arXiv:2303.05803v1 [math.NT] 10 Mar 2023

Erd˝os-Kac 定理与素数定理的推广

Biao Wang[1], Zhining Wei[2], Pan Yan[3] 和 Shaoyun Yi[4]

[1]华罗庚数学科学中心，数学与系统科学研究院，中国科学院，北京，100190，中国。[2]数学系，俄亥俄州立大学，哥伦布，OH 43210，美国。[3]数学系，亚利桑那大学，图森，AZ 85721，美国。[4]数学科学学院，厦门大学，厦门，福建 361005，中国。

wangbiao@amss.ac.cn；wei.863@osu.edu；
panyan@arizona.edu；yishaoyun926@xmu.edu.cn；

摘要

本文研究整数的素因子个数的分布与整数最大素因子的分布之间的线性无关性。具体而言，在对整数最大素因子施加限制的条件下，我们将改进 Erd˝os-Kac 定理以及 Loyd 最近关于 Bergelson 和 Richter 的素数定理动力学推广的结果。最后，我们将证明，这些结果的类似结论对于 Erd˝os-Pomerance 定理同样成立。

关键词：Erd˝os-卡克定理、Erd˝os-Pomerance 定理、最大素因子、素数数论

MSC 分类：11K36，37A44

1 引言与结果陈述

令 $\Omega(n)$ 表示 n 的素因子个数（按重数计）。$\Omega(n)$ 的分布是解析数论中一个引人入胜的研究课题。著名的 Erd˝os-卡克定理 [1] 断言，$\Omega(n)$ 服从以下正态分布

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{1\le n\le x}F\Big(\frac{\Omega(n)-\log\log x}{\sqrt{\log\log x}}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt \tag{1}$$

对于任意 $F\in C_c(\mathbb{R})$，其中 $C_c(\mathbb{R})$ 表示 $\mathbb{R}$ 上紧支撑连续函数的集合。Erd˝os 和 Kac 的这一结果开启了概率数论的研究，并在文献中得到了广泛推广（参见 [2, 3] 等）。其中一种推广是考虑乘性函数的（1）的加权变体。2019年，Elboim 和 Gorodetsky [4] 证明了

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\Big(\sum_{1\le n\le x}f(n)\Big)^{-1}\sum_{1\le n\le x}f(n)F\Big(\frac{\Omega(n)-\alpha\log\log x}{\sqrt{\alpha\log\log x}}\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt\end{aligned} \tag{2}$$

对于任意 $F\in C_c(\mathbb{R})$，其中 $f\colon\mathbb{N}\to[0,\infty)$ 是满足以下两个条件的乘性函数，其中某些实数 $d>-1$ 和 $\alpha>0$:

$$\text{(I)}.\quad \sum_{p\le x}\frac{f(p)\log p}{p^d}=\alpha x+O_A\left(\frac{x}{\log^A x}\right)\quad\text{for all } A>0; \tag{3}$$

$$\text{(II)}.\quad \frac{f(p^i)}{p^{di}}=O(r^i)\quad\text{for some } 1\le r<\sqrt{2}\text{ and all } i\ge 1. \tag{4}$$

我们注意到，Tenenbaum [5, 6] 也证明了（2），适用于一类乘性函数；最近，Khan、Milinovich 和 Subedi [7] 证明了情形 $f(n)=d_k(n)$，采用了 Granville-Soundararajan筛法 [8]。这里，$d_k(n)\colon=\sum_{a_1\cdots a_k=n}1$ 是第 k 个约数函数，其中 $k\in\mathbb{N}$。

本文中，我们将考察式（2）的一个推广，其中涉及整数的最大素因子，以及表现得类似于 $d_k(n)$ 的乘性函数。令 $P^+(n)$ 表示 n 在 $n\ge 2$时的最大素因子，并设 $P^+(1)=1$。1977 年，Alladi [9] 在研究整数素因子之间对偶性的一项应用时，证明了 $P^+(n)$ 在算术级数中等分布。最近，Kural、McDonald 和 Sah [10] 将 Alladi 的结果推广到了数域上的自然密度情形。更确切地说，若 S是一个素数集合，且具有自然密度 $\delta(S)$（见第 2.1节），则 Kural 等人证明了 $P^+(n)$ 具有如下等分布性质:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}}1=\delta(S). \tag{5}$$

由式（5）可知，整数的最大素因子是随机分布的。这使我们预期，它们与一些合理的乘性函数（如 Ω(n) 和 $d_k(n)$）的分布线性独立。特别地，对于乘性函数 $f(n)$，若它在素数处取常数值，则其表现类似于 $d_k(n)$。若存在一个固定整数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$，使得 有除数有界性，则称算术函数 $k\in\mathbb{N}$ 满足 $|f|\le d_k$。我们的第一个结果是对式（2）的推广，适用于一类乘性函数，其中 $d_k(n)$ 可作为权重。

定理 1.1 *Suppose $\alpha>0$ is a positive real number. Let f be a non-negative divisor-bounded multiplicative function satisfying $f(p)=\alpha$ for all primes p. Let $F\in C_c(\mathbb{R})$. If S is a set of primes of natural density $\delta(S)$ then we have*

$$\lim_{x\to\infty}\Big(\sum_{1\le n\le x}f(n)\Big)^{-1}\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}}f(n)F\Big(\frac{\Omega(n)-\alpha\log\log x}{\sqrt{\alpha\log\log x}}\Big) \tag{6}$$
$$=\delta(S)\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt\Big).$$

显然，定理 1.1 中的权函数 f 满足条件 (3) 和 (4)。令 S 为全体素数的集合，即可得到加权厄尔多斯 ″-卡克定理 (2)。定理 1.1 中常见的权函数示例包括$d_\alpha(n)$ $\mu(n)^2$, 以及 $\alpha^{\omega(n)}$（$\alpha>0$），其中 $d_\alpha(n)$ 是与狄利克雷级数 $\zeta(s)^\alpha$相关联的约数函数，$\mu(n)$ 是莫比乌斯函数，而 $\omega(n)$ 是 n 的不同素因子个数。这里，$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$ ($\mathrm{Re}\,s>1$) 是黎曼ζ函数。我们指出，将 Ω(n) 替换为 $\omega(n)$ 后，定理 1.1 的证明同样适用，且结果不变。

我们的下一个目标是应用定理1.1，从而建立 Bergelson 和 Richter 发现的素数定理（PNT）动力学推广的一项新精化[11]。设 (X,μ,T) 是一个唯一遍历的加法拓扑动力系统，且 $C(X$是X上的连续函数空间。2020年，Bergelson 和 Richter [11] 将素数定理推广到了动力系统的情形：对于每个 $x_0\in X$ 和 $g\in C(X)$，我们有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}g(T^{\Omega(n)}x_0)=\int_X g\,d\mu. \tag{7}$$

特别地，取 X 为（7）中的二点旋转系统，可得以下结果：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\lambda(n)=0 \tag{8}$$

关于刘维尔函数 $\lambda(n):=(-1)^{\Omega(n)}$，这等价于素数定理（例如，[12, 13]）。此外，式（7）统一了 Pillai [14], 、Selberg [15], 、Erd″os [16] 和 Delange 的经典结果 [17], ，参见关于.....的评论

定理 A，见 [11]。有关式（7）的更多应用，请读者参阅 Bergelson 和 Richter 的研究 [11]。

最近，Loyd [18] 将（7）推广为一种与埃尔德什″–卡克定理相关的互不相交形式：对于任意 $F \in C_c(\mathbb{R})$、$g \in C(X)$ 以及任意 $x_0 \in X$，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} F\Big(\frac{\Omega(n)-\log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\Big)g(T^{\Omega(n)}x_0)\\ =\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt\Big)\Big(\int_X g\,d\mu\Big).\end{aligned} \tag{9}$$

作为定理1.1的一个应用，我们的第二个结果是对（9）的如下改进：

定理 **1.2** *Let (X,μ,T) be uniquely ergodic. Let $F \in C_c(\mathbb{R})$. If S is a set of primes of natural density $\delta(S)$ then we have*

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\le n\le N\\ P^+(n)\in S}} F\Big(\frac{\Omega(n)-\log\log N}{\sqrt{\log\log N}}\Big)g(T^{\Omega(n)}x_0)\\ =\delta(S)\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt\Big)\Big(\int_X g\,d\mu\Big)\end{aligned} \tag{10}$$

for all $g \in C(X)$ and $x_0 \in X$.

Remark 1 本文第一作者证明了（10），适用于特殊情形 $F = 1$，见 [19, 定理 1.3]。另一方面，取 $g = 1$，我们得到了埃尔德什″–卡克定理（1）在 $P^+(n)$ 上的一个改进 $\in S$。

本文最后给出欧拉函数的定理1.2 的一个变体。设 $\varphi(n)$ 为欧拉示性函数。1985 年，Erd″os 和 Pomerance[20] 证明了一个 Erd″os-Kac 型定理：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\le n\le N} F\Big(\frac{\Omega(\varphi(n))-\frac{1}{2}(\log\log N)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log N)^{3/2}}\Big)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt \tag{11}$$

对于任意 $F \in C_c(\mathbb{R})$。与埃尔德什″-卡克定理一样，方程 (11) 在文献中已得到广泛研究（参见 [21] 等）。对定理1.2的证明稍作调整，我们得到关于埃尔德什″-Pomerance 定理的如下类似结果。

定理 **1.3** *Let (X,μ,T) be uniquely ergodic. Let $F\in C_c(\mathbb{R})$. If S is a set of primes of natural density $\delta(S)$ then we have*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{\substack{1\le n\le N\\ P^+(n)\in S}} F\Big(\frac{\Omega(\varphi(n))-\frac{1}{2}(\log\log N)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log N)^{3/2}}\Big)g(T^{\Omega(n)}x_0) \tag{12}$$
$$=\delta(S)\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt\Big)\Big(\int_X g\,d\mu\Big)$$

for all $g\in C(X)$ and $x_0\in X$.

Remark 2 作类似的调整，也可以得到定理 1.3的一个类似结果，其中将 $\Omega(\varphi(n))$ 替换为 $\omega_1(n)$，其中 $\omega_1(n)$ 表示 n 的素因子重数为 1 的个数。关于此函数的厄尔德什-卡克型定理，可参见 Elma 和 Liu 的研究 [22]。其他厄尔德什-卡克型定理（例如 1.2 的类似结果，留待感兴趣的读者研究。″ [21]

Remark 3 在 [19], 中，第一作者证明了有限域导出的加性算术半群中式（10）若干情形的类似结果。定理 1.1-1.3 的类似结果留待读者研究。

在第 2节中，我们汇集了证明定理 1.1 所需的材料。然后在第 3节中，我们利用 Kural、McDonald 和 Sah [10] 的工作中的思路证明定理 1.1 。在第 4节中，我们重述 Bergelson 和 Richter 的技术引理，并用它们证明定理 1.2。定理 1.3 的证明也类似。在第 5节中，我们将说明需要作出的调整。

记号。我们用 1_P 表示命题 P的示性函数。若存在某个常数 $C>0$，使得对所有 x都有 $f(x)=O(g(x))$ 或 $f(x)\ll g(x)$ $|f(x)|\le C|g(x)|$，则记作如此。隐含常数 C 可以依赖于其他参数，但不依赖于变量 x。若对于任意 $\varepsilon>0$，都存在某个常数 $N>0$，使得对所有 $x\ge N$ 都有 $|f(x)|\le\varepsilon|g(x)|$，则记作 $f(x)=o(g(x))$。字母 p始终表示一个素数。出现在 O-项中的常数 c 是一个正数，并且可能随行而变化。

2 基础知识

本节将介绍第3节中证明定理1.1所需的主要内容。

2.1 自然密度

令 $\mathcal{P}$ 为所有素数构成的集合。令 $S\subseteq\mathcal{P}$ 为素数的子集。令

$$\pi_S(x):=\#\{p\in S\colon p\le x\},$$

6 埃尔德什-卡克定理与素数定理

并令 $\pi(x) = \pi_{\mathcal{P}}(x)$ 表示素数计数函数。若以下极限存在，我们就称 S 具有自然密度 $\delta(S)$:

$$\delta(S) := \lim_{x\to\infty} \frac{\pi_S(x)}{\pi(x)}.$$

例如，若 $S = \{p \in \mathcal{P}: \quad p \equiv a\,(\text{模}\, q)\}$，且 $(a, q) = 1$，那么根据算术级数中的素数定理，我们得到 $\delta(S) = 1/\varphi(q)$。更多有趣的例子请参阅 [10] 。假设 S 具有自然密度 $\delta(S)$。根据素数定理，我们有 $\pi_S(x) \sim \delta(S)\,\mathrm{Li}(x)$，其中 $\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log t}$。令

$$e_S(x) := \sup_{y\le x} |\pi_S(y) - \delta(S)\,\mathrm{Li}(y)|.$$

那么 $e_S(x)$ 单调递增，并满足 $e_S(x) = o(x/\log x)$。现在，我们定义

$$v_S(x) := \sup_{y\ge x} \frac{e_S(y)}{y}.$$

那么 $v_S(x)$ 单调递减，且 $v_S(x) = o(1/\log x)$。受 [10, 定理 3.1], 中的思路启发，我们得到如下关于此类 $v_S(x)$ 的性质，该性质将在定理 1.1证明的最后一步中用到。引理 2.1的离散版本可见 [23, 引理 4.5]。

引理 **2 1** *Suppose* $v \quad 1\ \infty \quad \to \quad 0\ \infty$ *is a decreasing function such that.* : (,) (,) ( ) $v\ x \quad x = o\ 1$. *Suppose* $h \quad 1\ \infty \quad \to \quad 0\ \infty$ *is a positive function such that* $\log$ ( ) : (,) (,) $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $h(x) = o(\log x)$. *Then there exists a positive function* $y = y(x)$ *satisfying* $\quad_{x\to\infty} y\ x \quad = \infty$ *such that* $u = \quad x/ \quad y \to \infty \quad u \le h\ x$ *and* $\lim$ ( ) $\log\log$, ( ) (y $v \quad x \quad x = o\ 1$ *as* $x \to \infty$.
( ))$\log$ ( )

Proof 由于 $\lim_{x\to\infty} v(x) \log x = 0$，因此对于任意整数 $m \ge 1$，我们有 $\lim_{x\to\infty} v(x^{\frac{1}{m}}) \log x = 0$。于是存在一个最小正整数常数 $C(m)$，使得

$$v(x^{\frac{1}{m}}) \log x < \frac{1}{m} \tag{13}$$

对所有 $x > C(m)$ 均成立。由于 $v(x^{\frac{1}{m}})$ 关于 m 单调递增，因此 $C(m)$ 随着 m 的增大而增大。注意到 $\lim_{x\to\infty} \sup \{m \in \mathbb{N}: C(m) < x\} = \infty$，我们可以设

$$\beta(x) = \min\left(\left\lfloor \sqrt{h(x)} \right\rfloor, \sup\{m \in \mathbb{N}: C(m) < x\}\right).$$

令 $\lfloor x \rfloor := \text{上确界}\ \{n \in \mathbb{N}: \quad n \le x\}$ 是 x的整数部分。则 $\beta(x) \le h(x)$，当 x 充分大时，且 $\lim_{x\to\infty} \beta(x) = \infty$。此外，对所有 $x > C(\beta(x))$，我们有 $x > C(1)$。由 (13)，可得

$$v(x^{\frac{1}{\beta(x)}}) \log x < \frac{1}{\beta(x)}$$

对所有 $x > C(1)$。由此可得 $\lim_{x\to\infty} v(x^{\beta^{1}{}_{x}()}) \log x = 0$。取 $y(x) = x^{\beta^{1}{}_{x}()}$，~~这~~意味着 $u = \beta(x)$，于是有 $\log y(x) = \log x/\beta(x) \ge \log x/h(x) \to \infty$,

当 $x \to \infty$ 时。由此可知 $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$。因此，函数 $y(x) = x^{\frac{1}{\beta\, x}()}$ 满足所需性质。□

2.2 除数有界乘性函数

在本小节中，我们引用 Granville 和 Koukoulopoulos 关于除数有界乘性函数部分和渐近公式的结果，这类函数在素数处的取值平均为 $\alpha > 0$ 。他们使用兰道–塞尔伯格–德朗日（LSD）方法证明了这一结果。

定理 2.2 ([24,定理 1]) *Let f be a multiplicative function satisfying*

$$\sum_{p\le x} f(p)\log p = \alpha x + O\left(\frac{x}{(\log x)^N}\right) \qquad (x \ge 2) \tag{14}$$

for some $\alpha \in \mathbb{C}$ and some $N > 0$ and such that $|f| \le d_k$ for some positive real number k. Then

$$\sum_{n\le x} f(n) = x\sum_{j=0}^{J} \tilde{c}_j \frac{(\log x)^{\alpha-j-1}}{\Gamma(\alpha-j)} + O\Big(x(\log x)^{k-1-N}(\log\log x)^{1_{N=J+1}}\Big), \tag{15}$$

where J is the largest integer less than N, $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$, and

$$\tilde{c}_j = \frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}s^j}\bigg|_{s=1} \frac{(s-1)^\alpha F(s)}{s}$$

for $0 \le j \le J$. The implied constant in (

15 depends at most on α A and the) , , ()

implicit constant in 14 .

注意到 $\tilde{c}_0 = C_\alpha(f) := \prod_p (1-1/p)^\alpha \sum_{\nu\ge 0} f(p^\nu)/p^\nu$。由定理 2.2，我们得到

$$\sum_{n\le x} f(n) \sim C_\alpha(f) x(\log x)^{\alpha-1} \tag{16}$$

对于定理 1.1中的函数，当 $x \to \infty$。

2.3 光滑数

若整数 n 满足 $P^+(n) \le y$，则称其为 y-光滑数（或 y-光滑数）。令

$$\mathcal{S}(x,y) := \big\{n \in \mathbb{N} \colon 1 \le n \le x, P^+(n) \le y\big\}$$

表示不超过 x 的 y-光滑数集合。对于任意算术函数 $f(n)$，我们定义

$$\Psi_f(x,y) := \sum_{n\in\mathcal{S}(x,y)} f(n). \tag{17}$$

令 $u := \log x/\log y$。令 $\varrho_\alpha(u)$ 为如下差分微分方程的唯一连续解：$u\varrho'_\alpha(u) + (1-\alpha)\varrho_\alpha(u) + \alpha\varrho_\alpha(u-1) = 0$，其中 $u > 1$，且初始条件为 $\varrho_\alpha(u) = u^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$，其中$0 < u \le 1$。当 $\alpha = 1$ 时，$\varrho_\alpha(u) = \varrho_1(u)$ 即经典的狄克曼函数。对于

对于一个合理的函数 f，人们预期以下渐近估计对$\Psi_f(x,y)$成立：

$$\Psi_f(x,y) \sim C_\alpha(f) x \varrho_\alpha(u) (\log y)^{\alpha-1}, \quad \text{as } y \to \infty, \tag{18}$$

其中 $C_\alpha(f) = \prod_p (1-1/p)^\alpha \sum_{\nu \geq 0} f(p^\nu)/p^\nu$ 如式 (16) 所示。Tenenbaum 和 Wu [25] 证明了式 (18) 对一类 $\mathcal{M}_\alpha$ 乘性函数成立。更确切地说，他们证明了以下估计。

定理 2.3 ([25, 推论 2.3]) *For $\varepsilon > 0$, let*

$$L_\varepsilon(y) := \exp\left(\log(y)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}\right), \quad H_\varepsilon := \{(x,y) \colon x \geq 2, 1 \leq u \leq L_\varepsilon(y)\}.$$

Then uniformly for $f \in \mathcal{M}_\alpha$ and $(x, y) \in H_\varepsilon$, we have that

$$\Psi_f(x,y) = C_\alpha(f) x \varrho_\alpha(u) (\log y)^{\alpha-1} \left\{1 + O\left(\frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{1}{(\log y)^\alpha}\right)\right\}. \tag{19}$$

定理 2.3 中 $\mathcal{M}_\alpha$ 的定义稍显复杂，精确描述请参阅 [25]。这里我们只用到这样的事实：类 $\mathcal{M}_\alpha$ 包含定理 1.1 中的除数有界乘性函数 f。由 [26, 引理 1(i)],，我们有 $\varrho_\alpha(u) \ll \exp(-\frac{1}{2}u \log u)$，其中 $u \geq 1$。注意，若 $1 \leq u \leq \log x/(\log\log x)^2$,，则对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $(x, y) \in H_\varepsilon$。因此，对于定理 1.1 中的函数 f，我们有以下估计。

推论 2.4 *Let f be as in Theorem 1.1, then we have that*

$$\Psi_f(x,y) \ll x (\log y)^{\alpha-1} \exp(-\tfrac{1}{2}u \log u) \tag{20}$$

holds uniformly for $1 \leq u \leq \log x/(\log\log x)^2$.

2.4 最大素因子

本小节引用 Ivi´c 和 Pomerance 关于整数 n 的最大素因子 $P^+(n)$ 的一个结果。从下面的定理可以看出，对于几乎所有整数 n，$P^+(n)||n$ 都成立。这里，$P^+(n)||n$ 表示 $P^+(n)^2 \nmid n$。

定理 2.5 ([27, 定理 (1.7)]) *For any real number $r > -1$, we have that*

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq x \\ P^+(n)^2 | n}} \frac{1}{P^+(n)^r} = x \exp\left\{-(2r+2)^{\frac{1}{2}} (\log x \log_2 x)^{\frac{1}{2}} \left(1 + g_r(x) + O\Big(\big(\frac{\log_3 x}{\log_2 x}\big)^3\Big)\right)\right\}, \tag{21}$$

where $\log_k x = \log(\log_{k-1} x)$ is the k-fold iterated natural logarithm of x, and

$$g_r(x) = \frac{\log_3 x + \log(1+r) - 2 - \log 2}{2\log_2 x}\Big(1 + \frac{2}{\log_2 x}\Big) - \frac{\big(\log_3 x + \log(1+r) - 2\big)^2}{8(\log_2 x)^2}.$$

取 $r = 0$ 定理2.5 ，然后使用柯西-施瓦茨不等式，得到以下估计。

推论 2.6 *Let f be an arithmetic function such that*

$$\sum_{1\le n\le x}|f(n)|^2 \ll x(\log x)^B \tag{22}$$

for some positive constant B, then

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)^2|n}} f(n) = O\left(x\exp\left\{-c(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}\right\}\right) \tag{23}$$

for some positive constant $c = c(B) > 0$.

定理 1.1 的证明1.1

本节中，我们使用 Alladi [9, 定理 1] 和 Kural 等人 [10, 定理 3.1] 中的思路来证明定理 1.1。设 $\psi(n) := \Omega(\sqrt{\alpha x})\log\log\log n$ 且 $h(n) = f(n)F(\psi(n))$，使得

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} h(n) = \sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} f(n)F\Big(\frac{\Omega(n)-\alpha\log\log x}{\sqrt{\alpha\log\log x}}\Big).$$

根据加权 Erd˝os-Kac 定理（2）和渐近估计（16），要证明（6），只需证明

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} h(n) = \delta(S)\sum_{1\le n\le x} h(n) + o(x(\log x)^{\alpha-1}). \tag{24}$$

Proof of(24) 首先，我们将这个和拆分成两部分。一部分限于 $P^+(n)||n$，另一部分限于 $P^+(n)^2|n$。注意到 $f(n)$ 是除数有界函数，由于 $h(n)$ 是有界函数，F因此 22) 对除数有界函数成立。由推论 2.6，可得

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} h(n) = \sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S, P^+(n)||n}} h(n) + O\left(x\exp\left\{-c(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}\right\}\right). \tag{25}$$

对于（25）右侧的第一项，我们将其拆分为两部分:

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S, P^+(n)||n}} h(n)\\ &= \sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S, P^+(n)||n, P^+(n)<y}} h(n) + \sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S, P^+(n)||n, P^+(n)\ge y}} h(n)\\ &:= S_1 + S_2,\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $y = x^{1/u}$ 将在最后确定。也就是说，$u = \log x/\log y$ 与第 2.3 节中相同。

显然， $|S_1| \ll \Psi_f(x,y)$ 根据第 Ψ_f2.3 节中 的定义。由推论 2.4，我们有

$$S_1 \ll x(\log y)^{\alpha-1}\exp(-\tfrac{1}{2}u\log u) \tag{27}$$

对于 $1 \le u \le \log x/(\log\log x)^2$。

关于 S_2，我们将其写成如下形式：

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)=p, p\| n}} h(n) \\ &= \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}} h(np) \\ &= \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} f(p) \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}} f(n) F\left(\psi(n)+\frac{1}{\sqrt{\alpha\log\log x}}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

由于 F 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，以下估计

$$F\left(\psi(n)+\frac{1}{\sqrt{\alpha\log\log x}}\right) = F(\psi(n))+o(1) \tag{29}$$

当 $x\to\infty$ 时，该估计对 n 一致成立。由于 $f(p)=\alpha$，可得

$$S_2 = \alpha \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}} h(n) + o(1)\cdot \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}} f(n). \tag{30}$$

利用17中的 Ψ_h 定义，并根据推论2.6，我们可将 (30) 第一项中的双重求和写成

$$\sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}} h(n) = \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \Psi_h\left(\frac{x}{p},p\right) + O\left(x\exp\left\{-c(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}\right\}\right). \tag{31}$$

注意到（30）第二项中的双重求和有界于 y

$$\sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}} f(n) \le \sum_{1\le n\le x} f(n) \ll x(\log x)^{\alpha-1}.$$

因此， S_2 可用 $\Psi_h(x,y)$表示如下

$$S_2 = \alpha \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \Psi_h\left(\frac{x}{p},p\right) + o(x(\log x)^{\alpha-1}). \tag{32}$$

现在，为了从 S_2中分离出 $\delta(S)$，我们将（32）中的求和改写为

$$\sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \Psi_h\left(\frac{x}{p},p\right) = \delta(S)\int_y^x \Psi_h\left(\frac{x}{t},t\right)\frac{dt}{\log t} + S_3, \tag{33}$$

其中

$$S_3 := \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \Psi_h\left(\frac{x}{p},p\right) - \delta(S)\int_y^x \Psi_h\left(\frac{x}{t},t\right)\frac{dt}{\log t}.$$

这里， S_3 是一个误差项。为了估计它，我们根据 Ψ_h 的定义展开 Ψ_h，然后交换求和与积分的顺序：

$$\begin{aligned}
S_3 &= \sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)\le p}} h(n) - \delta(S)\int_y^x \Big(\sum_{\substack{1\le n\le x/t\\ P^+(n)\le t}} h(n)\Big)\frac{dt}{\log t} \\
&= \sum_{\substack{1\le n\le x/y\\ P^+(n)\le x/n}} h(n)\Bigg(\sum_{\substack{P^+(n)\le p\le x/n\\ p\ge y, p\in S}} 1 - \delta(S)\int_{\max\{P^+(n),y\}}^{x/n}\frac{dt}{\log t}\Bigg) \\
&= \sum_{\substack{1\le n\le x/y\\ P^+(n)\le x/n}} h(n)\Bigg(\pi_S\Big(\frac{x}{n}\Big) - \pi_S(\max\Big\{P^+(n), y\Big\}) + O(1) \\
&\qquad\qquad - \delta(S)\operatorname{Li}\Big(\frac{x}{n}\Big) + \delta(S)\operatorname{Li}(\max\Big\{P^+(n), y\Big\})\Bigg) \\
&\ll \sum_{\substack{1\le n\le x/y\\ P^+(n)\le x/n}} f(n)\Big(e_S\Big(\frac{x}{n}\Big) + e_S(\max\Big\{P^+(n), y\Big\}) + O(1)\Big). \qquad (34)
\end{aligned}$$

在（34）的最后一行中，我们用到了两个事实：(i) $h(n)\ll f(n)$；$e_S(\max\{P^+(n)\ y\}) \le e_S(x/n)$。事实 (ii) 成立，因为 $P^+(n)\le x/n$, $y\le x/n$，且 e_S是递增的。从（34）的求和中去掉限制条件 $P^+(n)\le x/n$，

$$S_3 \ll \sum_{1\le n\le x/y} f(n)\Big(e_S\Big(\frac{x}{n}\Big) + 1\Big). \qquad (35)$$

由于当 $n\le x/y$ 时， $e_S(x/n)\le (x/n)v_S(x/n)$，且 $v_S(x/n)\le v_S(y)$，我们得到

$$S_3 \ll xv_S(y)\sum_{1\le n\le x/y}\frac{f(n)}{n} + \sum_{1\le n\le x/y} f(n). \qquad (36)$$

根据渐近估计（16），我们有$\sum_{1\le n\le x} f(n)\ll x(\log x)^{\alpha-1}$。然后通过分部求和，我们有 $\sum_{1\le n\le x} f(n)/n \ll (\log\ x)^{\alpha}$。因此我们得到以下两个估计

$$\sum_{1\le n\le x/y} f(n) \ll \frac{x}{y}\Big(\log\frac{x}{y}\Big)^{\alpha-1} \ll \frac{x(\log x)^{\alpha-1}}{y}, \qquad (37)$$

$$\sum_{1\le n\le x/y}\frac{f(n)}{n} \le \sum_{1\le n\le x}\frac{f(n)}{n} \ll (\log x)^{\alpha}. \qquad (38)$$

由（36）可得

$$S_3 \ll xv_S(y)(\log x)^{\alpha} + \frac{x(\log x)^{\alpha-1}}{y}. \qquad (39)$$

综合（25）-（27）、（32）-（33）和（39），我们得到

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} h(n) = \alpha\delta(S)\int_y^x \Psi_h\Big(\frac{x}{t}, t\Big)\frac{dt}{\log t} + R_S(x,y), \qquad (40)$$

其中

$$R_S(x,y) \ll x(\log x)^{\alpha-1}\left\{\exp(-\tfrac{1}{2}u\log u)+v_S(y)\log x+\frac{1}{y}+o(1)\right\}.$$

特别地，若取 $S=\mathcal{P}$，则

$$\sum_{1\le n\le x} h(n)=\alpha\int_y^x \Psi_h\left(\frac{x}{t},t\right)\frac{dt}{\log t}+R_{\mathcal{P}}(x,y). \tag{41}$$

将（41）代入（40），最终得到

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} h(n)=\delta(S)\sum_{1\le n\le x} h(n)+R(x,y) \tag{42}$$

对于 $1\le u\le \log x/(\log\log x)^2$, 其中

$$R(x,y)\ll x(\log x)^{\alpha-1}\left\{\exp(-\tfrac{1}{2}u\log u)+(v_S(y)+v_{\mathcal{P}}(y))\log x+\frac{1}{y}+o(1)\right\}. \tag{43}$$

现在，我们使用引理 2.1 来估计 $R(x,y)$。注意，$v_S+v_{\mathcal{P}}$是递减的，$v_S(x)\log x=o(1)$，且 $v_{\mathcal{P}}(x)\log x=o(1)$。取 $h(x)=\log x/(\log\log x)^2$。根据引理 2.1，我们可以选取一个正函数 $y=y(x)$，使得 $y(x)\to\infty, u=\log x/\log y\to\infty, u\le\log x/(\log\log)^2,$，并且当 $x\to\infty$时，$\lim_{x\to\infty}(v_S(y)+v_{\mathcal{P}}(y))\log x=0$。由（43）可知，对于这样的 y，有 $R(x,y(x))=o(x(\log x)^{\alpha-1})$。因此，由（42）立即得到（24）。定理 1.1 的证明至此完成。□

定理1.2的证明

令 $[s]:=\mathbb{N}\cap[1,s]$ 为 1 到 s之间的自然数集合。那么$[N]=\{1,\dots,N\}$。对于有限非空子集 $B\subset\mathbb{N}$，算术函数 $a\colon B\to\mathbb{C}$ 在 B 上的 Ces`aro 平均和对数平均分别定义为

$$\mathop{\mathbb{E}}_{n\in B} a(n):=\frac{1}{|B|}\sum_{n\in B}a(n)\qquad\text{and}\qquad \mathop{\mathbb{E}}^{\log}_{n\in B} a(n):=\frac{\sum_{n\in B}a(n)/n}{\sum_{n\in B}1/n}.$$

在接下来的三个定理中，我们引用了 $\mathbb{E}$ 和 $\mathbb{E}^{\log}$ Bergelson 和 Richter [11] 用于证明定理（7）的技巧。

命题 4 1 [11, 2 1] *Let $B\subset\mathbb{N}$ be a finite and non-empty set of integers. Then for any bounded arithmetic function $a\ \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ with $|a|\le 1$ we have*（命题。）：*that*

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]}a(n)-\mathop{\mathbb{E}}^{\log}_{m\in B}\mathop{\mathbb{E}}_{n\in[\frac{N}{m}]}a(mn)\right|\le\left(\mathop{\mathbb{E}}^{\log}_{m\in B}\mathop{\mathbb{E}}^{\log}_{n\in B}\Phi(n,m)\right)^{1/2}, \tag{44}$$

where $\Phi(m,n):=$最大公因数$(m,n)-1$.

引理 4.2（[11, 引理 2.2]） *Let $\mathbb{P}_k:=\{n\in\mathbb{N}\colon\Omega(n)=k\}$, $k\ge 1$. For all $\varepsilon\in(0,1)$ and $\rho\in(1,1+\varepsilon]$, there exist two finite and non-empty sets $B_1,B_2\subset\mathbb{N}$ satisfying the following properties:*

(i) $B_1 \subset \mathbb{P}_1$ *and* $B_2 \subset \mathbb{P}_2$;(ii) $|B_1 \cap [\rho^j, \rho^{j+1})$ $| = |B_2 \cap [\rho^j, \rho^{j+1})|$ *for all* $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;(iii) $\mathbb{E}^{\log}_{m\in B_1}\mathbb{E}^{\log}_{n\in B_1}\Phi($ $m,n) \le \varepsilon$ *and* $\mathbb{E}^{\log}_{m\in B_2}\mathbb{E}^{\log}_{n\in B_2}\Phi(m,n) \le \varepsilon$.

引理 **4 3** [11, 2 3] *Fix* $\varepsilon \in 0,1$ *and* $\rho \in 1\ 1+\varepsilon]$. *Let* B_1 *and* B_2 *be*。(*two finite non-empty subsets of* $\mathbb{N}$ *satisfying property in Lemma 4.2. Then for* 引理。) ( ) (,(ii) *any bounded arithmetic function* a: $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *with* $|a| \le 1$ *we have*

$$\left| \mathbb{E}^{\log}_{p\in B_1} \mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{p}]} a(n) - \mathbb{E}^{\log}_{q\in B_2} \mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{q}]} a(n) \right| \le 5\varepsilon. \tag{45}$$

与第 3 节类似，我们设 $\psi(n)$: $=\Omega(n - N)\log\log\log$在此使用，不会造成符号歧义。在定理 1.2 中，与（ $P^+(n)$ 和 N $F(\psi(n))$ 相比，我们多出两个参数（7）。证明定理 1.2 所需的唯一新要点是，在（10）的左侧，对这两个参数进行右平移只会造成微小扰动。更具体地说，我们有以下引理。

引理 **4.4** *Let* F_1, a: $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *be two bounded functions and let* $F_2 \in C_c(\mathbb{R})$. *Then for any integer* $m \in \mathbb{N}$, *we have that*

$$\mathbb{E}_{n\in[N]} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(n) = \mathbb{E}_{n\in[N]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(n) + o_{N\to\infty}(1). \tag{46}$$

Proof 式（46）在 $m = 1$ 时显然成立。设 $m \ge 2$。我们将该平均值拆分为以下两部分：

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{n\in[N]} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(n) \\ &= \mathbb{E}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)\le m} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(n) \\ &\quad + \mathbb{E}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)>m} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(n) \\ &= \mathbb{E}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)\le m} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(n) \\ &\quad + \mathbb{E}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)>m} F_1(P^+(n))F_2(\psi(mn))a(n) \\ &:= S_4 + S_5. \end{aligned} \tag{47}$$

对于第一个平均值，仿照 [19, 引理 4.5] 的证明，我们有

$$S_4 = O(N^{-c}),$$

其中 $c = 1/(2\log m)$。

关于 S_5，注意到 $\psi(mn) - \psi(n) = \Omega(m)\sqrt{\log\log N}$。由于 F_2 一致连续，我们得到

$$F_2(\psi(mn)) = F_2(\psi(n)) + o_{N\to\infty}(1) \tag{48}$$

当 $N \to \infty$ 时，对 $n \le N$ 一致成立。因此

$$S_5 = \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)>m} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(n) + o_{N\to\infty}(1). \tag{49}$$

由（47），我们得到

$$\begin{aligned} &\mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(n) \\ &= \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)>m} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(n) + o_{N\to\infty}(1). \end{aligned} \tag{50}$$

与（47）类似，由 $S_4 = O(N^{-c})$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(n) = \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} 1_{P^+(n)>m} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(n)+O(N^{-c}). \tag{51}$$

因此，由（46）和（50）及（51）立即可得。 □

由引理 4.4，将 $F(P^+(n))$ 替换为 $F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))$ 可得 [19,定理 4.6], 如下定理。随后，根据 1.2 定理 1.1 和定理 4.5 中的论证，定理 [11,定理 A]（由 Bergelson 和 Richter 提出）立即可得。为方便读者，现给出详细证明。

定理 **4.5** *Let $F_1\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ be a bounded function, and let $F_2 \in C_c(\mathbb{R})$. Then for any bounded arithmetic function $a\colon \mathbb{N}\to\mathbb{C}$, we have that*

$$\mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n)+1) = \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n))+o_{N\to\infty}(1). \tag{52}$$

Proof 我们不妨假设 $|F_1|$, $|F_2| \le 1$ 且 $|a| \le 1$。令 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $\rho \in (1, 1+\varepsilon]$。令 B_1 和 B_2 为满足引理4.2中性质 (i)-(iii) 的两个有限非空集合。对于 (52)，我们令

$$\begin{aligned} S_6 &:= \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n)+1), \\ S_7 &:= \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[N]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n)). \end{aligned}$$

并且令

$$\begin{aligned} S_{B_1} &:= \mathop{\mathbb{E}^{\log}}_{p\in B_1} \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[\frac{N}{p}]} F_1(P^+(pn))F_2(\psi(pn))a(\Omega(pn)+1), \\ S_{B_2} &:= \mathop{\mathbb{E}^{\log}}_{q\in B_2} \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[\frac{N}{q}]} F_1(P^+(qn))F_2(\psi(qn))a(\Omega(qn)) \end{aligned}$$

分别对应于 B_1 和 B_2。于是由命题 4.1 和引理 4.2 (iii)，可得

$$\limsup_{N\to\infty} |S_6 - S_{B_1}| \le \varepsilon^{1/2} \quad \text{and} \quad \limsup_{N\to\infty} |S_7 - S_{B_2}| \le \varepsilon^{1/2}. \tag{53}$$

由引理 4.2 (i)，我们有 $\Omega(pn) = \Omega(n)+1$，并且 $\Omega(qn) = \Omega(n)+2$，对于 $p \in B_1$, $q \in B_2$。由此可得

$$S_{B_1} = \mathop{\mathbb{E}^{\log}}_{p\in B_1} \mathop{\mathbb{E}}_{n\in[\frac{N}{p}]} F_1(P^+(pn))F_2(\psi(pn))a(\Omega(n)+2),$$

$$S_{B_2} = \mathbb{E}^{\log}_{q\in B_2} \mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{q}]} F_1(P^+(qn))F_2(\psi(qn))a(\Omega(n)+2).$$

由于 B_1 和 B_2 都是有限的，由引理 4.4 可得

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{m}]} F_1(P^+(mn))F_2(\psi(mn))a(\Omega(n)+2)\\ &= \mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{m}]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n)+2)+o(1)\end{aligned} \tag{54}$$

对任意 $m \in B_1 \cup B_2$，可得

$$S_{B_1} = \mathbb{E}^{\log}_{p\in B_1} \mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{p}]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n)+2)+o(1), \tag{55}$$

$$S_{B_2} = \mathbb{E}^{\log}_{q\in B_2} \mathbb{E}_{n\in[\frac{N}{q}]} F_1(P^+(n))F_2(\psi(n))a(\Omega(n)+2)+o(1). \tag{56}$$

由引理 4.3 和引理 4.2 (ii)，我们得到

$$\limsup_{N\to\infty} |S_{B_1} - S_{B_2}| \le 5\varepsilon. \tag{57}$$

结合式（53）和式（57），得到

$$\limsup_{N\to\infty} |S_6 - S_7| \le 2\varepsilon^{1/2} + 5\varepsilon. \tag{58}$$

由于 ε 可以任意小，我们得出 $\limsup_{N\to\infty} |S_6 - S_7| = 0$。证明至此完成。□

Proof of Theorem 1.2 对于任意 $x \in X$ 和 $F \in C_c(\mathbb{R})$，我们定义 X 上的测度 μ_N 为

$$\mu_N := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{P^+(n)\in S} F(\psi(n))\delta_{T^{\Omega(n)}x}$$

对于 $N \in \mathbb{N}$，其中 δ_y 表示任意 $y \in X$处的点质量 y。定义

$$\mu' := \delta(S)\cdot\Big(\int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-t^2/2}\,dt\Big)\cdot\mu.$$

那么，式（1.2）等价于断言 $\mu_N \to \mu'$ 在弱-$*$ 拓扑下。由于 μ 是唯一遍历的，只需证明以下 T-不变性

$$\lim_{N\to\infty}\Big|\int_X g\circ T\,d\mu_N - \int_X g\,d\mu_N\Big| = 0 \tag{59}$$

对所有 $g \in C(X)$。事实上，若取 $F_1(n) = 1_{n\in S}$ 和 $a(n) = g(T^n x_0)$，则由定理 4.5可得到（59）的以下等价形式：

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} &1_{P^+(n)\in S}F(\psi(n))g(T^{\Omega(n)+1}x_0)\\ &- \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1_{P^+(n)\in S}F(\psi(n))g(T^{\Omega(n)}x_0)\Big| = 0.\end{aligned} \tag{60}$$

至此，定理 1.2 的证明完成。 □

定理1.3证明

Th定理 1.3 的证明与定理 1.2类似。首先，我们证明 t

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} F\Big(\frac{\Omega(\varphi(n))-\frac{1}{2}(\log\log x)^2}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log x)^{3/2}}\Big)=\delta(S)\cdot\Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)e^{-t^2/2}\,dt\Big) \tag{61}$$

对于 $F\in C_c(\mathbb{R})$。为证明（61），我们对第 1.1 定理在第 3 节中的证明作一些调整。与第 3 节类似，我们在此令 $\psi(n):=\frac{\Omega(\varphi(n)-\frac{1}{2}x^2))(\log\log)(\log\log)}{\frac{1}{\sqrt{3}}x^{3/2}}$，于是只需证明

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} F(\psi(n))=\delta(S)\sum_{1\le n\le x}F(\psi(n))+o(x). \tag{62}$$

与（25）-（28）类似，我们有

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ P^+(n)\in S}} F(\psi(n))=S_8+O\Big\{x\exp(-\tfrac{1}{2}u\log u)+x\exp\big(-c(\log x\log\log x)^{\frac{1}{2}}\big)\Big\} \tag{63}$$

对于 $1\le u\le \log x/(\log\log x)^2,$，其中

$$S_8:=\sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}}\sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}}F\left(\psi(n)+\frac{\Omega(p-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log x)^{3/2}}\right).$$

设 ε 为任意小的正数。由于 F 属于 $C_c(\mathbb{R})$，它在 $\mathbb{R}$上是一致连续的。存在一个正数 $\eta=\eta(\varepsilon)>0$，使得

$$|F(x)-F(y)|<\varepsilon$$

对所有满足 $|x-y|\le\eta$ 的 $x,y\in\mathbb{R}$ 都成立。此外， F 有界，因此我们可以假设对某个常数 $C>0$，有 $|F|\le C$。现在，我们令 $\eta_0:=(\log\log x)^{-1/4}$。假设 x 足够大，使得 $\eta_0<\eta$。接下来，我们将关于 S_8 的以下差值拆分为两部分：

$$\begin{aligned}&\Big|S_8-\sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}}\sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}}F(\psi(n))\Big|\\ \le&\sum_{\substack{y\le p\le x\\ p\in S}}\sum_{\substack{1\le n\le x/p\\ P^+(n)<p}}\left|F\left(\psi(n)+\frac{\Omega(p-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log x)^{3/2}}\right)-F(\psi(n))\right|\end{aligned}$$

$$\leq \sum_{\substack{y\leq p\leq x\\ \frac{\Omega(p-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log x)^{3/2}}\leq\eta_0}} \sum_{\substack{1\leq n\leq x/p\\ P^+(n)<p}} \varepsilon + \sum_{\substack{y\leq p\leq x\\ \frac{\Omega(p-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log x)^{3/2}}>\eta_0}} \sum_{\substack{1\leq n\leq x/p\\ P^+(n)<p}} 2C$$

$$\leq \varepsilon \sum_{p\leq x} \sum_{\substack{1\leq n\leq x/p\\ P^+(n)<p}} 1 + 2C \sum_{\substack{y\leq p\leq x\\ \frac{\Omega(p-1)}{\frac{1}{\sqrt{3}}(\log\log x)^{3/2}}>\eta_0}} \frac{x}{p}$$

$$\leq \varepsilon x + \frac{2\sqrt{3}Cx}{\eta_0(\log\log x)^{3/2}} \sum_{y\leq p\leq x} \frac{\Omega(p-1)}{p}. \tag{64}$$

由 [20, 引理 2。3],可得

$$\sum_{1\leq p\leq x} \frac{\Omega(p-1)}{p} = \frac{1}{2}(\log\log x)^2 + O(\log\log x). \tag{65}$$

回顾 $u = \log x/\log y$，由 (65) 可得

$$\sum_{y\leq p\leq x} \frac{\Omega(p-1)}{p} = \log u \log\log x - \frac{1}{2}(\log u)^2 + O(\log\log x). \tag{66}$$

这由 $O(\log\log x \log\log\log x$ 控制，前提是 $1 \leq u \leq \log\log x$。设 $1 \leq u \leq \log\log x$。由 (64) 以及 $\eta_0 = (\log\log x)^{-1/4}$,

$$\left|S_8 - \sum_{\substack{y\leq p\leq x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\leq n\leq x/p\\ P^+(n)<p}} F(\psi(n))\right| \leq \varepsilon x + O\left(\frac{x\log\log\log x}{(\log\log x)^{1/4}}\right). \tag{67}$$

由于 ε 可以任意小，我们得到

$$S_8 = \sum_{\substack{y\leq p\leq x\\ p\in S}} \sum_{\substack{1\leq n\leq x/p\\ P^+(n)<p}} F(\psi(n)) + o(x). \tag{68}$$

然后，应用（31）-（42）中的论证，我们得到

$$\sum_{\substack{1\leq n\leq x\\ P^+(n)\in S}} F(\psi(n)) = \delta(S) \sum_{1\leq n\leq x} F(\psi(n)) + R(x,y) \tag{69}$$

with

$$R(x,y) \ll x\left(\exp(-\tfrac{1}{2}u\log u) + (v_S(y) + v_{\mathcal{P}}(y))\log x + \frac{1}{y} + o(1)\right).$$

再次应用引理 2.1，存在 $y = y(x)$ 满足 $u \le \log\log x$，使得 $R(x,y) = o(x)$。因此，式（62）成立，且式（61）成立。

现在，对于欧拉函数 $\varphi(n)$，我们有如下乘法恒等式

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)\frac{\gcd(m,n)}{\varphi(\gcd(m,n))}$$

对任意 $m, n \in \mathbb{N}$。由此恒等式可知

$$\Omega(\varphi(mn)) = \Omega(\varphi(n)) + A$$

对于某个常数 A，该常数取决于 m 以及 m 的因子。由此可得，关系式（48）对 $\Omega(\varphi(n))$ 也成立，且引理 4.4和定理 4.5 对 $\Omega(\varphi(n))$ 也成立。因此，定理 1.3可类似地由定理1.2的论证推出。□

致谢。本文得到中国国家自然科学基金（项目编号：12288201）的资助。第一作者得到中国博士后科学基金（项目编号：2021TQ0350）的资助。作者感谢杨立扬提出的宝贵讨论和意见。我们也感谢匿名审稿人提供的有益修改意见和建议。

利益冲突声明。作者确认，他们与任何在本文讨论的主题或材料方面具有财务或非财务利益的组织或实体均无隶属关系，也未参与其活动。

参考文献

[1] Erd˝os, P., Kac, M.：加性数论函数理论中的误差高斯分布律。Amer. J. Math. **62**，738–742（1940）。https://doi.org/10.2307/2371483[2] Elliott, P.D.T.A.：概率数论 I。《数学科学基础丛书》 [数学科学基本原理], 第239卷，施普林格，（1979）[3]Elliott, P.D.T.A.：概率数论 II。《数学科学基础丛书》 [数学科学基本原理], 第240卷，施普林格，（1980）[4] Elboim, D., Gorodetsky, O.：乘性算术函数与广义埃文斯测度。即将在《以色列数学杂志》发表。预印本见https://arxiv.org/abs/1909.00601

[5] Tenenbaum, G.：复值乘性函数的有效平均值。Ramanujan J. 44(3)，641–701（2017）。https://doi.org/10.1007/ s11139-017-9949-7[6] Tenenbaum, G.：更正：复值乘性函数的有效平均值。Ramanujan J. 53(1)，243–244（2020）。https://doi. org/10.1007/s11139-020-00297-4[7] Khan, R., Milinovich, M.B., Subedi, U.：Erd˝os-Kac 定理的加权版本。《数论杂志》239，1–20（2022）。https://doi.org/10. 1016/j.jnt.2021.10.010[8] Granville, A., Soundararajan, K.：筛法与 Erd˝os-Kac 定理。载于：《数论中的等分布：导论》。NATO 科学丛书 II：数学、物理与化学，第237卷，第15–27页。施普林格，（2007）。https://doi. org/10.1007/978-1-4020-5404-4 2[9] Alladi, K.：素因子之间的对偶性及其在算术级数素数定理中的应用。《数论杂志》9(4)，436–451（1977）。https://doi.org/10.1016/0022-314X(77)90005-1[10] Kural, M., McDonald, V., Sah, A.：M¨obius 公式与素理想集合的密度。Arch. Math. 115，53–66（2020）。https://doi.org/10.1007/ s00013-020-01458-z[11] Bergelson, V., Richter, F.K.：素数定理的动力学推广，以及加性与乘法半群作用的不相交性。Duke Math. J. 171(15)，3133–3200（2022）。https://doi.org/10. 1215/00127094-2022-0055[12] Landau, E.：《素数分布学手册》。第2版，Chelsea Publishing Co.，纽约，（1953）。由 Paul T. Bateman 撰写附录。[13] von Mangoldt, H.C.F.：等式的证明 $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(k)_{k} = 0$ 第2卷，第835–852页。柏林皇家普鲁士科学院会议录，（1897）。https://biodiversitylibrary.org/page/ 29982413[14] Pillai, S.S.：Mangoldt 定理的推广。印度科学院学报 A 辑 11，13–20（1940）[15] Selberg, S.：关于无平方数的理论。Math. Z. 44(1)，306–318（1939）。https://doi.org/10.1007/BF01210655[16] Erd˝os, P.：加性函数的分布函数。《数学年刊》（第2辑）47，1–20（1946）。https://doi.org/10.2307/1969031

理及[17] Delange, H.：论若干算术函数。《伊利诺伊数学杂志》2，81–87（1958）。https://doi.org/10.1215/ijm/1255380835[18]Loyd, K.：关于数列 Ω(n) 渐近行为的动力学方法。《遍历理论与动力系统》1–22（2022）。即将刊出。https://doi.org/10.1017/etds.2022.81[19] Wang, B.：可加算术半群中素因子数量的动力学。《有限域及其应用》81，102029（2022）。https://doi. org/10.1016/j.ffa.2022.102029[20] Erd˝os, P., Pomerance, C.：关于$\varphi(n)$的素因子个数的正态值。《落基山数学杂志》15(2)，343–352（1985）。https://doi.org/ 10.1216/RMJ-1985-15-2-343[21] Bassily, N.L., K´atai, I., Wijsmuller, M.： $\phi_k(n)$的素因子数，其中 ϕ_k 是 ϕ的 k次迭代。《数论杂志》65(2)，226–239（1997）。https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2164[22] Elma, E., Liu, Y.-R.：具有给定重数的素因子个数。《加拿大数学通报》，1–17（2021）。https://doi.org/10.4153/ S0008439521000266[23] Duan, L., Wang, B., Yi, S.：全局函数域上 Alladi公式的类似结果。《有限域及其应用》74，101874（2021）。https://doi.org/10.1016/j.ffa.2021.101874[24] Granville, A., Koukoulopoulos,D.：超越用于乘性函数部分和的LSD方法。Ramanujan J. 49(2)，287–319（2019）。https://doi.org/10.1007/s11139-018-0119-3[25] Tenenbaum, G., Wu, J.：光滑整数上某些乘性函数的平均值。《纯粹与应用数学杂志》564，119–166（2003）。https://doi.org/10.1515/crll.2003.087[26] Song, J.M.：不含大素因子的整数上的非负乘性函数之和。II。《算术学报》102(2)，105–129（2002）。https://doi.org/10.4064/aa102-2-1[27] Ivi´c, A., Pomerance, C.：关于涉及整数最大素因子的某些和的估计。Colloq. Math. Soc. J´anos Bolyai，第34卷，第769–789页。North-Holland，阿姆斯特丹，

(1984)