arXiv:2303.05814v1 [math.SP] 10 Mar 2023

收缩管状邻域中的狄拉克算子谱

Nour Kerraoui[1]

[1]艾克斯-马赛大学´、法国国家科学研究中心、I2M，法国马赛。

摘要

本文研究具有无限质量边界条件的平面闭曲线管状邻域中狄拉克算子的谱。我们证明，当管状邻域的宽度趋于零时，特征值的渐近展开由一个具有几何性质的一维算子决定，该算子涉及闭曲线的曲率。

1 引言

1.1 研究动机

近年来，薄弯曲管中的狄利克雷拉普拉斯算子一直是许多研究的主题。众所周知，极限算子是一个带有几何电势的薛定谔算子。相关例子见 ¨，其中收敛是在范数预解式意义下理解的；另请参阅相关研究[11, 4, 5] ，这些研究考察了黎曼子流形邻域中的绝热极限。近年来，此类系统的相对论对应物——涉及狄拉克算子——引起了广泛关注。这些研究的动机之一是，石墨烯等前景广阔的材料中的准粒子能够模拟量子电动力学 [1, 13]。

对区域中狄拉克算子的研究始于1987年，Berry 和 Mondragon [2] 在其研究中为算子施加了某些称为无限质量边界条件的边界条件。该边界条件通过将标准狄拉克算子与质量项耦合得到：质量项在所考虑区域内为零，在其他地方则为无穷大。这一研究在数学上得到了论证[15]。此后，关于这类算子在石墨烯量子点[12, 7, 9] 及其三维对应物 MIT 袋模型 [10]中的自伴性的研究相继展开。

本文的主要动机来自 [18], 中的研究，作者在那里对收缩的相对论量子波导中的狄拉克算子进行了谱研究。与非相对论情形不同，他们发现有效算子只是底层曲线上的自由狄拉克算子，而几何效应预计会在渐近展开的下一阶出现。本文研究定义在平面闭曲线管状邻域中的狄拉克算子，并考察定义域收缩至参考曲线时该算子的谱。我们给出了薄宽度情形下特征值的展开，其中特征值的分裂由一个一维算子描述。该算子通过其二次型定义，并涉及曲率。我们采用一种标准策略，对该狄拉克算子的平方应用微扰理论，并运用极小极大原理。

1.2 问题陈述与主要结果

对于 $\ell > 0$，我们令 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\ell\mathbb{Z}$。设 $\gamma:\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}^2$ 是一个 C^4 类正则平面闭曲线的单射弧长参数化，并令 $\Gamma = \gamma(\mathbb{T})$。我们关注定义在 Γ的大小为 $\varepsilon > 0$ 的管状邻域中的、满足无限质量边界条件的狄拉克算子。为定义该管状邻域，我们考虑映射

$$\Phi_\varepsilon : \begin{cases} \mathbb{T} \times (-1,1) & \to & \mathbb{R}^2 \\ (s,t) & \mapsto & \gamma(s) + \varepsilon t \nu(s), \end{cases} \tag{1}$$

其中，对于 $s \in \mathbb{T}$, $\nu(s)$ 表示点 $\gamma(s)$ 处的法向量 $\in \Gamma$，使得 $(\gamma'(s)\ \nu(s))$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的正向正交基。微分几何中的一个著名结果表明，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，映射 Φ_ε 都是从 $\mathbb{T} \times (-1, 1)$ 到宽度为 2ε 的 Γ 的管状邻域的整体微分同胚，该邻域定义为 $\Omega_\varepsilon := \Phi_\varepsilon\big(\mathbb{T} \times (-1,1)\big)$。由于我们关注的是 $\varepsilon \to 0$ 的情形，因此不妨假设 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$，本文中始终如此。

另一方面，对于 $m \in \mathbb{R}$，Ω_ε 上施加无限质量边界条件的狄拉克算子定义为

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon)) &:= \left\{ u \in H^1(\Omega_\varepsilon, \mathbb{C}^2) : -i\sigma_3 \sigma \cdot \nu_\varepsilon u = u \,\mathrm{on}\, \partial\Omega_\epsilon \right\}, \\ \mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon) u &:= -i\sigma \cdot \nabla u + m\sigma_3 u, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\sigma_k, k \in \{1,2,3\}$ 是泡利矩阵，定义如下：

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

并且对于 $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$，有 $\sigma \cdot x = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2$。这里，$\nu_\varepsilon$ 表示 Ω_ε 的外法向量场。

根据定义，$\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon)$ 已知是自伴的[12, 定理 1.1]。它还具有紧预解式，这可由 $\mathrm{dom}(D_\Gamma(\varepsilon))$ 在 $L^2(\Omega_\varepsilon, \mathbb{C}^2)$ 中的紧嵌入推出，并意味着其谱由离散特征值组成，这些特征值聚集于 $\pm\infty$。此外，由于系统在电荷共轭下保持不变，这些特征值关于零对称；相应的算子为 $\sigma_1 C$，其中 C 是复共轭算子。事实上，若 u 是对应于特征值 E 的特征函数，则可知 $\sigma_1 C u$ 是对应于特征值 $-E$ 的特征函数。全文中，$\mathbb{N} = \{1, 2, 3...\}$ 表示正自然数集合。对于 $j \in \mathbb{N}$，我们用 $E_j(\varepsilon)$ 表示 $D_\Gamma(\varepsilon)$ 按重数计的第 j 个正特征值。

为了陈述本文的主要结果，我们需要引入一个由其二次型定义的辅助一维算子。具体而言，考虑二次型

$$q^{1D}[f] = \int_{\mathbb{T}} \Big(|f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2 - \frac{\kappa^2}{\pi^2}|f|^2 \Big) ds, \quad \mathrm{dom}(q^{1D}) = H^1(\mathbb{T}, \mathbb{C}^2). \tag{3}$$

其中，对于 $s \in \mathbb{T}$, $\kappa(s)$ 表示曲线 Γ 在点 $\gamma(s)$ 处的曲率。它由弗雷内公式 $\gamma''(s) = \kappa(s)\nu(s)$ 定义。该二次型稠密定义、闭且有下界，因此根据 Kato第一表示定理 [16, Ch. VI, Thm. 2.1]，它对应于一个自伴算子，且该算子具有紧预解式。

为了陈述主定理，我们需要回顾极小极大原理。

定义 1. 设 Q 是一个下半有界闭半双线性型，其定义域 $\mathrm{dom}(Q)$ 在复希尔伯特空间 $\mathcal{H}$. 中稠密。设 A 是由半双线性型 Q 生成、作用于 $\mathcal{H}$ 上的唯一自伴算子。我们将 A 的第 j 个极小极大值定义为

$$\mu_j(A) = \inf_{\substack{W\subset \mathrm{dom}(Q)\\ \dim W = n}} \sup_{u\in W\setminus\{0\}} \frac{Q(u,u)}{\| u \|_{\mathcal{H}}^2}. \tag{4}$$

命题 1（极小极大原理）。设 Q 是希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上一个闭的、下半有界且定义域稠密的半双线性型，并设 A 是与 Q 相关联的唯一自伴算子。若假设 A 具有紧预解式，则 $\mu_j(A)$ 是 A 按重数计的第 j 个特征值。

本文的主要结果如下。

定理 1. 设 $j \in \mathbb{N}$，则存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$，都有

$$E_j(\varepsilon) = \frac{\pi}{4\varepsilon} + \frac{2}{\pi}m - \frac{16}{\pi^3}m^2\varepsilon + \frac{2}{\pi}(m^2 + \mu_{2j}(q^{1D}))\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

定理 1 的证明通过研究该算子平方所对应的二次型 $\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon$来完成。首先，我们利用映射$\Phi_\varepsilon$（1）引入的管状坐标重写问题。所得二次型定义在带权 L^2-空间上，我们对其进行变换以得到平坦度量。粗略地说，由此得到的二次型张量化到高阶项。然后，我们通过利用极小极大原理，为 $\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon$的平方的特征值求出上、下界，从而采用标准的降维论证。核心思想是，展开式中的一阶项由一个可显式分析的横向算子给出，而常数阶项则涉及一个由二次型定义的纵向算子 q^{1D}，该二次型见（3）。

1.3 论文结构

第 2 节介绍一维横向狄拉克算子的一些谱性质。第 3 节给出研究该算子平方所需的一些辅助二次型$\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon)$。最后一节通过给出该算子平方的特征值的上界和下界，证明定理1 。

2 横向算子

本节研究一个一维横向算子，它出现在对我们主要算子的研究中。

设 $\delta \geq 0$ 和 $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{S}^1$，我们考虑如下定义的一维横向算子 $\mathcal{T}_x(\delta)$

$$\mathcal{T}_x(\delta) = -i(\sigma\cdot x)\frac{d}{dt} + \delta\sigma_3, \quad \mathrm{dom}(\mathcal{T}_x(\delta)) = \{f \in H^1((-1,1),\mathbb{C}^2) : f_2(\pm 1) = \pm i(x_1 + ix_2)f_1(\pm 1)\}.$$

本段的主要结果是下面的命题。

命题 2. 以下结论成立。

(i) $\mathcal{T}_x(\delta)$是自伴的，具有紧预解式，其谱关于零对称，且不依赖于 x。此外，若用 $\lambda_j(\mathcal{T}_x(\delta))$表示 $\mathcal{T}_x(\delta)$的第 j个正特征值，则有

$$(2j-1)^2\frac{\pi^2}{16} \le \lambda_j(\mathcal{T}_x(\delta))^2 - \delta^2 \le j^2\frac{\pi^2}{4}. \tag{5}$$

若ϕ_j^+，δ 是与 $\lambda_j(\mathcal{T}_x(\delta))$对应的归一化特征函数，则$\phi_j^-$，$\delta := \sigma_1\overline{\phi_j^+}$，$\delta$ 是与 $-\lambda_j(\mathcal{T}_x(\delta))$对应的归一化特征函数。

(ii) 有

$$\lambda_j(\mathcal{T}_x(\delta)) = \frac{(2j-1)\pi}{4} + \frac{2}{(2j-1)\pi}\delta + \left(\frac{-16}{(2j-1)^3\pi^3} + \frac{2}{(2j-1)\pi}\right)\delta^2 + \mathcal{O}(\delta^3),$$

(iii) 对于 $j \in \mathbb{N}$，与 $\pm\lambda_j(\mathcal{T}_x(\delta))$对应的归一化特征函数满足

$$\phi^{\pm}_{j,\delta}(t) := \phi^{\pm}_j(t) + \mathcal{O}(\delta), \tag{6}$$

其中 ϕ_j^+ 定义为

$$\phi_j^+(t) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{4}(t+1)\right)\begin{pmatrix}1\\ -i(x_1+ix_2)\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{4}(t+1)\right)\begin{pmatrix}1\\ i(x_1+ix_2)\end{pmatrix} \tag{7}$$

且 $\phi_j^- = \sigma_1\overline{\phi_j^+}$。这里，余项是在 L^∞-范数下理解的。

(iv) 对所有 $f \in \mathrm{dom}(\mathcal{T}_x(\delta))$，均有

$$\|\mathcal{T}_x(\delta)f\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} = \|f'\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} + \delta^2\|f\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} + \delta\big(|f(1)|^2 + |f(-1)|^2\big).$$

上述命题的证明与[18, 命题10],的证明类似，不过为求完整起见，我们仍给出证明

证明。由于乘以 σ_3 的乘法算子在 $L^2((-1,1)\ \mathbb{C}^2)$ 中有界且自伴，因此算子 $\mathcal{T}_x(\delta)$ 自伴当且仅当 $\mathcal{T}_x(0)$ 自伴。利用分部积分，我们很容易证明算子$\mathcal{T}_x(0)$ 是对称的。

对于所有 $v \in \mathcal{D} := C_0^\infty((-1,1)\ \mathbb{C}^2)$ 和 $u \in$ 定义域$\mathcal{T}_x(0)^*$，有

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{T}_x^*(0)u, v\rangle_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} = \langle u, \mathcal{T}_x(0)v\rangle_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} &= \langle u, -i\sigma\cdot v'\rangle_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)}\\ &= \langle u, \overline{-i\sigma\cdot v'}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= \langle -i\sigma\cdot u', \overline{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= \langle \mathcal{T}_x(0)^*u, \overline{v}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},\end{aligned}$$

其中，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ 是分布的对偶配对。特别地，我们知道 $\mathcal{T}_x(0)^* = -i\sigma\cdot u' \in L^2((-1,1)\ \mathbb{C}^2)$，因此得到 $u \in H^1((-1,1)\ \mathbb{C}^2)$。接下来，分部积分给出：对于$u=(u_1,u_2)^\top \in$定义域$(\mathcal{T}_x(0)^*)$ 和 $v=(v_1,v_2)^\top \in$定义域$(\mathcal{T}_x(0))$

$$\langle \mathcal{T}_x(0)^* u, v\rangle_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} = \langle u, \mathcal{T}_x(0) v\rangle_{L^2((-1,1)\mathbb{C}^2)} + (\overline{i(x_1+ix_2)}u_2(1) - u_1(1))\overline{v}_1(1) \\ + (\overline{-i(x_1+ix_2)}u_2(-1) - u_1(-1))\overline{v}_1(-1).$$

回顾一下，$v \in$属于$\mathcal{T}_x(0)$的定义域，因此必有

$$0 = (\overline{i(x_1+ix_2)}u_2(1) - u_1(1))\overline{v}_1(1) + (\overline{-i(x_1+ix_2)}u_2(-1) - u_1(-1))\overline{v}_1(-1).$$

由于这对所有 $v \in$ 属于$\mathcal{T}_x(0)$的情形都成立，我们得到 $u_2(\pm 1) = \pm i(x_1+ix_2)u_1(\pm 1)$，从而推出$\mathcal{T}_x(0)^* = \mathcal{T}_x(0)$。

$\mathcal{T}_x(0)$的预解式的紧性是图定理以及 $H^1((-1,1)\ \mathbb{C}^2)$嵌入到 $L^2((-1,1)\ \mathbb{C}^2)$的紧性的推论。

令 $u \in \mathcal{T}_x(\delta)$，我们有

$$\|\mathcal{T}_x(\delta)u\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} = \| -i\sigma\cdot xu'\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} + \delta^2\|u\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)} \\ + 2\delta\Re(\langle -i\sigma\cdot xu', \sigma_3 u\rangle_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)}) \geq \delta^2\|u\|^2_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)},$$

由于分部积分和边界条件给出

$$2\Re\big(\langle -i\sigma\cdot xu', \sigma_3 u\rangle_{L^2((-1,1),\mathbb{C}^2)}\big) = |u(1)|^2 + |u(-1)|^2.$$

注意，利用$\| -i\sigma\cdot xu'\|_{L^2((-1,1)\ \mathbb{C}^2)} = \|u'\|_{L^2((-1,1)\ \mathbb{C}^2)}$即可证明结论 (iv)。由极小极大原理可推得，若 $\lambda \in Sp(\mathcal{T}_x(\delta))$，则 $|\lambda| \geq \delta$。实际上，这个不等式是严格的。事实上，若u 是 $\mathcal{T}_x(\delta)$的一个特征函数，对应于 λ，且满足 $|\lambda| = \delta$，则必然得到 u 是在$(-1,1)$上的一个常数函数，并满足边界条件。除非 u 为0，否则这是不可能的。我们已经证明 $Sp(\mathcal{T}_x(\delta)) \cap [-\delta,\delta] = \emptyset$。

现在，我们计算其谱。为此，我们取 $\lambda \in Sp(\mathcal{T}_x(\delta))$，并选取一个相应的特征函数 $u=(u_1,u_2)^\top \in$ 定义域$(\mathcal{T}_x(\delta))$。我们得到

$$-u_1'' = E^2 u_1, \quad E^2 = \lambda^2 - \delta^2. \tag{8}$$

考虑到 $\delta \geq 0$ 和 $E > 0$，我们得到

$$u_1(t) = A\cos(E(t+1)) + B\sin(E(t+1)),$$

其中 $A, B \in \mathbb{C}$，并且由于 $\lambda + \delta \neq 0$，有

$$u_2(t) = \frac{-i(x_1+ix_2)E}{\lambda+\delta} B\cos(E(t+1)) + \frac{i(x_1+ix_2)E}{\lambda+\delta} A\sin(E(t+1)).$$

利用 $t=-1$ 处的边界条件，我们得到

$$\sqrt{\lambda+\delta}A - \sqrt{\lambda-\delta}B = 0.$$

$t=1$ 处的边界条件给出

$$A(-\sqrt{\lambda+\delta}\cos 2E+\sqrt{\lambda-\delta}\sin 2E)-B(\sqrt{\lambda-\delta}\cos 2E+\sqrt{\lambda+\delta}\sin 2E)=0.$$

为了得到一个非零特征函数 u，必须满足

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda+\delta} & -\sqrt{\lambda-\delta} \\ \sqrt{\lambda-\delta}\sin 2E-\sqrt{\lambda+\delta}\cos 2E & -\sqrt{\lambda-\delta}\cos 2E-\sqrt{\lambda+\delta}\sin 2E \end{vmatrix}=0$$

由此得到以下隐式方程

$$\delta\sin(2E)+E\cos(2E)=0. \tag{9}$$

特别地，这意味着 $\mathcal{T}_x(\delta)$ 的谱关于原点对称。若$\delta=0$，则有 $E=|\lambda|=k\frac{\pi}{4}$，其中 $k\in\mathbb{N}$。若 $\delta>0$，则有 $\cos(2E)\neq 0$，从而得到

$$\tan(2E)+\frac{E}{\delta}=0. \tag{10}$$

考虑以下函数

$$\begin{aligned} f_0: I_0=[0,\frac{\pi}{2})&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\tan(x)+\frac{x}{2\delta}, \end{aligned}$$

容易证明，$x=0$ 是 $f_0(x)=0$ 的唯一解。

同理，我们为 $p\in\mathbb{N}$ 定义以下函数

$$\begin{aligned} f_p: I_p=((2p-1)\frac{\pi}{2},(2p+1)\frac{\pi}{2})&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto\tan(x)+\frac{x}{2\delta}. \end{aligned}$$

注意，$f_p'>0$ 和

$$\lim_{x\to(2p-1)\frac{\pi}{2}^+}f_p(x)=-\infty,\quad f_p(p\pi)=p\frac{\pi}{2\delta}>0.$$

因此，$f_p(x)=0$ 存在唯一解 x_p，满足 $x_p\in((2p-1)\frac{\pi}{2},p\pi)$。利用 (10) 和 (8)，可得 $\lambda_p(T_x(\delta))^2:=\frac{x_p^2}{4}+\delta^2$ 是 p的第 - 个正特征值 $T_x(\delta)$。特别地，可得 (5)。

现在，考虑以下 C^∞ 函数

$$F:\begin{cases}\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ (\mu,\delta)\mapsto 2\delta\sin(\mu)+\mu\cos\mu.\end{cases} \tag{11}$$

由于对于 $p\in\mathbb{N}$，我们有 $F(\frac{(2p-1)\pi}{2},0)=0$，且 $\partial_\mu F(\frac{(2p-1)\pi}{2},0)=(-1)^{(p+1)\underline{(2p-1)}_2}\pi$，根据隐函数定理可知，存在 θ_1、$\theta_2>0$ 以及一个 C^∞ 函数 $\mu_p:(-\theta_1,\theta_1)\to$

$(\frac{(2p-1)_2}{2}\ ^{\pi}-\theta_2, (2p-1)_2\ ^{\pi}+\theta_2)$ 满足 $\mu_p(0)=(2p-1)\frac{\pi}{2}$，并且对于所有 $|\delta|<\theta_1$，都有$F(\mu_p(\delta)\ \delta)=0$。此外，当 $\delta\to 0$ 时，我们得到

$$\mu_p(\delta)=\mu_p(0)+\mu_p'(0)\delta+\frac{\mu_p''(0)}{2}\delta^2+\mathcal{O}(\delta^3)=(2p-1)\frac{\pi}{2}+\frac{4}{(2p-1)\pi}\delta-\frac{32}{(2p-1)^3\pi^3}\delta^2+\mathcal{O}(\delta^3).$$

因此，当 $\delta\to 0$ 时，我们得到

$$\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))=\frac{(2p-1)\pi}{4}+\frac{2}{(2p-1)\pi}\delta+\left(\frac{-16}{(2p-1)^3\pi^3}+\frac{2}{(2p-1)\pi}\right)\delta^2+\mathcal{O}(\delta^3),$$

这证明了 （ii）。最后我们证明（iii）。对于 $p\in\mathbb{N}$，令 ϕ_p^+，δ 为 $\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))$ 对应的归一化特征函数，其定义为

$$\phi_{p,\delta}^+(t)=\frac{1}{N_{p,\delta}^{\frac{1}{2}}}\cos(E_p(t+1))\begin{pmatrix}1\\ -i(x_1+ix_2)\end{pmatrix}+\frac{1}{N_{p,\delta}^{\frac{1}{2}}}\sin(E_p(t+1))\begin{pmatrix}\frac{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}{E_p}\\ i(x_1+ix_2)\frac{E_p}{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}\end{pmatrix},\tag{12}$$

其中我们设 $E_p=\sqrt{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))^2-\delta^2}$，并且

$$N_{p,\delta}=2(1+\frac{1}{4E_p}\sin(4E_p))+(1-\frac{1}{4E_p}\sin(4E_p))\left(\left(\frac{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}{E_p}\right)^2+\left(\frac{E_p}{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}\right)^2\right)$$
$$+\frac{1}{2E_p}(1-\cos 4E_p)\left(\frac{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}{E_p}-\frac{E_p}{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}\right).$$

注意，当 $\delta\to 0$ 时，我们得到

$$\frac{1}{N_{p,\delta}^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}+\mathcal{O}(\delta),\quad \frac{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}{E_p}=1+\mathcal{O}(\delta)\quad\text{and}\quad\frac{E_p}{\lambda_p(\mathcal{T}_x(\delta))+\delta}=1+\mathcal{O}(\delta)\tag{13}$$

并且对于所有 $t\in(-1,1)$，我们还有

$$\cos(E_p(t+1))-\cos((2p-1)\frac{\pi}{4}(t+1))=\cos(\frac{\pi}{4}(2p-1)(t+1))(\cos(c_\delta(t+1))-1)$$
$$-\sin(\frac{\pi}{4}(2p-1)(t+1))\sin(c_\delta(t+1)),$$

当 $\delta\to 0$ 时，对于某个常数 $c_\delta=\mathcal{O}(\delta)$，由作用于余弦和正弦函数的中值定理可得

$$|\cos(E_p(t+1))-\cos((2p-1)\frac{\pi}{4}(t+1))|\le 2|c_\delta(t+1)|\le 4|c_\delta|.$$

因此，$\cos(E_p(t+1))=\cos((2p-1)\frac{\pi}{4}(t+1))+\mathcal{O}(\delta)$，其余项一致有界。同理，可得 $\sin(E_p(t+1))=\sin((2p-1)\frac{\pi}{4}(t+1))+\mathcal{O}(\delta)$。因此，由此以及式 (12) 和式 (13) 可得

$$\phi_{p,\delta}^+(t)=\phi_p^+(t)+\mathcal{O}(\delta),$$

具有一致余项，并得到（6）。

□

3 辅助二次型

本节给出算子$\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon)$的平方的二次型的双侧估计。

我们引入与 $\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon)^2$ 相关联的二次型，其定义如下

$$a[u] := \|D_\Gamma(\varepsilon)u\|^2, \quad \mathrm{dom}(a) := \mathrm{dom}(D_\Gamma(\varepsilon)).$$

我们有如下命题

命题 3. 存在 $\varepsilon' > 0$ 和一个常数 $C > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon')$，存在一个酉映射 $U: L^2(\Omega_\varepsilon, \mathbb{C}^2) \to L^2(\mathbb{T} \times (-1, 1)\ \mathbb{C}^2)$，使得对于所有 $u \in \mathrm{dom}(a)$，我们有

$$c^+[Uu] \le a[u] \le c^-[Uu],$$

其中 $c^\pm$ 是由下式给出的二次型

$$\begin{aligned} c^\pm[w] := (1 \pm C\varepsilon) \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} |\partial_s w|^2 ds dt - \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} \frac{\kappa^2}{4}|w|^2 ds dt + (m^2 \pm C\varepsilon)\ \|w\|^2 \\ + \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(\int_{\mathbb{T}} \Big(\int_{-1}^{1} |\partial_t w|^2 dt + m\varepsilon(|w(s,1)|^2 + |w(s,-1)|^2)\Big) ds\Big), \end{aligned}$$

$$\mathrm{dom}(c^\pm\ ) = U(\mathrm{dom}(a)) = \{u \in H^1(\mathbb{T} \times (-1, 1)\ \mathbb{C}^2):\ \ \forall s \in \mathbb{T}, \mp i\sigma_3\sigma \cdot \nu(s)u(s, \pm 1) = u(s, \pm 1)\}.$$

Proof. 通过调整 [17, 引理 3.3，命题 3.5], 对于所有 $u \in$ 定义域(a)，有 s

$$\begin{aligned} a[u] = \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx + m^2\|u\|^2 + \int_0^\ell \Big(m + \frac{\kappa(s)}{2(1+\varepsilon\kappa(s))}\Big)|u(\Phi_\varepsilon(s,-1))|^2(1+\varepsilon\kappa(s))ds \\ + \int_0^\ell (m - \frac{\kappa(s)}{2(1-\varepsilon\kappa(s))})|u(\Phi_\varepsilon(s,1))|^2(1-\varepsilon\kappa(s))ds. \end{aligned}$$

考虑如下定义的酉映射 U_1

$$U_1 : L^2(\Omega_\varepsilon) \to L^2(\mathbb{T} \times (-1, 1), g_\varepsilon(s, t)ds dt), \quad (U_1 u)(s, t) := u(\Phi_\varepsilon(s, t)).$$

其中，度量 g_ε 由 $g_\varepsilon(s, t) := \varepsilon(1 - \varepsilon t\kappa(s))$ 给出。特别地，对于所有 $v \in U_1$(定义域(a))，有

$$\begin{aligned} b[v] := a[U_1^{-1}v] = \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} \Big(\frac{1}{(1-\varepsilon t\kappa(s))^2}|\partial_s v|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}|\partial_t v|^2\Big) g_\varepsilon(s,t) ds dt \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\ell \Big((m + \frac{\kappa(s)}{2(1+\varepsilon\kappa(s))})|v(s,-1)|^2 g_\varepsilon(s,-1)\Big) ds \\ + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\ell \Big((m - \frac{\kappa(s)}{2(1-\varepsilon\kappa(s))})|v(s,1)|^2 g_\varepsilon(s,1)\Big) ds + m^2 \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} \Big(|v|^2 g_\varepsilon(s,t)\Big) ds dt. \end{aligned}$$

现在，考虑酉映射

$$U_2 : L^2(\mathbb{T} \times (-1, 1), g_\varepsilon(s, t)ds dt) \to L^2(\mathbb{T} \times (-1, 1)), \quad (U_2 v)(s, t) := \sqrt{g_\varepsilon(s, t)}v.$$

对于 $w=\sqrt{g_\varepsilon}v$，有

$$(\partial_t v)(s,t)=\partial_t(\frac{1}{\sqrt{g_\varepsilon(s,t)}}w(s,t))=\frac{\varepsilon^2\kappa(s)}{2g_\varepsilon(s,t)^{\frac{3}{2}}}w(s,t)+\frac{1}{\sqrt{g_\varepsilon(s,t)}}\partial_t w(s,t)$$

and

$$(\partial_s v)(s,t)=\partial_s(\frac{1}{\sqrt{g_\varepsilon(s,t)}}w(s,t))=\frac{\varepsilon^2 t\kappa'(s)}{2g_\varepsilon(s,t)^{\frac{3}{2}}}w(s,t)+\frac{1}{\sqrt{g_\varepsilon(s,t)}}\partial_s w(s,t).$$

特别地，我们得到

$$\frac{1}{\varepsilon^2}|\partial_t v|^2 g_\varepsilon(s,t)=\frac{1}{\varepsilon^2}|\partial_t w|^2+\frac{\kappa^2}{4(1-\varepsilon t\kappa)^2}|w|^2+\frac{\kappa}{2\varepsilon(1-\varepsilon t\kappa)}\partial_t(|w|^2)$$

and

$$\frac{1}{(1-\varepsilon t\kappa)^2}|\partial_s v|^2 g_\varepsilon(s,t)=\frac{1}{(1-\varepsilon t\kappa)^2}|\partial_s w|^2+\frac{\varepsilon^2 t^2(\kappa')^2}{4(1-\varepsilon t\kappa)^4}|w|^2+\frac{\varepsilon t\kappa'}{2(1-\varepsilon t\kappa)^3}\partial_s(|w|^2).$$

注意，分部积分可得

$$\int_{-1}^{1}\frac{\kappa}{2\varepsilon(1-\varepsilon t\kappa)}\partial_t(|w|^2)dt=-\int_{-1}^{1}\frac{\kappa^2}{2(1-\varepsilon t\kappa)^2}|w|^2dt+\frac{\kappa}{2\varepsilon(1-\varepsilon\kappa)}|w(s,1)|^2 - \frac{\kappa}{2\varepsilon(1+\varepsilon\kappa)}|w(s,-1)|^2,$$

以及

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{\varepsilon t\kappa'}{2(1-\varepsilon t\kappa)^3}\partial_s(|w|^2)ds=-\varepsilon\int_{\mathbb{T}}\frac{t\kappa''}{2(1-\varepsilon t\kappa)^3}|w|^2ds-\varepsilon^2\int_{\mathbb{T}}\frac{3t^2(\kappa')^2}{2(1-\varepsilon t\kappa)^4}|w|^2ds.$$

现在，取 $w\in U_2$(U_1定义域(a)) 并令 $v=U_2^{-1}w$。特别地，注意这将得到

$$\begin{aligned}c[w]:=b[U_2^{-1}w]=&\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}\Big(\frac{1}{(1-\varepsilon t\kappa)^2}|\partial_s w|^2-\varepsilon\frac{t\kappa''}{2(1-\varepsilon t\kappa)^3}|w|^2-\varepsilon^2\frac{5}{4}\frac{t^2(\kappa')^2}{(1-\varepsilon t\kappa)^4}|w|^2\Big)dsdt\\&-\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}\Big(\frac{\kappa^2}{4(1-\varepsilon t\kappa)^2}|w|^2\Big)dsdt+\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}\Big(\frac{1}{\varepsilon^2}|\partial_t w|^2\Big)dsdt\\&+\frac{m}{\varepsilon}\int_{\mathbb{T}}\Big(|w(s,-1)|^2+|w(s,1)|^2\Big)ds+m^2\|w\|^2.\end{aligned}$$

现在，利用 由 κ、κ' 和 κ'' 属于 $L^\infty(\mathbb{T})$，$|t|<1$ 并取 $U=U_2U_1$，我们得到该命题。 □

4 定理1

本节将通过推导 $\mathcal{D}_\Gamma(\varepsilon)$ 的特征值的上界和下界来证明主定理。

4.1 上界

本段旨在证明以下命题。

命题4. 设 $j \in \mathbb{N}$，存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得对所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\mu_j(a) \leq \frac{\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2}{\varepsilon^2} + \mu_j(q^{1D}) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

为了给出证明，我们需要以下引理

引理 1. 设 $\phi_{1,\ m\varepsilon}^{\pm}$ 是横向算子 $\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon)$ 在 (iii) 命题2中给出的特征函数。那么，我们有

$$\begin{aligned} \partial_s \phi_{1,m\varepsilon}^{\pm}(t) &:= \partial_s \phi_1^{\pm}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ \partial_s^2 \phi_{1,m\varepsilon}^{\pm}(t) &:= \partial_s^2 \phi_1^{\pm}(t) + \mathcal{O}(\varepsilon) \end{aligned} \tag{14}$$

其中

$$\partial_s \phi_1^{+}(t) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}(t+1)) \begin{pmatrix} 0 \\ \kappa n \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}(t+1)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\kappa n \end{pmatrix} \tag{15}$$

and

$$\partial_s^2 \phi_1^{+}(t) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4}(t+1)) \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_s(\kappa n) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{4}(t+1)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_s(\kappa n) \end{pmatrix}$$

并且对于 $j \in \{1, 2\}$，$\partial_s^j \phi_1^{-} = \sigma_1 \overline{\partial_s^j \phi_1^{+}}$满足 $n = \nu_1 + i\nu_2$。这里，余项是在L^∞-范数下理解的。

证明。注意到对于所有的 $t \in (-1,1)$和 $j \in \{1, 2\}$，我们有

$$\partial_s^j \Phi_{1,m\varepsilon}^{+}(t) = \frac{1}{N_{1,m\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\cos(E_1(m\varepsilon)(t+1)) \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_s^{j-1}(\kappa n) \end{pmatrix} + \frac{1}{N_{1,m\varepsilon}^{\frac{1}{2}}}\sin(E_1(m\varepsilon)(t+1)) \begin{pmatrix} 0 \\ -\partial_s^{j-1}(\kappa n)\frac{E_1(m\varepsilon)}{\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))+m\varepsilon} \end{pmatrix}$$

从这里开始，引理 1 的证明与命题 (iii) 的证明2沿用相同的思路。 □

命题4的证明。令 $f^{\pm} \in H^1(\mathbb{T})$，并考虑试探函数$u = f^{+}\phi_{1,\ m\varepsilon}^{+} + f^{-}\phi_{1,\ m\varepsilon}^{-}$。注意到 $u \in$属于定义域(c^{+})，根据 u的定义，有

$$c^{+}[u] = (1 + C\varepsilon)\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} |\partial_s u|^2 ds dt - \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} \frac{\kappa^2}{4}|u|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2\|u\|^2 + C\varepsilon\|u\|^2.$$

我们注意到，由于 $\phi_{1,m\varepsilon}^{+}$ 和 $\phi_{1,m\varepsilon}^{-}$ 在 $L^2((-1, 1)\ \mathbb{C}^2)$ 中正交，我们有

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{T}} \Big(|f^{+}|^2 + |f^{-}|^2\Big) ds = \|f\|^2, \quad \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)} \Big(\frac{\kappa^2}{4}|u|^2\Big) ds dt = \int_{\mathbb{T}} \frac{\kappa^2}{4}|f|^2 ds,$$

其中我们设 $f=\begin{pmatrix} f^+ \\ f^- \end{pmatrix}\in H^1(\mathbb{T},\mathbb{C}^2)$。此外，还有

$$|\partial_s u|^2=|(f^+)'\phi^+_{1,m\varepsilon}+(f^-)'\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2+|f^+\partial_s(\phi^+_{1,m\varepsilon})+f^-\partial_s(\phi^-_{1,m\varepsilon})|^2 \\ +2\Re\Big(\langle (f^+)'\phi^+_{1,m\varepsilon}+(f^-)'\phi^-_{1,m\varepsilon}, f^+\partial_s(\phi^+_{1,m\varepsilon})+f^-\partial_s(\phi^-_{1,m\varepsilon})\rangle\Big). \quad (16)$$

特别地，我们有

$$\int_{-1}^{1}\Big(|(f^+)'\phi^+_{1,m\varepsilon}+(f^-)'\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2\Big)dt=|f'|^2. \quad (17)$$

由引理 1 可得

$$|f^+\partial_s(\phi^+_{1,m\varepsilon})+f^-\partial_s(\phi^-_{1,m\varepsilon})|^2=\frac{\kappa^2}{4}\Big(\cos(\frac{\pi}{4}(t+1))-\sin(\frac{\pi}{4}(t+1))\Big)^2|f|^2+|f|^2\mathcal{O}(\varepsilon) \\ +2\Re(f^+\overline{f^-})\mathcal{O}(\varepsilon)$$

and

$$\int_{-1}^{1}\Big(|f^+\partial_s(\phi^+_{1,m\varepsilon})+f^-\partial_s(\phi^-_{1,m\varepsilon})|^2\Big)dt=\frac{\kappa^2}{4}\big(2-\frac{4}{\pi}\big)|f|^2+|f|^2\mathcal{O}(\varepsilon)+2\Re(f^+\overline{f^-})\mathcal{O}(\varepsilon), \quad (18)$$

其中所有余项关于变量 t 都是一致的。此外，我们得到

$$\langle (f^+)'\phi^+_{1,m\varepsilon}+(f^-)'\phi^-_{1,m\varepsilon}, f^+\partial_s(\phi^+_{1,m\varepsilon})+f^-\partial_s(\phi^-_{1,m\varepsilon})\rangle=(f^+)'\overline{f^+}\langle\phi^+_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle+(f^+)'\overline{f^-}\langle\phi^+_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle \\ +(f^-)'\overline{f^+}\langle\phi^-_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle+(f^-)'\overline{f^-}\langle\phi^-_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle.$$

但请注意，存在

$$\int_{-1}^{1}\Big(\langle\phi^+_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\Big)dt=\frac{i\kappa}{4}(\frac{4}{\pi}-2)+\mathcal{O}(\varepsilon)$$

以及

$$\int_{-1}^{1}\Big(\langle\phi^+_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\Big)dt=\mathcal{O}(\varepsilon).$$

利用 $\phi^-_{1,m\varepsilon}=\sigma_1\phi^+_{1,m\varepsilon}$，我们得到

$$\int_{-1}^{1}\Big(\langle\phi^-_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\Big)dt=\frac{i\kappa}{4}(2-\frac{4}{\pi})+\mathcal{O}(\varepsilon)$$

and

$$\int_{-1}^{1}\Big(\langle\phi^-_{1,m\varepsilon},\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\Big)dt=\mathcal{O}(\varepsilon).$$

因此，我们得到

$$\int_{-1}^{1}\langle (f^+)'\phi^+_{1,m\varepsilon}+(f^-)'\phi^-_{1,m\varepsilon}, f^+\partial_s(\phi^+_{1,m\varepsilon})+f^-\partial_s(\phi^-_{1,m\varepsilon})\rangle \\ =(f^+)'\overline{f^+}\frac{i\kappa}{4}(\frac{4}{\pi}-2)+(f^-)'\overline{f^-}\frac{i\kappa}{4}(2-\frac{4}{\pi})+\mathcal{O}(\varepsilon)\big((f^+)'\overline{f^+}+(f^+)'\overline{f^-}+(f^-)'\overline{f^+}+(f^-)'\overline{f^-}\big) \\ =\Big\langle f',\frac{i\kappa}{4}(2-\frac{4}{\pi})\sigma_3 f\Big\rangle+\mathcal{O}(\varepsilon)\big((f^+)'\overline{f^+}+(f^+)'\overline{f^-}+(f^-)'\overline{f^+}+(f^-)'\overline{f^-}\big). \quad (19)$$

将 (17)、(18) 以及上面的等式代入 (16)，可得，对于某个常数 $c' >$ 0

$$\int_{-1}^{1} |\partial_s u|^2 dt \leq |f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2 + \kappa^2 \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\Big)^2 |f|^2 + c'\varepsilon |f'|^2 + c'\varepsilon |f|^2. \tag{20}$$

现在注意到

$$\begin{aligned} |f'|^2 &= |f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f - i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2 \\ &= |f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2 + \kappa^2 \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\big)^2 |f|^2 - 2\Re\Big(\langle f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f, i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f\rangle\Big) \\ &\leq |f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2 + c''|f|^2 + c''(|f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2), \end{aligned} \tag{21}$$

对于某个常数 $c'' > 0$，其中我们使用柯西-施瓦茨不等式控制最后一项，并利用了基本恒等式 $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$（对于 a、$b \in \mathbb{R}$）。

考虑到 (20) 和 (21)，我们最终得到，对于某些新的常数 k，$k' > 0$ 有

$$c^+[u] \leq (1 + k\varepsilon) \int_{\mathbb{T}} \Big(|f' + i\kappa(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2 - \frac{\kappa^2}{\pi^2}|f|^2\Big) ds + \big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 + k'\varepsilon\big)\|f\|^2.$$

利用极小极大原理即可得到预期结果。 □

4.2 下界

本段的目的是证明以下命题。

命题 5. 设 $j \in \mathbb{N}$，则存在 $\varepsilon_1 > 0$，使得对于所有 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\mu_j(a) \geq \frac{\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2}{\varepsilon^2} + \mu_j(q^{1D}) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

为了证明上述命题，我们需要下面的引理。

*Lem*引理 2. 设 Π_ε 为最初针对 $u \in L^2((-1, 1)\ \mathbb{C}^2)$ 定义的正交投影算子，其定义如下：

$$\Pi_\varepsilon u = \langle u, \phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle \phi^+_{1,m\varepsilon} + \langle u, \phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle \phi^-_{1,m\varepsilon}, \quad \Pi_\varepsilon^\perp = Id - \Pi_\varepsilon.$$

那么，映射 $[\partial_s, \Pi_\varepsilon]u := \partial_s(\Pi_\varepsilon u) - \Pi_\varepsilon(\partial_s u)$，其定义域为 $u \in C^1(\mathbb{T}, L^2(-1, 1))$，可通过稠密性延拓为从 $H^q(\mathbb{T}, L^2(-1, 1))$ 到 $H^q(\mathbb{T}, L^2(-1, 1))$ 的有界算子，仍记作 $[\partial_s, \Pi_\varepsilon]$，且其范数对于 $\varepsilon \to 0$（对于 $q \in \{0, 1\}$）仍保持一致有界。对于$[\partial_s, \Pi_\varepsilon^\perp] = -[\partial_s, \Pi_\varepsilon]$，同样的结论也成立。

证明。第一部分可通过注意到，对于 $u \in C^1(\mathbb{T}, L^2(-1, 1))$，我们有

$$[\partial_s, \Pi_\varepsilon]u = \langle u, \partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle \phi^+_{1,m\varepsilon} + \langle u, \partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle \phi^-_{1,m\varepsilon} + \big\langle u, \phi^+_{1,m\varepsilon}\big\rangle \partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon} + \big\langle u, \phi^-_{1,m\varepsilon}\big\rangle \partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon} \tag{22}$$

and

$$\begin{aligned}\|[\partial_s,\Pi_\varepsilon]u\| &\le \|\langle u,\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\phi^+_{1,m\varepsilon}\| + \|\langle u,\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\phi^-_{1,m\varepsilon}\| + \|\left\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\right\rangle\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\| \\ &\quad + \|\left\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\right\rangle\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\| \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle|^2ds\Big)^{\frac12} + \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle|^2ds\Big)^{\frac12} + \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle|^2\big(\int_{-1}^1|\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}|^2dt\big)ds\Big)^{\frac12} \\ &\quad + \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle|^2\big(\int_{-1}^1|\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2dt\big)ds\Big)^{\frac12} \\ &\le \Big(\int_{\mathbb{T}}\big(\int_{-1}^1|u|^2dt\big)\big(\int_{-1}^1|\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}|^2dt\big)ds\Big)^{\frac12} + \Big(\int_{\mathbb{T}}\big(\int_{-1}^1|u|^2dt\big)\big(\int_{-1}^1|\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2dt\big)ds\Big)^{\frac12} \\ &\quad + \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle|^2\big(\int_{-1}^1|\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}|^2dt\big)ds\Big)^{\frac12} + \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle|^2\big(\int_{-1}^1|\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2dt\big)ds\Big)^{\frac12}.\end{aligned}$$

根据引理1 以及$\partial_s\phi^\pm_{1在m\varepsilon}$ 式（15）中给出的显式表达式，我们知道存在c， $k>0$ 使得对所有 $s\in\mathbb{T}$ ，当 ε 充分小时

$$\int_{-1}^1|\partial_s\phi^\pm_{1,m\varepsilon}|^2dt \le (c+k\varepsilon)^2.$$

这里我们用到了假设 $\kappa\in L^\infty$(𝕋)。由此可得

$$\begin{aligned}\|[\partial_s,\Pi_\varepsilon]u\| &\le 2(c+k\varepsilon)\|u\| + (c+k\varepsilon)\Big(\Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle|^2ds\Big)^{\frac12} + \Big(\int_{\mathbb{T}}|\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle|^2ds\Big)^{\frac12}\Big) \\ &\le 4(c+k\varepsilon)\|u\|,\end{aligned}$$

这里我们用到了第一行中最后两项可由$\phi^\pm_1$、

$C^3\ \mathbb{T}\ C^\infty\ -1\ 1$ $\partial_s\phi^\pm_{1\ m\varepsilon}\in C^2\ \mathbb{T}\ C^\infty\ -1\ 1$ γ $u\in C^1\ \mathbb{T}\ L^2$ $_{m\varepsilon}$ ∈上的正交投影算子的范数控制这一事实。现在回想一下，它属于 C^4 类，这意味着 $\phi^\pm_1$, (, (,)) 和 , (, (,))。考虑到这一点，对所有 (, ((−1, 1)))，我们有

$$\partial_s[\partial_s,\Pi_\varepsilon]u = [\partial_s,\Pi_\varepsilon]\partial_s u + \sum_{j=\pm}\Big(\langle u,\partial_s^2\phi^j_{1,m\varepsilon}\rangle\phi^j_{1,m\varepsilon} + \langle u,\phi^j_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s^2\phi^j_{1,m\varepsilon} + 2\langle u,\partial_s\phi^j_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^j_{1,m\varepsilon}\Big)$$

按照上述方法继续推导，并再次使用引理1，可得当 ε 足够小时，存在某个常数 $c>0$ 使得

$$\|\partial_s[\partial_s,\Pi_\varepsilon]u\| \le c\big(\|\partial_s u\| + \|u\|\big).$$

因此，这　通过稠密性可将其推广到 H^1(𝕋, L^2((−1, 1))) 中的任意函数，至此引理得证。 □

定理的证明 5。 注意，对于所有 u ∈定义域(c^-) 都有

$$\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}|\partial_s u|^2dsdt = \int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}|\partial_s(\Pi_\varepsilon u+\Pi_\varepsilon^\perp u)|^2dsdt = \|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|^2+\|\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2+2\Re\Big(\langle\partial_s\Pi_\varepsilon u,\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle\Big).$$

我们来关注最后一个等式中的最后一项。由此可得

$$\begin{aligned}\langle\partial_s\Pi_\varepsilon u,\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle &= \langle\partial_s\Pi_\varepsilon^2 u,\partial_s(\Pi_\varepsilon^\perp)^2 u\rangle = \langle([\partial_s,\Pi_\varepsilon]+\Pi_\varepsilon\partial_s)\Pi_\varepsilon u,([\partial_s,\Pi_\varepsilon^\perp]+\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s)\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle\\ &= \langle[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u,[\partial_s,\Pi_\varepsilon^\perp]\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle + \langle[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u,\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle + \langle\Pi_\varepsilon\partial_s\Pi_\varepsilon u,[\partial_s,\Pi_\varepsilon^\perp]\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle\\ &:= J_1+J_2+J_3.\end{aligned}$$

现在，我们分别处理最后一个表达式右侧出现的各项。利用引理2和初等不等式 $ab\le\frac{a^2\varepsilon}{2}+\frac{b^2}{2\varepsilon}$，其中 a， $b\in\mathbb{R}$ 且 $\varepsilon>0$，可得

$$|J_1|\le\|[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u\|\|[\partial_s,\Pi_\varepsilon^\perp]\Pi_\varepsilon^\perp u\|\le\frac{c_1}{2}\varepsilon\|\Pi_\varepsilon u\|^2+\frac{c_1}{2\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2,$$

其中 $c_1>0$ 是一个常数。对于 J_3，类似地可得存在 $c_2>0$ 使得

$$|J_3|\le\|\Pi_\varepsilon\partial_s\Pi_\varepsilon u\|\|[\partial_s,\Pi_\varepsilon^\perp]\Pi_\varepsilon^\perp u\|\le c_2\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|\le\frac{c_2}{2}\varepsilon\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|^2+\frac{c_2}{2\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2.$$

接下来我们考察项 J_2。注意到

$$J_2=\langle\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u,\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle.$$

特别地，我们得到

$$\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u=\langle\Pi_\varepsilon u,\phi_{1,m\varepsilon}^+\rangle\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^+ + \langle\Pi_\varepsilon u,\phi_{1,m\varepsilon}^-\rangle\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^- \tag{23}$$

并注意到 $\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u\in H^1(\mathbb{T}\times(-1,1);\mathbb{C}^2)$。特别地，进行分部积分后可得

$$\langle\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u,\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle=-\langle\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u,\Pi_\varepsilon^\perp u\rangle,$$

由于边界项消失。现在，利用（23），我们注意到

$$\begin{aligned}\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u=\langle\partial_s\Pi_\varepsilon u,\phi_{1,m\varepsilon}^+\rangle\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^+ &+\langle\partial_s\Pi_\varepsilon u,\phi_{1,m\varepsilon}^-\rangle\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^- +\langle\Pi_\varepsilon u,\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^+\rangle\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^+\\ &+\langle\Pi_\varepsilon u,\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^-\rangle\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^- +\langle\Pi_\varepsilon u,\phi_{1,m\varepsilon}^+\rangle\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^+\\ &+\langle\Pi_\varepsilon u,\phi_{1,m\varepsilon}^-\rangle\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp\partial_s\phi_{1,m\varepsilon}^-.\end{aligned}\tag{24}$$

根据引理2，存在 $c_3>0$ 使得

$$\|\partial_s\Pi_\varepsilon^\perp[\partial_s,\Pi_\varepsilon]\Pi_\varepsilon u\|\le c_3(\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|+\|\Pi_\varepsilon u\|).$$

因此，对于 J_2，有

$$\begin{aligned}|J_2|\le c_3(\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|+\|\Pi_\varepsilon u\|)\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|&\le c_3\frac{\varepsilon}{2}(\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|+\|\Pi_\varepsilon u\|)^2+c_3\frac{1}{2\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2\\ &\le c_3\varepsilon\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|^2+c_3\varepsilon\|\Pi_\varepsilon u\|^2+\frac{c_3}{2\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2.\end{aligned}$$

因此，汇总所有估计可得，对于某个 $c_4>0$

$$\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}|\partial_s u|^2dsdt\ge(1-c_4\varepsilon)\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|^2-c_4\varepsilon\|\Pi_\varepsilon u\|^2-\frac{c_4}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2.$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
c^-[u] \geq (1-C\varepsilon)(1-c_4\varepsilon)\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|^2-(1-C\varepsilon)c_4\varepsilon\|\Pi_\varepsilon u\|^2-(1-C\varepsilon)\frac{c_4}{\varepsilon}\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2-\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}\frac{\kappa^2}{4}|\Pi_\varepsilon u|^2dsdt \\
-\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}\frac{\kappa^2}{4}|\Pi_\varepsilon^\perp u|^2dsdt+\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2\|\Pi_\varepsilon u\|^2 \\
+\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2-C\varepsilon\|u\|^2 \\
\geq (1-c_5\varepsilon)\|\partial_s\Pi_\varepsilon u\|^2-\int_{\mathbb{T}\times(-1,1)}\frac{\kappa^2}{4}|\Pi_\varepsilon u|^2dsdt+\big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2-c_5\varepsilon\big)\|\Pi_\varepsilon u\|^2 \\
+(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2-\frac{c_5}{\varepsilon})\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2,
\end{aligned}
$$

对于某个常数 $c_5>0.$。这里我们用到了 $\mu_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon)^2)=\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2,$，以及 $\mu_3(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon)^2)=\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2$，并且 $\kappa\in L^\infty(\mathbb{T})$。现在我们推得

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^1|\partial_s\Pi_\varepsilon u|^2dt=\int_{-1}^1|\partial_s\big(\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\big)\phi^+_{1,m\varepsilon}+\partial_s\big(\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\big)\phi^-_{1,m\varepsilon}+\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}+\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2dt \\
&=\int_{-1}^1|\partial_s\big(\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\big)\phi^+_{1,m\varepsilon}+\partial_s\big(\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\big)\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2dt+\int_{-1}^1|\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}+\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}|^2dt \\
&\quad+2\Re\bigg(\int_{-1}^1\langle\partial_s\big(\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\big)\phi^+_{1,m\varepsilon}+\partial_s\big(\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\big)\phi^-_{1,m\varepsilon},\langle u,\phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^+_{1,m\varepsilon}+\langle u,\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle\partial_s\phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle dt\bigg).
\end{aligned}
$$

接下来，令 $f^\pm:=\langle u,\ \phi^\pm_{1,\ m\varepsilon}\rangle$ 且 $f=\begin{pmatrix}f^+\\f^-\end{pmatrix}$。注意到 $|f|^2=\int_{-1}^1|\Pi_\varepsilon u|^2dt$。仿照推导公式（18）、（19）、（20）和（21）的过程，可知存在$c_6>0$ 使得

$$
\int_{-1}^1|\partial_s\Pi_\varepsilon u|^2dt\geq(1-c_6\varepsilon)|f'+i\kappa(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi})\sigma_3 f|^2+\kappa^2\big(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\big)^2|f|^2-c_6\varepsilon|f|^2.
$$

因此，有

$$
c^-[u]\geq(1-c_7\varepsilon)q^{1D}[f]+\big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2-c_7'\varepsilon\big)\|f\|^2+\big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2-\frac{c_7}{\varepsilon}\big)\|\Pi_\varepsilon^\perp u\|^2,\qquad(25)
$$

其中 c_7、$c_7'>0$ 为某些常数。

现在定义二次型 Q，其定义域为张量积定义域：

$$
\begin{aligned}
&Q(f,v):=(1-c_7\varepsilon)q^{1D}[f]+\big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2-c_7'\varepsilon\big)\|f\|^2+\big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2-\frac{c_7}{\varepsilon}\big)\|v\|^2,\\
&\mathrm{dom}(Q):=H^1(\mathbb{T},\mathbb{C}^2)\times\Pi_\varepsilon^\perp L^2(\mathbb{T}\times(-1,1),\mathbb{C}^2).
\end{aligned}
$$

接下来，我们给出作用于 $\Pi_\varepsilon L^2(\mathbb{T}\times(-1,1)\ \mathbb{C}^2)\times\Pi_\varepsilon^\perp L^2(\mathbb{T}\times(-1,1)\ \mathbb{C}^2)$ 的二次型 Q_1，其形式为

$Q(V_1v_1, v_2) = Q_1(v_1, v_2)$，其中 V_1 是由下式给出的酉映射

$$V_1 : \Pi_\varepsilon L^2(\mathbb{T}\times(-1,1),\mathbb{C}^2) \to L^2(\mathbb{T},\mathbb{C}^2)$$
$$u \mapsto V_1 u = \begin{pmatrix} \langle u, \phi^+_{1,m\varepsilon}\rangle \\ \langle u, \phi^-_{1,m\varepsilon}\rangle \end{pmatrix}.$$

令 $u \in$定义域(c^-)，由(25)可得

$$c^-[u] \geq Q(V_1\Pi_\varepsilon u, \Pi_\varepsilon^\perp u) = Q_1(\Pi_\varepsilon u, \Pi_\varepsilon^\perp u).$$

上述不等式可写为 $c^-[u] \geq Q(Vu)$，其中 $Vu = (V_1\Pi_\varepsilon u, \Pi_\varepsilon^\perp u)$。由于 V是酉算子，由极小极大原理可得，对于所有 $j \in \mathbb{N}$， $\mu_j(c^-) \geq \mu_j(Q)$。注意，我们有如下表示： $Q_1 = q_1 \oplus q_2$，其中 q_1 和 q_2 是分别作用于 $\Pi_\varepsilon L^2(\mathbb{T}\times(-1,1)\ \mathbb{C}^2)$ 和 $\Pi_\varepsilon^\perp L^2(\mathbb{T}\times(-1,1)\ \mathbb{C}^2)$ 上的两个二次型:

$$q_1[u] = (1 - c_7\varepsilon)q^{1D}[V_1u] + \big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 - c_7'\varepsilon\big)\|V_1u\|^2$$

and

$$q_2[v] = \big(\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 - \frac{c_7}{\varepsilon}\big)\|v\|^2,$$

另一方面，由于 $\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 > \frac{9\pi^2}{16}$ 根据 (ii) 命题 2，且 $\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 \leq \frac{\pi^2}{4} + (m\varepsilon)^2$ 可知，对于 $j \in \mathbb{N}$，存在 $\varepsilon_1 > 0$ 使得对于 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ 有

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_2(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 - \frac{c_7}{\varepsilon} \geq (1 - c_7\varepsilon)\lambda_j(q^{1D}) + \frac{1}{\varepsilon^2}\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2 - c_7'\varepsilon.$$

这意味着

$$\mu_j(c^-) \geq \mu_j(q_1).$$

这就完成了此命题的证明。 □

最后，我们得以证明主定理。

定理的证明 *1*。 证明结合命题4 和 5 ，并注意到由于谱的对称性，我们有 $E_j(\varepsilon) = \sqrt{\mu_{2j}(a)}$。因此，有

$$\begin{aligned} E_j(\varepsilon)^2 &= \frac{\lambda_1(\mathcal{T}_\nu(m\varepsilon))^2}{\varepsilon^2} + \mu_{2j}(q^{1D}) + \mathcal{O}(\varepsilon) \\ &= \frac{\pi^2}{16\varepsilon^2} + \frac{m}{\varepsilon} - \frac{4}{\pi^2}m^2 + m^2 + \mu_{2j}(q^{1D}) + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} E_j(\varepsilon) &= \frac{\pi}{4\varepsilon}\sqrt{1 + \frac{16}{\pi^2}m\varepsilon - \frac{64}{\pi^4}m^2\varepsilon^2 + \frac{16}{\pi^2}(m^2 + \mu_{2j}(q^{1D}))\varepsilon^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\pi}{4\varepsilon}\Big(1 + \frac{8}{\pi^2}m\varepsilon - \frac{64}{\pi^4}m^2\varepsilon^2 + \frac{8}{\pi^2}\big(m^2 + \mu_{2j}(q^{1D})\big)\varepsilon^2\Big) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \frac{\pi}{4\varepsilon} + \frac{2}{\pi}m - \frac{16}{\pi^3}m^2\varepsilon + \frac{2}{\pi}(m^2 + \mu_{2j}(q^{1D}))\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

这证明了定理 1。 □

参考文献

[1] A. H. Castro Neto、F. Guinea、N. M. R. Peres、K. S. Novoselov 和 A. K. Geim，石墨烯的电子性质。《现代物理评论》81，109（2009）。[2] Berry，M.V.，Mondragon，R.J.：中微子台球：无磁场时的时间反演对称性破缺。《伦敦皇家学会会报A辑》412（1842），53–74（1987）。[3] C. B¨ar，W. Ballman：狄拉克型算子椭圆边值问题指南。载于 W. Ballman 等（编）：波恩工作会议2013。《数学进展》第319卷，Birkh¨auser，2016年，第 43–80页。[4] C. R. de Oliveira，通过 Γ收敛研究狄利克雷细管的量子奇异算子极限，《数学物理报告》66（2010），375–406。[5] D. Krejˇciˇr´ık 和 H. ˇSediv´akov´a，温和正则性假设下弯曲量子波导中的有效哈密顿量，《数学物理评论》24（2012），1250018。[6] J. Lampart 和 S. Teufel，纤维丛上薛定谔算子的绝热极限，《数学分析》367（2017），1647–1683。[7] J.-M. Barbaroux、H. D. Cornean、L. Le Treust 和 E. Stockmeyer，平面区域上狄拉克算子的预解式收敛，Ann. Henri Poincar´e 20（2019），1877–1891。[8] J. Wachsmuth 和 S. Teufel，受约束量子系统的有效哈密顿量，《美国数学会回忆录》230（2013），第1083号。[9] L. Le Treust 和 T. Ourmi`eres-Bonafos，扇形区域上具有无限质量边界条件的狄拉克算子的自伴性，Ann. H. Poincar´e 19（2018），1465–1487。[10] N. Arrizabalaga、L. Le Treust 和 N. Raymond，非相对论极限下的 MIT 袋模型，《数学物理通讯》354（2017），第2期，641–669。MR 3663620。[11] P. Duclos 和 P. Exner，二维和三维量子波导中的曲率诱导束缚态，《数学物理评论》7（1995），73–102。[12] R. D. Benguria、S. Fournais、E. Stockmeyer 和 H. Van Den Bosch，区域上二维狄拉克算子的自伴性，Ann. Henri Poincar´e 18（2017），1371–1383。[13] C. L. Fefferman，M. Weinstein：蜂窝晶格势与狄拉克点。《美国数学会杂志》25，1169–1220，2012。[14] S. Haag、J. Lampart 和 S. Teufel，广义量子波导，Ann. H. Poincar´e 16（2015），2535–2568。‘[15] Stockmeyer，E.，Vugalter，S.：狄拉克算子的无限质量边界条件。《谱理论杂志》9（2019），第2期，第 569–600页。[16] T. Kato，《线性算子微扰理论》，Springer-Verlag，柏林，1995年，1980年第二版校正版重印。

[17] V. Lotoreichik 和 T. Ourmi`eres-Bonafos，石墨烯量子点谱隙的尖锐上界，《数学物理分析与几何》（2019年）。[18] W. Borrelli、P. Briet、D. Krejˇciˇr´ık、T. Ourmi`eres-Bonafos，《相对论量子波导的谱性质》，《Ann. Henri Poincar´e》23， 4069−4114（2022年）。https://doi.org/10.1007/s00023-022-01179-9。