_s,∇_s) 都有一组完整的解，则 (E,∇) 是正则奇异的，且其无穷远处的单值是有限的。

断言 2.10。(E,∇) 有一组完整的代数解，当且仅当存在有限覆盖 $h'\colon Y'\to X$，使得 $h'^*(E,\nabla)$ 有一组完整的解；这又当且仅当存在有限无分歧覆盖 $h\colon Y\to X$，使得 $h^*(E,\nabla)$ 有一组完整的解。

证明。若 h 存在，则 (E,∇) 在 $\mathcal{O}(Y)$ 中的解是 $\mathcal{O}(X)$ 上的代数解。反过来，假设给定 $\mathcal{O}(X)$ 上由代数解 f_i 构成的一组基。环 $\mathcal{O}(X)\hookrightarrow\mathcal{O}(X)[f_i]$ 因而是有限的，于是定义了一个有限的、可能分歧的有限覆盖 $h'\colon Y'\to X$，使得 $h'^*(E,\nabla)$ 是平凡的。因此，(E,∇) 的底层单值表示 $\pi_1(X)\to GL_r(\mathbb{C})$ 在 $\pi_1(X)$ 中的 $h'_*\pi_1(Y')$ 上平凡化，而其指数有限。这定义了一个有限无分歧覆盖 $h\colon Y\to X$，满足 $\pi_1(Y)=h'_*\pi_1(Y')$，使得 $h^*(E,\nabla)$ 是平凡的。

□

断言 2.11. 猜想 2.8 一般而言等价于其在 X 是光滑射影曲线时的特殊情形。

证明. 根据断言 2.10，猜想 2.8 对 X 上的 (E,∇) 成立，当且仅当对任意 h' 有限覆盖 $Y'\to X$，它对 $h'^*(E,\nabla)$ 成立。因此，根据断言 2.9，我们可以假设 (E,∇) 可延拓到 X 的光滑射影紧化。于是，Lefschetz 超平面定理将问题归结为光滑射影曲线的情形。

□

断言 2.12（[And04, Th´eor`eme 0.6.1]）。猜想 2.8 等价于其特例：当 X 是定义在某个数域上的光滑射影曲线时。

换言之，设 $f\colon X \to S$ 是定义在某个数域上的光滑拟射影簇之间的光滑态射，设 (E,∇) 是 X 上的相对平坦联络。若对所有闭点 $s \in S$，限制 $(E,\nabla)|_{X_s}$ 到纤维 X_s 的单值化有限，也就是说，存在有限 étale 覆盖 $h_s\colon Y_s \to X_s$，使得 $h_s^*(E,\nabla)|_{X_s}$ 平凡，那么 (E,∇) 限制到几何泛纤维 $X_{\bar\eta}$ 上的单值化也有限。我们指出，这些论证可以加以调整，以证明该定理的特征 $p > 0$ 版本（[EL13，定理 5.1]）。

应用贝利定理 [Bel80], ，我们提出以下断言。

断言 2.13. 猜想 2.8 等价于其特例：当 X is $\mathbb{P}^1\backslash\{0,1,\infty\}$ 时，即猜想 2.7 在数域上定义。

2.3. 回到克罗内克解析判别准则：高斯-马宁联络。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$上的准射影光滑簇， $g\colon Y \to X$ 是一个光滑射影态射， $\mathbb{L}$ 是某个 i对应的局部系统 $R^i g_*\mathbb{C}$ 。那么

定理 2.14（[Kat72]）。猜想 2.8 对 $\mathbb{L}$ 成立。

证明。证明分为两部分。首先，关于（$\star$）$_{\mathfrak{p}}$ 全体解的假设意味着 F-滤过 $R^i g_*\Omega^{\geq j}_{Y/X} \hookrightarrow R^i g_*\Omega^\bullet_{Y/X}$ 由高斯-马宁联络保持不变。接着，这意味着单值化是纤维的整极化霍奇结构的自同构；该结构是整群 $\mathrm{Aut}(H^i(Y_x,\mathbb{Z}))$ 与 $\mathrm{Aut}(H^i(Y_x,\mathbb{R}),(2\pi\sqrt{-1})^i(x,Cy))$ 在 $\mathrm{Aut}(H^i(Y_x,\mathbb{R}))$ 中的交，其中 C 是韦伊算子。克罗内克解析判别准则的一种变体表明，这个交是有限的。

因此，联络使 F-滤过稳定是关键所在。我们给出的表示与上述文献中的略有不同。为此，在我们的模型 X_S 上，取一个特征 p 较大的闭点 s，使相干层 $R^{i-j}g_*\Omega^j_{Y/X}$ 保持局部自由，并且映射

$$(*)\quad R^i g_*\Omega^{\geq j}_{Y/X} \to R^i g_*\Omega^\bullet_{Y/X},$$

根据霍奇理论，该映射是单射；基变换后仍为单射。我们要证明，存在一组完整解这一条件意味着联络使 F-滤过稳定，也就是说， $\mathcal{O}_X$-线性 Kodaira-Spencer 类

$$KS : R^{i-j}g_*\Omega^j_{Y/X} \xrightarrow{\nabla} \Omega^1_X \otimes R^{i+1-j}g_*(\Omega^{j-1}_{Y/X} \to \Omega^j_{Y/X}) \to \Omega^1_X \otimes R^{i+1-j}g_*\Omega^{j-1}_{Y/X}$$

消失。于是，关键图表为

$$\begin{array}{ccccc} Y_s & \xrightarrow{F} & Y_s' & \xrightarrow{\sigma} & Y_s \\ & \searrow^{g} & \downarrow{\scriptstyle g'} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & & X_s & \xrightarrow[F_{X_s}]{} & X_s \end{array}$$

其中 $F\colon Y_s \to Y_s'$ 是相对于 X_s的 Y_s 上的弗罗贝尼乌斯，也就是说，在局部函数$\mathcal{O}(Y_s) = \mathcal{O}(X_s)[y_1,\dots,y_n]/I$ 上，它将 $f(y_1,\dots,y_n)$ 的类映射为

$f(y_1^p, \ldots, y_n^p)$ 的类，且 F_{X_s}： $X_s \to X_s$ 是绝对弗罗贝尼乌斯，因此它将 $f \in \mathcal{O}(X_s)$ 映射为 $f^p \in \mathcal{O}(X_s)$。（$*$）的单射性意味着

$$(**) \quad R^i g_* \tau_{\leq j} \Omega^\bullet_{Y_s/X_s} = R^i g'_* \tau_{\leq j} F_* \Omega^\bullet_{Y_s/X_s} \to R^i g'_* F_* \Omega^\bullet_{Y_s/X_s}$$

也是单射。由 Cartier 同构以及关于 F_{X_s}的基变换，成立

$$R^{i-j} g_* \mathcal{H}^j = R^{i-j} g'_* \Omega^j_{Y'_s/X_s} = F^*_{X_s} R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s},$$

其中 $\mathcal{H}^j$ 是 $F_*\Omega^\bullet_{Y_s/X_s}$的第 j个上同调层。计算 g 的纤维的 de Rham 上同调 $H^i_{dR}(Y_x)$的维数，可得以下联络序列

$$(\epsilon) \quad 0 \to F^*_{X_s} R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s} \to R^i g_* (\tau_{\leq j+1} F_* \Omega^\bullet_{Y_s/X_s} / \tau_{\leq j-1} F_* \Omega^\bullet_{Y_s/X_s}) \to F^*_{X_s} R^{i-j-1} g_* \Omega^{j+1}_{Y_s/X_s} \to 0$$

是正合的。它定义了一个德拉姆扩张

$$\epsilon \in H^1_{dR}(X_s, F^*_{X_s} R^{i-j-1} g_* (\Omega^{j+1}_{Y_s/X_s})^\vee \otimes F^*_{X_s} R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s}).$$

现在我们使用这一假设，它等价于说，联络的正合列（ϵ）等于某个正合列的$F^*_{X_s}$

$$0 \to R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s} \to V \to R^{i-j-1} g_* \Omega^{j+1}_{Y_s/X_s} \to 0$$

在 X_s上的向量丛，并赋予典范联络。特别地，这个序列在 X_s的一个稠密仿射开集上分裂。因此， ϵ 在一个稠密仿射开集上也消失。另一方面，上同调

$$H^1_{dR}(X_s, F^*_{X_s} R^{i-j-1} g_* (\Omega^{j+1}_{Y_s/X_s})^\vee \otimes F^*_{X_s} R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s}) = H^1_{dR}(X_s, (R^{i-j-1} g_* (\Omega^{j+1}_{Y_s/X_s})^\vee \otimes R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s}) \otimes F_{X_s *}(\Omega^\bullet_{X_s}))$$

再次通过 Cartier 同构映射到

$$H^0(X_s, (R^{i-j-1} g_* (\Omega^{j+1}_{Y_s/X_s})^\vee \otimes R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s}) \otimes \Omega^1_{X_s}).$$

Katz [Kat72, 定理 3.2]（采用略有不同的表示）计算得出， ϵ的像视为一个 $\mathcal{O}_{X_s}$-线性映射时

$$R^{i-j-1} g_* (\Omega^{j+1}_{Y_s/X_s}) \to \Omega^1_{X_s} \otimes R^{i-j} g_* \Omega^j_{Y_s/X_s}$$

恰好是 KS_s g的 Kodaira–Spencer 映射。因此， KS_s 在X_s的一个稠密开集上为零。由于 KS_s 是向量丛之间的 $\mathcal{O}_{X_s}$-线性态射，我们得出它在整个 X_s上为零。因此，它限制到 S的一个稠密开集中的所有闭点上时均为零。由此可知它为零。证明完毕。

□

Chudnovsky-Chudnovsky [Chu85], Bost [Bos01] 和 Andr´e [And04]的研究处理了可解情形。此外，还有一些类似 [EK18] 的论述，其条件比仅要求在特征 p 下生成微分方程更强。除此之外，Ananth Shankar 的工作 [Sha18] 提出了另一种思路：他证明了简单回路上的单值化有限，这使他与 Patel-Whang 得以在 [PSW21]中完成秩 2 情形的证明。除此之外，这一研究思路基本没有取得重大进展。

不过，还有另外两点。上面的证明利用了 τ- 滤过（也称为共轭滤过）的稳定性，这启发了如下推广：

猜想 2.15（格罗滕迪克的广义 p-曲率猜想， [和89],第五章附录）。为了刻画几何局部系统 $\mathbb{L}$，我们要求其底层带联络的向量丛 (E,∇) 具有如下性质：模 p时，对所有足够大的 p，它都带有一个滤过，使得在 X 模 p 的一个稠密开集上，伴随分次由平坦截面张成（也就是说，其 p-曲率是幂零的）。

换句话说，Katz 证明了：如果对所有充分大的 p，模 p 的 (E,∇) 带有滤过，使得其伴随分次由平坦截面张成；此外，(E,∇) 来自几何，并且这个滤过是平凡的，那么 (E,∇) 就具有有限单值化。

还有一个类似情形的例子。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇，并假设 $H^0(X, \mathrm{Sym}^\bullet\Omega^1_X) = 0$。我曾猜想，届时所有局部系统都具有有限单值化。这已由[BKT13] 利用解析方法证明，是 Zuo 定理 [Zuo00] 的一个推论；该定理指出，若整霍奇结构变分所对应的周期映射的导数是单射，则 Ω^1_X 是大线丛。在 [BKT13] 中可以找到这类簇的大量例子。

从代数角度看，消失 $H^0(X, \mathrm{Sym}^\bullet\Omega^1_X) = 0$ 意味着底层的带联络的丛 (E,∇) 具有如下性质：模 p 对所有充分大的 p，它们都存在一个滤过，使得伴随分次由平坦截面张成。因此，根据广义格罗滕迪克 p-曲率猜想，它们应当是几何的。但这里与 Katz 的情形不同，我们事先并不知道其几何性；几何性最终是作者在同一文献中证明的那个更困难的有限性结果的推论。

3. Lecture 3: Malčev-Grothendieck's Theorem, its Variants in Characteristic $p > 0$, Gieseker's Conjecture, de Jong'sConjecture, and the One to Come

Abstract. 我们回顾马尔采夫定理：有限生成群的有限群完备化平凡，意味着其代数完备化也平凡。我们还回顾格罗滕迪克版本，该版本借助黎曼–希尔伯特对应，使用 $\mathcal{D}$-模来表述；接着介绍吉塞克猜想——它在特征 $p > 0$下的对应猜想、该猜想的解答及其推广。

ˆ 3.1. 在 $\mathbb{C}$上。设 Γ 是一个有限生成群， Γ 是其有限群完备化，Γ^{alg} 是其原代数完备化。因此 $\hat{\Gamma} = \varprojlim_{\{G \to Q\}} Q$ ，其中 Q 遍历所有有限商群； $\Gamma^{\mathrm{alg}} = \varprojlim_{\{G \to Q\}} Q$ ，其中 Q 遍历 $GL_r(\mathbb{C})$的所有代数子群（对某个 $r \in \mathbb{N}_{>0}$而言）。

定理 3.1（马尔采夫 [Mal40]）。$\hat{\Gamma} = \{1\} \Longrightarrow \Gamma^{\mathrm{alg}} = \{1\}$。

证明。事实上，若 $\rho : \Gamma \to GL_r(\mathbb{C})$是一个表示，则 $Q = \mathrm{Im}(\rho)$包含于$GL_r(A)$中，其中 A 是一个 $\mathbb{Z}$上的有限型环。设 $\mathfrak{m} \subset A$ 是一个极大理想，ˆ于是剩余域 $A/\mathfrak{m}$为有限域，并定义 $\iota : A \hookrightarrow \hat{A} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A/\mathfrak{m}^n$ 为 A 在 $\mathfrak{m}$处的完备化。那么， ρ 非平凡当且仅当 $\iota \circ \rho : \Gamma \to GL_r(\hat{A})$非平凡。由于 $\iota \circ \rho$ 经由 $\hat{\rho} : \Gamma \to GL_r(\hat{A})$分解，因此 $\Gamma = \{1\} \Longrightarrow \rho$ 是平凡的，即其像等于单位矩阵 $\mathbb{I}_r \in GL_r(A)$。

□

注记 3.2. 如果 Γ 不是有限生成的，那么该定理的推论可能是错误的。例如，令 $\Gamma = \mathbb{Q}$，则 $\Gamma = \{1\}$，但例如，表示$\chi : \mathbb{Q} \to GL_1(\mathbb{C})$ $n \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}an)$（其中 $a \in \mathbb{C}$ ）或 $\rho : \mathbb{Q} \to GL_2(\mathbb{C})$ $n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 都是非平凡的。

现在假设 X 是定义在 $\mathbb{C}$上的光滑拟射影簇。那么，黎曼–希尔伯特对应 [Del70] 给出了复局部系统与 X 上的代数可积联络之间的等价，其中这些联络在无穷远处是正则奇异的（[Del70]）；等价地，它们是 $\mathcal{O}_X$-相干正则奇异 $\mathcal{D}_X$-模。另一方面，以某个复点 x 为基点的拓扑基本群 $\pi_1(X(\mathbb{C}), x)$是有限生成的，甚至是有限呈示的，不过在此处的讨论中并未用到这一点；根据黎曼存在定理，其有限群完备化就是格罗滕迪克的 ´étale 基本群 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$。因此，马尔采夫定理可以在复代数几何的语境下改述为：

定理 3.3（格罗滕迪克 [Gro70]）。 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}}) = \{1\} \Longrightarrow$ 在 X 上不存在非平凡的 $\mathcal{O}_X$-相干正则奇异 $\mathcal{D}_X$-模。

3.2. 在特征为 $p > 0$ 的代数闭域上。我不知道有什么直接证明格罗滕迪克定理的方法可以不经过黎曼–希尔伯特对应。Gieseker [Gie75，第 8] 页猜想，在特征为 $p > 0$ 的代数闭域上也成立 “ 同样的 ” 定理。

定理 3.4（[EM10], 定理 1.1）。设 X 是定义在特征为 $p > 0$的代数闭域 k 上的光滑射影簇。若 $\pi_1(X) = \{1\}$，则不存在非平凡的 $\mathcal{O}_X$-相干 $\mathcal{D}_X$-模。

证明。依照 Katz [Gie75, 定理 1.3], ，我们首先将 $\mathcal{O}_X$-相干 $\mathcal{D}_X$-模与 Frobenius 除层对应起来。接着，策略是从一个非平凡的 Frobenius 除层 $E = E_0 = \text{Frob}^* E_1, E_1 = \text{Frob}^* E_2, \dots$（秩为 r）出发，找到一个秩为 r 的非平凡向量丛 M，使得对于某个 $n \in \mathbb{N}_{>0}$，有 $(\text{Frob}^n)^*(M) \cong M$。事实上，其底层的 $GL_r(\mathbb{F}_{p^n})$-Lang 扭子在 X上是有限 étale 的，因此根据假设必为平凡，所以 M 也必为平凡，矛盾。为此，我们注意到，Frobenius 的可除性迫使 E 的各类陈类都平凡；若对象 $(E_0, E_1, E_2, \dots)$ 本身是简单的，则当 i充分大时， E_i 本身也稳定。因此，我们考虑带有消失陈类的秩为 r 的向量丛模空间中，当 n 充分大时 E_n 的轨迹的扎里斯基闭包；Frobenius 在其上是一个有理支配映射。我们¯随后可以将这一情形特化到 $\mathbb{F}_p$ 上的 X，并应用 Hrushovski 定理，得到存在（许多）预周期点。根据上述讨论，这些点给出 $X_{\bar{\mathbb{F}}_p}$的非平凡 Lang 扭子，因此由格罗滕迪克专化同态，也得到 X的非平凡有限 étale 覆盖，矛盾。□

注记 3.5. 1) Hrushovski 的证明 [Hru04], 依赖模型论；Varshavski 后来已在算术几何框架内给出了纯粹的证明，见 [Var18]。

2) 证明的核心是找到这样一个 M，使得 $(\text{Frob}^n)^*(M) \cong M$ 对某个$n \in \mathbb{N}_{>0}$成立。不幸的是，这似乎无法从 Katz 的特征 $p > 0$ 下的“黎曼–希尔伯特”定理，或其（迄今为止）最一般的推广[BL17]中推出。因此，按目前的理解，我们无法将其与复数域上的证明相提并论。

$\mathcal{O}_X$-相干 $\mathcal{D}_X$-模的范畴等价于无穷小位点上的晶体范畴，后者由格罗滕迪克所发展。由此，J. de Jong 提出了对吉塞克猜想（定理 3.4）的以下重大强化：

猜想 3.6（de Jong，2010 年，见 [ES18]）。设 X 是定义在特征为 $p > 0$的代数闭域 k 上的光滑射影簇。如果 $\pi_1(X) = \{1\}$，则不存在非平凡的等晶体。

关于该猜想已有（非常）初步的结果，尤其可参见 [ES18，定理 1.2]。我们理解这一问题的主要障碍在于前缀“iso”。我所知的所有方法都从等晶体所关联晶体的模 p 约化开始，并尝试

- 再次运用类似于定理 3.4 证明中的论证，以证明 M的存在，并作一些加强（见 [ES18，命题 3.2]）；因此归根结底，这些方法依赖于 Hrushovski 定理；此外，这也要求模 p 约化后的晶体的陈类消失，见 [ES19], 。这些结果已由 Bhatt-Lurie 推广（尚未发表）；

- 因此，要平凡化晶体本身（例如参见 [ES18，推论 3.8]），而不仅仅是等晶体。

在秩 1 的情形下，这无关紧要（见 [ES18，引理 2.12]），但在高秩情形下则不然。人们希望能在 scratch 上找到一个弗罗贝尼乌斯不变等晶体，而不必经过

随机选取的底层晶体。然而，Hrushovski 定理不再能提供帮助。

3.3. 在 p进域上。我们希望能为棱柱“等”晶体得到 de Jong 猜想的一个版本。这里的一个问题是，棱柱晶体的概念已有文献记载（[BS21]），但棱柱等晶体的概念却尚未如此。一个问题是，要使问题具有意义，必须对什么取逆。表述还应与该 p 进域的复嵌入以及最初在 $\mathbb{C}$上的格罗滕迪克表述相容。

4. Lecture 4: Interlude on some Similarity between the Fundamental Groups in Characteristic 0 and $p > 0$

Abstract. 我们介绍关于特征$p > 0$下光滑（准）射影簇的（温和）基本群结构的两个定理。第一个定理 [ESS22] 表明，在有限表示方面，它与复数情形相似，而其证明最终依赖 Lubotzky 的一个定理 [Lub01], ；第二个定理 [ESS22b]为特征 $p > 0$ 下的光滑射影簇提升到特征零提供了一个新的障碍，其证明最终依赖格罗滕迪克专化同态。尤其有趣的是，第二个定理表明，我们无法通过提升论证来解释第一个定理中的有限表示。在第4讲中，我们讨论有限表示；在第5讲中，我们讨论这个障碍。

4.1. Lubotzky 定理。

定义 4.1（导论第 [Lub01], p.1 节）。有限生成群 π 称为

1）有限生成的，若存在一个由有限多个生成元生成的自由有限群 F 以及一个连续满射 $F \xrightarrow{\epsilon} \pi$；2）有限呈示的，若它是有限生成的，且 Ker($\epsilon$) 是 F 的闭正规子群，并且有限生成。

具体而言，在 1）中， F中存在有限多个元素 f_i、 $i = 1$、.....、 N，使得抽象子群 $\langle f_1$、.....、 $f_N\rangle \subset F$能映满有限结构 π 中的任意有限商群 $\pi \to G$。在 2）中， F 中存在有限多个元素 r_j、 $j = 1$、.....、 M，使得 Ker($F \to \pi$) 由 $\langle fr_jf^{-1}$、 $j = 1$、.....、 M、 $f \in F\rangle$ 张成。有限生成和有限表示的定义良定，不依赖于所选的表示。对于有限生成性，这一点是经典结果；对于有限表示性，一个简洁的方法是直接应用以下定理。

定理4.2（Lubotzky [Lub01], 定理0.3）。 π 是有限呈示的，当且仅当它是有限生成的，并且存在一个常数 $C \in \mathbb{R}_{>0}$，使得对于任意 $r \in \mathbb{N}_{>0}$、任意素数 ℓ以及任意连续线性表示$\rho : \pi \to GL_r(\mathbb{F}_\ell)$，均有

$$\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^2(\pi, \rho) \le C \cdot r.$$

例4.3。标准例子是 π 为某个抽象有限呈示群的有限群完备化，这里采用经典意义，即使用不带拓扑的相同定义。

4.2. 温和基本群。

设 X 为正则连通概形。对于 X的正规紧化 X 中的一个¯闭点 x，我们将 $k(X)_x$ 记为 X 在 x处的完备局部环的分式域¯。对于一个连通有限 ´étale 覆盖_ _$\pi : Y \to X$，我们将 Y记为 X 在 Y的函数域中的正规化。¯ ¯任意闭点 $x \in X$，对其上方的任意闭点 $y \in Y$，都定义一个有限域扩张 $k(X)_x \hookrightarrow k(Y)_y$。

定义 4.4（[KS10], 导论与定理 1.1）。1）如果 X 维数为 1，则有限 ´étale 覆盖 $\pi : Y \to X$ 是温和的，当且仅当所有域扩张$k(X)_x \hookrightarrow k(Y)_y$ 都是温和的，也就是说，分歧指数与 p 互素，且剩余域扩张 $k(x) \hookrightarrow k(y)$ 是可分的。

2）在更高维的情形下， π 是温和的，当且仅当对于任意从正规一维概形 $C \to X$ 出发的态射，诱导态射 $C \times_X Y \to C$ 在其所有不可约分支上都是温和的。

4.3. 格罗滕迪克专化同态， [SGA1], Expos´e X，Ex- pos´e XIII。设 $X_S \to S$ 是一个光滑态射，其中 S 是任意概形。我们考察两个域值点 Spec(F) $\to S$ 和 Spec(k) $\xrightarrow{s} S$ ，它们满足 Spec(k) 位于 Spec(F) 的扎里斯基闭包中。因此存在一个不可约子-$\widehat{\ }$概形 $Z \subset S$ ，使得 $s \in Z$ 是一个点，并且 $\mathcal{O}(Z) \to F$ 是单射。令 Z_s 为 Z 在 s处的完备化，并令 $F \hookrightarrow \hat{}F_s$ 为一个域扩张，使得$\hat{}$ F_s 包含 $\mathcal{O}(\widehat{Z_s})$。

如果 X 不是完备的，我们还假设它存在一个紧化 $X_S \hookrightarrow \bar{X}_S$ ，使得 $\bar{X}_S \to S$ 光滑且完备，并且 $\bar{X}_S \setminus X_S \to S$ 是一个具有光滑分支的相对正规交叉除子。我们称之为（在S之上的）良好紧化。因此我们有一个图表

$$\mathrm{Spec}(\hat{F}_s) \longrightarrow \widehat{Z_s} \longleftarrow s$$

以及其上的概形

$$\begin{array}{ccccc} X_{\hat{F}_s} & \longrightarrow & X_{\widehat{Z_s}} & \longleftarrow & X_s \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\hat{F}_s) & \longrightarrow & \widehat{Z_s} & \longleftarrow & s \end{array}$$

$\hat{}\hat{}$ ¯我们将 $\overline{F}_s \supset F_s$ 和 $k \supset k$ 称为代数闭包，后者定义了 $\bar{s} \to s$。然后，选取一个 S-点 $x_S : S \to X_S$后，便定义了 [SGA1，第 ´卷 XIII 2.10]中的特化同态

$$sp_{\hat{F}_s,s} : \pi_1^t(X_{\hat{F}_s}, x_{\hat{F}_s}) \to \pi_1^t(X_s, x_s)$$

它是函子性同态

$$\pi_1^t(X_{\hat{F}_s}, x_{\hat{F}_s}) \to \pi_1^t(X_{\widehat{Z}_s}, x_s)$$

与基变换同构的逆的复合

$$\pi_1^t(X_s) \xrightarrow{\cong} \pi_1^t(X_{\widehat{Z}_s}).$$

最后有函子性同态

$$\pi_1^t(X_{\hat{F}_s}, x_{\hat{F}_s}) \to \pi_1^t(X_F, x_F)$$

它在几何基本群上的限制是一个同构

$$\pi_1^t(X_{\overline{F}_s}, x_{\overline{F}_s}) \xrightarrow{\cong} \pi_1^t(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}}).$$

综合起来，这就定义了特化同态

$$sp_{F,s} : \pi_1^t(X_F, x_F) \to \pi_1^t(X_s, x_s)$$

该同态限制在几何基本群上时，定义了特化同态

$$sp_{\bar{F},\bar{s}} : \pi_1^t(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}}) \to \pi_1^t(X_{\bar{s}}, x_{\bar{s}}).$$

特化同态 $sp_{F,s}$ 和 $sp_{\bar{F},\bar{s}}$ 是满射，而 $sp_{\bar{F},\bar{s}}$ 在 pro-p'-完备化上诱导一个同构 [SGA1，讲义 XIII 2.10，推论 2.12]。

4.4. 有限生成。我们在以下情形应用格罗滕迪克专化同态。设 X 是在一个特征为 0的域上定义的光滑射影对象，并带有一个良好紧化 $X \hookrightarrow X$；设 $X_S \hookrightarrow X_S$ 是如第 4.3 节所述在 S 上的良好紧化。选取一个 S-点 $x_S : S \to X_S$ 后，我们有特化同态

$$sp_{F,s} : \pi_1(X_F, x_F) \to \pi_1^t(X_s, x_s)$$

其中 F是 $X_{k(S)}$ 的一个几何点，它特化到 S上的一个 $\mathbb{F}_p$-点 s。（注意，与第 4.3 节相比，我们略微改变了记号，因为这里只考虑几何基本群。）取 $F = \mathbb{C}$，则根据黎曼存在定理 [（SGA1，第 XII 讲，定理 5.1] ），$\pi_1(X_F, x_F)$是$\pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$的有限群完备化；后者本身是一个抽象有限呈示群，见[Esn17，定理 1.1]。因此，$\pi_1^t(X_s, x_s)$是有限生成的。

定理 4.5（[ESS22], 定理 1.1）。设 X 是定义在特征为 $p > 0$的代数闭域 k 上的光滑拟射影簇，并具有良好紧化 $X \hookrightarrow \bar{X}$。那么，$\pi_1^t(X)$（以任意几何点 x为基点）是有限呈示的。

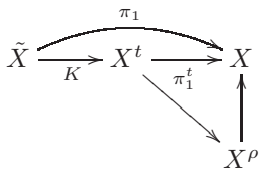
注 4.6. 1）温和性假设是必要的。如果 X 不是完备的，那么“依照规则” $\pi_1(X)$不是有限生成的。例如，对于每个自然数 s，并选取一组与 p 互素且两两不同的 s 个自然数 m_i，仿射直线 $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[z])$ 上的 Artin-Schreier 覆盖 $y^p - y = z^{m_i}$ 给出一个满射$\pi_1(\mathbb{A}^1_k) \twoheadrightarrow \oplus_{i=1}^s \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$。

2）论证中需要良好紧化假设，但它不应是必要的，因为结果并不依赖于良好紧化。此外，我们（或许？）相信奇点消解是成立的。我们将在证明中说明所需的奇点消解替代方案，这种方案或许可以称为“数值消解”。H¨ubner 和 Temkin 宣布已解决这一问题。

4.5. 定理 4.5 的证明，$\ell \neq p$ 部分。我们可以把证明的这一部分称为“SGA 型证明”。所有要素都包含在其中。我们必须证明表示 r 中的 $H^2(\pi_1^t, \rho)$ 具有线性增长

$$\rho : \pi_1^t \to GL_r(\mathbb{F}_\ell)$$

（它必然是连续的）。这里我们将记号 $\pi_1^t(X, x)$ 简化为 π_1^t，将 $\pi_1(X, x)$ 简化为 π_1。我们用 $X^\rho \to X$ 表示由 $\mathrm{Ker}(\rho)$ 定义的覆盖；根据假设，它分解了万有温和覆盖 $X^t \to X$。我们将以 x 为基点的万有覆盖拆分为



我们用 M 表示 ρ-表示的底层向量空间 $\oplus_1^r \mathbb{F}_\ell$。Hochschild-Serre谱序列给出正合列

$$(H^1(K, \mathbb{F}_\ell) \otimes M)^{\pi_1^t} \to H^2(\pi_1^t, M) \to H^2(\pi_1, M).$$

根据定义， K 没有 $\mathbb{F}_\ell$-阿贝尔商群，因此

$$(\star) \quad 0 = H^1(K, \mathbb{F}_\ell) = H^1(K^{ab}, \mathbb{F}_\ell),$$

由此我们推出 $H^2(\pi_1^t, M) \hookrightarrow H^1(\pi_1, M)$。另一方面，Hochshild-Serre 谱序列导出正合列

$$(H^1(\tilde{X}, \mathbb{F}_\ell) \otimes M)^{\pi_1} \to H^2(\pi_1, M) \to H^2(X, M)$$

且 $H^1(\tilde{X}, \mathbb{F}_\ell) = 0$。因此， $H^2(\pi_1, M) \hookrightarrow H^1(X, M)$ 也是单射。综合起来，这表明复合线性映射

$$H^2(\pi_1^t, M) \hookrightarrow H^2(\pi_1, M) \hookrightarrow H^2(X, M)$$

是单射。我们证明较大的先验群 $H^2(X, M)$ 上存在线性界。

根据 Lefschetz 定理 [EK16, 定理 1.1 b)]，我们可以假设 X 是一个曲面。利用一条处于良好位置的“丰沛”曲线 $C \to X$，使得 C 的紧化与 X 的边界构成严格正规交叉除子，且 $X \setminus C$ 是仿射的，由纯性可得正合列

$$H^0(C, M) \to H^2(X, M) \to H^2(X \setminus C, M).$$

由于 $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^0(C, M) \leq r$，因此我们可以假设 X 是仿射的。另一方面，根据 Deligne 定理 [Ill81, Corollaire 2.7], ，温和性意味着

$$\chi(X, \mathbb{M}) = r\chi(X, \mathbb{F}_\ell)$$

并且我们总有

$$\chi(X, \mathbb{F}_\ell) = \chi(X, \mathbb{Q}_\ell).$$

由 Deligne 纯性 [Del80，定理 3.3.1] 可知，后一个群与 $\ell \neq p$ 无关。

这将问题归结为线性地估计 $H^1(X, M)$ 的增长。由正合列

$$0 \to H^1(\pi_1^t, M) \to H^1(\pi, M) \to (H^1(K, \mathbb{F}_\ell) \otimes M)^{\pi_1^t},$$

再次利用 $(\star)$，我们看到 $H^1(X, M)$ 等于 $H^1(\pi_1, M)$，也等于$H^1(\pi_1^t, M)$。由于 1-余循环 $\varphi\colon \pi_1^t \to M$ 满足 $\varphi(ab) = a\varphi(b) + \varphi(a)$，因此

$$\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(\pi_1^t, M) \leq \delta r$$

其中 δ 是 π_1^t 的拓扑生成元个数。至此，这一计算就完成了。事实上，即便没有良好模型，仍可借助 de Jong-Gabber-Temkin 的 alterations ` 完成计算。

¯4.6. 定理 4.5 的证明， p 部分。记 $j\colon X \hookrightarrow X$ 为良好紧化。记 M 所关联的局部系统为 $\underline{M}$。关键在于将 $H^2(\pi_1^t, M)$ 与一个上同调群联系起来，该群来自 X 上某个扩张的上同调¯，其中局部系统 $\underline{M}$ 定义在 X 上。与抽象表示相比，使用局部系统能带来更大的灵活性，因为我们可以利用这些局部系统的各种可构造扩张的上同调，而不只是群上同调。

定理 4.7. 存在一个单射的 $\mathbb{F}_p$-线性映射

$$H^2(\pi_1^t(X), M) \to H^2(\bar{X}, j_*\underline{M}).$$

证明. 首先，让我们明确需要证明的内容：它成立

$$H^2(\pi_1^t, M) = \varinjlim_{U\subset\pi^t \text{open normal}} H^2(G_U, M^U),\ G_U = \pi_1^t/U.$$

对于每个这样的 U，我们定义纤维积方块

$$\begin{array}{ccc} X_U & \xrightarrow{j_U} & \bar{X}_U \\ \downarrow{\scriptstyle h_U} & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}_U} \\ X & \xrightarrow{j} & \bar{X} \end{array}$$

其中，h_U 是由 G_U 定义的温和伽罗瓦覆盖，而 X_U 是 X在 X_U的函数域 $k(X_U)$中的正规化。由于 j 是正规交叉紧化，h_U 在 KS10 第 5], 节的意义下是数值温和的，参见 [KS10。因此，由 [Gro57，推论，第204]页，可得

$$R^{>0}\bar{h}_{U*}^{G_U} j_{U*}\underline{M}^U = 0,$$
$$H^n(\bar{X}_U, G_U, j_{U*}\underline{M}^U) = H^n(\bar{X}, j_*\underline{M}).$$

我们由此得出，收敛到等变上同调的谱序列

$$E_2^{ab} = H^a(G_U, H^b(\bar{X}_U, j_{U*}\underline{M}^U)) \Rightarrow H^{a+b}(\bar{X}_U, G_U, j_{U*}\underline{M}^U),$$

对于每个 $U \subset$Ker(ρ)，可得一个短正合列

$$H^0(G_U, H^1(\bar{X}_U, j_{U*}\underline{M}^U)) \to H^2(G_U, H^0(\bar{X}_U, j_{U*}\underline{M}^U)) \to H^2(\bar{X}, j_*\underline{M})$$

其中

$$H^1(\bar{X}_U, j_{U*}\underline{M}^U)^{G_U} = (H^1(\bar{X}_U, \mathbb{F}_p) \otimes_{\mathbb{F}_p} M)^{G_U}.$$

另一方面，$H^1(\bar{X}_U, \mathbb{F}_p) \to H^1(X_U, \mathbb{F}_p)$ 是单射，并且再次由（$\star$）可知 $\lim_U H^1(\bar{X}_U, \mathbb{F}_p) = 0$。

□

注4.8. 我们看到，关键在于良好的正规交紧化意味着塔 h_U 是数值温和的。于是问题就变成：如何从一个任意的正规紧化出发，构造一个在温和塔中数值温和的正规紧化。

到达那里之后，我们可以再次通过 Lefschetz 型论证（[EK16, 定理1.1 b)]）缩减到曲面，并在这些曲面上利用 Artin-Schreier 正合列

$$0 \to j_*\underline{M} \to \mathcal{M} \xrightarrow{1-F} \mathcal{M} \to 0$$

其中 $\mathcal{M}$ 是 X 上的一个局部自由层，其在 X 上的限制等于 $\underline{M} \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_X$；再结合经典事实，即该正合列在上同调上仍然正合，我们便归结为对 $\dim_k H^2(\bar{X}, \mathcal{M})$ 作关于 r的线性上界估计，这与 $\dim_k H^0(\bar{X}, \mathcal{M}^\vee \otimes \omega_{\bar{X}})$ 相同。我们又回到了相干层的上同调。

现在要点如下。若 $h: Y \to X$ 是由 $\underline{M}$的单值表示定义的伽罗瓦覆盖，其伽罗瓦群为 G，那么 $h^*\underline{M}$ 是平凡的。令$\bar{h}$: $\bar{Y} \to \bar{X}$ 为其如上所述的紧化，则 $\mathcal{M} = (\bar{h}_*\mathcal{L})^G$，因此 $\bar{h}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$:$=H^0(Y, h^*\underline{M}) \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathcal{O}_{\bar{Y}}$；并且根据 Abhyankar 引理，温和性意味着 $\mathcal{L} \otimes h^*\mathcal{O}_{\bar{X}}(-D) \subset h^*\mathcal{M}$ 对 $D = (X \setminus X)_{\text{red}}$ 成立。这两条信息合在一起便得出

$$\mathcal{L} \otimes \bar{h}^*\mathcal{O}_{\bar{X}}(-D) \subset \bar{h}^*\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$$

这是一个有界性结论。这使我们能够得出结论：限制映射

$$H^0(\bar{X}, \mathcal{M}^\vee \otimes \omega_{\bar{X}}) \to H^0(C \cap C', \mathcal{M}^\vee \otimes \omega_{\bar{X}})$$

对于线性系 $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \otimes \omega_{\bar{X}}(D)$ 中的 C, C' 一般曲线是单射的，其中 $\mathcal{A}$ 选为非常 ample，并且我们也要求 $\mathcal{H}'$ 非常 ample。注意，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{H}'$ 仅依赖于 X 和 r。另一方面，$C \cap C'$ 是 $c_2(\mathcal{H}')$ 个点的并，因此不等式右侧等于 $c_1(\mathcal{H}')^2 \cdot r$。证明完毕。

5. Lecture 5: Interlude on some Difference between the Fundamental Groups in Characteristic 0 and $p > 0$

Abstract. 参见第 4 讲的摘要：我们将在此展示一种障碍的存在性，它阻止将定义在特征为 $p > 0$ 的代数闭域 k 上的光滑（拟）射影簇提升到特征零；这一障碍完全取决于其（温和）基本群的形态。

5.1. Serre 构造。Serre [Ser61] 首次研究了这个问题。我们沿用第 4.2 节的记号，但更具体地假设 k 是特征为 $p > 0$, $X_k =$的代数闭域： X 是光滑射影簇，并由以下方式得到。存在一个有限伽罗瓦 ´étale 覆盖 $Y \to X$，使得 $Y \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ 是维数为 ≥ 3 的光滑完全交。因此特别地， $\pi_1(Y) = \{1\}$。此外，伽罗瓦群 G 是线性作用 $\rho : G \to GL_{n+1}(k)$ 的限制。接着， [Ser61, 引理] 表明，若 X 可提升至 X_R ，其中 $S = \mathrm{Spec}(R)$，且 R 是一个诺特局部完全环，那么 ρ 可提升至$\rho_R : G \to PGL_{n+1}(R)$；若 G 的 p-Sylow 子群的基数很大，这是不可能的。

5.2. 各种障碍。我们提及自 Serre 的工作以来已解决的三个主要障碍方向。显然，这份清单并不详尽。

Deligne-Illusie 在 [DI87] 中证明， X 可提升到 $W_2(k)$ 的特征 $p > 0$完美光滑完备簇 k 具有这样的性质：其霍奇到德拉姆谱序列在 E_1 处退化。这为无法提升到 $W_2(k)$ 提供了一种障碍，因为此前已知存在谱序列不退化的例子 [Ray78]。这成为此后大量研究进展的基础。

Achinger-Zdanowicz 在 [AZ17] 中构造了特定的簇，它们无法提升到特征零：其方法是在一个刚性簇中吹起弗罗贝尼乌斯态射的图像；该簇被假定无法提升，并且没有 F滤过的角点部分。值得注意的是，他们的例子具有泰特型上同调。

van Dobben de Bruyn 证明，若 $X \subset C^3$ 是一个光滑丰沛除子，其中 C^- 是定义在 $\mathbb{F}_p$ 上、亏格为 ≥ 2 的超奇异曲线，那么 X 无法提升到特征零；任何被其有理支配的光滑完备簇也无法提升到特征零 X， [vDdB21，定理. 1]。主要性质 [vDdB21，定理. 2] 是：若 $X_S \to S$ 可提升X，且 X 存在一个到亏格为 ≥ 2 的光滑射影曲线 C 的态射，那么经过可能的基变换，即对 C 作不可分覆盖之后，该态射可提升到特征零。

5.3. 基于基本群结构的提升到特征零的抽象障碍。Deligne-Illusie 指出的霍奇-德拉姆障碍具有理论性质，也就是说，它不依赖于构造簇的具体方式。然而，它并不是提升到特征零的障碍；有些概形可以提升到特征零，但提升是分歧的，并非在W_2上。一个经典例子是特征二的代数闭域 k 上的超奇异恩里克斯曲面，参见 [Ill79，命题 II.7.3。8]。其他提升到特征零的障碍则依赖于簇的构造方式。

第5章余下部分的目标是说明，簇的基本群中阶与 p 互素的商

在特征 $p>0$ 下与特征零下的情形有本质区别。这构成了一种概念性的障碍。这与我们在第4讲中阐述的相似性形成对照：在那里，我们证明，定义在特征为 $p>0$ 的代数闭域上的光滑（拟）射影簇的（温和）基本群（假设存在良好紧化）是有限呈示的，特征零下也是如此。这也与 Achinger 的奠基性定理形成对照 [Ach17，定理 1.1。1] 该定理指出，每个正特征下的连通仿射概形都是 $K(\pi,1)$ 空间（针对 ´étale 拓扑）。他的定理特别指出，特征 $p>0$ 下代数闭域上的仿射簇类似于特征零下的 Artin邻域，见 [SGA4，第 ´XI] 讲。该定理确切地意味着，对于任意局部常值 ´étale 有限阿贝尔群层 $\mathcal{F}$ 在 X 上，同态

$$H^i(\pi_1(X,x),\mathcal{F}_x)\to H^i(X,\mathcal{F})$$

来自 Hochschild-Serre 谱序列的映射对所有 i 都是同构。这里的 $x\to X$ 是一个几何点。相关内容在文献中尚未得到充分记载，但我们可以将 Achinger 定理视为 ´étale 上同调理论的基石，从而将其归约为连续群上同调。

5.4. 主要定义。

定义 5.1（参见 [ESS22b]，定义 A）。若存在一个有限生成（分别地，有限呈示）的离散群 Γ，以及一个群同态 $\gamma\colon\Gamma\to\pi$，使得下述条件成立，则称有限生成群 π 是 p'-离散有限生成的（分别地，p'-离散有限呈示的）：

(1) 有限群完备化 $\hat{\gamma}\colon\hat{\Gamma}\to\pi$ 是满射；(2) 对任意满足 Γ_U 的开子群 $U\subset\pi:=\gamma^{-1}(U)$，限制 $\gamma_U\colon\Gamma_U\to U$ 在 pro-p' 完备化上诱导一个连续群同构

$$\gamma_U^{(p')}:\Gamma_U^{(p')}\to U^{(p')}.$$

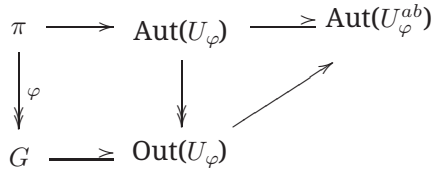
格罗滕迪克专化同态 4.3 与提升性质 [EGAIV$_4$, Th´eor`eme 18.1.2] 共同蕴含：若 $\pi=\pi_1(X,x)$ 是光滑完备簇 X 的基本群，则它是 p'-离散有限呈示的（特别地，它是 p'-离散有限生成的），参见 [ESS22b, Proposition 2.7]。若存在一个来自特征零的良好紧化，则性质 (1) 对 $\pi_1^t(X,x)$ 也成立。但要按 (2) 的要求在塔中验证这一点，则更为微妙。感谢 [ESS22b] 的审稿人友善地指出了这一点。尽管如此，该性质确实成立，参见 [ESS22b, Example 2.8]。

例5.2。当然，若如例4.3中那样，π 是一个有限呈示（分别为有限生成）群的有限群完备化，则 π 是 p'-离散有限呈示的（分别为有限生成的）。

定理 5.3（[ESS22b]，定理C）。存在定义在特征为 $p>0$ 的代数闭域 k 上的光滑射影簇 X，使得 $\pi_1(X,x)$ 不是 p'-离散有限生成的。特别地，这一概念构成了提升至特征零的可提升性障碍。

注5.4. 值得注意的是，根据例5.2和定理 4.5中的有限表示，定理 5.3特别蕴含：存在定义在特征为 $p>0$ 的代数闭域 k 上的光滑射影簇 X，使得 $\pi_1(X,x)$不是某个有限表示群的有限群完备化。事实上，这一性质比定理 5.3本身更容易看出。

5.5. ℓ 与Schur有理性的独立性。设 π 是一个有限生成群，且 $\varphi\colon \pi \twoheadrightarrow G$ 是一个核为 $U_\varphi = \mathrm{Ker}(\varphi)$的连续有限商群。我们将其阿贝尔化记为 U_φ^{ab}。于是，共轭作用诱导出一个交换图表



如果 π 是有限生成的，那么 U_φ 也是有限生成的，因此 U_φ^{ab} 是一个有限生成的 $\hat{\mathbb{Z}}$-模。我们定义

$$\rho_{\varphi,\ell} : G \to \mathrm{GL}(U_\varphi^{ab} \otimes \mathbb{Q}_\ell),$$

对于诱导表示，其特征

$$\mathrm{er}$$

$$\chi_{\varphi,\ell} = \mathrm{Tr}(\rho_{\varphi,\ell}) : G \to \mathbb{Q}_\ell.$$

第一个要点是下面这个命题。

命题 5.5（参见 [ESS22b], 命题 3.4、3.5）。1) 若 π 是 p'-离散有限生成的，则对于所有 $\ell \neq p$, $\chi_{\varphi,\ \ell}$ 的取值都在 $\mathbb{Z}$ 中，且与 ℓ 无关。2) 若 X 是定义在代数闭特征 $p > 0$ 域上的光滑射影簇，且 $\varphi : \pi \twoheadrightarrow G$ 是有限商群（因此特别地，φ 是连续的），则对于所有 $\ell \neq p$, $\chi_{\varphi,\ \ell}$ 的取值都在 $\mathbb{Z}$ 中，且与 ℓ 无关。

证明。性质 1) 本质上直接来自定义：令

$$\Gamma_\varphi = \mathrm{Ker}(\Gamma(\to \pi) \to G)$$

我们有 $\ell \neq p$ 的关系

$$\Gamma_\varphi^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell = U_\varphi^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell.$$

鉴于最终结果，性质 2) 更有意思，参见定理 5.10。令 $Y \to X$ 为群 G 的伽罗瓦覆盖。于是

$$U_\varphi^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell = H^1(Y, \mathbb{Q}_\ell)^\vee.$$

作为 Weil 猜想的推论，见 [KM74], , $g \in G$ 作用于 $H^1(Y, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的特征多项式属于 $\mathbb{Z}[T]$，且不依赖于 ℓ。

□

注 5.6. 特别是，2) 告诉我们，这种与 $\ell \neq p$ 无关的性质不可能成为我们所寻求的障碍。相反，我们现在将利用它来定义一个有理性障碍。

第二个要点是下面的命题。

命题 5.7（见 [ESS22b], 命题 3.7）。若 π 是 p'-离散有限生成的，那么对于任意连续有限商群 $\varphi\colon \pi \twoheadrightarrow G$，存在一个 $\mathbb{Q}$-向量空间 V_φ 和一个表示 $\rho_\varphi : G \to GL(V_\varphi)$，使得对每个 $\ell \neq p$，都有如下关系

$$\rho_{\varphi,\ell} = \rho_\varphi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$$

成立。

证明。事实上， $V_\varphi = \Gamma_\varphi^{ab}$以及 ρ_φ： $G \to GL$（$\Gamma_\varphi^{ab} \otimes \mathbb{Q}$）。

□

定义 5.8. 我们称 $\ell \neq p$, $\rho_{\varphi,\ \ell}$ 是舒尔有理的。

注 5.9. 事实上，正如我们在证明中所见，(V_φ,ρ_φ) 甚至具有整结构，因此是舒尔整的；但我们的障碍将忽略这一整性。

定理 5.10. 舒尔有理性是一个障碍：定义在特征 $p > 0$ 的代数闭域上的光滑射影簇无法提升到特征 0。

因此，我们必须举出一个例子：一个定义在特征 $p > 0$ 的代数闭域 k 上的光滑射影簇 X，以及一个商 $\varphi : \pi \twoheadrightarrow G$，使得 $\rho_{\varphi,\ \ell}$ 不是舒尔有理的。

5.6. Roquette 曲线与 Serre 构造。Roquette 曲线是定义在 $\mathbb{F}_p$ 上、对应于 $p \geq 3$ 的光滑射影曲线 C，它是具有如下方程的仿射曲线的正规紧化

$$y^2 = x^p - x.$$

它在 [Roq70], 中定义，亏格为 $g = (p-1)/2$，是超奇异曲线，并且是 $p \geq 5$ 的唯一曲线（因此 $g \geq 2$ 和 ρ_ℓ 是忠实的），且 $p > g + 1$ 的自同构群 G 的基数大于 Hurwitz 界 84($g-1$)。确切地说，它是 $2p(p^2-1)$，且所有自同构都定义在 $\mathbb{F}_{p^2}$ 上。 C 的方程将其呈现为 $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)$ 的 Artin–Schreier 覆盖。这实现了 $\mathbb{Z}/p =: N$ 作为 G 的子群，因此它是一个事实上为正规子群的 p-Sylow 子群。不难计算（见 [ESS22b，附录 A]） $\rho_\ell|_N$ 非平凡，因此ρ_ℓ 绝对不可约。 $\mathbb{Q}_\ell[G] \to$ End($H^1(C, \mathbb{Q}_\ell)$) 的作用取值于$\mathbb{Q}_\ell[G] \to$ End$_{\mathrm{Frob}}$($H^1(C, \mathbb{Q}_\ell)$)，并由绝对不可约性可知该作用是满射。Tate 猜想将其与作用 $\mathbb{Q}_\ell[G] \to$ End$^0(C) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ 等同。四元数代数 End$^0(C)$ 在 p 和 ∞ 处分歧，这使得 $\rho_{\varphi,\ell}$ 不可能是有理的，见[ESS22b，命题 4.6]。

定理 5.10 的证明。现在取一个定义在 $\mathbb{F}_p$ 上的光滑连通射影簇 P de-¯，其维数至少为 3，因此 P在 $\mathbb{F}_p$上单连通，且G 在其上作用而没有不动点。我们令 $X = (C \times_{\mathbb{F}_p} P)/G$，运用 Serre 构造，其中 G 按对角线作用。由此得到一个正合列

$$1 \to \pi_1(C) \to \pi_1(X) \xrightarrow{\varphi} G \to 1$$

这可以理解为伽罗瓦 ´etale 覆盖 $C \times_{\mathbb{F}_p} P \to X$ 的伽罗瓦序列，或者等价地，理解为 $X \to P/G$的同伦正合列。 G在 $H^1(C \times_{\mathbb{F}_p} P, \mathbb{Q}_\ell) = H^1(C_{\mathbb{F}_q}, \mathbb{Q}_\ell)$ 上的作用与上文研究的外作用相同。因此它不是舒尔有理的。由此， X 无法提升到特征零。这就完成了证明。

□

6. Lecture 6: Density of Special Loci

Abstract. 根据 Clemens 和 Landman 的定理（见 [Gri70, Theorem. 3.1]，关于复几何；以及格罗滕迪克的 [SGA7.2, XIV 1.1.10]，关于算术几何），几何的（复数域或 ℓ-进）局部系统在无穷远处具有拟幺幂单值。本节将说明这一性质为何有助于从复模型过渡到有限域上的模型，以及为何在贝蒂模空间中，无穷远处具有拟幺幂单值的复局部系统是扎里斯基稠密的。此外，我们还将介绍 [BGMW 22], [LL22a], [LL22b]的结果：几何泛曲线上的低秩算术局部系统不可能在其贝蒂模空间中扎里斯基稠密，这与 [EK20, Question 9.1 (1)] 和 [EK23, Conjecture 1.1]中的预期相反。最后，我们将介绍 *weakly arithmetic local systems* 的概念，该概念见于 [dJE22, Section 3], ，其中的对象特别是在无穷远处具有拟幺幂单值，并将说明它们在其贝蒂模空间中是扎里斯基稠密的。因此，对于某些问题（稍后将予以定义），人们希望采用 Drinfeld 方法[Dri01]，从而得出只需在弱算术局部系统上验证这些问题即可。

6.1. 定义。定义只需要 X 是一个正规簇，并且 $D_i \subset X \hookrightarrow X$ 是一个正规紧化。由此定义余维为 1 的分支在 $D_i \subset X \setminus X$ 中，以及其周围的小回路 T_i。一个表示

$$\rho : \pi_1(X, x) \to GL_r(\mathbb{C})$$

若 $\rho(T_i)$是拟幺幂的，则称其在无穷远处具有拟幺幂单值。此性质不依赖于紧化的选取 [Kas81，定理 3.1]。参见[EG21，第 3] 节，其中这一概念也用于将 GL_r 替换为任意线性代数群的情形。

令 $\pi = \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$表示以某个复点为基点的拓扑基本群。框架特征簇 $Ch(\pi, r)^{\square}$ 定义为一个在 $\mathbb{Z}$ 上定义的仿射簇，由模函子定义；该函子将仿射环 R 映到集合 $\mathrm{Hom}(\pi, GL_r(R))$。这是一个细模函子，由此得到的概形也称为框架贝蒂模空间 $M_B(X, r)^{\square}$，它同样定义在 $\mathbb{Z}$上。群 GL_r 通过共轭作用（规范变换）作用于 $Ch(\pi, r)^{\square}$。其范畴商

$$Ch(\pi, r) = Ch(\pi, r) /\!\!/ GL_{r,\mathbb{C}}$$

定义为

$$\mathcal{O}(Ch(\pi, r)) = \mathcal{O}(Ch(\pi, r)^{\square})^{GL_r}$$

是特征簇，也称为贝蒂模空间 $M_B(X, r)$。其复点是秩为 r 的半单局部系统的同构类。$M_B(X, r)^{\square} \to M_B(X, r)$ 的纤维是 GL_r-轨道的闭包。在不可约复局部系统上，这样的轨道是闭的。

6.2. 为什么无穷远处的单值变换是拟幺幂的。第一个原因是，几何局部系统在无穷远处具有拟幺幂单值。这里简述 Brieskorn 的复分析证明 [Del70, p.125]：通过基变换，我们可以假设$Y \xrightarrow{g} U \hookrightarrow X$ 定义在一个数域上。因此，高斯-马宁联络的留数的特征值 λ_i 属于 $\mathbb{Q}$。另一方面，高斯-马宁局部系统定义在 $\mathbb{Z}$上，因为它是 g 的 Betti 上同调的变分，所以

$\bar{}$无穷远处单值变换的特征值属于 $\mathbb{Q}$。根据 [Del70, Corollaire 5.6, p.96] $\mu_i = \exp(2\pi\sqrt{-1}\lambda_i)$。由 Gelfond 定理，我们得出 $\lambda_i \in \mathbb{Q}$。

第二个理由如下。设 S 是一个定义在 $\mathbb{Z}^{\bar{}}$ 上的有限型仿射概形，具有 $\mathcal{O}(S) \subset \mathbb{C}$，使得 $X \hookrightarrow X$ 和一个给定的复点 $x \in X$ 有一个模型 $\_X_S \hookrightarrow X_S$，其中 $X_S \hookrightarrow X_S$ 是相对良好紧化，且 x_S 是 X_S 的一个 S-点；并且 T_i 的特征值的阶在 S 上可逆。对于 $s \in |S|$ 的任意闭点，其剩余域 $\mathbb{F}_q$ 的特征为 $p > 0$，且在其上方有一个 $\mathbb{F}_p$-点 $\bar{s}$，我们记

$$sp_{\mathbb{C},\bar{s}} : \pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}}) \to \pi_1^t(X_{\bar{s}}, x_{\bar{s}})$$

到温和基本群的连续满射特化同态 [（SGA1，第 XIII 号报告，2.10，推论 2.12] 及第 4.3 节）。与有限群完备化同态作复合，

$$\pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$$

得到

$$sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C},\bar{s}} : \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1^t(X_{\bar{s}}, x_{\bar{s}})$$

它与局部基本群相容，见 [Del73，第 1.1.10] 节。这使得我们能够将拟幺零单值条件转移到 $X_{\bar{s}}$。

最后，我们已经充分了解伽罗瓦群 Γ 如何作用于 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$ 中 T_i 的像 $T_i^{\text{ét}}$；参见 [SGA7.2, XIV.1.1.10], [EK23, 引理 2.1]。

引理 6.1. 对每个 $1 \le i \le s$， $\gamma \in \Gamma$ 在 π 上的作用将 $T_i^{\text{ét}}$ 映为 $(T'_{\text{且}i})^{\chi(\gamma)}, \widehat{\ }$，其中 χ: $\Gamma \to \mathbb{Z}^\times$ 是分圆特征。

6.3. 拟幺幂局部系统的稠密性定理。

定理 6.2（[EK23], 定理 1.3）。具有无穷远处拟幺幂单值的 $\rho \in Ch(\pi, r)^{\square}(\mathbb{C})$ 集合在 $Ch(\pi, r)^{\square}(\mathbb{C})$ 中扎里斯基稠密。

证明。令 $Q \subset Ch(\pi, r)^{\square}(\pi)(\mathbb{C})$ 为拟幺零表示集合的扎里斯基闭包。假设 $Q \neq Ch(\pi, r)^{\square}(\mathbb{C})$。

对于每个无穷远处的局部单值 $T_i \subset \pi$，选取 $g_i \in T_i$。我们有一个态射

$$\begin{array}{ccc} & & M = \mathbb{G}_m^s \\ & & \downarrow \varphi \\ Ch(\pi, r)^{\square} & \xrightarrow{\psi^{\square}} & N = \prod_{i=1}^s (\mathbb{A}^{r-1} \times \mathbb{G}_m) \end{array}$$

在 $\mathbb{C}$ 上的有限型仿射概形的态射，对每个 $i = 1$、.....、 s 都有定义，其由特征多项式的系数 $(\sigma_1(\rho(g_i)) \ldots, \sigma_r(\rho(g_i))) \in N$ 给出

$$\det(T \cdot \mathbb{I}_r - \rho(g_i)) = T^r - \sigma_1(\rho(g_i))T^{r-1} + \ldots + (-1)^r \sigma_r(\rho(g_i))$$

表示 ρ 的： $\pi \to GL_r(\mathbb{C})$。（态射 $\psi^{\square}$ 可经由 $Ch(\pi, r)$ 分解，但本讲座中我们不使用 $Ch(\pi, r)$）。存在一个定义在 $\mathbb{Z}$ 上的有限型概形 B，带有分解 $\mathbb{Z} \to \mathcal{O}(B) \to \mathbb{C}$，其上定义了图表（$\psi^{\square}, \varphi$）以及

包含 $Q \hookrightarrow Ch(\pi,r)^{\square}$。我们记 $Q_B \hookrightarrow Ch(\pi,r)^{\square}_B$，并且

$$\begin{array}{ccc} & & M_B = \mathbb{G}^s_{m,B} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_B} \\ Ch(\pi,r)^{\square}_B & \xrightarrow{\psi^{\square}_B} & N_B = \prod_{i=1}^s (\mathbb{A}^{r-1}_B \times \mathbb{G}_{m,B}) \end{array}$$

利用由 x_F 给出的截面 $\Gamma \to \pi_1(X_F, x_{\mathbb{C}})$，伽罗瓦群 Γ 通过共轭作用于 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$，因而也作用于闭点集 $|Ch(\pi,r)^{\square}|$。由于闭点 $z \in |Ch(\pi,r)^{\square}|$ 的单值化有限，其稳定子 $\Gamma_z \subset \Gamma$ 是一个开子群。它作用于 z 处的完备化 $(Ch(\pi,r)^{\square})_z$。换言之，作用 $\Gamma \to \mathrm{Aut}(|Ch(\pi,r)^{\square}|)$ 是连续的。此外，引理 6.1 使得可以将 Γ 在图表 $(\psi^{\square}_B, \varphi_B)$ 上的作用延拓，并使其与在 $|Ch(\pi,r)^{\square}|$ 上的作用相容。

令 T_B 为 $\mathrm{Im}(\psi_B)$ 和 $S_B = \varphi_B^{-1}(T_B)$ 的约化扎里斯基闭包。由于 $Ch(\pi,r)^{\square}(\mathbb{C}) \setminus Q \neq \emptyset$，$Ch(\pi,r)^{\square}_B \setminus Q_B$ 支配 B。因此，特别地，T_B 因而 S_B 也支配 B。由一般光滑性，S_B^{sm} 在 B 上的光滑轨迹支配 B。对于限制在 $Ch(\pi,r)^{\square}_B \setminus Q_B$ 上的 ψ_B，由一般平坦性可知，其像与 $\varphi_B(S_B^{\mathrm{sm}})$ 相交（注意 φ_B 是有限的）。因此，存在一个闭点 $z \in |Ch(\pi,r)^{\square}_B \setminus Q_B|$，使得

- $\psi^{\square}$ is flat at z,
- $y = \psi^{\square}_B(z) \in \varphi_B(S_B^{\mathrm{sm}})$.

我们还固定一个闭点 $x \in S_B^{\mathrm{sm}} \cap \varphi_B^{-1}(y)$。令 Γ' 为稳定子$\Gamma_x \cap \Gamma_z$的交，因此它是 Γ 中的开集，并令 $b \in B$为点 x, y, z的像。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$因此，闭子概形 $(S_B)_x \hookrightarrow (M_B)_x$ 是 Γ'-稳定的。我们滥用记号，设$\Gamma' = \Gamma$。

现在取 $s \in |S|$ 一个剩余域为 $\mathbb{F}_q$、特征为 $p > 0$ 且不同于 x的剩余特征 ℓ 的非分歧闭点。于是，弗罗贝尼乌斯$\curvearrowright Frob_s$ 属于 Γ，并且根据引理 6.1，它在 M_B 和 $(M_B)_x$ 上的作用是乘以$\curvearrowright q$。根据（由于我们处于 $(B)_b$之上，这是 de Jong 猜想 [dJ01, Conjecture 1.1] 的一个变体），该猜想由 B¨ockle-Khare [BK06] 在特定情形下、由 Gaitsgory [Gai07] 在一般情形下$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$针对 $\ell \geq 3$证明，存在 $(S_B)_x$中的 $Frob_s$-不变点，它们在 $(B)_b$上平坦。因此，存在一些点，使得群概形 M_B 中的坐标是 $(q-1)$ 单位根，且在 $(\widehat{B})_b$ 上平坦。由 ψ_B 在 $(\widehat{Ch\ \pi\ r}(\ ,\ )^{\square}_B \setminus Q_B)_z$ 上的限制的平坦性，存在一个点属于 $(\widehat{Ch\ \pi\ r}(\ ,\ )^{\square}_B \setminus Q_B)_z$，并且在 $(\widehat{B})_b$上平坦。这就给出了一个定义在 Q 之外的复拓扑局部系统，其中 T_i 的特征值是 $(q-1)$单位根，矛盾。更多细节见 [EK23]。

□

6.4. 备注。1）2020年12月新冠疫情期间，我通过 Zoom 讲授我们与 Moritz Kerz 合作提出的密度定理 6.2 时，Ben Bakker 和 Yohan Brunebarbe 听了这场讲座。后来他们告诉我们，他们对这一结果有一个霍奇理论证明。这将是件好事，因为它会为复数域方法与算术方法之间的相似性再添一例。

2）如果能从由具有无穷远处拟幺幂单值变换的复局部系统组成的空间中，特别挑出一些仍保持稠密性的子轨迹，也会很有意义。 [dJE22 的第 3], 参见第 6.7 节给出了一个答案：我们在那里定义了弱算术局部系统的概念，并证明了它们具有稠密性。弱算术局部系统尤其具有无穷远处的拟幺幂单值变换。

3) 当然，我们应该指出，如果 X 起初就是射影的，那么我们的定理 6.2 就没有意义了。不过，如果我们想到定义在数域上的簇以及贝利定理，$X = \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 就是许多问题的关键概形，因此显然，无穷远处的单值张成整个基本群。此外，若类比数论的情形——在那里我们考察伽罗瓦表示——则会遇到坏素数处的分歧。与 [EK20 的问题 9.1 (1)] 和 [EK23 的猜想 1.1], 中所期望的不同，由于 Biswas-Gupta-Mj-Whang [BGMW22] 在秩 2 情形以及 Landesman-Litt [LL22a], [LL22b] 在任意秩情形下的工作，算术点子轨迹并不稠密；另见 [Lam22]。他们构造中的一些要点将在第6.6节讨论。另一方面，对于有限域上光滑拟射影簇的 Mazur-Chenevier变形形式概形，如果算术点子轨迹不稠密，那就确实很糟糕。秩一情形下它是稠密的，见 [EK21，定理 1.3]。在 $\mathbb{C}$上，正如上一段所述，弱算术复局部系统是稠密的。

6.5. 其他稠密或非稠密轨迹。我们沿用定理 6.2 的记号，并固定一些无穷远处单值化的有限阶共轭类 T_i 。令$\mathcal{T} \subset M_B(X, r)(\mathbb{C})$表示具有有限单值化的复点集合，令 $\mathcal{T}(T_i) \subset M_B(X, r, T_i)(\mathbb{C})$表示它与 $M_B(X, r, T_i)$的交集。如果 $\mathcal{T}(T_i)$非空，则所有$^-$的 T_i 都必须具有有限阶。我们将 $\mathcal{T}$在 $M_B(X, r)$中的扎里斯基闭包记为~~$\mathcal{T}$，~~将 $\mathcal{T}(T_i)$在 $M_B(X, r, T_i)$中的扎里斯基闭包记为 $\mathcal{T}(T_i)$；类似地，将解析闭包记为 $\mathcal{T}^{an}$和 $\mathcal{T}(T_i)^{an-}$~~。对于~~任意光滑复簇 Y，我们记 $j\colon Y \hookrightarrow Y$为一个光滑射影紧化，使得 $Y \setminus Y$是正规交叉除子。

命题 6.3. 1) 如果所有 T_i 都具有有限阶 ，存在一个有限伽罗瓦 ´étale 覆盖 $h_1 : Y_1 \to X$ 使得对于任意 $\mathbb{L} \in M_B(X, r, T_i)(\mathbb{C})$， $h^*\mathbb{L}^-$ 可延拓为 Y_1上的一个局部系统。2) 存在一个有限伽罗瓦 ´étale 覆盖 $h_2 : Y_2 \to X$ 使得 a) 对于任意 $\mathbb{L} \in \mathcal{T}$， $h^*\mathbb{L}$ 是若干个 r 挠秩 1 局部系统之和；$^-$ b) 对于任意 $\mathbb{L} \in \mathcal{T}$， $h^*\mathbb{L}$ 是若干个 r 秩 1 局部系统之和。3) 如果所有 T_i 都具有有限阶，则存在一个有限伽罗瓦 ´étale 覆盖 $h_3 : Y_3 \to X$使得 a) 对于任意 $\mathbb{L} \in \mathcal{T}(T_i)$，~~$h^*\mathbb{L}$~~ 可延拓为 r 秩 1 局部系统在Y_3上的和；b) 对于任意 $\mathbb{L} \in \mathcal{T}(T_i)^{an}$， $h^*\mathbb{L}$ 可延拓为 r 秩 1 酉局部$^-$系统在 Y_3上的和。

证明。我们证明 1)。我们考虑仿射闭子概形

$$\begin{array}{ccc} M_B(X, r, T_i)^{\square} & \longrightarrow & M_B(X, r)^{\square} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ M_B(X, r, T_i) & \longrightarrow & M_B(X, r) \end{array}$$

由于 $M_B(X,r,T_i)^\square$ 是一个精细模空间，我们有泛表示

$$\rho_{univ}:\pi_1(X(\mathbb{C}),x(\mathbb{C}))\to GL_r(\mathcal{O}(M_B(X,r)^\square)).$$

由于 $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))$ 是有限生成的，塞尔伯格定理（如 [And04 第 8] 节中所用）蕴含存在一个有限 ´étale 伽罗瓦覆盖 $h_1:\ Y_1\to X$，使得 $\rho_{univ}(\pi_1(Y_1(\mathbb{C})\ y_1(\mathbb{C})))$ 无挠。这里 $y_1\in Y_1$ 位于 x 之上。由于假设 T_i 具有有限阶，这意味着 $\rho_{univ}|_{(\pi_1(Y_1(\mathbb{C})\ y_1}$ $(\mathbb{C})))$ 经由 $\pi_1(\bar{Y}_1(\mathbb{C})\ y_1(\mathbb{C}))$ 分解。任意复点 $\rho\in M_B(X,r,T_i)^\square(\mathbb{C})$ 定义为到 $\iota\circ\rho_{univ}$ 的局部系统，其中 $\iota:\ \mathcal{O}(M_B(X,r,T_i)^\square)\to\mathbb{C}$ 是一个复点。我们得出结论：$M_B(X,r,T_i)$ 的所有复点限制到 Y_1 后，都延拓到 $\bar{}Y_1$，也就是说它们没有分歧。这证明了 1)。

我们证明 2)a)。我们按照 [And04 第 10]节使用若尔当定理：存在一个有限 ´étale 伽罗瓦覆盖 $h_2:\ Y_2\to X$，使得对于所有 $\mathbb{L}\in\mathcal{T}$，$h^*\mathbb{L}$ 都是 r挠秩 1 局部系统的直和。这就证明了 2)a)。

我们证明 2)b)。态射 $h_2^*:\ M_B(X,r)\to M_B(Y,r)$ 在其¯像上是有限的，因此 $h^*(\mathcal{T})$ 是 $M_B(Y,r)$ 中 $h^*(\mathcal{T})$ 的扎里斯基闭包。另一方面，$M_B(Y,r)$ 中由 r 秩 1 局部系统之和构成的轨迹是扎里斯基闭的，见引理 6.5。这就证明了 2)b)。

我们证明 3)a)。另请参见 [EL13 定理 5.1]，其中给出了关于向量丛的类似陈述。

现在取 $h_3:$ 一个同时支配 h_1 和 h_2 的 $Y_3\to X$ 有限 ´étale 伽罗瓦覆盖，则对 h_3，1) 成立¯。扩张到 Y_3 定义了如下分解

$$h_3^*:M_B(X,r,T_i)\xrightarrow{c^*}M_B(\bar{Y}_3,r)\xrightarrow{j^*}M_B(Y_3,r)$$

其中 h_3^* 是有限映射，且其像是扎里斯基闭的。因此 c^* 是有限映射，且其像是扎里斯基闭的。又由于 j^* 也是扎里斯基闭的，$M_B(Y_3,r)$ 中 $h_3^*(\mathcal{T}(T_i))^-$ 的扎里斯基闭包，是 j^* 对 $M_B(Y_3,r)$ 中 $c^*(\mathcal{T}(T_i))$ 的扎里斯基闭包的像；而后者恰等于 $c^*(\mathcal{T}(T_i))$。应用引理 6.5 可得，$c^*(\mathcal{T}(T_i))$ 由那些可分解为 $\oplus_1^r\mathcal{L}_i$ 个 r 秩 1 局部系统之和的局部系统组成。这证明了 3)a)。

我们证明 3)b)。我们需要说明，如果 $\mathbb{L}\in\mathcal{T}(T_i)^{an}$，那么 $\mathcal{L}_i$ 是酉的。$M_B(Y_3,1)$ 上挠秩 1 局部系统的¯ ¯解析闭包是酉一阶联络空间 $U(Y_3)$，该空间是紧的。因此，通过代数态射¯ ¯ ¯ ¯ $M_B(Y_3,1)^r\to M_B(Y_3,r)(\hookrightarrow M_B(Y_3,r))$，$U(Y_3)^r\to M_B(Y_3,r)(\hookrightarrow M_B(Y_3,r))$ 的像是解析闭的。因此，$c^*(\mathcal{T}(T_i)^{an})$ 属于该像。这就证明了 3b)。

□

¯注 6.4. 在命题 6.3 的 3) 中，我们不能将 $\mathcal{T}(T_i)$ 替换为 $\overline{\mathcal{T}}$，解析版本也同样如此。假设 $X=\mathbb{G}_m$，那么 $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))=\mathbb{Z}$ 以及$M_B(X,1)=\mathbb{G}_m$，其中对于 $\mu\in\mathbb{G}_m(\mathbb{C})=\mathbb{C}^\times$，相应的局部系统 $\mathbb{L}$ 由 $\mathbb{Z}\to\mathbb{C}^\times,\ 1\mapsto\mu$ 定义。那么 $\mathcal{T}=\mu_\infty\subset\mathbb{C}^\times$，即单位根子群，其解析闭包是 $S^1\subset\mathbb{C}^\times$，即圆；其扎里斯基闭包则是整个$\mathbb{C}^\times$。然而，$h:\ Y\to\mathbb{G}_m$ 具有这样的性质：$\bar{Y}$ 与 $\mathbb{P}^1$ 同构，因而是单连通的；非挠一阶局部系统无法通过有限 ´étale 覆盖平凡化。另见 [And04, Remarque 7.2。3]，其中使用了同一个例子，思路类似。

下面的引理想必广为人知；由于我们在文献中未能找到证明，故简短地给出证明。

引理 6.5。对于任意有限生成群 π 和自然数 $r \geq 1$，满足条件 $\mathbb{L}$ 在同构意义下是秩 1 表示之和的复点轨迹 $\mathbb{L}$，是 $Ch(\pi, r)$ 中的闭集。

证明。结构态射 $q: Ch(\pi, r)^{\square} \to Ch(\pi, r)$ 赋予 $Ch(\pi, r)$ 商拓扑，因此引理 6.5 等价于断言：稳定某个完全旗的复点轨迹 ρ，即其相伴分次将 $\mathbb{C}^r$ 分解为秩 1 向量子空间之和的复点，在 $Ch(\pi, r)^{\square}$ 中是扎里斯基闭集。设 $(1 = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s)$ 是 π 的生成元。令 Fl 为 $\mathbb{C}^r$ 上的完全旗簇。考虑代数映射

$$Ch(\pi, r)^{\square} \to \mathrm{Hom}(Fl, (Fl)^s), \ (\rho \mapsto [Fl \ni F \mapsto (Fl)^s \ni (\gamma_1(F), \ldots, \gamma_s(F)]).$$

令 $\Delta \subset (Fl)^s$ 为对角线。那么 $\mathrm{Hom}(Fl, \Delta) \subset \mathrm{Hom}(Fl, (Fl)^s)$ 是闭嵌入，因此它在 $Ch(\pi, r)^{\square}$ 中的逆像也是闭集。

□

¯命题 6.3 2)b) 是一种便捷的方式，可以看出某些 $\mathbb{L}$ 不可能属于 $\mathcal{T}$，参见例 6.6 和推论 6.8。

例 6.6. 设 $\rho: \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to GL_r(\mathbb{C})$ 是一个表示，满足 $\rho(\pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})))$ 在 $G \subset GL_r(\mathbb{C})$ 中扎里斯基稠密，其中 $G = GL_{r'}(\mathbb{C})$，或对某个满足 $2 \leq r' \leq r$ 的 r'，有 $G = SL_{r'}(\mathbb{C})$。那么 ρ 是半单的，并且¯的模点不属于 $\mathcal{T}$。

6.6. 算术局部系统并不稠密：Biswas-Gupta-Mj-Whang 与 Landesman-Litt 的工作。我们简要介绍 Aaron Landesman 和 Daniel Litt 在注 6.4 2) 中提及的构造的若干方面；该构造将定理 A 和 [BGMW22] 的引理 3.2 推广到了高秩情形。前者利用了 SL_2 表示的特殊性质：这类表示具有有限单值化，当且仅当它们在特定环路上具有有限单值化；而后者则利用霍奇理论。感谢两位作者迅速、准确且友好地回答了我们的问题。我们仅在一个简化的几何情形下展开论证中的若干要点，完整的陈述和证明请参见他们的原始论文 [LL22a], [LL22b] 。

6.6.1. 陈述。设 $f: X \to S$ 是一个亏格为 ≥ 2 的曲线光滑族，并配有一个优势态射 $h: S \to M_g$，其中 M_g 是亏格为 g 的曲线的粗模空间。我们假设 f 有一个截面 $S \to X$，但它与陈述及其证明无关。设 $s \in S$ 是一个复泛点。记 X_s 为 f 在 s 上方的纤维。对于 $x \in X_s$ 这个几何点（例如 f 的截面上的几何点），同伦正合列

$$1 \to \pi_1(X_s(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1(S(\mathbb{C}), s(\mathbb{C})) \to 1$$

是正合的。由于 $\pi_1(X_s(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$ 的像是正规的，任意定义在 X 上的半单复局部系统 $\mathbb{L}$ 对 X_s 的限制 $\mathbb{L}|_{X_s}$ 都是半单的。

定理 6.7（[LL22b], 定理 1.2.1）。若 X 上的半单局部系统 $\mathbb{L}$ 的秩为 $r < \sqrt{g+1}$，则 $\mathbb{L}|_{X_s}$ 具有有限单值化。

若 $r=1$，尤其是若 $g=1$，定理 6.7 出自 [BGMW22，引理 3.2]；其证明通过分析德恩扭转对特征表示下H_1（X_x，$\mathbb{Z}$）的生成元像的影响。若 $r=2$，则此结论出自 [BGMW22，定理 A]，，其证明通过分析特定环路上的单值化。此外，即使 $\mathbb{L}$ 不是半单的，该定理仍然成立。我们不讨论这最后一步。

推论 6.8（[LL22a]，推论 1.2.10，引理 7.5.1）。若 $g\geq 2$ 且 $2\leq r<\sqrt{g+1}$，则限制态射 $M_B(X,r)\to M(X_s,r)$ 的像不稠密。

推论 6.8 的证明。我们需要证明，与具有有限单值化的局部系统相对应的模空间点并非扎里斯基稠密。令 $a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g$，$g\geq 2$ 为 $\pi_1(X_s(\mathbb{C}),x(\mathbb{C}))$ 的生成元，且满足唯一关系 $\prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]=1$。定义$\rho\colon \pi_1(X_s(\mathbb{C}),x(\mathbb{C}))\to GL_r(\mathbb{C})$，将 a_1,a_2 映到分块矩阵

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&\mathbb{I}_{r-2}\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&\mathbb{I}_{r-2}\end{pmatrix}$$

并将其余生成元 a_j（对应 $j\geq 3$）和 b_i（对应 $i\geq 1$）映到 $\mathbb{I}_r$，其中 $\mathbb{I}_n$ 是大小为 $n\times n$ 的单位方阵。单值化群在 $SL_2(\mathbb{C})\subset GL_r(\mathbb{C})$ 中稠密。我们应用例 6.6。

□

注 6.9. 由于 $M_B(\pi_1(X(\mathbb{C}),x(\mathbb{C})),r)^{\square}\to M(X,r)$ 是满射，因此在推论 6.8 中，我们也可以说 $M_B(\pi_1(X(\mathbb{C}),x(\mathbb{C})),r)^{\square}\to M(X_s,r)$ 的像不稠密。换言之，X_s 上的半单局部系统若能提升到 X，则其提升仍为半单局部系统，而当 r 足够小时，这类系统并不稠密。

我们沿用上文的记号。态射 $f\colon X\to S$ 可下降到$f_\circ\colon X_\circ\to S_\circ$，其定义在 $F_\circ$ 上，其中 $F_\circ/\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的有限型域。因此，$F_\circ(S_\circ)\subset\kappa(x)\cong\mathbb{C}$，即 x 的剩余域。回顾一下，ℓ-进局部系统 $\mathbb{L}_\ell$ 在 X_s 上是算术的，若它可下降到 X_F，其中 $F_\circ(S_\circ)\subset F(\subset\kappa(x))$ 是有限型扩张。从几何上说，这意味着存在一个定义在 F_1 上的优势态射 $T_1\to S_\circ\otimes_{F_\circ}F_1$，其中 F_1 是 $F_\circ$ 的有限扩张，使得 $F=F_1(T_1)$，并且 $\mathbb{L}_\ell$ 定义在拉回态射 $f_\circ\otimes_{S_\circ}T_1=:f_1\colon X_\circ\otimes_{S_\circ}T_1=:X_1\to T_1$ 的纤维上，该纤维对应于泛点 Spec(F)。由于算术性这一概念不依赖于此类 F 的选取，见 [dJE22，注 3.2]，，以下我们假设f_1 有一个截面 $T_1\to X_1$，并滥用记号记作 $f=f_1$，于是也有 $F=F_\circ(S)$。特别地，这保证了拓扑基本群的同伦正合列

$$1\to\pi_1(X_s(\mathbb{C}),x(\mathbb{C}))\to\pi_1(X(\mathbb{C}),x(\mathbb{C}))\to\pi_1(S(\mathbb{C}),s(\mathbb{C}))\to 1$$

是正合的，并且根据 [And74，命题 3]，，若 $g\geq 2$，则这意味着$\pi_1(X_s(\mathbb{C}),x(\mathbb{C}))$ 的中心是平凡的，且 ´étale 基本群的诱导同伦正合列

$$(\star)\quad 1\to\pi_1(X_s,x)\to\pi_1(X,x)\to\pi_1(S,s)\to 1$$

也正合。

推论 6.10（[LL22b]，定理 8.1.2）。若 $g\geq 2$ 且$2\leq r<\sqrt{g+1}$，则 M_B（X_s,r）$\mathbb{Q}_\ell$ 中的¯算术局部系统不是扎里斯基稠密的。

¯证明。Gal(F/F) 对 ℓ-进局部系统的作用来自同伦正合列

$$1 \to \pi_1(X_x, x) \to \pi_1(X_F, x) \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to 1$$

¯以及 Gal(F/F) 通过外自同构在 $\pi_1(X_x, x)$ 上的作用（由于存在截面，该作用可以提升为自同构）。一个 ℓ-进算术局部¯系统 $\mathbb{L}_{\ell,\mathbb{C}}$，若其下降到 $\mathbb{L}_{\ell,F'}$，其中 $F \subset F'$($\subset F$) 是有限伽罗瓦扩张，则它是在该作用限制到 Gal(F/F') 后的不动点。我们可以假设 F等于F'，并且 S'（ S在 F'中的正规化）等于 S。我们通过从 $F = F_\circ(S)$ 到 $\mathbb{C}(S)$ 的基~~变换~~态射，将此作用¯限制到 Gal($\mathbb{C}(S)/\mathbb{C}(S)$)，其中~~基变~~换态射为 Gal($\mathbb{C}(S)/\mathbb{C}(S)$) $\to$Gal(F/F)。由 ($\star$) 的左正合性，该作用经由$\pi_1(S, s)$分解。因此，实际上 $\mathbb{L}_{F\otimes_{F_\circ}\mathbb{C}}$下降为 X 上的一个 ℓ-进局部系统。将其视为一个系数为 $\mathbb{Q}_\ell$ 的拓扑局部系统后，通过随机选取 $\mathbb{Q}_\ell$ 与 $\mathbb{C}$ 之间的一个域同构并应用定理 6.7，可知其在 X_s 上的限制具有有限¯单值化。我们应用推论 6.8。证明至此完成。□

6.6.2. 刚性。记号与第 6.6.1 节相同。我们此前已经讨论过，不可约局部系统 $\mathbb{L}$ 具有有限行列式。此外，由于 [LLSS20, 引理 2.1、1], [AS16, 命题 2, 4] 以及 Lefschetz 理论表明整体单值化可在良曲线上识别，因此它在无穷远处具有拟幺幂单值变换。

回顾一下，在光滑簇 X 上具有有限行列式和无穷远处拟幺幂单值的不可约复局部系统 $\mathbb{L}$ 称为强上同调刚性

$$H^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathbb{L})) = 0.$$

这里，上标 0 表示无迹端omorphism。强刚性这一记号由 [EG21, 定义 A.1.b)], 引入并加以讨论；事实证明，它适用于实秩为 ≥ 2的 Shimura 簇上的任意不可约局部系统。特别地，它意味着 $\mathbb{L}$ 是上同调刚性的，因为映射

$$IC^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathbb{L})) \to H^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathbb{L}))$$

从交叉上同调到上同调的映射是单射。回顾整性定理 [EG18，定理 1.1], ；关于该定理的报告见第 7.5 节。

定理 6.11. 若 $\mathbb{L}$ 是上同调刚性的，则它是整的，因此其限制 $\mathbb{L}|_{X_s}$也整。

6.6.3. 定理 6.7 的证明。为了证明 $\mathbb{L}|_{X_s}$的单值化是有限的，我们只需完成以下两步：

I) 对于 $r < \sqrt{g+1}$， $\mathbb{L}|_{X_s}$ 是不可约酉局部系统U_i的直和。

若确实如此，由 Krull-Schmidt 定理可知该分解唯一，因此 $\pi_1(S(\mathbb{C}) \ s(\mathbb{C}))$ 在集合 $\{U_i\}_i$ 上的作用是有限的，所以经过有限次 ´étale 基变换 $S' \to S$，U_i 可提升到 $\mathbb{U}_i$ 到 $X' := S' \times_S X$。因此，对于这个问题，我们可以假设 $S' \to S$ 是恒等映射。

II) $\mathbb{U}_i$ 是强上同调刚性的。

如果是这样，那么将定理 6.11 应用于 $\mathbb{L}$ 的单值化系数的共轭 $\mathbb{L}^\sigma$，局部系统（$\oplus_\sigma \mathbb{L}^\sigma$）$|_{X_s}$ 随即是酉的，并且根据定理 6.11，其单值化定义在 $\mathbb{Z}$ 上，因此具有有限单值化。

关于 II）：一旦我们有了 $\mathbb{U}_i$，由于 U_i 不可约，$f_*\mathcal{E}nd^0$（U_i）$=0$，因此勒雷谱序列给出

$$H^1(X,\mathcal{E}nd^0(\mathbb{U}_i))=H^0(S,R^1f_*\mathcal{E}nd^0(\mathbb{U}_i))$$

以及 II) 等价于

$$H^0(S,R^1f_*\mathcal{E}nd^0(\mathbb{U}_i))=0.$$

这一消失性将在下文 I)c) 中处理。

关于 I)：从 $\mathbb{L}$ 出发，由于子群 $\pi(X_s(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))\subset\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))$ 是正规子群，限制 $\mathbb{L}|_{X_s}$ 是半单的。因此，需要证明各个直和项都是酉的。作者采用的方法如下。

I)a) 证明当 $\mathbb{L}$ 是极化复霍奇结构变分时，I) 成立。这正是 [LL22a，定理 1.2.12] 的内容，其界稍好一些，只需要 $r<2\sqrt{g+1}$。I)b) 如果 $\mathbb{L}$ 一开始并非来自极化复霍奇结构变分，根据 Simpson-Mochizuki [Moc06，定理 10，5]，包含模点 to$\mathbb{L}$ 的 $M_B(X,r)$ 的连通分支也包含一个此类极化复霍奇结构变分的模点，我们将其记为 $\mathbb{M}$。I)c) 证明 $\mathbb{L}|_{X_s}=\mathbb{M}|_{X_s}$。为此，证明中需要更精细的界 $r<\sqrt{g+1}$。

设 (E,∇) 是与 $\mathbb{L}$ 相关联的代数平坦联络。$\mathbb{L}|_{X_s}$ 是酉的，当且仅当 $E|_{X_s}$ 是（斜率）半稳定的。I)a) 的证明计算了低秩情形下的半稳定性。

关于 I)c)：回忆一下，在点 $\mathbb{M}$ 处，限制 $M_B(X,r)\to M_B(X_s,r)$ 的切映射可识别为限制映射

$$H^1(X,\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M}))\to H^1(X_s,\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M})).$$

此映射经由

$$H^0(S,R^1f_*\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M}))\subset H^1(X_s,\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M})).$$

因此，证明 I)c) 的第一步是证明 $H^0(S,R^1f_*\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M}))$ 消失；这尤其蕴含了 II) 所需的消失，从而解决了 II)。证明中使用了 Deligne 固定部分定理（见 [LL22b，定理 1.7.1]）。若 $\mathbb{M}$ 和 $\mathbb{M}|_{X_s}$ 都不可约，则 Goldman-Millson 的形式性定理 [GM88，命题 4.4] 应用于 X_s 和 X（通过对非完备情形作一个理想化的推广），便可得出结论：完备局部环的同态 $\hat{\mathcal{O}}_{M_B(X_s,r)_{\mathbb{M}|_{X_s}}}\to\hat{\mathcal{O}}_{M_B(X,r)_{\mathbb{M}}}$ 经由 $\hat{\mathcal{O}}_{M_B(X_s,r)_{\mathbb{M}|_{X_s}}}\xrightarrow{\mathbb{M}|_{X_s}}\mathbb{C}$ 分解，其中对应于 $\mathbb{M}|_{X_s}$ 的点是闭点。因此，限制映射 $M_B(X,r)\to M_B(X_s,r)$ 将包含 $\mathbb{M}$ 的连通分支收缩到其限制 $\mathbb{M}|_{X_s}$。

证明通过证明其消失来进行

$$H^0(S,R^1f_*\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M}_A))=0$$

对于任意将 $\mathbb{M}$ 扩张为系数取自任意局部阿廷环 A 的局部系统 $\mathbb{M}_A$、且秩为 $\mathcal{E}nd^0(\mathbb{M})<g$ 的情形，亦即 $r<\sqrt{g+1}$。这是证明中的一个关键点，通过结合 Kodaira- 斯宾塞类与 Deligne 固定部分定理来完成（见 [LL22b，定理 6.2.1]）。这意味着 $M_B(X,r)\to M_B(X_s,r)$ 在 A点 $\mathbb{M}_A$ 处的切映射为零。由于这对所有局部

ˆ ˆ 阿廷环 A均成立，这表明 $\mathcal{O}_{M_B(X_s,r)\ \mathbb{M}|_{X_s}} \to \mathcal{O}_{M_B(X_s,r)\ \mathbb{M}|_{X_s}}$ 可经由 $\hat{\mathcal{O}}_{M_B(X_s,r)\ \mathbb{M}|_{X_s}} \xrightarrow{\mathbb{M}|_{X_s}} \mathbb{C}$ 分解（见 [LL22b，命题 3.2.1]）。

6.7. 弱算术复局部系统。本节介绍我们与 Johan de Jong 在[dJE22 第 3] 节中提出的弱算术局部系统概念。该概念弱于算术局部系统的概念。借助这一较弱的算术性概念，我们可以证明 Betti 模空间中的稠密性。完整的陈述和证明请参见同上文献。

6.7.1. 定义。设 X 是一个光滑复拟射影簇。我们固定一个¯ ¯射影紧化 $X \hookrightarrow \bar{X}$，使得 $\bar{X} \setminus X$ 是一个严格正规交叉¯除子。紧化 $X \hookrightarrow \bar{X}$ 定义在有限型域 $F \subset \mathbb{C}$上，并且

$$(X \hookrightarrow \bar{X}) = (X_F \hookrightarrow \bar{X}_F) \otimes_F \mathbb{C}.$$

¯它定义了 F的代数闭包 $F \subset \bar{F} \subset \mathbb{C}$。回忆同伦正合列

$$1 \to \pi_1(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}}) \to \pi_1(X_F, x_{\bar{F}}) \to \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \to 1$$

¯定义了 Gal$(\bar{F}/F)$ 对 ℓ进局部系统的作用，该作用来自 Gal$(\bar{F}/F)$ 在 $\pi_1(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}})$ 上的外作用¯。$X_{\bar{F}}$上的算术 ℓ进局部系统是指在此作用下具有有限轨道的局部系统。等价地，它下降到 $X_{F'}$，其中 $F \subset F' \subset \bar{F} \subset \mathbb{C}$ 是有限扩张。显然，对于此定义，我们可以将 $\bar{F}$¯替换为 F 中的有限扩张，因此不妨假设 X 有一个有理点。这样，外作用就成为一个作用。更一般地，我们可以将 F 替换为 F中的有限型 ¯ ¯ ¯扩张 $F \subset F'$，因为 Gal$(\bar{F}/F')$ 在 Gal$(\bar{F}/F)$ 中的像 $\to$ 是开集，所以定义不依赖于所选的 F （例如参见 [dJE22，注 3.2]）。

我们选取 X_S 在 S 上的一个模型 X_S，其中 S 是一个在 $\mathbb{Z}$上的有限型概形，且其分式域为 F，使得

$$(X_F \hookrightarrow \bar{X}_F, x_F) = (X_S \hookrightarrow \bar{X}_S, x_S) \otimes_S F$$

¯ ¯其中 $X_S \hookrightarrow \bar{X}_S$ 是光滑相对紧化，$\bar{X}_S \setminus X_S$ 是相对正规交叉除子。事实上，算术局部系统 $\mathbb{L}_\ell$ 几乎处处非分歧，也就是说，存在一个稠密开子概形 $S^\circ \subset S$，使得定义在 X_F上的 $\mathbb{L}_\ell$可下降到 X_{S°，参见例如 [Pet22，命题 6.1]，其中论证针对 S 数环的谱进行，另见其中所引参考文献。

我们有特化同态

$$sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C},\bar{F}} : \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}})$$

这源自黎曼存在定理所给出的 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$ 与 $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C}))$ 的有限群完备化之间的等同，接着是由基变换得到的连续同构，它将 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$ 与几何的 ´etale 基本群 $\pi_1(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}})$ 等同起来；随后我们可以将其与连续嵌入 $\pi_1(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}}) \to \pi_1(X_F, x_F)$ 复合，该嵌入从几何的 ´etale 基本群映到算术基本群。总而言之，这定义了

$$sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C},F} : \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1(X_F, x_F).$$

对于任意闭点 $s \in S$，若其上方有几何点 $\bar{s} \to S$，我们有一个特化同态

$$sp_{\bar{F},\bar{s}} : \pi_1(X_{\bar{F}}, x_{\bar{F}}) \to \pi_1^t(X_{\bar{s}}, x_{\bar{s}})$$

它延拓到

$$sp_{F,s} : \pi_1(X_F, x_{\bar{F}}) \to \pi_1^t(X_s, x_{\bar{s}}).$$

通过与 $sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}\,\bar{F}}$, $sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}\,F,}$复合，我们得到

$$sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C},\bar{s}} : \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1^t(X_{\bar{s}}, x_{\bar{s}}),\ sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C},s} : \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C})) \to \pi_1^t(X_s, x_{\bar{s}}).$$

其中上标 ^{t} 表示温和基本群。

若 τ: $K_1 \to K_2$ 是域同态，且 $\mathbb{L}_1$ 是由同态 ρ: $\pi_1(X(\mathbb{C})\ x(\mathbb{C})) \to GL_r(K_1)$ 定义在 K_1 上的拓扑局部系统，我们用 $\mathbb{L}_{K_1}^{\tau}$ 表示通过与同态 $GL_r(K_1) \to GL_r(K_2)$ 复合后得到的定义在 K_2 上的局部系统，其中该同态由 τ定义。

选取 $GL_r(\mathbb{C})$中的准幺幂共轭类 T_i 以及 $X(\mathbb{C})$上的挠秩 1¯局部系统 $\mathcal{L}$，我们回顾一下， $M_B(X, r, \mathcal{L}, T_i)$定义在某个数环 $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{C}$上。若一个复点 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ 经过某个 ℓ的 ℓ-进化，并通过 $sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}\,\bar{s}\,,}$下降为温和的 ℓ-进局部系统（其中 $s \in$ 是特征足够大的某个闭点），则称其是弱算术的；也就是说，它关于 $X_{\bar{s}}$ 是算术的，即它下降到 $X_{s'}$上，其中 $s' \to s$ 是 $\bar{s}$之下的某个有限扩张。正式地，我们将定义写如下。

定义 6.12（参见 [dJE22], 定义 3.1）。若存在

¯i) 一个素数 ℓ 和一个域同构 τ: $\mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{C}$ （因此 τ 通过 $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{C}$在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上定义一个¯$\mathcal{O}_K$-代数结构）；¯ii) 一个有限型概形 S，使得 $(X \hookrightarrow X, x, \mathcal{L}, T_i)$ 在 S 上有一个模型；iii) 一个剩余特征不同于 ℓ的闭点 $s \in |S|$；iv) 一个温和的算术 ℓ-进局部系统$\mathbb{L}_{\ell,\ \bar{s}}$ 定义在 $X_{\bar{s}}$ 上，其行列式为 $\mathcal{L}$，且无穷远处的单值属于 T_i;

使得 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ 与 $\left((sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}\,\bar{s}\,,})^{-1}(\mathbb{L}_{\ell,\ \bar{s}})\right)^{\tau}$ 同构。

注 6.13. τ 的选择使得 $M_B(X, r, \mathcal{L}, T_i)$ 中作为弱算术局部系统模点的复点集合不一定可数，而 $M_B(X, r, \mathcal{L}, T_i)$ 中作为算术局部系统模点的复点集合确实可数。因此，以目前的理解，这是一种“较差”的近似。

记号 6.14. 1) 固定 $(X, r, \mathcal{L}, T_i)$，记

$$W(X, r, \mathcal{L}, T_i) \subset M_B(X, r, \mathcal{L}, T_i)(\mathbb{C})$$

弱算术局部系统的轨迹 ms.
2) 固定 $(X, r, \mathcal{L})$，记

$$W(X, r, \mathcal{L}) = \cup_{\{T_i\}} W(X, r, \mathcal{L}, T_i) \subset M_B(X, r, \mathcal{L})(\mathbb{C})$$

所有秩为 r 、行列式为 $\mathcal{L}$ 的弱算术局部系统的轨迹。

6.7.2. 稠密性。

定理 6.15（参见 [dJE22, 定理 3.5）。1）固定（X， r， $\mathcal{L}$， T_i）， W（X， r， $\mathcal{L}$， T_i）在 M_B（X， r， $\mathcal{L}$， T_i）（$\mathbb{C}$）中稠密。2）固定（X， r， $\mathcal{L}$）， W（X， r， $\mathcal{L}$）在 M_B（X， r， $\mathcal{L}$）（$\mathbb{C}$）中稠密。

证明。针对 1)：令 $T_{\mathbb{C}}$ 为 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)(\mathbb{C})$ 中 $W(X,r,\mathcal{L},T_i)$ 的扎里斯基闭包，并令 $T_{\mathcal{O}_K}$ 为 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$ 中 $T_{\mathbb{C}}$ 的扎里斯基闭包。由于 $T_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathbb{C}$ 上方的域自同构群 $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_K}(\mathbb{C})$ 作用下不变，因此 $T_{\mathcal{O}_K}$ 是 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$ 中 $W(X,r,\mathcal{L},T_i)$ 的扎里斯基闭包。

若 $T_{\mathbb{C}}$ 不等于 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)(\mathbb{C})$，我们便可以选取一个闭点 $z\in M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$，其特征为 ≥ 3，且具有不可约单值化。商态射

$$M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)^{\square}\to M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$$

在 z 的某个邻域内是光滑的，因此讨论单值化的不可约性是有意义的。我们还假设它不在 $T_{\mathcal{O}_K}$ 上，并且对于投影 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)(\mathbb{C})_{\mathrm{red}}\to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ 是光滑的。我们选取一个闭点 $s\in S^{\circ}$，其特征 p 大于 z 的单值化群的基数、 $\mathcal{L}$ 的阶以及 T_i 的特征值。于是，与 z 对应的挠局部系统经由 $sp_{\bar{F},\bar{s}}$ 下降到 $\mathbb{L}_{z,\bar{s}}$，即 $X_{\bar{s}}$ 上的一个局部系统。通过将 Mazur 变形环 $D_{z,\bar{s}}$ ([Maz89, 命题 1]) 与 z 处 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$ 的形式完备化作同一认定，只需比较模函子（见 [dJE22, 命题 2.2], ），便可应用 Drinfeld 的论证 [Dri01, 引理 2.8]，得出结论：de Jong 猜想 [dJ01, 猜想 2.3]，（B¨ockle-Khare[BK06] 在特定情形下已证明，Gaitsgory [Gai07] 对 $\ell\geq 3$ 也已证明）意味着 $\mathbb{L}_{z,\bar{s}}$ 存在一个提升，使其成为 $X_{\bar{s}}$ 上具有算术性的 $\bar{\mathbb{Z}}_{\ell'}$-局部系统。于是，$(sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}\,\bar{s}},)^{-1}(\mathbb{L}_{\ell,\bar{s},z})$ 不属于 $T_{\mathcal{O}_K}(\bar{\mathbb{Q}}_{\ell})$。由不变性可知，对任意 τ，$((sp^{\mathrm{top}}_{\mathbb{C}\,\bar{s}},)^{-1}(\mathbb{L}_{\ell,\bar{s},z}))^{\tau}$ 不在 $T(\mathbb{C})$ 上，这与弱算术性的定义矛盾。

关于 2）：根据定理 6.2（[EK23，定理 1.3]），对于给定的挠秩 1 局部系统 $\mathcal{L}$，

$$\cup_{T_i} M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$$

在 $M_B(X,r,\mathcal{L})(\mathbb{C})$ 中稠密。结合 1），即可得到 2）。

□

注 6.16。定义 6.12 中弱算术局部系统的概念，是 Drinfeld 在复几何中借助有限域上的 de Jong 猜想证明柏原猜想时所迫使我们采用的，见 [Dri01]。他并未真正明确地发展这一概念，却证明了稠密性；他也没有明确提及这一点，但为光滑复射影复代数簇上的半单复局部系统给出了辛普森硬 Lefschetz 定理的一个算术证明 X ([Sim92，引理 2.6])。此处我们不详述最后这一点，参见 [EK21，定理 1.1]，其中我们将这一策略用于证明秩 $r=1$ 的情形，定义在 $\mathbb{F}_p$ 上。我们无法将该 $r=1$ 证明推广到高秩情形。该证明很大程度上依赖于 $M_B(X,1)$ 的结构；它是一个交换群概形，是由环面扩张有限群而成的。结合定理 6.15 的证明来看，缺少的一个关键点是如何从 ℓ 过渡到 ℓ'，即使这种过渡并非典范的（也就是说，不涉及算术性和伴随系统，见第 7 节）。这或许也与第 5 节中发展的 p'-离散生成（表示）概念有关。

7. 同伴

Abstract. Deligne 在 [Del80，猜想 1.2.10] 中定义了伴随系统的概念，并预言了其存在。我们介绍这一概念的（ℓ-进版本）：L. Lafforgue 在维数 1 的情形下给出了证明 [Laf02，定理 VII.′章`；Drinfeld 在光滑情形下将其推广到高维 [Dri12，定理 1.1] 。我们还将解释如何在 [EG18，定理 1.1], 中运用 Drinfeld 定理，证明关于上同调刚性复局部系统的 Simpson 整性猜想；说明我们为何采用这种方法，以及如何结合这一思路与 de Jong 猜想，从而定义 Betti 模空间的一个可积性性质并证明其成立 [dJE22，定理 1.1]。

7.1. 复数域一侧的动机。给定复数域 τ 的域自同构 $\mathbb{C}$，我们可以将复局部系统 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ 底层的单值表示后合成 τ，从而定义一个共轭复局部系统 $\mathbb{L}^{\tau}_{\mathbb{C}}$。给定域¯的域自同构 σ，它只有在是 $\mathbb{Q}_\ell$上的恒等映射时才可能连续¯ ¯；或者更一般地，给定某个素数 ℓ'对应的 $\mathbb{Q}_\ell$ 与 $\mathbb{Q}_{\ell'}$ 之间的域同构 σ，连续单值表示的后合成便不再连续（除非 $\ell = \ell'$ 和 σ 在 $\mathbb{Q}_\ell$上是恒等映射），因此我们无法通过这种简单的后合成过程定义 ℓ进局部系统的共轭 $\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell}$。

回到复数域一侧，由于 $\pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$是有限生成的（这里甚至不需要有限表示），因此存在有限多个元素

$$(\gamma_1, \dots, \gamma_s) \in \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$$

使得特征多项式映射

$$M_B(X,r)^{\square}_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\psi^{\square}} N_{\mathbb{C}} = \prod_{i=1}^{s} (\mathbb{A}^{r-1} \times \mathbb{G}_m)_{\mathbb{C}}$$
$$\rho \mapsto (\det(T - \rho(\gamma_1)), \dots, \det(T - \rho(\gamma_s))),$$

在第 6 节中定义，它可分解经过

$$M_B(X,r)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\psi} N_{\mathbb{C}},$$

具有 ψ 是闭嵌入这一性质。原因在于，半单表示由所有 $\gamma \in \pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$上的特征多项式函数唯一确定，且仅在共轭作用下确定。由 $\pi_1(X(\mathbb{C}), x(\mathbb{C}))$的有限生成性可知，只需从中适当地选取有限多个，就足以在共轭作用下辨识一个半单表示。于是，为统一记号，将 $\tau \circ \det(T - \rho(\gamma))$记作 $\det(T - \rho(\gamma))^{\tau}$，我们可以将上述讨论总结如下：

一个自同构 τ 给出一个交换图表 $\mathbb{C}$

$$(\star) \quad \begin{array}{ccccc} M_B^{irr}(X,r)(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{incl.}} & M_B(X,r)(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\psi} & N(\mathbb{C}) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{L}^{\tau}_{\mathbb{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{L}_{\mathbb{C}} \mapsto \mathbb{L}^{\tau}_{\mathbb{C}}} & & \downarrow{\scriptstyle (-)^{\tau}} \\ M_B^{irr}(X,r)(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{incl.}} & M_B(X,r)(\mathbb{C}) & \xrightarrow[\psi]{} & N(\mathbb{C}) \end{array}$$

上标 ^{irr} 表示不可约轨迹。

7.2. 有限域上的类比。现在假设 X 是有限域 $\mathbb{F}_q$ 上的光滑拟射影簇。我们将 $\mathbb{F}_q$ 的特征记为 p。固定一个不同于 p 的素数 ℓ。我们用 $M_\ell^{irr}(X_{\mathbb{F}_p}, r)$ 表示定义在 $X_{\mathbb{F}_p}$ 上的所有秩为 r ℓ 的 -adic 局部系统 $\mathbb{L}_\ell$ 的集合，这些局部系统

- 是算术的，也就是说，它们下降到某个有限扩张中的某个 $X_{\mathbb{F}_{q'}}$

$$\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'} (\subset \bar{\mathbb{F}}_p);$$

- - 在 $X_{\mathbb{F}_{q'}}$ 上在 $\mathbb{Q}_\ell$ 上不可约。¯

对于 $r = 1$，第二个条件当然是空的。

断言 7.1. $M_\ell^{irr}(X_{\mathbb{F}_p}, 1)$ 由 $X_{\mathbb{F}_p}$ 上秩为 1 ℓ-adic 的局部系统组成，其阶为与 p 互素的有限阶。

证明。一个阶与 p 互素的秩 1 ℓ-进局部系统的数据，等价于一个阶与 p 互素的 $X_{\bar{\mathbb{F}}_p}$ 的库默尔覆盖的数据；后者本身定义在某个 $\mathbb{F}_{q'}$ 上。这证明了一个方向。另一个方向是经典结果，见 [Del80，定理 ´eor`eme 1.3.1], ，其证明使用了类域论。用一个简洁的权论证来理解这一点也很不错：元素 $\mathcal{L} \in M_\ell^{irr}(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, 1)$ 属于某个 ℓ-进域 E 上的 $H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{O}_E^\times)$。我们写作

$$\mathcal{O}_E^\times = k_E^\times \cdot (1 + \mathfrak{m}\mathcal{O}_E)$$

乘法群，其中 $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_E$ 是 $\mathcal{O}_E$ 的极大理想，且采用 Teichm¨uller 提升。因此，$\mathcal{L} = \tau \otimes \mathcal{L}'$，其中 $\tau \in H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, |k_E^\times|) \subset H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{O}_E^\times)$ 是一个阶为 $m \geq 1$ 且与 p 互素的挠秩 1 局部系统，因为 $|k_E|^\times$ 本身的阶与 p 互素，并且 $\mathcal{L}' \in H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, (1 + \mathfrak{m}\mathcal{O}_E))$。于是 $\mathcal{L}^m = (\mathcal{L}')^m \in H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, (1 + \mathfrak{m}\mathcal{O}_E))$ 下降到 $X_{\mathbb{F}_{q'}}$。p-进对数 $\log_p$ 将乘法群 $(1 + \mathfrak{m}\mathcal{O}_E)$ 与加法群 $\mathcal{O}_E$ 等同。因此 $\log_p(\mathcal{L}^m) \in H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, \mathcal{O}_E) \subset H^1(X_{\bar{\mathbb{F}}_p}, \bar{\mathbb{Q}}_\ell)$ 下降$X_{\mathbb{F}_{q'}}$；由权论证可知，这迫使 $\log_p(\mathcal{L}^m)$ 等于 0。这就证明了另一个方向。□

Deligne 在 [Del80, 命题 1.3.14] 中从断言 7.1 以及定义在$X_{\mathbb{F}_{q'}}$上的不可约 ℓ-进局部系统的坦纳卡群结构，推导出对于 $M_\ell^{irr}(X_{\mathbb{F}_p}, r)$ 的定义而言，将条件替换为以下条件是等价的：

- 满足以下条件
  - ′ 下降为某个 $X_{\mathbb{F}_{q'}}$ 上的韦伊层，且该层定义在某个有限扩张上

$$\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'} (\subset \bar{\mathbb{F}}_p).$$

事实上，他在上述文献中证明，$X_{\mathbb{F}_{q'}}$ 上的不可约韦伊层经过 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p/\mathbb{F}_{q'})$ 的某个特征扭曲后，成为 ´étale¯ ¯。

集合 $M_\ell^{irr}(X, r)$ 是 $(\star)$ 左侧 $M_B^{irr}(X, r)(\mathbb{C})$ 的替代。在 $\mathbb{C}$ 上，这个集合具有一个概形结构；而在 $\mathbb{F}_p$ 上，我们只考虑这个集合。$M_B(X, r)(\mathbb{C})$ 的替代应考虑¯ ¯各种因子，以及每个因子上 $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p/\mathbb{F}_{q'})$ 的某个特征的各种扭曲。这就是为什么在 $(\star)$ 中，我们将讨论限制在 $M_B^{irr}(X, r)(\mathbb{C})$。

我们给定一个抽象域同构 $\sigma : \bar{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \bar{\mathbb{Q}}_{\ell'}$。它所包含的唯一“连续”信息，就是它将一个数域 $K \subset \mathbb{Q}_\ell$ 映到另一个数域

$K^\sigma \subset \mathbb{Q}_{\ell'}$。因此，右侧的竖直箭头（–）$^\sigma$只有在一个 $\gamma \in \pi_1(X_{\mathbb{F}_{q'}}, x_{\bar{\mathbb{F}}_p})$ 上才有意义，¯其中 $\mathbb{F}_q \subset \mathbb{F}_{q'}$（$\subset \mathbb{F}_p$）是一个有限扩张，并且 γ 的特征多项式的系数属于某个数域。此外，我们希望这类 γ 的集合能够像 ψ 在 $\mathbb{C}$ 上那样，完全识别出 $M_\ell^{irr}(X, r)$。我们知道以下事实。

事实 7.2. 由 Laf02，定理 7. 以及 ˇCebotarev 定理可知，$|X|$ 处所有闭点的弗罗贝尼乌斯元素的共轭类集合具有这两个性质。

因此，我们将 $N^\infty = \prod_{|X|}(\mathbb{A}^{r-1} \times \mathbb{G}_m)$ 和 ψ^∞ 记作所有闭点处这些弗罗贝尼乌斯元素的特征多项式映射。于是，Deligne 的伴随系统猜想可以用下图表示

$$
\begin{array}{ccc}
M_\ell^{irr}(X,r) & \xrightarrow{\psi^\infty} & N^\infty(\bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{\mathbb{Q}}_\ell) \\
{\scriptstyle ?\exists\ \mathbb{L}_\ell \mapsto \mathbb{L}_\ell^\sigma}\ \vdots & & \Big\downarrow {\scriptstyle (-)^\sigma} \\
M_{\ell'}^{irr}(X,r) & \xrightarrow[\psi^\infty]{} & N^\infty(\bar{\mathbb{Q}} \subset \bar{\mathbb{Q}}_{\ell'})
\end{array}
\tag{$\star\star$}
$$

所需的 $\mathbb{L}_\ell^\sigma$ 称为 $\mathbb{L}_\ell$ 关于 σ 的伴随系统。关于 Deligne 的精确表述，参见 Del80 中的 ℓ-adic 部分、猜想 1.2。

7.3. 几何性。表述（$\star\star$）掩盖了某些性质。关于我们不可约 ℓ-adic 层上弗罗贝尼乌斯的特征值是代数数这一事实，我们引用 loc. cit.，该文发表于 Deligne 提出猜想之后。这是因为，若 X 是 $\mathbb{F}_q$ 上的光滑曲线，L. Lafforgue 证明，作为朗兰兹纲领的推论，前述的 $\mathbb{L}_\ell$ 甚至是纯的。事实上，Deligne 在 Del80 中，以及 Deligne、Beilinson、Bernstein 和 Gabber 在 BBDG 中证明了几何局部系统是纯的或混合的，而 Lafforgue 证明了曲线上的几何性。迄今为止，我们尚不知道高维 $\mathbb{F}_q$ 上光滑拟射影空间上的算术局部系统是否具有几何性。但多亏 Drinfeld（[Dri12]），我们知道如何将伴随系统的存在性从曲线推广到这样的 X。我们指出，即使在¯曲线上，也不能将几何性从 $\mathbb{F}_p$ 提升到 $\mathbb{C}$，参见第6.6节。

尽管如此，鉴于 Simpson 关于不可约刚性复局部系统的几何性猜想 [Sim92, p.9]，Drinfeld 展示了如何在缺乏几何性的情况下，为 ℓ-进局部系统证明某种整性：一旦我们有一个几何不可约的 ℓ-进局部系统，对于任意 $\ell' \neq \ell$，我们就有所有闭点处特征多项式“相同”的几何不可约 ℓ'-进局部系统。这正是我们在 [EG18, Theorem 1.1] 中证明背后的哲学动因。

7.4. 关于 Drinfeld 的证明。我们概述其中的一些方面，完整证明请参见原文 [Dri12]。首先需要指出，遗憾的是，Drinfeld 的证明并未解决 Deligne 最初提出的关于 X 正规簇上的猜想 $\mathbb{F}_q$，而“仅仅”（如果这里可以说“仅仅”的话）解决了关于 X光滑簇上的猜想。一个问题是，我们尚不了解简单算术局部系统在非正规子簇上的限制，尤其不清楚其是否为半单，也不清楚何时为半单。甚至对于复代数簇，这个关于拉回保持半单性的问题也尚未得到解决，相关讨论见 [Moc07, 定理 25。30], 其中有一处笔误，（证明确实假设定义域和值域是

光滑的，而且可以推广到正规簇）。另见 [dJE22，第 7 节。3]其中给出了半单性结论的一种算术证明；关于 [Moc07, 定理 25。30] 对正规簇的证明，以及 [D'Ad20, 定理 1.2。2] 对非正规情形的进一步研究。

我们固定 $\mathbb{L}_\ell \in M_\ell^{irr}(X,r)$，以及一个同构 $\sigma\colon \bar{\mathbb{Q}}_\ell \xrightarrow{\cong} \bar{\mathbb{Q}}_{\ell'}$。根据 Deligne 的定理 [Del12，定理 3.1]，$\psi^\infty(\mathbb{L}_\ell) \in N^\infty(\mathcal{O})$，其中 $\mathcal{O}$ 是 $\mathbb{Q}_\ell$ 中的一个数环。这确定了 ℓ-进完备化 $\mathcal{O}_E \subset \mathbb{Q}_\ell$，其中 E 是一个 ℓ-进域，并连同数环 $\sigma(\mathcal{O}) \subset \mathbb{Q}_{\ell'}$ 及其到一个 ℓ'-进环 $A \subset \mathbb{Q}_{\ell'}$ 的完备化。我们将极大理想记为 $\mathfrak{m}_E \subset \mathcal{O}_E$，$\mathfrak{m} \subset A$。证明的出发点是如下数据（参见 [Laf02]，，同上）：对于任意光滑曲线 $C/\mathbb{F}_q$，以及任意在一般点处为嵌入的态射 $f_C\colon C \to X$，给定一个定义在 A 上、定义于 C 上的半单 ℓ'-进局部系统 $\mathbb{L}_{A,C}$，且其从 C 和 C' 拉回到交集点 $C \times_X C'$ 上所得的局部系统同构。此外，存在这样的曲线 C，使得 $\mathbb{L}_{A,C}$ 在几何上不可约。这些局部系统 $\mathbb{L}_{A,C}$ 正是通过取 $\mathbb{L}_\ell|_C$ 的伴随系统 $\mathbb{L}_\ell|_C^\sigma$ 的 A-形式而得到的。

目标是在 X 上构造一个不可约的 A-进局部系统 $\mathbb{L}_A$，使其在那些曲线 C 上的限制同构于 $\mathbb{L}_{A,\,C}$。这将是 σ 的伴随系统 $\mathbb{L}_\ell^\sigma$，在记号中省略了它可定义在 A之上的事实。如果我们能够做到这一点，根据切博塔廖夫稠密性定理，$\mathbb{L}_A$ 是唯一的。

7.4.1. 约化步骤。为此，我们首先在某个光滑簇 X' 上构造一个伴随系统，并赋予它一个有限 ´étale 伽罗瓦覆盖 $h : X' \to X$，其伽罗瓦群为Γ。在这种情况下，存在一条光滑几何连通曲线 $\iota\colon C \to X$，使得复合态射

$$q : \pi_1(C,x) \xrightarrow{\iota_*} \pi_1(X,x) \xrightarrow{q_0} \Gamma$$

是满射，其中 $x \to C$ 是一个几何点，参见例如 [EK12，命题 B.1] 及其中的参考文献。记 $h_C\colon C' = C \times_X X' \to C$ 和 $\iota'\colon C' \to X'$ 为拉回态射。

断言 7.3. 设 $\mathbb{L}_{X'}$ 是一个 ℓ-进局部系统，且 $\iota'^*\mathbb{L}_{X'} =: \mathbb{L}_{C'}$ 下降为 ℓ-进局部系统 $\mathbb{L}_C$（定义在 C 上），即 $\mathbb{L}_{C'} = h_C^*\mathbb{L}_C$。那么 $\mathbb{L}_{X'}$ 下降为 ℓ-进局部系统 $\mathbb{L}_X$（定义在 X 上），即 $\mathbb{L}_{X'} = h^*\mathbb{L}_X$。

注 7.4. Drinfeld 并未直接写出断言 7.3。这个约化隐藏在他下面给出的有界性结果的证明中。我们还要指出，尽管这一点在此处并无用处，若 X 定义在 $\mathbb{C}$ 上，那么 ι 也会存在；并且将复局部系统替换 ℓ-进局部系统后，该断言仍成立，证明也相同。

证明。将对应于 $\mathbb{L}_X$ 的表示 $\rho_{X'}\colon \pi_1(X',x) \to GL_r(\mathbb{Q}_\ell)$ 通过 $GL_r(\mathbb{Q}_\ell)$ 中的一个元素作共轭后，我们可以假设 $(\iota')^*\rho_{X'} = (h')^*\rho_C$，其中 $\rho_C\colon \pi_1(C,x) \to GL_r(\mathbb{Q}_\ell)$ 是对应于 $\mathbb{L}_C$ 的表示。q 的满射性蕴含

$$\mathrm{Ker}\big(\pi_1(C',x) \to \pi_1(X',x))\big) \to \mathrm{Ker}\big(\pi_1(C,x) \to \pi_1(X,x))\big)$$

这意味着 t ρ_C 可经由 $\bar{\rho}_C$ 分解：$\bar{\pi}_1(C,x) \to GL_r(\mathbb{Q}_\ell)$，其中

$$\bar{\pi}_1(C,x) = \iota_*\pi_1(C,x) \subset \pi_1(X,x).$$

对于每个元素 $\gamma\in\Gamma$，我们选取一个元素 $c_\gamma\in\bar\pi_1(C,x)$，使得 $q_0(c_\gamma)=\gamma$。于是，任意元素 $g\in\pi_1(X,x)$ 都可以唯一地写成 $g=c_\gamma\cdot h_*(\alpha)$，其中某个$\gamma\in\Gamma$ 以及 $\alpha\in\pi_1(X',x)$。我们设

$$\rho_X(g)=\bar\rho_C(c_\gamma)\cdot\rho_{X'}(\alpha).$$

很容易验证，ρ_X 定义了一个连续表示。

□

我们按如下方式构造 h。首先，对 $\mathbb{L}_X$进行"温和化"：如果 $\ell\geq 3$，我们定义有限 ´étale 伽罗瓦覆盖 h_0：$Y_0\to X$，它对应于 $GL_r(\mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E)$中的剩余表示；否则，如果 $\ell=2$，则对应于 $GL_r(\mathcal{O}_E/\mathfrak{m}_E^2)$。然后，将 $\mathbb{F}_q$ 替换为有限扩张$\mathbb{F}_{q'}$后，在 $U\subset Y_0\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q'}$ 上存在一个扎里斯基稠密开集，并且在U 上存在一个初等纤维化，其意义见 Artin [SGA4，第 XI 卷，命题 3.3]。这意味着存在一个纤维化 $f:U\to S$，相对维数为 1，且光滑，并有一个相对紧化 $\iota:U\hookrightarrow U$，使得 $U\setminus U\to S$ 为有限 ´étale。我们取 $h:Y\to X$为 h_0 与 $Y_0\otimes_{\mathbb{F}_q}\mathbb{F}_{q'}\to Y_0$的复合的伽罗瓦包。现在，$\ell$-进局部系统 $h^*\mathbb{L}_\ell$ 作为一个 ´étale 层是半单的，其所有直和项都是温和的。因此，我们可以假定 $X=Y$, $\mathbb{L}_\ell$ 是温和的，并且在 X的一个稠密开集 U 上存在初等纤维化。

我们可以用 X 替换 $U\subset X$。这由 Kerz-Schmidt [KS09，引理 2.1] 和 [KS10，基于 Wiesend 的工作[Wie06]的引理 2.9] 中的分歧结果得出：设 $\mathbb{L}^\sigma_{\ell,\,U}$ 是 $\mathbb{L}_\ell$ 在 U上的伴随系统。如果它在 $X\setminus U$ 上有分歧，那么存在一条曲线 $C\to X$，使得 $\mathbb{L}^\sigma_{\ell,\,U}|_{C\times_X U}$沿 $C\setminus C\times_X U$分歧。根据 [Del72，第 9.8], 条定理，´eor`eme，曲线上的伴随对象保持分歧。这就产生了矛盾。因此，我们可以假设 X 具有一个初等纤维化 $f:X\to S$，且 $\mathbb{L}_\ell$ 是温和的。再次应用断言 7.3，我们可以假设该初等纤维化有一个截面 $\sigma:S\to X$；此外，我们可以将 S 缩至一个稠密开集，并将 X 缩至其逆像。

7.4.2. 有界性。Drinfeld 的证明中的关键步骤（[Dri12，命题 2.12]）是一个有界性结果，它将 Wiesend 的结果 [Wie06，命题 17]推广到了非阿贝尔情形。在可能将 S 缩至一个稠密开集，并将 X缩至其逆像之后，Drinfeld 构造了一个无限序列

$$\ldots\to X_{n+1}\to X_n\to\ldots\to X_1\to X$$

有限 ´etale 覆盖，使得

(i) 对任意 $n\in\mathbb{N}_{>0}$，以及任意上述 $C\to X$，由 $\mathbb{L}_{A,\,C\times_X X_n}$ 定义的 $G_n=GL_r(A/\mathfrak{m}^n)$-扭子是平凡的；(ii) 对于 $x\to X$ 一个几何点，令 $H_n=\pi_1(X_n,x)$，群 $\cap_n H_n\subset\pi_1(X,x)$ 含有一个子群 H，该子群在 $\pi_1(X,x)$ 中是闭且正规的，并且 $\pi_1(X,x))/H$ 是几乎是 pro-ℓ 的，也就是说，它是一个有限群被一个 pro-ℓ-群扩张得到的群。

性质 (ii) 不依赖于 x 的选择。

若 $\dim(X)=1$，我们应用曲线上的伴随对象的存在性，接着将 H 定义为单值表示的核，将 H_n 定义为截断表示 $\pi_1(X_{\mathbb{F}_q},x_{\bar{\mathbb{F}}_q})\to GL_r(A)\to G_n$ 的核，因此 $H=\cap_n H_n$，而 $X_n\to X$ 是由 H_n 定义的有限伽罗瓦 ´étale 覆盖。

我们假设 $\dim(X) \geq 2$，并且 X 是一个初等纤维化，记作 $f\colon X \to S$，因此 $X \to S$ 是一条相对曲线，具有良好的相对紧化 $\iota\colon X \hookrightarrow \bar{X}$，位于 S 之上；其中 $X \setminus X \to S$ 是有限 ´étale，且带有一个截面 $\sigma\colon S \to X$。

7.4.3. 模空间。感谢 Dustin Clausen 就命题 7.5 与我们进行了深入讨论。这里给出的证明思路基于 Drinfeld 的想法，归功于他。

命题 7.5（[Dri12],引理 3.1，证明）。将 S 替换为一个稠密开集后，存在一列有限 ´étale 满态射

$$\ldots \to T_{n+1} \to T_n \to \ldots \to T_1 \to S$$

使得 T_n 是 X 上温和 G_n-扭子的精细模空间，且这些扭子在截面 $\sigma(S)$ 上方平凡。

证明。我们考虑 S上的三个群胚范畴中的 ´étale 层。对于 $S' \to S$

1) $\mathcal{F}_n(S')$ 是温和 G_n-扭子的群胚，配备在截面 $\sigma' = \sigma \times_S S'$ 上的平凡化：$S' \to X' = X \times_S S'$；2) $\mathcal{G}_n(S')$ 是 X'上的温和 G_n-扭子的群胚；3) $\mathcal{H}_n$ 是 S' 上的 G_n- 扭子的群胚。

根据 [SGA1，第 XIII 讲，第 2.7]条推论， $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{G}_n$ 是 1-可构造的，且与基变换相容。另一方面， $\mathcal{F}_n$ 是限制映射 $(\sigma')^*\colon \mathcal{G}_n(S') \to \mathcal{H}_n(S')$ 与映射 $\mathcal{G}_n(S') \to \mathcal{H}_n(S')$ 的等化子；后一个映射将 X' 上的任意G_n-扭子映到 S' 上的平凡扭子。因此，根据 [SGA1，第 XIII 讲，第 3.1.1],条引理，$\mathcal{F}_n$ 也是 1-可构造的，且与基变换相容。此外，将 $\mathcal{F}_n$视为预层时，它本身已经是层，因为截面上的平凡化迫使 $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_n(S')) = \{1\}$。因此，存在稠密开子概形 $S_{n+1} \subset S_n \subset S$，使得将$\mathcal{F}_n$ 限制到 S_n 后，可由一个在 S_n 上有限且 étale 的概形 T_n 表示。经过约化步骤，我们可以假设 $S_1 = S$。于是， X' 上的温和 G_1-扭子连同其在 σ' 上的一个平凡化，可与 $T_1 \to S$ 的 S'-点相对应。

现在说明为什么对于 $n \geq 1$， $\mathcal{F}_{n+1} \to \mathcal{F}_n$ 是 ´étale 有限满射。我们用 V_{n+1} 表示 $G_{n+1} \to G_n$ 的核。它是一个交换群，事实上是一个有限维的 $\mathbb{F}_{\ell'}$ 向量空间。它不是中心的，也就是说，通过提升到 G_{n+1} 并在 V_{n+1} 上取共轭所定义的同态 χ_n：$G_n \twoheadrightarrow \Gamma_n \subset \mathrm{Aut}(V_{n+1})$ 并非平凡。将任意扭子 $P_n \in H^1(X, G_n)$ 提升为 X 上的 G_{n+1}-扭子的障碍属于 $H^2(X, V_{n+1}^{\chi_n})$，其中若将 P_n 沿 χ_n 推前所定义的 $V_{\ell+1}$-扭子，则 $V_{\ell+1}^{\chi_n}$。由 f 的上同调维数可得正合列

$$H^2(S, f_* V_{n+1}^{\chi_n}) \to H^2(X, V_{n+1}^{\chi_n}) \to H^1(S, R^1 f_* V_{n+1}^{\chi_n}).$$

由于 ℓ' 与 p 互素，所有 V_{n+1} 都是温和的，因此这样的局部系统只有有限多个。由于 f 是初等纤维化，$V_{n+1}^{\chi_n}$ 是温和的，故对于 $i \geq 0$，可构造层 $R^i f_* V_{n+1}^{\chi_n}$ 都是局部系统。因此存在一个有限 ´étale 覆盖$T_\circ \to S$，定义了 $b_\circ$：$X_{T_\circ} = X \times_S T_\circ \to X$，使得 $H^2(X, V_{n+1}^{\chi_n})$ 在 $H^2(X_{T_\circ}, b_\circ^* V_{n+1}^{\chi_n})$ 中的像为零。

一旦 G_n 上的一个扭子能够提升为 $X_{T_\circ}$ 上的一个 G_{n+1}-扭子，要使其在截面 $\sigma_{T_\circ} = \sigma \otimes_S T_\circ$ 上平凡化，我们采用类似的论证：$T_\circ$ 上只有有限多个 V_{n+1}-扭子，因此经过定义 b：$X_T = X \times_S T \to X$ 的有限 ´etale 基变换 $T \to T_\circ$ 后，它们全都平凡。由此我们得出，对于任意 $S' \to S$ 以及 S 上方的任意 S'-点 $S' \to T_n$，

存在一个提升 $S\otimes_S T\to T_{n+1}$，因此 $T_{n+1}\to T_n$ 对于 $n\geq 1$ 是有限 ´etale 的。证明到此完成。

□

因此，存在一个覆盖在 $T_n\times_S X$ 上的通用 G_n-扭子，其到X的 Weil 限制为 $Y_n\to X$。由此得到一座由有限 ´étale 满态射构成的塔

$$\ldots\to Y_{n+1}\to Y_n\to\ldots\to Y_1\to X.$$

另一方面，根据归纳假设，我们有一座塔

$$\ldots\to S_{n+1}\to S_n\to\ldots\to S_1\to S$$

它验证了将 X 替换为 S 后的 (i) 和 (ii)。然后将 $X_n=Y_n\times_S S_n$ 插入一座塔中

$$\ldots\to X_{n+1}\to X_n\to\ldots\to X_1\to X$$

由有限 ´étale 满态射构成。断言这就是所需的塔。

性质 (i) 显然，因为根据定义，对于任意几何点 $s\to S$,

$$\mathrm{Hom}_S(s,Y_n)=\{\text{tame } G_n-\text{torsors over } U_s\}$$

因此，对于这样的几何点 s，$(Y_n)_s\to X_s$ 是使每个温和 G_n-扭子在 X_s 上平凡化的万有有限 ´étale 覆盖。

我们来处理性质 (ii)。设 $\eta\to S$ 是一个泛点。取 x 为几何点 $\bar\eta$ 在截面 σ 下的像，其中 $\bar\eta$ 位于 η 上。由于 X 是正规的，$\pi_1^t(X_\eta,x)\to\pi_1^t(X,x)$ 是满射，因此在 (ii) 中，我们可以用 X_η 替换 X。这给出基本群的同伦正合列

$$1\to K:=\pi_1^t(X_{\bar\eta},x)\to\pi_1^t(X_\eta,x)\to\Gamma:=\pi_1(\eta,x)\to 0$$

其中上标 ^{t} 表示相对于 ι 的温和性，下标表示纤维。我们定义

$$H_n=\mathrm{Ker}\big(\pi_1^t(X_\eta,x)\to\mathrm{Aut}((X_n)_x)\big).$$

于是 H_n 被插入一个正合列

$$1\to K_n\to H_n\to\Gamma_n\to 1$$

其中

$$K_n=H_n\cap K=\cap_\rho\mathrm{Ker}\big(\pi_1^t(X_{\bar\eta},x)\xrightarrow{\rho}G_n\big)$$

$$\Gamma_n=\mathrm{Ker}\big(\Gamma\to\mathrm{Aut}K/K_n\big).$$

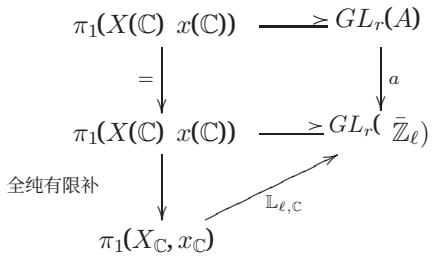
由于 K 是拓扑有限生成的，K_n 的定义中只有有限多个 ρ，因此 $K/\cap_n K_n$ 几乎是 pro-ℓ。最后，$\Gamma/\cap_n\Gamma_n$ 是 $\mathrm{Im}\big(\Gamma\to\mathrm{Aut}(K/\cap_n K_n)\big)$ 的一个商，而 $\mathrm{Aut}(K/\cap_n K_n)$ 也几乎是 pro-ℓ。事实上，一个自同构必须保持极大 pro-ℓ 子群，以及其中到其第一$\mathbb{F}_\ell$-同调群的核；该核本身是 pro-ℓ 的，且具有有限指数。这就证明了 $H=\cap_n H_n$的 (ii)，并完成了对具有初等纤维化 $X\to S$的 X 的这一部分证明。

7.4.4. 粘合。于是，关键在于证明前述性质足以粘合 $\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C}$。证明沿用了 Kerz 的一个思路，参见 [Dri12，第 4]，节。Drinfeld 最初采用了一个更困难的论证。首先，我们使用 Lefschetz 型论证，找出一条曲线 $\varphi\colon C \to X$，使其包含 x，且 $\varphi_{*}\colon \pi_1(C,x) \to \pi_1(X,x)/H$是满射。这是可行的，因为可在有限商上检验满射性；该有限商是 $\pi_1(X)/H$ 的剩余商（若 $\ell \geq 3$，若$\ell = 2$，则在此处模掉 $\mathfrak{m}^2$）的扩张，其扩张群为极大 $\mathbb{F}_{\ell}$-向量空间商，参见 [EK11，引理 8.2]（另见上文，其中已经使用了类似性质来证明 Aut$(K/\cap_n K_n)$ 几乎是 pro-ℓ）。由 (i) 和 (ii)，$\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C}$在 Ker$(\varphi_{*})$ 上的限制是幺幂的，但它也必须是半单的，因为 Ker$(\varphi_{*}) \subset \pi_1(C,x)$ 是正规子群，而 $\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C}$ 本身是半单的。因此，$\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C}$ 的单值化群是 $\pi_1(C,x)/$Ker$(\varphi_{*}) = \pi_1(X,x)/H$的一个商，由此定义了一个表示$\pi_1(X,x) \to GL_r(A)$，该表示先验地依赖于 C。将其底层局部系统记为 $\mathbb{L}_{\ell'},_{X}$。根据定义，它在 C 上的限制等于 $\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C}$。为了计算 $\mathbb{L}_{\ell'},_{X}$ 在所有闭点上的限制，我们取其他满足相同性质的曲线 $\varphi_{C'}\colon C' \to X$，使它们覆盖所有闭点。如果确保 C和 C'在足够多的点相交，那么根据 [Fal83，命题 5]，$(\mathbb{L}_{\ell'},_{X}|_{C} = \mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C}, \mathbb{L}_{\ell'},_{X}|_{C'}, \mathbb{L}^{\sigma}_{\ell},_{C'})$ 可由其在交点处的取值确定。这样便完成了对具有初等纤维化 $X \to S$的 X 的证明。

7.5. 上同调刚性局部系统是整的，参见 [EG18]，定理 1.1。我们概述 Michael Groechenig 在同上所作证明：设 X 是定义在复数域上的光滑拟射影簇，设 $T_i \subset GL_r(\mathbb{C})$为准幺幂矩阵的共轭类，且 $\mathcal{L}$ 是一个挠秩 1 局部系统。以下定理的启发式说明参见第 7.3 节。

定理 7.6. $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)$ 中的不可约上同调刚性局部系统是整的。

证明。设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的光滑拟射影簇，固定一个挠特征 $\mathcal{L}$ 和准幺幂共轭类 $T_i \subset GL_r(\mathbb{C})$。设 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ 是 $M_B(X,r,\mathcal{L},T_i)(\mathbb{C})$ 中的一个孤立点。它由表示 $\rho_{\mathbb{C}}\colon \pi_1(X(\mathbb{C}),x(\mathbb{C})) \to GL_r(A)$ 定义，其中 A 是 $\mathbb{Z}$ 上的有限型环。取 $a\colon A \to \bar{\mathbb{Z}_{\ell}}$ 为 A 的一个 $\mathbb{Z}_{\ell}$-点。它通过如下分解定义一个 ℓ-进局部系统 $\mathbb{L}_{\ell,\mathbb{C}}$



沿用 6.2 的记号，对于闭点 $s \in |S|$，若其特征与 $\mathbb{L}_{\ell,\mathbb{C}}$的剩余表示的阶、$\mathcal{L}$ 的阶以及无穷远处单值的特征值的阶互素，并且对于这些（有限多个）上同调刚性局部系统是整的，则以下性质成立。

1) $\mathbb{L}_{\ell,\mathbb{C}}$ 下降到 $\mathbb{L}_{\ell,s'}$ （[Sim92，定理 4]），其中某个 $s' \to s$ 有限于 $\bar{s}$ 以下（还需补全论证，以处理无穷远处的条件），同时保持 $\mathcal{L}$ 和 T_i （[Del73，第 1.1.10] 节）；2) 伴随系统 $\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell,s'}$ 仍具有行列式 $\mathcal{L}$，且无穷远处单值的半单化与 T_i 的相同（[Del72，定理 9.8]）；3) 交叉上同调满足：

$$IH^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathbb{L}_{\ell,\bar{s}})) = 0 = IH^1(X, \mathcal{E}nd^0(\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell,\bar{s}}))$$

由权论证 [EG18，定理 1.1] 的证明可知；

4) 因此，$\mathbb{L}_{\ell,\mathbb{C}} \mapsto sp_{\bar{s}}^{-1}(\mathbb{L}^{\sigma}_{\ell,\bar{s}})$ 是从上同调刚性的 ℓ-进局部系统集合到上同调刚性的 ℓ'-进局部系统集合的双射。因此，不存在非整位置 ℓ'。证明完毕。□

注 7.7。1) 若将 GL_r 替换为约化群 $G \subset GL_r$，则“同样的”证明仍然成立，参见 Klevdal-Patrikis 的 [KP22] 。

2) 并非所有刚性局部系统都是上同调刚性的，参见 [dJEG22]。以目前的认知，已知的例子在某个较小的约化群 $G \subset GL_r$ 中都是上同调刚性的，如 1) 所述。然而，我没有哲学上的论证说明刚性局部系统为何应当在某个较小的约化群 $G \subset GL_r$ 中是上同调刚性的，或者为何不应如此。

7.6. 整个贝蒂模空间的整性，参见 [dJE22], 定理 1.1。在定理 6.15 中，我们利用 de Jong 猜想证明了弱算术局部系统在其贝蒂模空间中稠密。在定理 7.6 中，我们利用 ℓ-adic 伴随系统的存在性证明了上同调刚性局部系统是整的。结合这两个定理中的关键思想，我们为不可约局部系统的整个贝蒂模空间定义了一种（弱）整性概念，并证明以下定理。

设 X 是定义在复数域上的光滑拟射影簇，设 $T_i \subset GL_r(\mathbb{C})$是拟幺幂矩阵的共轭类，并设 $\mathcal{L}$是一个挠秩 1 局部系统。我们用 $M_B^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i)$表示不可约局部系统的贝蒂模空间。关于定义，参见 [dJE22，第 2 节。1]及其中的参考文献：若 $\mathbb{L}$ 是一个点，且定义在环 A上，则按定义，若对所有域值点 $A \to \kappa$， $\mathbb{L}$ 都是不可约的，则 $\mathbb{L} \otimes_A \kappa$ 是不可约的。

定理 7.8. 如果 $M_B(X, r, \mathcal{L}, T_i)$ 存在一个不可约的复点，那么对于所有素数 ℓ，都存在一个秩为 r、行列式为 $\mathcal{L}$ 的不可约 ℓ-进局部系统，其无穷远处的单值在半单化意义下与 T_i 共轭。

证明。存在一个不可约的复点 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$，等价于态射 $M^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ 是支配的，其中 K 是 $\mathcal{L}$ 和 T_i 的定义所依赖的数域。由一般光滑性可知，在 $M_B^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i)$ 上存在一个特征为 $\ell > 0$ 的闭点 z，它对态射 $M^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i)_{red} \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ 是光滑的。我们选取 $s \in S$，即良好紧化 $X \hookrightarrow \bar{X}$、$\mathcal{L}$ 和 T_i 的定义概形 $\bar{}$ 上的一个闭点，使得 z 下降到 $X_{\bar{s}}$。现在应用定理 6.15 证明中的论证，可知在 $X_{\bar{s}}$ 上存在一个不可约的秩为 r 的算术 $\mathbb{Q}_\ell$-局部系统，其剩余局部系统为 z，且无穷远处的单值属于 T_i up 的共轭类

¯ ¯直到半单化。按照定理 7.6 证明中的做法，现在选取 σ： $\mathbb{Q}_\ell \cong \mathbb{Q}_{\ell'}$，则同一 $X_{\bar{s}}$ 上的 σ-伴随系统具有正确的行列式和无穷远处的单值。我们按照定理 7.6 证明中的做法，通过 $sp_{\mathbb{C},\ \bar{s}}$ 将其沿 $X_{\mathbb{C}}$ 拉回。证明完毕。

□

注 7.9. 我们可以从多方面加强定理 7.8。我们不必假设只有一个不可约复局部系统，而可以要求有无穷多个两两不同构的 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$，如此便可推出对所有 ℓ ([dJE22，定理 1.4])，都存在无穷多个这样的不可约 $\mathbb{L}_\ell$。我们还可以要求 $\mathbb{L}_{\mathbb{C}}$ 的代数单值化例如包含 $SL_r(\mathbb{C})$，如此便可对 $\mathbb{L}_\ell$([dJE22，定理 1.5])等得出相应结论。但我们真正希望理解的核心问题仍未解决：通过 [EG18] 开创的、利用伴随系统得到整性的这一方法，我们不知道在进行此构造的特征 p 下的 $X_{\bar{s}}$ 上，当我们经由伴随系统转到 $\mathbb{Z}_{\ell'}$ 时， $M_B^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i)$的“分支维数”是否保持不变。这种说法并不严谨。我们应该说明：在 ℓ处，我们取 $M_B^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i)$在一个对 $M_B^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ 而言光滑的闭点处的完备化；这样，包含 z 的分支便定义良好，其维数为 d。我们可以设想，σ-伴随系统也位于 $M_B^{irr}(X, r, \mathcal{L}, T_i)$的一个维数为 d的分支上。例如，对 $d = 0$ 而言，这将彻底证明 Simpson 整性猜想。

7.7. 障碍。忽略无穷远处的条件，若固定一个有限表示群 Γ、一个自然数 $r \geq 1$ 以及一个秩 1 扭复特征$\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^\times$，我们在 [dJE22, 定义 1.2] 中提出了以下定义。

定义 7.10. 若假设存在一个不可约表示 $\rho : \Gamma \to GL_r(\mathbb{C})$，其行列式$\chi$，那么对于任意素数 ℓ，都存在一个表示 $\rho_\ell : \Gamma \to GL_r(\mathbb{Z}_\ell)$，其¯行列式 χ，且在 $\mathbb{Q}_\ell$上不可约；此时称 Γ 关于 (r, χ) 具有弱整性。

接着，根据 Becker-Breuillard-Varj`u [BBV23], 的研究，存在一些不具有弱整性性质的数对 (Γ, χ)。一个例子是： Γ 为由两个字母 a, b 生成、满足一个关系 $b^2a^2 = a^2b$的群， χ 是平凡特征，并且 $r = 2$。该例在 $\ell = 2$处不整，参见 [dJE22, 例 7.4]。根据定理 7.8，容易算出，若 Γ 是 $X(\mathbb{C})$ 的拓扑基本群，其中 X 在 $\mathbb{C}$ 上光滑拟射影，且 χ 是任意挠特征，则它具有弱整性（参见 [dJE22, 定理 1.3]）。由此得到以下定理。

定理 7.11. 设 Γ 为有限表示群， χ 为 Γ的挠特征，$r \geq 1$ 为自然数。若 Γ 关于 (r, χ) 不具有整性，则 Γ 不可能是光滑复拟射影簇的拓扑基本群。

证明依赖于定理 7.8。当然，这样定义的障碍绝非来自容易证明的定理，至少以目前的认知水平而言是如此。如前所述，定理 7.8 既依赖于有限域上曲线的朗兹对偶，也依赖于几何朗兹对偶。但其优点在于，在定义障碍时，我们无需指定 Γ 中哪些元素应当来自无穷远处的局部基本群：其中没有任何元素具有这一性质。

8. Lecture 8: Rigid Local Systems and F-Isocrystals

Abstract. 簇 $X_{\mathbb{C}}$ 上的刚性联络，若其在 $\mathbb{C}$ 上光滑射影，则限制到 $X_{\mathbb{C}}$ 的非分歧射影p-进模型 X_W 的形式 p-完备化 X_W 上，会得到 F-等晶体。这一结论在 [EG20 定理 1.6], 中得到证明，所用的是关于 X_W 模 p 约化上的 Higgs-de Rham 流理论。我们在此给出该定理的一个 p-进证明；该证明与 Johan de Jong 合作完成，依赖于这样一个事实：对于 $p \geq 3$， X_W 上联络的弗罗贝尼乌斯拉回是良定义的，无论模 p 约化的 p-曲率是否幂零。然而，迄今为止，这一证明尚未得到 [EG20 定理 5.4] 所证明的晶体性；这一性质可以表述为：当 p 足够大时，在 p-进簇 $X_{\overline{\mathrm{Frac}(W)}}$ 上得到的 p-进局部系统可下降为 $X_{\mathrm{Frac}(W)}$ 上的晶体局部系统。同一定理在强上同调刚性条件下的版本已在 [EG21] 中完成。我们将这一讨论留到第 9 讲。

8.1. 晶体位、晶体与等晶体。定义的详细内容及适当的参考文献，参见 [EG20，第 2 节。

给定一个在完美特征为 $p > 0$ 的域 k 上光滑的 X，我们用 $W = W(k)$ 表示 Witt 向量环，用 $W_n = W_n(k) = W/p^n$ 表示其第 n 次截断。我们定义位点 (X/W_n)，其对象为 W_n 上的 PD-增厚 (U, T, δ)，其中$U \hookrightarrow T$ 是由理想 $I \subset \mathcal{O}_T$ 定义的闭嵌入，且 δ 在其上定义了一个关于 (W_n, pW_n) 的PD-结构。因此，对于关于 (W_n, pW_n) 的所有 x_i, $i = 1, \ldots, s$，有

$$mx_1^{[n_1]} \cdots x_s^{[n_s]} = 0$$

对某些幂 $n_i, m \in \mathbb{N}$ （参见 [Ber74, I 1.3.1 ii), p.56]）。

这给出了函子 $(X/W_n) \hookrightarrow (X/W_{n+1})$，而晶体位 (X/W) 是 n 上 (X/W_n) 的余极限。Hom 集是显然的那些尊重整个结构的 Hom。相干模中的一个晶体 $\mathcal{F}/W$（定义在 X/W 上）是对所有 (U, T, δ) 给定一个相干层 $\mathcal{F}_T$，使得过渡函数为同构。等晶体范畴具有相同的对象，而 Hom 集是阿贝尔群，并且按 $\mathbb{Q}$张量化于 $\mathbb{Z}$。对我们而言，主要的具体描述是 [EG20, ˆ Theorem 2.19, Corollary 2.20]；根据该描述，若 X_W 是提升 X的、在 W 上的本质光滑形式概形，则一个晶体是

i) ˆ X_W上的平坦形式联络 (ˆE_W, ˆ∇_W)； ˆ ˆ ii) 使得 $(E_W, \nabla_W) \otimes_W k$ 可由子联络构成滤过，因此其伴随分次在 X 的一个稠密开集上由一组完整的代数解张成（也就是说，其 p-曲率是幂零的，参见第 2 节）。

根据经典定理，i) 意味着 ˆ $E_K := \hat{E}_W \otimes_W K$，其中 $K = \mathrm{Frac}(W)$ ˆ 是局部自由的。即使满足条件 ii)， E_W 的情况也并非如此，见 [ES15, 1.3]。此外，目前也不知道是否总能在 E_K 中找到一个由 ∇_K 稳定的局部自由格 ˆ ˆ。

8.2. 幂零晶体位点、晶体与等晶体。请参阅 [ES18, 第 1-2] 节及其中的参考文献。

幂零晶体位点的对象为 (U, T, δ)，与晶体位中的对象相同，但此外 I 本身是局部幂零的。因此，对于 (W_n, pW_n) 上的所有 x_i, $i = 1, \ldots, s$，都有

$$x_1^{[n_1]} \cdots x_s^{[n_s]} = 0$$

对某些幂 $n_i \in \mathbb{N}$ 成立。这给出了一个连续函子

$$(X/W)_{Ncrys} \to (X/W)_{crys}$$

拓扑斯的^。晶体和等晶体的定义类似，但给定如上所述的 X_W ，那么幂零晶体位点上的晶体是

i) ^ X_W上的平坦形式联络（^E_W，^∇_W）。

（参见 [Ber74，I 3.1.1 ii) 第56页，III 1.3.1 第187页，IV 1.6.6 第 248]页。）对模 p 约化没有任何条件。

8.3. 幂零晶体位点上晶体集合的弗罗贝尼乌斯作用。由于 X_W 在形式上光滑地映射到 W上， X 的弗罗贝尼乌斯在扎里斯基拓扑下局部可提升至 X_W。以下命题归功于 J. de Jong。据我所知，文献中并未记载此命题。不过，证明与 [SP，tag/07JH]中的证明完全相同；遗憾的是，那里假设条件ii)成立，但.....实际上并未真正用到。

命题 8.1. 设 (^E_W, ^∇_W) 是 ^ X_W 上的形式平坦联络。假设 ^ ^ ^$p \geq 3$。存在唯一的形式平坦联络，记作 $F^*(E_W, \nabla_W)$，定义在 X_W^ ^ 上，并具有如下性质：若在某个开集 $U_W \subset X_W$ 上， U 的弗罗贝尼乌斯 F 可提升至 F_W，则

$$F^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)|_{\hat{U}_W} = F_W^*((\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)|_{\hat{U}_W}).$$

证明。（同上）目标是证明：若 F_W, G_W 是U 上 F 到 ^ U_W 的两个提升，则存在一个交换图

$$\begin{array}{ccc} F_W^*\hat{E}_W & \xrightarrow{\psi} & G_W^*\hat{E}_W \\ \downarrow \hat{\nabla} & & \downarrow \hat{\nabla} \\ \Omega^1_{\hat{U}_W} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\hat{U}_W}} F_W^*\hat{E}_W & \xrightarrow{1\otimes\psi} & \Omega^1_{\hat{U}_W} \hat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\hat{U}_W}} G_W^*\hat{E}_W \end{array}$$

该图是典范的，因而满足余循环条件。这里 ^⊗ 表示 ^ 完备张量积。因此我们可以假设 U_W 是 ´上的 étale 态射，且有限映到其像，该像是 ^ $\mathbb{A}^d_W$ 的一个开集，其中 $d = \dim X$，从而有坐标 $(x_1, \ldots, x_d)$。这定义了导子 $\partial_i \in T_{\hat{U}_W}$，它与 dx_i 对偶，作用于 $E_W|_{\hat{U}_W}$；同时也定义了微分算子 $\partial_{\underline{k}} = \partial_1^{k_1} \cdots \partial_d^{k_d}$ 在 ^ $E_W|_{\hat{U}_W}$ 上的作用，对所有多重指标 $\underline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ 均如此。我们记 $F_W^*\hat{E}_W = F_W^{-1}\hat{E}_W \otimes_{F^{-1}\mathcal{O}_{\hat{U}_W}} \mathcal{O}_{\hat{U}_W}$。然后定义

$$\psi(e \otimes 1) = \sum_{\underline{k}} \partial_{\underline{k}}(e) \otimes_{G_W^{-1}\mathcal{O}_{\hat{U}_W}} \prod_{i=1}^{d} (F_W(x_i) - G_W(x_i))^{k_i}/(k_i)!.$$

根据定义（$F_W(x_i) - G_W(x_i)$） $\in p\mathcal{O}(\hat{U}_W)$，因此其 p-进赋值为 ≥ 1。另一方面， p-进指数函数在 p-进赋值为 $> 1/(p-1)$ 的元素上收敛。因此， ψ，也就是 F^*，对 $p \geq 3$ 有定义。证明至此完成。□

注记 8.2. 若联络定义在 $X_{\mathcal{O}}$ 上，其中 $\mathcal{O} \supset W$ 是一个次数为 ≥ 2 、相对于 Frac(W) 的 p 进域的整数环，那么采用显而易见的记号变更后，同一公式将给出 ($F_{\mathcal{O}}(x_i) - G_{\mathcal{O}}(x_i)$) $\in \pi\mathcal{O}$ (U_W)，其中 π 是 $\mathcal{O}$的一个一致化元。这样一来，收敛性就会遭到破坏，我们便无法写出

上面的图表。在这种情况下，当 $\mathcal{O}$ 的分歧指数属于 $[2, p-1($ 时，我们需要条件 ii) 来以这种方式定义 $(E_{\mathcal{O}}, \nabla_{\mathcal{O}})$ 的弗罗贝尼乌斯拉回。

8.4. 弗罗贝尼乌斯在特征 0 的上同调上诱导一个同构。我们设 $K = \mathrm{Frac}(W)$，并沿用上一段的记号。此外，我们设

$$(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W) \otimes_W K = (\hat{E}_K, \hat{\nabla}_K)$$

并滥用记号

$$F^*(\hat{E}_K, \hat{\nabla}_K) := F^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W) \otimes_W K.$$

命题 8.3. 设 $(\hat{}E_W, \hat{}\nabla_W)$ 是 $\hat{}X_W$ 上的平坦形式联络。那么对所有上同调次数 i,

$$F^* : H^i(\hat{X}_W, (\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) \otimes_W K \to H^i(\hat{X}_W, F^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) \otimes_W K$$

这是一个同构，并且与杯积相容。

证明. 根据 Mayer-Vietoris 谱序列，只需在某个开 U_W 提升 U 上证明该命题的第一部分；在此开集上，弗罗贝尼乌斯可提升至 F_W，从而得到一个 ´etale 态射 h: $\hat{}U_W \to \hat{}\mathbb{A}^d_W$，其像为有限覆盖，如第 8.3 节所示。更准确地说，我们首先构造一个有限 ´etale 态射 $U_k \xrightarrow{h_k} V_k$ 到某个仿射开集 $V_k \hookrightarrow \mathbb{A}^d_k$，然后将图表 $U_k \to V_k \hookrightarrow \mathbb{A}^d_k$ 提升为形式仿射概形的图表 $\hat{}U_W \xrightarrow{h} \hat{}V_W \hookrightarrow \hat{}\mathbb{A}^d_W$.

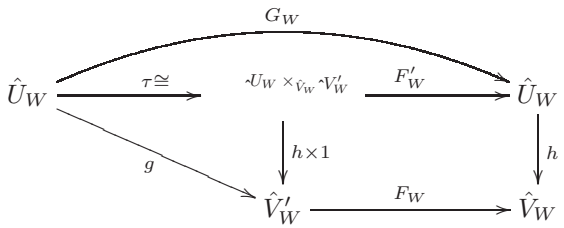
在 $\hat{}\mathbb{A}^d_W$ 上，我们选取由 $F^*_W(x_i) = x_i^p$ 定义的提升 F_W。这定义了 $\hat{}V'_W := F_W^{-1}\hat{}V_W$。我们考虑笛卡尔图

$$\begin{array}{ccc} \hat{U}_W \times_{\hat{V}_W} \hat{V}'_W & \xrightarrow{F'_W} & \hat{U}_W \\ \downarrow{\scriptstyle h\times 1} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \hat{V}'_W & \xrightarrow{F_W} & \hat{V}_W \end{array}$$

定义 F'_W。$\hat{}U_W \times_{\hat{V}_W} \hat{}V'_W$ 和 $\hat{}U_W$ 都是形式仿射概形，模 p 约化后同构于 U_k，因此存在一个形式概形的同构

$$\tau : \hat{U}_W \xrightarrow{\cong} \hat{U}_W \times_{\hat{V}_W} \hat{V}'_W$$

在 W 上，参见例如 [Ara01，定理 2.1。3], 定义



所以 G_W 是弗罗贝尼乌斯的提升。由基变换可得

$$H^0(\hat{U}_W, G_K^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) = H^0(\hat{V}'_W, g_* G_K^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) = H^0(\hat{V}'_W, F_W^* h_*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W))$$

因此我们可以假设

$$(G_W : \hat{U}_W \to \hat{U}_W) = (F_W : \hat{V}'_W \to \hat{V}_W).$$

Then

$H^0(\hat{V}'_W, F_W^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) \otimes_W K = \oplus_{\chi_i, 0 \le n_{ij_i} \le p-1} H^0(\hat{V}_K, (\hat{E}_K, \hat{\nabla}_K) \otimes_{i=1}^d \chi^{n_{ij_i}})$ 其中 χ_i 是定义库默尔覆盖 $x_i \mapsto x_i^p$ 的特征。唯一能延拓为ˆ V_W 上的形式平坦联络的张量积 $\otimes_{i=1}^d \chi^{n_{ij_i}}$ 是平凡的，也就是说，所有的 $n_{ij_i} = 0,\ i = 1, \ldots, d$均成立。因此

$$H^i(\hat{V}'_W, F_W^*(\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) \otimes_W K = H^i(\hat{V}_W, (\hat{E}_W, \hat{\nabla}_W)) \otimes_W K.$$

ˆ 命题的第二部分也可在带有弗罗贝尼乌斯提升 F_W的 U_W 上进行局部验证，在那里结论显然成立。证明至此完成。

□

8.5. 定理 1.6 的证明。设 $X_{\mathbb{C}}$ 为光滑射影簇。设 $(E_i, \nabla_i)_{\mathbb{C}},\ i = 1, \ldots, N$是具有固定挠行列式 $\mathcal{L}$的有限个不可约秩 r刚性局部系统。我们用同一个字母 $\mathcal{L}$ 表示相应的秩一联络 $(\mathcal{L} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X_{\mathrm{an}}}, 1 \otimes d)$。设 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 是 $X_{\mathbb{C}}$ 上行列式为 $\mathcal{L}$的不可约秩 r 平坦联络的德拉姆模空间。因此，联络 $(E_i, \nabla_i)_{\mathbb{C}}$ 是 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 的孤立复点。设 S为一个概形，使得

0) $S \to$谱$(\mathbb{Z})$是光滑的有限型，2 不在像中；1) $X_{\mathbb{C}}$ 有一个光滑射影模型 X_S；2) $\mathcal{L}$ 有一个模型 $\mathcal{L}_S$，且 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 有一个平坦模型 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})_S$，定义在 S([Lan14，定理 1.1]) 上；3) 联络 $(E_i, \nabla_i)_{\mathbb{C}},\ i = 1, \ldots, N$有一个模型 $(E_i, \nabla_i)_S$，定义了 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})_S$ 的 NS-截面；4) $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})_{S,red}$ 在这些两两不同的 S-点处是 ′到 S 上的 étale 映射；5) $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})_S$沿这些截面的形式完备化在 S上是平坦的；6) $S \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$-模

$$H^j(X_S, \mathcal{E}nd(E_i, \nabla_i)_S),\ j = 1, 2, i = 1, \ldots, N$$

and

$$K((E_i, \nabla_i))_S = \mathrm{Ker}\big(H^1(X_S, \mathcal{E}nd(E_i, \nabla_i)_S) \xrightarrow{x \mapsto x \cup x} H^2(X_S, \mathcal{E}nd(E_i, \nabla_i)_S)\big)$$

satisfy base change.

定理 8.4。对于任意点 Spec$W \to S$，其中 $W = W(k)$，且 k 是完美特征为 $p > 0$ 的域；对于任意 $i = 1, \ldots, N$，$(E_i, \nabla_i)_S|_{X_W}$ 的 p-完备化 $(\hat{}E_i, \hat{}\nabla_i)_W$ 是带有弗罗贝尼乌斯结构的等晶体。特别地，它具有幂零的 p-曲率。

证明。根据 [GM88，命题 4.4] $K((E, \nabla)_{\mathbb{C}})$ 在 0 处的完备化，同构于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})_{\mathbb{C}}$ 在复点 $(E, \nabla)_{\mathbb{C}}$ 处的完备化。格罗滕迪克的比较同构

$$H^i(X_W, (E_i, \nabla_i)_S|_{X_W}) \xrightarrow{\cong} H^i(\hat{X}_W, (\hat{E}_i, \hat{\nabla}_i)_W)$$

这意味着比较同构

$$H^i(X_K,(E_i,\nabla_i)_S)=H^i(X_W,(E_i,\nabla_i)_S|_{X_W})_{\mathbb{Q}}\xrightarrow{\cong} \\ H^i(\hat{X}_W,(\hat{E}_i,\hat{\nabla}_i)_W)_{\mathbb{Q}}=H^i(\hat{X}_K,(\hat{E}_i,\hat{\nabla}_i)_K)$$

与杯积相容。这里 $K=\mathrm{Frac}(W)$ 和 $\hat{}\ X_K=\hat{}X_W\otimes_W K$。命题 8.3 随即蕴含，$F^*$ 将 $M_{dR}(X,r,\mathcal{L})_S$ 在 $(\hat{}E_i,\hat{}\nabla_i)_K$ 处的完备化同构映射到 $F^*(\hat{}E_i,\hat{}\nabla_i)_K$ 处的完备化。因此，后者在 K 上是零维的。我们得出

$$F^*(\hat{E}_i,\hat{\nabla}_i)_K=(\hat{E}_{\varphi(i)},\hat{\nabla}_{\varphi(i)})_K \text{ for some } \varphi(i)\in\{1,\dots,N\}.$$

命题 8.3 对 H^0 蕴含，$\varphi\colon\{1,\dots,N\}\to\{1,\dots,N\}$ 是一个单射，因而也是双射。因此，存在一个自然数 M，它整除 $N!$，使得

$$\underbrace{\varphi\circ\dots\circ\varphi}_{\text{M-times}}=\text{Identity}.$$

换句话说

$$(F^M)^*(\hat{E}_i,\hat{\nabla}_i)_K=(\hat{E}_i,\hat{\nabla}_i)_K\ \forall i=1,\dots,N.$$

这就完成了证明的第一部分。至于第二部分，我们应用 [ES18，命题 3 的证明。1] 这表明，p-曲率的幂零性不取决于所选的格。

□

注记 8.5。与 [EG20，定理 1.6], 相比，这个证明的优点在于它是 p-进的，而不是特征 $p>0$ 证明。这更为自然，因为结果是 p-进的。它还给出了一个更大的 S，使结果成立。其缺点是需要处理一种尚未得到详细研究的上同调（命题 8.3）；而且最重要的是，它并未直接给出 X_W上的 Fontaine-Lafaille 模，以及与之对应的、 X_K上的 p-进晶体局部系统。这是第 9 讲的主题。最后的计数论证当然取自 [EG20，定理 1.6]的证明。

9. Lecture 9: Rigid Local Systems, Fontaine-Laffaille modules and Crystalline Local Systems

Abstract. 如第 8 讲所述，这一结果最初由 Michael Groechenig 与我在 [EG20, 定理 1.6], 中证明： $X_{\mathbb{C}}$ 上的刚性联络，在限制到形式 p-完备化 X_W 的一个非分歧射影 p-进模型X_W 时，会给出 F-等晶体。 $X_{\mathbb{C}}$更进一步，通过在 X_W上证明形式联络 $(\hat{}E_W, \hat{}\nabla_W)\hat{}$ 存在一个 $periodic$ Higgs-de Rham 流（见 [EG20] ），我们证明 $(\hat{}E_W, \hat{}\nabla_W)$ 上存在 Fontaine-Lafaille 模结构（见 [EG20，第 4], 节）；通过 Faltings 函子，这最终会在代数概形 X_K上给出一个$crystalline\ \mathbb{Z}_{p^f}$-$local\ system$，其中 f 是 Higgs-de Rham 流的周期。由此可推出， $X_{\mathbb{C}}$ 上的刚性复局部系统，当 $p > 0$ 足够大时（根据 p，它们是整的），便可下降为晶体 $\mathbb{Z}_{p^f}$-局部系统，其中 W是此类良好模型的剩余特征，参见 [EG20，第 5] 节。即使 X 仅为准射影概形，只要满足强上同调刚性假设，这一性质仍然成立；该假设在实秩为 ≥ 2的 Shimura 簇上成立。此外还需假设无穷远处的局部单值是幺幂，参见 [EG21，定理 A.4、定理 A.22]。

9.1. 主要定理。我们分别概述射影情形和准射影情形中的定理，因为后一种情形的假设在技术上更为复杂。

9.1.1. 射影情形中的良好模型。我们采用第 8 讲第 8.5 节中的记号。记 $\mathcal{M}$ 为与扭秩一联络 $\mathcal{L}$对应的秩一 Higgs 丛。具体而言，若 $\mathcal{L} = (L, \nabla)$，则 $\mathcal{M} = (L, 0)$，因为假设 $\mathcal{L}$ 是挠的。回顾 Simpson 理论 [Sim92，引理 4.5] ，在 $\mathbb{C}$上的稳定点的 Dolbeault 模空间 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M})$上，我们有 $\mathbb{C}^\times$-运算，它对 Higgs 场实施齐次缩放。若 $(V_i, \theta_i)\ \ i = 1, \ldots, N$是与刚性联络 $(N, E_i, \nabla_i)\ \ i = 1, \ldots, N$相关联的 N-Higgs 丛，则 (V_i, θ_i) 在 $\mathbb{C}^\times$下稳定，因此 (E_i, ∇_i) 是极化复 Hodge 结构变分 (E_i, Fil_i, ∇_i)，其中 $Fil_i \subset E_i$ 是满足 Griffiths 横截性的局部分裂滤过，并且

$$(V_i, \theta_i) = (gr(E_i), gr(\nabla_i)),$$

参见 [Sim92，引理 4.5]。

参照第 8 讲第 8.5 节中良好模型的基底 S 条件，我们现在要求 S 满足

1a) 与 1) 相同，并且存在一个 S-点属于 X_S；2a) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M})$，与 2) 相同；3a) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M})$，与 3) 相同；4a) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M})$，与 4) 相同；5a) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M})$，与 5) 相同；6a) 滤过 $Fil_i \subset E_i$有一个模型 $Fil_{i,S} \subset E_{iS}$，适用于 $i = 1, \ldots, N$，且该模型局部分裂；7a) 对所有闭点 $s \in |S|$， s 的剩余域的特征为$> r + 1$ ，且 $> \dim(X)$；8a) 由黎曼–希尔伯特对应将 $(E_i, \nabla_i)_{\mathbb{C}}$，$i = 1, \ldots, N$关联起来的局部系统 $\mathbb{L}_i, i = 1, \ldots, N$，在 S的闭点的所有剩余特征 p 下都是整的。

条件 6a) 可以满足，因为滤过 Fil_i只有有限多个。条件 2a)3a)4a)5a) 可以通过应用 Langer [Lan14 的定理 1.1] 所证明的、在 S 上的平坦模空间 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})_S$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M})_S$ 的存在性，以及基变换来满足。注意，条件 8a) 意味着 $\mathbb{L}_i$ 来自 _ _´上的 étale $\mathbb{Z}_p$-局部系统；通过基变换，这与 ´上的 étale $\mathbb{Z}_p$-局部系统相同，其中 $K = \mathrm{Frac}(W(s))$，且 $\mathrm{Spec}(W(s)) \to S$ 是一个 Witt 向量¯点，其剩余闭点为 $s \in |S|$。此外，它们在 $\mathbb{Q}_p$ 上不可约。

9.1.2. 射影情形下的定理。

定理 9.1（参见 [EG20], 第 5 节）。对于良好模型基底中的任意闭点 $s \in |S|$， p-进局部系统 $\mathbb{L}_i, i = 1, \dots, N$ 在 $X_{\bar{K}}$ 上下降为 X_K 上的晶体p-进局部系统。

9.1.3. 拟射影情形下的良好模型。我们采用第 8 讲、¯第 8.5 节以及 9.1.1 中的记号。我们固定一个良好紧化 $X \hookrightarrow X$，使得 _ _X 射影且光滑，并且 $D := X \setminus X$ 是严格正规交叉除子。射影情形下秩 r 且固定行列式 $\mathcal{L}$ 的德拉姆模空间¯ ¯被连接的德拉姆模空间 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)$ 取代；这些联络 (E, ∇) 定义在 X 上，沿 D 具有对数极点且留数幂零。我们指出，即使本文不使用这一点， $\mathcal{L}$ 也会延拓为 X 上的扭秩一联络。留数的幂零性意味着底层向量丛 E 的（贝蒂或德拉姆）陈类为 0，参见 [EV86，命题 B.1]。我们有 N-复点 $(E_i, \nabla_i)^-$，属于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)$，它们描述了零维分支（刚性对象）。此外， [Sim92，引理 4.5] 由 [Moc06，定理 10.5] 取代，后者保证我们拥有与射影情形相同的局部分裂滤过 $Fil_i \subset E_i$，并满足 Griffiths 横截性。最后

$$(V_i, \theta_i) = (gr(E_i), gr(\nabla_i)),$$

是一个稳定希格斯丛，其沿 D 有对数极点，留数幂零，行列式为 $\mathcal{M} = (L, 0)$。参照第 8 讲第 8.5 节中对良好模型的底空间 S 的条件，以及射影情形下的条件，我们现在要求 S 满足

¯ ¯ ¯1b) $X_S \hookrightarrow X_S$ 是 $X \hookrightarrow X$ 的一个模型，使得 X_S/S 光滑射影，且 $D_S := X_S \setminus X_S$ 是一个相对正规交叉除子，并且 X_S 中存在一个 S-点；¯ ¯2b) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M}, D)$，与 2) 相同；¯ ¯3b) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M}, D)$，与 3) 相同；¯ ¯4b) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M}, D)$，与 4) 相同；¯ ¯5b) 对于 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M}, D)$，与 5) 相同；6b) 对于 Mochizuki 滤过，与 6a) 相同；7b) 对所有闭点 $s \in |S|$， s 在 $> 2(r+1)$ 中的剩余域的特征为 $> \dim(X)$。

条件 6b) 可以出于与 6a) 相同的原因得到满足：滤过 Fil_i 的数量有限。条件 2b)、3b)、4b)、5b) 可以通过应用 Langer [Lan14 定理 1.1] 中关于平坦模空间 $M_{dR}(X, r, \mathcal{L}, D)_S$ 和 $M_{Dol}(X, r, \mathcal{M}, D)_S$ 在 S 上存在性的结果，以及基变换得到满足。

9.1.4. 拟射影情形中的定理。具有对数极点和幂零留数的平坦联络 (E, ∇)，特别是其

到 X 的限制的 Deligne 延拓，因此

$$H^j(X,(E,\nabla)|_X)=H^j(\bar{X},(\Omega^\bullet_{\bar{X}}(\log D)\otimes_{\mathcal{O}_{\bar{X}}}E,\nabla)).$$

注意，限制映射

$$H^1(\bar{X},j_{!*}\mathcal{E}nd^0(E,\nabla))\hookrightarrow H^j(X,\mathcal{E}nd^0(E,\nabla)|_X)$$

其中 $\mathcal{E}nd^0$ 表示无迹端omorphism，是单射。特别地，如果右端为零，左端也为零。接着，我们可以应用整性定理 [EG18，定理 1.1], 参见第 7 讲，因此所有素数对于 $\mathbb{L}_i, i=1,\ldots,N$在 X上都是整的。这说明，在此上同调假设下，作为 8a) 对应条件的条件会自动满足，因此不会出现在条件列表中。

定理 9.2（参见 [EG21], 定理 A.22）。假设 $H^1(X,\mathcal{E}nd^0(E_i,\nabla_i))=0$对于 $i=1,\ldots,N$ 成立。那么对于良好模型的所有闭点 $s\in|S|$，以及所有 Witt 向量点 Spec($W(s)$) $\to S$， p-adic 局部系统 $\mathbb{L}_i, i=1,\ldots,N$在$X_{\bar{K}}$ 上下降为 X_K 上的晶体的 p-adic 局部系统，其中 p 是 s的剩余特征。

定理 9.2 适用于实秩为 ≥ 2 的 Shimura 簇。这正是该定理在 [PST21] 的 Andr´e-Oort 猜想证明中所应用的框架。本讲座余下部分旨在阐述射影情形下证明的主要步骤。

9.2. 射影情形下 Simpson 对应与 Ogus-Vologodsky 对应。首先回顾，Ogus-Vologodsky 对应 [OV07] 是对 Deligne-Illusie 分裂的极大拓展；后者是在如下条件下对 de Rham 复形进行分裂： X 在完美域 k 上光滑，并且可提升至 $W_2(k)$（[DI87]）。例如，假设 (E,∇) 具有一阶幂零 p-曲率，这意味着存在正合列$0\to(F^*S,\nabla_{can})\to(E,\nabla)\to(F^*Q,\nabla_{can})\to 0$，其中 S,Q 是 Frobenius 扭曲 X' 上的相干层， X' 是 X, F 的 Frobenius 扭曲： $X\to X'$ 是相对 Frobenius，而 ∇_{can} 是由其在 X' 上的平坦截面 S,Q 所确定的典范联络。假设 (S,Q) 是向量丛。这定义了 $H^1_{dR}(X,(F^*(Q^{-1}\otimes S)\ \nabla_{can}))$ 中的一个类，根据[DI87，定理 2.1]，它等于 $H^1(X',Q^{-1}\otimes S)\oplus H^0(X',\Omega^1_{X'}\otimes Q^{-1}\otimes S)$。 $H^1(X',Q^{-1}\otimes S)$ 中的这个类给出一个向量丛扩张

$$0\to S\to V'\to Q\to 0$$

在 X' 上，而 $H^0(X',\Omega^1_{X'}\otimes Q^{-1}\otimes S)$ 中的类给出一个幂零 Higgs 场

$$\theta':V'\to Q\to\Omega^1_{X'}\otimes S\to\Omega^1_{X'}\otimes V'.$$

因此这里需要 $p>\dim(X)$，才能应用 [DI87] loc. cit.。Ogus-Vologodksy 对应在假设 7a) 下，将 $C^{-1}(V',\theta'):=(E,\nabla)$ 对应到 (V',θ')。现在假设 $X=X_s$ 对于定理 9.1 中所述的闭点 $s\in|S|$ 成立。那么，从 $(V_i,\theta_i)=(gr(E_i)\ gr(\nabla_i))$ 出发，在 $X_{\mathbb{C}}$上，我们可以将 (V_i,θ_i) 限制到 X_s上的 $(V_i,\theta_i)_s$，然后在谱k 上沿算术 Frobenius 对 $(V_i',\theta_i')_s$ 作拉回，其中$k=\kappa(s)$ 是 s 的剩余域，最后 $C_s^{-1}(V_i',\theta_i')_s$。它与 (E_i,∇_i) 的限制 $(E_i,\nabla_i)_s$ 有什么关系？这里 C_s 是 X_s上的 Cartier-Ogus-Vologodsky 函子。奇妙之处在于下面这个定理。

定理 9.3（[EG20], 命题 3.5）。 $C_s^{-1}(V_i',\theta_i')_s$ 等于某个 $(E_u,\nabla_u)_s$，其中 $u\in\{1,\ldots,N\}$。

证明的核心。由于 C_s^{-1}保持稳定性，见 [Lan14，推论 5。10], 关键在于所谓的 Beauville-Narasimhan-Ramanan 对应 [EG20，定理 2。17] 该对应由 Michael Groechenig 在其博士论文 [Gro16，命题 3。15]中证明。从某种意义上说，它在具有概形论结构的模空间（在一条曲线上）层面给出了 Ogus-Vologodsky 对应。若 $C_s^{-1}(V_i', \theta_i')$ 不具有刚性，那么其模点将存在变形，从而在该点周围产生阶数任意高的幂零结构。通过 Ogus-Vologodsky 对应将这一幂零结构传递到 Dolbeault 模空间一侧后，由于其在 $\mathbb{C}$ 上的刚性以及性质 5a)，便会导出矛盾；这是因为在 $\mathbb{C}$ 中， $M_{dR}(X, r, \mathcal{L})$ 的孤立点重数是已知的，因而在 S 上有界。

□

注 9.4. 上述证明为我们开启了原本计划的研究方向，旨在证明定理 9.1 中与刚性联络相关的算术晶体性质。我们将读者引至 [EG20，推论 A.7] ，其中基于同一原理给出了一个证明，说明 p-曲率的幂零性（我们在定理 8.4 中通过 p-进方法讨论了这一点）；用一位匿名审稿人的话来说，该证明给出了 $\mathbb{G}_m^{\#}$ 在 X_s 上的平坦联络范畴上的典范作用，其中 $\mathbb{G}_m^{\#}$ 是 $\mathbb{G}_m$ 的单位元的 PD 包。

¯9.3. 射影情形下 X_s 上的周期 de Rham-Higgs 流与 X_K 上的 $GL_r(\mathbb{F}_p)$-局部系统。由于 C_s^{-1} 是范畴等价（在其有定义时），我们看到，在定理 9.3 的证明中，映射 $i \mapsto u$ 是 $\{1, \dots, N\}$ 的双射。

将 de Rham-Higgs 流定义为 X_s 上的一个序列，其中各项为 $\{(E_\iota, Fil_\iota, \nabla_\iota)\}$，并且满足

$$(E_{\iota+1}, \nabla_{\iota+1}) = C_s^{-1}(grE_\iota, gr\nabla_\iota),$$

由此可见，对于任意满足 $\iota = 1 \dots, N$ 的 (E_ι, ∇_ι)，$(E_\iota, Fil_\iota, \nabla_\iota)$ 都定义了一个周期为 $f(\iota)|N$ 的周期 de Rham-Higgs 流!

根据 [OV07，第 4.6], 小节（在 [LSZ19，推论 3.10] 中作了细化，以考虑 $f(\iota) > 1$ 的可能性），这在 X_s 上定义了一个 Fontaine-Lafaille 模。由于我们关注的是局部系统，这里不对其作定义，参见 [FL82，定理 3.3]。通过 Faltings 对上述文献中 Fontaine-Lafaille 构造的增强[定理 2.6*][Fal88] （参见 [EG20，命题 4.3]），我们借助 Fontaine-Lafaille-Faltings 函子得到以下论断。

命题 9.5. 对于良好模型 S 的闭点 s ，我们在 X_K 上赋予两两不同构的局部系统 $\mathcal{L}_i(p)$，其值取于 $GL_r(\mathbb{F}_{p^{f(i)}})$，其中 $i = 1, \dots, N$。

注 9.6. 这里，第二个奇迹由 Fontaine-Lafaille-Faltings 理论带来：这些局部系统定义在代数的 X_K 上。

9.4. 射影情形下 ˆ X_W 上的周期 de Rham-Higgs 流与 X_K 上的 $GL_r(W(\bar{\mathbb{F}}_p))$-局部系统。Ogus-Vologodsky 的函子 C_s^{-1} 延拓为对所有 n 都定义在 $X_W \otimes_W W_n$ 上的 C_n^{-1}，从而在 ˆ X_W 上定义 ˆC 。形式模型 X_W 上的 de ˆ Rham-Higgs 流的概念与 X_s上的完全类似。参见 [LSZ19，推论 3.10，定理4。1], [SYZ22，1.2。1] 以及 Xu 的工作 [Xu19]，其中有非常相关的方法和结果。于是：

断言 9.7. 对任意 (ˆ$E_{\iota,\ W}$, ˆ$\nabla_{\iota,\ W}$)，将 (E_ι, ∇_ι) 限制到 ˆ X_W，其中 ι =1 . . . , N，三元组 ($E_\iota, Fil_\iota, \nabla_\iota$) 定义了一个周期为$f(\iota)|N!$ 的周期 de Rham-Higgs 流。

根据 [OV07，经 [LSZ19 第 3.10] 条修订后，并考虑到 $f(\iota) > 1$的可能性，这在 ˆ X_W 上定义了一个 Fontaine-Lafaille 模，参见 [FL82，定理 3.3]。通过 Faltings 对相关文献中 Fontaine-Lafaille 构造的增强 [定理 2.6*][Fal88] （参见 [EG20，命题 4.3]），我们借助 Fontaine-Lafaille-Faltings 函子得到以下断言。

断言 9.8. 对于良好模型 S 的任意闭点 s，我们赋予其两两不同构的 p-进局部系统 $\mathcal{L}_i(W)$, 其取值于 $GL_r(W(\mathbb{F}_{p^{f(i)}}))$，定义在 X_K 上，其中$i = 1$、.....、 N，且这些局部系统是晶体的。

注记 9.9. Faltings 关于晶性的这一修订（在拟射影情形下亦然），正是 [PST21] 中所用的关键性质。

9.5. 射影情形下从晶体的 p-进局部系统到 p-进局部系统。局部系统 ($\mathbb{L}_i, i = 1, \dots,$ N) 在 p 处是整的，因此通过将 $\pi_1(X_{\mathbb{C}}, x_{\mathbb{C}})$ 与 $\pi_1(X_{\bar{K}}, x_{\bar{K}})$ 识别，它们成为 $X_{\bar{X}}$ 上的 p-进局部系统。我们还有基变换

$$\mathcal{L}_i(W)|_{X_{\bar{K}}} =: \mathcal{L}_i(\bar{K})$$

¯到 $X_{\bar{K}}$。为证明定理 9.1，我们应确保 $\mathcal{L}_i(K)$ 在 $X_{\bar{K}}$ 上并未被识别，并且确实来自拓扑刚性局部系统。

¯ ¯定理 9.10。 p-进局部系统 $\{\mathcal{L}_1(K) \dots, \mathcal{L}_N(K)\}$ 的集合，除顺序外，等于集合 $\{\mathbb{L}_1, \dots, \mathbb{L}_N\}$，将其视为 $X_{\bar{K}}$ 上的 p-进局部系统。反过来说，$X_{\bar{K}}$ 上的 p-进局部系统 $\mathbb{L}_i$ 下降为 X_K 上的晶体 p-进局部系统，其中 $i = 1, \dots, N$，并且其取值还落在 $GL_r(W(\mathbb{F}_p))$ 中。

ˆ 证明思路。 X_W 上的 Fontaine-Lafaille 模的构造基于这样一个事实： X_W 是 X_s的非分歧提升。我们可以在 $X_{W(\bar{s})}$上重复这一构造，从而得到$X_{\mathrm{Frac}(W(\bar{\mathbb{F}}_p))}$上的局部系统。不过，我们必须一路提升到$X_{\bar{K}}$。

为此，我们在 [中使用 EG20 第 5] 节的 Faltings p-进 Simpson 对应。为了能够应用 Faltings 的理论，我们必须确保 $X_{\bar{K}}$ 上的 Higgs 丛和 $\mathcal{L}_i$（K）在他的意义下是小的。我们可以找到无穷多个素数 $p > 0$，使得 κ（s） $= \mathbb{F}_p$，并且所有 $f_i = 1$。这是 EG20 引理 5.11] 的内容，并给出定理 9.1 的一个较弱形式。我们无法在 S 的所有闭点上得到结果，而只能在其中无穷多个剩余特征各不相同的闭点上得到结果。

一般而言，我们诉诸于 [SYZ22], ，它依赖于 Faltings 的 p-进 Simpson 对应，并在分歧情形下“实现”了 Fontaine-Lafaille-Faltings 纲领的一部分。我们首先论证 $\mathcal{L}_i(K) \otimes_{\bar{Z}_p} \mathbb{F}_p$ 不可约。否则，利用 1a) 中的 W-点¯，以及 $\pi_1(X_K)$ 因而是 Gal(K/K)¯ ¯与 $\pi_1(X_{\bar{K}})$ 的半直积这一推论，我们便可通过一个有限域扩张 K'/K，使 Gal(K/K) 上的 $GL_r(\mathbb{F}_p)$-表示平凡化。由此可得 $\mathcal{L}_i(K')$ 本身可约，而根据 [SYZ22 定理 5.15] ，这与相关 Higgs 丛在

$\bar{X}_{K'}$ 上的稳定性相矛盾。我们采用类似的论证来区分 $\mathcal{L}_i(K)$ 对 $i = 1, \ldots, N$ 的 $\otimes_{\bar{Z}_p} \mathbb{F}_p$。证明至此完成。

□

注9.11. 我们希望在不久的将来（[EG22]），运用更多、尤其是更新的p-进方法来加强现有结果并简化其证明。

10. Lecture 10: Comments and Questions

Abstract. 这最后一讲旨在列出讲座期间遇到的一些问题。

10.1. 关于 p-曲率猜想（第2讲）。当我们将 $\mathbb{C}$ 上的光滑拟射影簇替换为沿着 $\mathbb{C}$ 上光滑簇的非正规子簇的形式完备化时， p-曲率猜想应如何表述？这个问题源于与 Johan de Jong 就 [LR96]进行的一次讨论。

10.2. 关于 Malˇcev-Grothendieck 定理及其在特征 $p > 0$ 下的种种体现（第3讲）。如第 3.3 节所述，我们有两个关于特征为 $p > 0$ 的代数闭域上的 Malˇcev-Grothendieck 定理的版本：一个位于无穷小位点上（Gieseker猜想，已解决，见定理 3.4），另一个位于 de Jong 提出的晶体位上（尚未解决）；但目前我们还没有棱柱位点上的表述，其中一个难点是 iso概念。

10.3. 关于 Lubotzky 定理 4.2。记号同上文所引文献。设 π 是一个有限生成群。关于

$$\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(\pi, \rho) \text{ for any } i \in \mathbb{N}?$$

对于任意表示，无论 π 为何，都有 $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^0(\pi, \rho) \leq r$。

对于任意由 δ 个元素拓扑生成的有限生成群 π，都有 $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(\pi, \rho) \leq \delta \cdot r$，因为一个 1-连续余循环由其在 π的拓扑生成元上的取值唯一确定。

我们注意到，关于 H^1 的这个线性上界并不等价于有限生成群 π的有限生成。下面是 Lubotzsky 给出的一个例子。设 G 是一个有限非阿贝尔单群，令 $\pi = \prod_0^\infty G$ 为 G 与自身的无限积，并赋予由所有有限商群诱导的有限结构。由于有限商群$\pi \twoheadrightarrow Q$ 必须经由某个 G^m 分解，其中某个 $m \in \mathbb{N}$满足这一条件，因此 Q 本身必与某个 G^n 同构，其中某个 $n \in \mathbb{N}$满足这一条件。由于 $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(\pi, \rho) \leq \dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(\pi, \rho^{ss})$，其中 ρ^{ss} 是 ρ 的半单化，我们可以假设 ρ 是不可约的。我们写出正合列 $1 \to \mathrm{Ker}(\rho) \to \pi \to \rho(\pi) \cong G^n \to 1$。于是 $\mathrm{Ker}(\rho)$（作为抽象群同构于 π）没有阿贝尔商群。因此 $H^1(\mathrm{Ker}(\rho), \rho|_{\mathrm{Ker}(\rho)}) = 0$，而 Hochschild-Serre谱序列给出一个同构 $H^1(\rho(\pi), \rho) \xrightarrow{\cong} H^1(\pi, \rho)$。根据 [AG84，定理 A], $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^1(\rho(\pi), \rho) \leq r$。证明至此完成。

对于 $i = 2$，Lubotzky 定理 4.2 甚至给出了有限表示性的一个刻画。

$i \geq 3$ 的上同调增长编码了什么性质？

对于任意 $i \geq 3$，若 π 是任意代数闭域上的光滑拟射影 X 的温和基本群，那么 $\dim_{\mathbb{F}_\ell} H^i(\pi, \rho)$ 是否具有某些特殊性质？

10.4. 关于定理 4.7。记号同上文所引之处。人们殷切希望定理 4.5 在以下假设下成立： X 是特征为 $p>0$ 的代数闭域 k 上的拟射影正规对象。

若 $j: X \hookrightarrow X$ 是定义在 k上的正规 X 的正规紧化，是否存在某个公式，使我们能够用由局部系统 M构造的 X 上的可构层的某个上同调不变量，来界定 $H^2(\pi_1^t(X), M)$?

对于高阶上同调 $H^i(\pi_1^t(X), M)$ $i \geq 3$又如何？对 X正规情形也成立吗（见第 10.3 节）？

10.5. 关于定理 5.3 和定理 5.10。我们能否将这些定理推广到形式光滑适当概形、光滑刚性空间？对于正规簇是否存在相应版本？对于涉及在 [Sch13] 中提出、并在 [BS15] 等文献中全面发展的原 pro-étale 基本群的非正规簇，是否也有相应版本？我们也可以就（温和）基本群的有限表示提出类似问题。（Piotr Achinger 和 Ben Heurer 曾向我们提出关于形式空间和刚性空间的问题。）

10.6. 关于定理 6.2。我们能否在定理 6.2 的表述中，将正规复代数簇在给定秩下的贝蒂模空间替换为给定的 $\mathbb{F}_\ell$-剩余表示在 X 上、相对于 $\mathbb{F}_p$ 的 Mazur 或 Chenevier 变形空间，从而得到这些空间中无穷远处具有拟幺幂单值的局部系统的 Zariski 稠密性?

10.7. 关于定理 7.6 及定理 7.8 的一个更详尽版本，参见定理 [dJE22，定理 1.4]。主要问题是，$sp_{\mathbb{C}}^{-1}{}_{\bar{s}}(\mathbb{L}_\ell^\sigma)$ 相对于 $\mathbb{L}_\ell$ 在 $M_B(X, r, \mathcal{L}, T_i)$ 上“位于何处”。如果 $\mathbb{L}_\ell$ 位于一个 d 维分支上，那么 $sp_{\mathbb{C}}^{-1}{}_{\bar{s}}(\mathbb{L}_\ell^\sigma)$ 又如何？例如，如果 $X = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ where$\Sigma \subset \mathbb{P}^1$ 只由有限多个点组成，那么不可约刚性局部系统就是上同调刚性的（[Kat96，推论 1.2.5]），因此定理 7.6 的证明表明，此时若 $d=0$，则 $sp_{\mathbb{C}}^{-1}{}_{\bar{s}}(\mathbb{L}_\ell^\sigma)$ 也是一个 0 维分支。此情形下的高维分支又如何呢?

10.8. 关于定理 7.8。定理 7.8 在 X 定义于 $\mathbb{F}_p$的情况下是否成立？准确地说，假设给定的秩 r下存在一个不可约 ℓ进局部系统。我们能否得出结论：对于所有 $\ell' \neq p$，都存在一个秩为 r的不可约 ℓ'进局部系统；并且或许通过 $\ell' = p$，还存在一个秩为 r的不可约等晶体？请注意，如果算术 ℓ进局部系统如猜想 [EK22、弱猜想与强猜想],所期望的那样，在 Chenevier 变形空间中稠密，那么这个弱得多的问题就会有肯定的答案。

10.9. 关于第8讲和第9讲。由于当X 为射影时，理论的德拉姆-晶体侧并不要求刚性系统满足任何上同调条件，因此，如果能理解这些定理在非真情形下的完整力度，那将是令人期待的。

References

[AE19] Abe, T., Esnault, H.: *A Lefschetz theorem for overconvergent isocrystals with Frobenius structure*, 《高等师范学院年刊》，52 (4) (2019)，1243–1264。[Ach17] Achinger, P.: *Wild ramification and $K(\pi, 1)$ spaces*, 《数学创见》，210 (2017) (2)，453–499。

[AZ17] Achinger, P., Zdanowicz, M.: *Some elementary examples of non-liftable varieties*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), 4717–4729. [And74] Anderson, M.: *Exactness properties of profinite completion functors*, Topology 13 (1974), 229–239. [And89] Andr´e, Y.: *G-Functions and Geometry*, Aspects of Mathematics E13, Vieweg Verlag. [And04] Andr´e, Y.: *Sur la conjecture des p-courbures de Grothendieck-Katz et un problème de Dwork*, in Geometric aspects of Dwork理论, Vol. I, II, –112, Walter de Gruyter (2004). [Ara01] Arabia, A.: *Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes*, Comment. Math. Helv. 76 (2001), no. 4, 607–639. [AS16] Aramayona, J., Souto, J.: *Rigidity phenomena in the mapping class group*, Handbook of Teichm¨uller theory 6, (2016), 131–165. [AG84] Aschbacher, M., Guralnick, M.: *Some applications of the first cohomology group*, J. of Algebra 90 (1984), 446–460.[Bau04] Bauer, M.: *Über einen Satz von Kronecker*, Arch. d. Math. u. Phys. 6 (1904), 212–222. [BBV23] Becker, O., Breuillard, E., Varj´u, P.: *Random character varieties*, 2022, in progress. [BBDG82] Beilinson, A., Bernstein, J. , Deligne, P.: *Faisceaux pervers*, In Analysis and Topology on 奇异空间, I (Luminy,1981), Ast´erisque 100 (1982), 5–171, Soc. Math. France, Paris.[BL17] Bhatt, B., Lurie, J.: *A Riemann-Hilbert correspondence in characteristic p > 0*, https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/ModpRH.pdf . [BS15] Bhatt, B., Scholze, P.: *The pro-étale topology for schemes*, Ast´erisque 369 (2015), 99–201.[BS21] Bhatt, B., Scholze, P.: *Prismatic F-crystals and crystalline Galois representations*, http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/PrismaticCrystals.pdf . [Bel80] Bely˘ı, G.: *Galois extensions of a maximal cyclotomic field*, translated by Neal Koblitz, Math. USSR Izv. 14 (2 (1980), 247–256. [Ber74] Berthelot, P.: *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique p > 0*, 数学讲义 407, 施普林格出版社 , 1974.[BGMW22] Biswas, I., Gupta, S., Mj, M., Whang, J. P.: *Surface group representations in $SL2(\mathbb{C})$ with finite mapping class orbits*, Geom. Topol. 26 (2022) 2, 679–719. [BK06] B¨ockle, G., *Mod ℓ representations of arithmetic fundamental groups. II. A conjecture of A. J. de Jong* **142** 2006 2, 271 294 Khare, C.: , Compositio math. ( ) – . [Bos01] Bost, J.-B.: *Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields*, Publ. math. I. H. ´E. S. 93 (2001), 161–221. [BKT13] Brunebarbe, J., Klingler, B., Totaro, B.: *Symmetric differentials and the fundamental group* **162** 2013 1 17 , Duke Math. J. ( ), – . [Chu85] Chudnovsky, D, Chudnovsky, G.: *Applications of Padé approximation to the Grothendieck conjecture on linear differential equations*, in Number Theory, 数学讲义 1135 (1985), 52–100. [D'Ad20] D'Addezio, M.: *Some remarks on the companions conjecture for normal varieties*, https://arxiv.org/abs/2006.09954 . [dJ00] de Jong, J.: *A result on formal linearity*, J. of Algebra 225 (2000), 936–942. [dJ01] de Jong, J.: *A conjecture on the arithmetic fundamental group*, Israel J. of Math. 121 (2001), 61–84. [dJEG22] de Jong, J., Esnault, H., Groechenig, M.: *Rigid non-cohomologically rigid local sys-tems*, preprint 2022, 6 pages, to appear in Algebraic Geometry and Physics 1 (2023), http://page.mi.fu-berlin.de/esnault/helene_publ.html. [dJE22] de Jong, J., Esnault, H.: *Integrality of the Betti moduli space*, preprint 2022, 18 pages, to appear in Transactions of the AMS,https://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/146_dJ_esn.pdf.[Del70] Deligne, P.: *Équations différentielles à points singuliers réguliers*, 数学讲义 163, 施普林格出版社 (1970). [Del72] Deligne, P.: *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L*, Proc. Antwerpen Conference, vol. 2, 数学讲义, 349, pp. 501–597, 施普林格出版社 (1972). [Del73] Deligne, P.: *Comparaison avec la théorie transcendente*, in: SGA 7 II, Expos´e XIV, pp. 116–164, 数学讲义 340 (1973).

[Del80] Deligne, P.: *La conjecture de Weil II*, 《Publ. math. I.H. ´E.S.》52（1980），137–252。[DI87] Deligne, P., Illusie, L.: it Rel`evements modulo p^2 et d´ecomposition du complexe de de Rham, 《Inventiones math.》89（1987），2，247–270。[Del12] Deligne, P.: *Finitude de l'extension de $\mathbb{Q}$ engendrée par des traces de Frobenius, en caractéristique finie* **12** 2012 3, 497 514 ，《Mosc. Math. J.》（），第–期。[Dri01] Drinfeld, V.: *On a conjecture of Kashiwara*, 《Math. Res. Lett.》8（2001），第5-6期，713–728。[Dri12] Drinfeld, V.: *On a conjecture of Deligne*, 纪念 I. M. Gelfand 专辑，《Moscow Math. J.》12（2012）第3期。[Esn17] Esnault, H.: *Survey on some aspects of Lefschetz theorems in algebraic geometry*, 《Revista Matem´atica Complutense》30（2） (2017) 217-232。[EM10] Esnault H., Mehta, V.: *Simply connected projective manifolds in characteristic $p > 0$ have no nontrivial stratified bundles* **181** 2010 449 465 ，《Inventiones math.》（），-。[EL13] Esnault, H., Langer, A.: *On a positive equicharacteristic variant of the p-curvature conjecture* **18** 2013 23 50 ，《Documenta Mathematica》（），–。[ES15] Esnault, H., Shiho, A.: *Existence of locally free lattices of crystals*，预印本，2015，2页，`https://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/119b_esn_shi.pdf` [18] *Convergent isocrystals on simply connected varieties* ES Esnault, H., Shiho, A.:，发表于《Annales de l'Institut Fourier》68（2018）第5期，2019–2148。[ES19] Esnault, H., Shiho, A.: *Chern classes of crystals*，《Transactions of the AMS》371 2（2019），1333–1358。[EK18] Esnault, H., Kisin: *D-modules and finite monodromy*，收录于 Alexander Beilinson 专辑，《Selecta Mathematica》24（1）（2018），217–232。[EG18] Esnault, H., Groechenig: *Cohomologically rigid connections and integrality*，《Selecta Mathematica》24（5）（2018），4279—4292。[EG20] Esnault, H., Groechenig: *Rigid connections and F-isocrystals*，《Acta Mathematica》225（1）（2020），103—58。[EG21] Esnault, H., Groechenig: *Frobenius structures and unipotent monodromy at infinity* 2021, 8 ，预印本，页数。`http://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/143_appPST.pdf`。[EG22] Esnault, H., Groechenig: 进行中。[EK11] Esnault, H., Kerz: *Notes on Deligne's letter to Drinfeld dated March 5*, 2007, `https://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/103-110617.pdf` 。[EK12] Esnault, H., Kerz: *A finiteness theorem for Galois representations of function fields over finite fields (after Deligne)*，《Acta Mathematica Vietnamica》37 4（2012），531–562。[EK20] Esnault, H., Kerz: *Arithmetic subspaces of moduli spaces of rank one local systems*，《Cambridge Journal of Mathematics》8（2020）（3） 453–478。[EK21] Esnault, H., Kerz: *Etale cohomology of rank one ℓ-adic local systems in positive characteristic* **27** 2021 4, 58, 25 ，《Selecta Mathematica》（）无论文页码。[EK22] Esnault, H., Kerz: *Density of Arithmetic Representations of Function Fields*，18页，《Epiga》6（2022）。[EK23] Esnault, H., Kerz: *Local systems with quasi-unipotent monodromy at infin-ity are dense*，预印本，2021，9页，即将发表于《Israel Journal of Mathematics》，`http://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/140_esn_kerz.pdf`。[EK16] Esnault, Kindler: *Lefschetz theorems for tamely ramified coverings*，《Proc. of the AMS》144（2016），5071–5080。[ESS22] Esnault, H., Shusterman, M., Srinivas: *Finite presentation of the tame fundamental group* **28** 2022 2, 37, 19 ，《Selecta Mathematica》（）论文页码。[ESS22b] Esnault, H., Srinivas, V., Stix: *An obstruction to lifting to char-acteristic* 0，预印本，2021，20页，即将发表于《代数几何》，`https://page.mi.fu-berlin.de/esnault/preprints/helene/142_ess.pdf`。[EV86] Esnault, H., Viehweg, E.: *Logarithmic de Rham complexes and vanishing theorems*，《Inventiones math.》86（1986），161–194。[Fal83] Faltings, G.: *Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern*，《Inventiones math.》73（1983），第3期，349–366。

[Fal88] Faltings, G.: *Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations*, 《代数分析、几何与数论》（马里兰州巴尔的摩，1988），25—80，约翰斯·霍普金斯大学出版社，马里兰州巴尔的摩，1989。[FL82] Fontaine, J. M., Laffaille, G.: *Construction de représentations p-adiques*, 《Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup.》15（1982），547–608。[Gai07] Gaitsgory, D.: *On de Jong's conjecture*, 《《以色列数学杂志》》157（2007），155–191。[Gie75] Gieseker, D.: *Flat vector bundles and the fundamental group in non-zero characteristics* **4** ´ 2 1 1975 1 31 , 《Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Ser. () () –7。[Gri70] Griffiths P.: *Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of results and discussion of open problems* **76** 1970 228 296 , 《Bull. Bull. Amer. Math. Soc.》（），–。[GM88] Goldman, W., Millson, J.: *The deformation theory of representations of fundamentalgroups of compact Kähler manifolds*, 《Publ. math. I.H. ´E.S.》67（1988），43–96。[Gro16] Groechenig, M.: *Moduli of flat connections in positive characteristic*, 《Math. Res. Let.》23（2016）4，989–1047。[Gro70] 格罗滕迪克, A.: *discrets Représentations linéaires et compactifications profinies des groupes* **2** 1970 375 396 , 《Manuscr. Math.》（），–。[Gro57] 格罗滕迪克, A.: *Sur quelques points d'algèbre homologique*, 《Tohoku Math. J.》9 2（1957），119–221。[Hru04] Hrushovski, E.: *The elementary theory of Frobenius automorphisms*, http://de.arxiv.org/pdf/math/0406514v1 。[Ill79] Illusie, L.: *Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline*, 《Ann. scient. ´Ec. Norm. Sup.》12（1979），501–661。[Ill81] Illusie, L.: *Théorie de Brauer et caractéristique d'Euler-Poincaré d'après P. Deligne*, 《Ast´erisque》82–83（1981），161–172。[Kas81] Kashiwara, M.: *Quasi-unipotent constructible sheaves*, 《J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math.》28（1981）3，757–773。[Kat70] Katz, N.: *Nilpotent connections and the monodromy theorem: applications of a resultof Turrittin*, 《Publ. math. I.H. ´E.S.》39（1970），175–232。[Kat72] Katz, N.: *Algebraic Solutions of Differential Equations (p-curvature and the Hodge Filtration)* **18** 1972 1 118 , 《Inventiones math.》（），–。[Kat96] Katz, N.: *Rigid local systems*, 普林斯顿大学出版社（1996）。[KS09] Kerz, M., Schmidt, A.: *Covering data and higher dimensional global class field theory*, 《J. Number Theory》129（2009），第10期，2569–2599。[KS10] Kerz, M., Schmidt, A.: *On different notions of tameness in arithmetic geometry*, 《Math. Ann.》346（2010），第3期，64–668。[KM74] Katz, N., Messing, W.: *Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields* **23** 1974 73 77 , 《Inventiones math.》（），–。[Ked22] Kedlaya, K.: *Étale and crystalline companions*, 即将发表于´Epiga, https://kskedlaya.org/papers/。[KS10] Kerz, M., Schmidt, A.: *On different notions of tameness in arithmetic geometry*, 《Math. Ann.》346（2010），第3期，641–668。[KP22] Klevdal, C., Parikis, S.: *G -cohomologically rigid local systems are integral*, 《Trans. Am. Math. Soc.》375（2022）6，4153–4175。[Kro57] 克罗内克, L.: *Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten*, 《J. reine u. angew. Mathematik》53（1857），153–175。[Laf02] Lafforgue, L.: *Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands*, 《Inventiones math.》147（2002），第1期，1–241。[Lam22] Lam, Y. H. J.: *Motivic local systems on curves and Maeda's conjecture*, https://arxiv.org/pdf/2211.06120.pdf 。[LL22a] Landesman, A., Litt, D.: *Geometric local systems on very general curves and isomonodromy* https://arxiv.org/pdf/2202.00039.pdf , 。[LL22b] Landesman, A., Litt, D.: *Canonical representations of surface groups*, https://arxiv.org/abs/2205.15352 。[Lan04] Langer, A.: *Semistable sheaves in positive characteristic*, 《Ann. Math.》159（2004），251–276。[Lan14] Langer, A.: *Semistable modules over Lie algebroids in positive characteristic*, 《Doc. Math.》19（2014），509–540。

[LR96] Lasell, B., Ramachandran, M.: *Observations on harmonic maps and singular varieties*, 《法国高等师范学院科学年刊》29 第四辑（1996），135–148。[LSZ19] Lan, G., Sheng, M., Zuo, K.: *Semistable Higgs bundles periodic Higgs bundles and representations of algebraic fundamental groups*, , 《欧洲数学会杂志》**21** 2019（JEMS）（），第10期，3053–3112。[LSYZ19] Lan, G., Sheng, M., Yang, Y., Zuo, K.: *Uniformization of p-adic curves via Higgs-deRham flows*, 《纯粹与应用数学杂志》（克雷尔杂志）747（2019），63–08。[LLSS20] Li, W., Litt, D., Salter, N., Srinivasan, P.: *Surface bundles and the section conjecture*, https://arxiv.org/pdf/2010.07331.pdf [LZ17] Liu, R., Zhu, X.: *Rigidity and a Riemann-Hilbert correspondence for p-adic local systems*, **207** 2017 1, 291 343 ,《数学发明》（），第–期。[Lub01] Lubotzky, A.: *Pro-finite Presentations*, 《代数学杂志》242 2（2001），672–690。[Mal40] 马尔采夫, A.: *On isomorphic matrix representations of infinite groups*, 《数学文集》新辑8(50)（1940），405–422。[Maz89] Mazur, B.: *Deforming Galois Representations*, 载于：有理数域上的伽罗瓦群（研讨会论文集，加利福尼亚州伯克利（美国），（1987），第385–437页，数学科学研究所出版物，第16卷，施普林格出版社，纽约，1989。[Moc06] Mochizuki, T.: *Kobayashi-Hitchin correspondence for tame harmonic bundles and an application*, **309** 2006 +117 ,《阿斯特里斯克》（），viii。[Moc07] Mochizuki, T.: *Asymptotic behaviour of tame harmonic bundles and an application to pure twistor D-modules. II.*, **185** 2007 870, +565 《美国数学会回忆录》（），第xii期，第页。[OV07] Ogus, A., Vologodksy, V.: *Nonabelian Hodge theory in characteristic p*, 《高等科学研究所数学出版物》106（2007），1–138。[PSW21] Patel, A., Shankar, A., Whang, J.P.: *The rank two p-curvature conjecture on general curves*, **386** 2021 107800, 33 ,《数学进展》（），第期，第页。[Pet22] Petrov, A.: *Geometrically irreducible p-adic local systems are de Rham up to a twist*, 即将在《杜克数学杂志》发表， https://arxiv.org/abs/2012.13872 [PST21] Pila, J., Shankar, A., Tsimerman, J.: *André-Oort conjecture*, *Canonical Heights on Shimura Varieties and the* https://arxiv.org/pdf/2109.08788.pdf ,。[Ray78] Raynaud, M.: *Contre-exemple au "Vanishing Theorem" en caractéristique $p > 0$*, 《C. P. Ramanujam——致敬文集》，数学研究丛书8，塔塔基础研究所，孟买，273–278（1978）。[Roq70] Roquette, P.: *Primzahlcharakteristik*, *Abschätzung der Automorphismenanzahl von Funktionenkörpern bei* **117** 1970 157 163 ,《数学杂志》（），–。[Sch13] Scholze, P.: *p-adic Hodge theory for rigid-analytic varieties*, 《数学论坛·π》1（2013），e1，共77页。[Ser61] Serre, J.-P.: *Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en car-actéristique zéro*, **47** 1961 108 109 ,《美国国家科学院院刊》（），–。[Sha18] Shankar, A.: *The p-curvature conjecture and monodromy around simple closed loops*, 《杜克数学杂志》167（2018）第10期，1951–1980。[Sim92] Simpson, C.: *Higgs bundles and local systems*, 《高等科学研究所数学出版物》，75，（1992），5–95。[SYZ22] Sun, P., Yang, J., Zuo, K.: *Projective crystalline representations of étale fundamental groups and twisted periodic Higgs-de Rham flow*, **24** 2022 ,《欧洲数学会杂志》（）6，1991 2076–。[vDdB21] van Dobben de Bruyn, R.: *A variety that cannot be dominated by one that lifts*, 《杜克数学杂志》170（2021），第7期，1251–1289。[Var18] 瓦尔沙夫斯基, Y.: *Intersection of a correspondence with a graph of Frobenius*, 《代数几何杂志》27（2018），1，1–20。[Wie06] Wiesend, G.: *A construction of covers of arithmetic schemes*, 《数论杂志》121（2006），第1期，118–131。[Xu19] Xu, D: *Relèvement de la transformée de Cartier d'Ogus-Vologodsky modulo p^n*, 《法国数学会回忆录》163（2019），6-144。[Zuo00] Zuo, K.: *On the negativity of kernels of Kodaira-Spencer maps on Hodge bundles and applications*, **4** 2000 279 302 。《亚洲数学杂志》（），–。[EGAIV$_4$] 代数几何原理 *Étude locale des schémas et des morphismes deschémas*，第四部分，《高等科学研究所数学出版物》32（1967），5–361。

[SGA1] 代数几何研讨会：étale 覆盖与基本群，数学讲义224，施普林格出版社（1971）。[SGA4] 代数几何研讨会：拓扑斯理论与概形的étale上同调，第3卷，数学讲义305，施普林格出版社（1973）。[SGA7.2] 代数几何研讨会：代数几何中的单值群，数学讲义340，施普林格出版社（1973）。[SP] Stack Project, https://stacks.math.columbia.edu

Freie Universität Berlin, Arnimallee 3, 14195, Berlin, Germany
Email address: esnault@math.fu-berlin.de