arXiv:2303.05815v1 [math.AG] 10 Mar 2023

积分谱多面体

JULIAN VILL

Abstract. 给定对称矩阵向量空间上的一个线性映射，每个纤维与半正定矩阵集合的交集都是一个谱半空间。利用纤维体的概念，我们可以对所有这类纤维取平均，从而构造出一个紧凸集，即纤维体。已知纤维的边界后，我们展示了如何通过确定面的维数和法锥来研究纤维体的边界结构。我们以此研究二元六次型和三元四次型情形下的格拉姆谱胚的纤维体，并发现纤维体具有丰富的结构。我们证明，在二元六次型情形下，纤维体恰有一个具有满维法锥的面，而一般正二元六次型的 Gram 谱体有四个这样的点。三元四次型情形下的纤维体则截然不同。

1. Introduction

在 [9] 中，Mathis 和 Meroni 研究了紧凸集的纤维体。简单来说，这意味着：取一个凸的紧集 $K \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ ，并考虑投影π： $\mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ 到前 n 个分量。像中的每个点上方都有一个 K中的凸纤维。集合 K 的纤维体是所有纤维的平均。更准确地说，纤维体中的任意一点 y 都可表示为

$$y = \int_{\pi(K)} \gamma(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 γ： $\pi(K) \to \mathbb{R}^m$ 是一个可测截面。纤维体 $\Sigma_\pi K$ 本身是 $\mathbb{R}^m$中的一个紧凸集。它是凸集闵可夫斯基和的连续类比。也可以将其视为当加数个数趋于无穷时，闵可夫斯基和的极限对象。在 [9] 中，研究了若干特殊情形下的纤维体，此时凸体 K 的支撑函数已知。

在此之前， [2]中引入并研究了纤维多胞体的概念。纤维多胞体具有优美且研究充分的组合学性质，由此产生了许多构造具有指定组合结构的多胞体的方法，例如见 [16]。

本文研究谱胚族的纤维体。由于我们通常不知道其支撑函数，因此采用了一种不同的方法。我们的目标是在已知纤维面结构的前提下，理解纤维体的面结构。随后，我们将这一一般框架应用于研究两个特殊的谱胚族，即二元六次型和三元四次型的格拉姆谱胚。它们分别是维数为 3 和 6 的例子。

格拉姆谱胚与多项式的平方和表示密切相关，并在 [5] 中首次引入。固定齐次多项式的格拉姆谱胚

2020 数学学科分类。52A20,14P10, 14P05,11E25。关键词与短语。纤维体、面、谱胚、平方和、凸性、法锥、格拉姆谱胚。

可以在正交等价的意义下参数化其平方和表示。此后，研究者对其极点的结构进行了探究，例如见[6] 和 [11]。在 [13] 和 [15] 中，研究了三元四次型和二元型情况下格拉姆谱胚的完整面结构。由于我们尚无格拉姆谱胚支撑函数的描述，因此广泛运用这些结果来描述纤维体的面结构。

在这两种情形下，纤维体上剩余的面结构都令我们十分惊讶。对于二元六次型，我们证明纤维体的边界上恰有一个具有三维法锥的极点（定理 5.2）。一般的半正定二元六次型恰有四个这样的点，它们对应于长度为二的平方和表示。对于三元四次型，边界结构则发生了相当大的变化。一方面，尽管一般半正定三元四次型的 Gram 谱体的法锥维数为 1，3，6，但每个面都有一维法锥。另一方面，纤维体包含一个二维的三维面的族，而一般的 Gram 谱体不存在维数大于 2 的面（定理 6.5）。

作为一个推论（命题 6.27），我们能够解释 [11] 中所发现的、在三元四次型的 Gram 谱体上最小化线性泛函时最优解的代数次数，前提是该解为秩为 5 的极点。该代数次数被发现为 1，因此，如果三元四次型和线性泛函都是有理的，那么该解也是有理的。这一结论源于对这类极点的法锥所进行的详细研究。

最后，我们概述本文的结构。第2 节定义纤维体，并回顾一些后文会用到的一般事实。第 3 节介绍本文其余部分所采用的框架。我们研究谱胚的纤维体，并证明定理 3.5 和定理 3.10 ，它们是将纤维的面与法锥同纤维体的面与法锥联系起来的主要工具。第 4 节将这一框架专门应用于格拉姆谱胚，并回顾其面的维数方面已有的结论。此外，我们还给出一个计算法锥维数的公式。第 5节和第6 节研究二元六次型与三元四次型的格拉姆谱胚所对应的纤维体。主要结果是定理 5.2和定理 6.5 ，它们分别概述了这两种情形下纤维体的面结构。

2. Introduction to fiber bodies

我们从 [9]中介绍纤维体构造。设 $V \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ 是一个维数为 n 的子空间，并设 W 是其正交补。令 $\pi\colon \mathbb{R}^{n+m} \to V$为到 V的正交投影。对于每个点 $v \in V$，我们考虑纤维 $\pi^{-1}(v)$，并将其视为 W的一个子集。

设 $K \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ 为一个紧凸集。对于任意 $v \in \pi(K)$，我们将 $K_v = \pi^{-1}(v) \cap K$ 记为 v 与 K 的交集的纤维。

定义 2.1。 若映射 $\gamma\colon \pi(K) \to W, x \to \gamma(x)$ 满足对所有 $x \in \pi(K)$ 都有 $\gamma(x) \in K_x$，则称其为（的）截面*)*。

K 相对于 π 的纤维体是紧凸集

$$\Sigma_\pi K = \left\{ \int_{\pi(K)} \gamma(x)\,\mathrm{d}x \colon \gamma\colon \pi(K) \to W \text{ a measurable section} \right\}$$

其中，$\mathrm{d}x$ 表示相对于 V 上 n 维勒贝格测度的积分。 K 的支撑函数是映射

$$h_K\colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto h_K(u) = \min\{\langle u, x\rangle \colon x \in K\} \quad (u \in \mathbb{R}^{n+m})$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是标准标量积。我们在定义中使用最小值而非最大值，因为这更适用于我们在后续章节中使用的对偶锥。

命题 2.2 ([9, 命题 2.7。])。 对于任意 $w \in W$ ，纤维体的支撑函数满足

$$h_{\Sigma_\pi K}(w) = \int_{\pi(K)} h_{K_x}(w)\,\mathrm{d}x.$$

对于任意 $w \in W$ ，我们用 K^w 表示 K 沿方向 w 的面，该面为

$$K^w = \{x \in K \colon \langle x, w\rangle \le \langle y, w\rangle\ (\forall\, y \in K)\}.$$

这通常称为暴露面。由于我们研究的是谱胚，我们感兴趣的大多数面都是暴露面。一般而言，凸子集 $F \subseteq K$ 是 K的面，当且仅当对于任意两个点 x， $y \in K$，若 $x+y \in F$，则这两个点 x， y都包含在 F中。

面的支撑函数同样具有良好的性质。

引理 2.3 ([9, 引理 2.10.])。 设 $u, w \in W$ 则

$$h_{(\Sigma_\pi K)^u}(w) = \int_{\pi(K)} h_{(K_x)^u}(w)\,\mathrm{d}x.$$

正如预期的那样，极点的性质尤其良好。

命题 2.4 ([9, 引理 2.9.，命题 2.14.])。 设 $w \in W$。那么 $(\Sigma_\pi K)^w$ 是极点，当且仅当对于几乎所有 $x \in \pi(K)$，$(K_x)^w$ 是极点。

此外，若$(\Sigma_\pi K)^w = \{z\}$ 是极点，且对于几乎所有 $x \in \pi(K)$，$(K_x)^w = \{z_x\}$ ，那么 $z = \int_{\pi(K)} \gamma(x)\mathrm{d}x$ 满足 $\gamma(x) = z_x$ ，且对于几乎所有 $x \in \pi(K)$均成立。特别地，截面 γ 几乎处处唯一。

例 2.5. 考虑将单位圆盘 $K \subseteq \mathbb{R}^2$ 投影到 x-轴上。 K的像是单位区间，且几乎每个点上的纤维都是一个区间。因此，纤维体也是一个区间，其边界点为 $\int_{\pi(K)} \gamma(x)\,\mathrm{d}x$ ，其中 $\gamma(x)$ 分别是每个纤维的上边界点，即方向 $-y$ 上的面和方向 y 上的面。

更一般地，以下引理成立。

引理 2.6 ([9, 引理 2.9.])**.** 设 $\mathcal{U} = \{w_1, \dots, w_k\}$ 是 W 中的一个线性无关向量有序族。那么

$$(\Sigma_\pi K)^{\mathcal{U}} = \left\{ \int_{\pi(K)} \gamma(x)\,\mathrm{d}x \colon \gamma \text{ section with } \gamma(x) \in (K_x)^{\mathcal{U}} \text{ for all } x \in \pi(K) \right\}$$

其中 $(\Sigma_\pi\ K)^{\mathcal{U}}$和 $(K_x)^{\mathcal{U}}$表示迭代面，即 $(K_x)^{\mathcal{U}} = (\dots((K_x)^{w_1})^{w_2}\dots)^{w_k}$。

3. Fiber bodies of spectrahedra

由于我们关注的是谱胚的谱胞腔体，现在将讨论具体到这一设定。我们回顾半正定矩阵锥的一些一般事实，并证明定理 3.5 和定理 3.10，它们描述了纤维体的面及其法锥。我们将在接下来的各节中运用这些结果，作为研究纤维体的主要工具。

设 V 是一个有限维 $\mathbb{R}$ 向量空间。我们将实对称 $N \times N$ 阶矩阵构成的向量空间记为 Sym^N，将半正定矩阵构成的子集记为 Sym^N_+。考虑线性映射 $\pi\colon \mathrm{Sym}^N \to V$。我们假设 π 是满射，否则纤维体为空。对任意 $v \in V$，纤维 $\pi^{-1}(v) \cap \mathrm{Sym}^N_+$ 是一个谱半空间。

为了使纤维体构造正常运作，我们要求 $\ker(\pi) \cap \mathrm{Sym}^N_+ = 0$。这将确保纤维是紧的。我们用 W 表示映射 π 的核。在 Sym^N 中任选 W 的一个线性补空间 L。于是 π 定义了 V 与 L 之间的一个同构，稍作滥用记号后，我们可以写作 $\mathrm{Sym}^N = V \oplus W$。

设 $||\cdot||$ 是 V 上的任意范数，并令 $K \subseteq \mathrm{Sym}^N_+$ 为单位球在 π 下的原像与 Sym^N_+ 的交集。由于 π 是线性映射，集合 K 因而是紧的、凸的半代数集合。事实上，假设 K 无界，那么 K 的衰退锥非平凡，并且存在 $0 \neq G \in \mathrm{Sym}^N$，使得对每个 $c \in \mathbb{R}_{>0}$ 都有 $K + cG \subseteq K$。由于 $\pi(K) + c\pi(G) = \pi(K + cG) \subseteq \pi(K)$ 是紧的，我们看到 $\pi(G) = 0$。因此，G 不可能是半正定的，并且有一个负特征值。所以，对任意固定的 $x \in K$ 和 $0 \ll c$，元素 $x + cG$ 不是半正定的，因而不属于 K，这就产生了矛盾。同理，每个纤维都是紧的。

因此，我们可以将每个谱胚 $\Sigma_\pi K$ $(v \in V)$视为 W的紧子集，从而构造纤维体 K_v。注意，对于任意满足 $||v|| \leq 1$的 $v \in V$，根据 K 的选取，$\pi^{-1}(v) \cap \mathrm{Sym}^N_+ = \pi^{-1}(v) \cap K$，因此，将这些谱胚与 K取交并未改变它们。此外，尽管纤维体构造需要条件 $||v|| \leq 1$，我们基本上可以忽略它，因为对于任意 $0 \neq v \in V$，都有$\pi^{-1}(v) \cap \mathrm{Sym}^N_+ = ||v||(\pi^{-1}\left(\frac{v}{||v||}\right) \cap \mathrm{Sym}^N_+) = ||v||(\pi^{-1}\left(\frac{v}{||v||}\right) \cap K)$。也就是说，所有纤维都只是范数不超过 1 的元素所对应纤维的缩放版本。特别是，它们具有相同的面结构。

例3.1. 最简单但颇为乏味的例子是 $\dim V = 1$ 的情形。例如，考虑 Sym^N 上的迹映射。对于任意 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$，纤维 $\mathrm{tr}^{-1}(\lambda) \cap \mathrm{Sym}^N_+$ 是 Sym^N_+ 的紧致锥基，因此其面结构基本上与 Sym^N_+ 本身相同。由此不难看出，纤维体也具有相同性质。用同样的论证，只要纤维是紧的，将迹替换为任意线性泛函，结论仍然成立。

引理 3.2. 设 $x = v + w \in V \oplus W$, $v \in V, w \in W$。对于每个 $0 \neq u \in V$，$S := \pi^{-1}(u) \cap \mathrm{Sym}^N_+$ 沿方向 x 的面与沿方向 w 的面相同。在第一种情形中，应将 S 视为 Sym^N 的子集；在第二种情形中，则视为 Sym^N 或 W 的子集。

证明。令 $S = G + S = G \in V, \pi(G) = u$，且 $S \subseteq W$。那么对于任意 $H \in S$，我们有

$$\langle x, G + H \rangle = \langle v + w, G + H \rangle = \langle v, G \rangle + \langle w, H \rangle$$

因为 $\langle v, H \rangle = \langle w, G \rangle = 0$。由于 G 仅取决于 u，我们可知 $\langle x, G + H \rangle$ 是极小的，当且仅当 $\langle w, H \rangle$ 是极小的。□

Th以下是关于半正定锥自身面结构的一个众所周知的结论。

命题 3.3. 设 $F \subseteq$ 对称化映射$_+^N$ 是一个面，其对应的子空间为 U。那么，对于任意$u \in \pi(F)$以及任意 $x \in$对称化映射^N，若 $F =$(对称化映射$_+^N)^x$，则 S_u沿方向 x的面为

$$\{G \in S_u \colon \operatorname{im}(G) \subseteq U\} \neq \varnothing.$$

对于任意 $u \in \pi(\operatorname{int} F)$，此面的维数为 $\binom{\dim U+1}{2} - \dim \pi(F)$。

以下是考虑谱胚而非一般凸集能使研究其纤维体变得更容易的一个主要原因。

注 3.4。 给定 $0 \neq w \in W$。什么是 S_u^w? 一种答案如下：假设我们找到$v \in V$使得 $v + w$为半正定，并考虑 $\operatorname{im}(v + w)$。那么，根据命题 S_u^w，我们知道对于任意 $u \in \pi(\operatorname{int}($ $F_{\operatorname{im}(v+w)}))$，3.3中的维数，其中 $F_{\operatorname{im}(v+w)} = \{G \in$ 对称化映射$_+^N : \operatorname{im}(G) \subseteq \operatorname{im}(v + w)\}$。

例如，假设我们可以找到 $v \in V$，使得 $v + w$ 是秩 1 的半正定矩阵，其像为 U。那么，对于任意 $u \in \pi(\operatorname{int}(F_U))$， S_u^w 是一个余秩一面。

我们在全文中都采用这种方法，并尝试将 W 中的元素补全为低秩半正定矩阵 $v + w$。

请注意，下一个定理并不依赖于纤维体是由谱胚构造这一事实。同样的证明也适用于一般的纤维体。对于凸集$C \subseteq \mathbb{R}^m$，我们用 $\operatorname{aff}(C)$ 表示 C的仿射包，即包含C的最小仿射子空间。

定理 3.5. 设 $w \in W$，且令 S_u^w 为 S_u上沿 w 方向的面。我们用 F表示 $\Sigma_\pi K$上的面$(\Sigma_\pi K)^w$。那么，与$\operatorname{aff}(F)$ 对应的子空间 A，是所有与 S_u^w 的仿射包相对应的子空间 A_u 张成的向量空间；这些仿射包满足：在从 V中去除一个零测集后，维数最小，即

$$A = \bigcap_{\mathcal{O}'} \operatorname{span}(A_u \colon u \in \mathcal{O}')$$

其中，交集遍历所有子集 $\mathcal{O}' \subseteq V$，使得其补集$(\mathcal{O}')^c$ 为零测集。此外，存在 $\mathcal{O} \subseteq V$，使得 $\mathcal{O}^c$ 为零测集，并且

$$A = \operatorname{span}(A_u \colon u \in \mathcal{O}).$$

证明。 我们写作 $W_\mathcal{O}$:=张成空间$(A_u \colon u \in \mathcal{O})$。等式 $W_\mathcal{O} = \bigcap_{\mathcal{O}'}$张成空间$(A_u \colon u \in \mathcal{O}')$ 源于交集是某个维数的子空间这一事实。因此，有限多个 $\mathcal{O}'$就已足够，我们可以将 $\mathcal{O}$取为这些集合的交集。取 $w, w_2, \ldots, w_s$作为 $W_\mathcal{O}$ 在 W中的正交补的一组基。对于任意 $u \in \mathcal{O}$，我们有

$$S_u^w = S_u^{w,w_2,\ldots,w_s}$$

根据 $W_\mathcal{O}$ 的选取。因此，由引理 2.6

$$F = (\Sigma_\pi K)^{w,w_2,\ldots,w_s}$$

这表明 $A \subseteq W_\mathcal{O}$。

假设 $\dim A < \dim W_\mathcal{O}$。那么存在 $w_{s+1} \in W$，$w, w_2, \ldots, w_s, w_{s+1}$线性无关，使得

$$F = (\Sigma_\pi K)^{w,w_2,\ldots,w_s,w_{s+1}}.$$

我们用 h 表示 F 的支撑函数，用 h_u 表示 S_u^w的支撑函数。令 $x \in W$和 $\lambda \in \mathbb{R}$。那么根据假设， $h(x + \lambda w_{s+1}) = h(x) + \lambda h(w_{s+1})$。因此，

$$\int h_u(x + \lambda w_{s+1}) \, \mathrm{d}u \overset{2.3}{=} h(x + \lambda w_{s+1}) = h(x) + \lambda h(w_{s+1}) \overset{2.3}{=} \int h_u(x) \, \mathrm{d}u + \lambda \int h_u(w_{s+1}) \, \mathrm{d}u.$$

此外，对每个 $u \in V$，我们有

$h_u(x + \lambda w_{s+1}) \leq h_u(x) + \lambda h_u(w_{s+1})$，等价地， $0 \leq h_u(x) + \lambda h_u(w_{s+1}) - h_u(x + \lambda w_{s+1})$。因此，

$$0 = \int h_u(x) + \lambda h_u(w_{s+1}) - h_u(x + \lambda w_{s+1}) \, \mathrm{d}u$$

这意味着，对于几乎所有 $u \in V$，都有 $h_u(x + \lambda w_{s+1}) = h_u(x) + \lambda h_u(w_{s+1})$。

然而，最后一个坐标上的线性性意味着， S_u^w 包含在 $\operatorname{span}(w_{s+1})$ 的正交补的某个平移中。根据假设，这对几乎所有 u 都不成立，因此，对所有 $x \in W$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，假设 $h(x + \lambda w_{s+1}) = h(x) + \lambda h(w_{s+1})$ 是错误的，结论遂得证。□

注 3.6。(i)：一般而言，去掉某个零测集是必要的。我们为第 6 节中研究的纤维体给出一个具体例子。包含精确陈述的证明见例 6.18。

存在一个稀薄子集 $\mathcal{T} \subseteq \Sigma_{3,\,4}$ 使得对于每个 $f \in \mathcal{T}$，Gram 谱体 $\operatorname{Gram}(f)$ 都有一个维数为 1 的面。取一个这样的 f，并在该面的法锥中取一个一般点 w。沿方向 w，$\Sigma_\mu K$ 上的面将是一个极点，而不是正维数的面。

(ii)：定理3.5 中包含的两个最简单情形是，面 S_u^w 的维数为 0，或维数为 $n-1$，对几乎所有 u均如此。在第一种情形中，几乎所有子空间 A_u都为零。因此，它们的和也同样如此。在第二种情形中，几乎所有子空间都是超平面，其正交补由 w张成，因此它们的和也同样如此。第一种情形也包含在命题 2.4中。

现在我们为定理3.10的证明做准备。

引理 3.7。设 $0 \neq w, w' \in W$，使得对于所有 $u \in \mathcal{O}$， $\mathcal{O} \subseteq V$ 具有非零测度。则我们可以找到 $w_1, \ldots, w_s \in W$，使得 $w, w_1, \ldots w_s$ 是 W的一个基，并且对于所有 $u \in \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$， $\mathcal{O}'$ 具有非零测度时， $S^{w,\,w_1\,\ldots\,w_s}_{u} \neq S^{w',\ldots,u}_{w_1,\ldots,w_s}$。

证明。如果两个面 $S^{w,\,w'}_{u}$ 和 $S^{w,\,-w'}_{u}$ 不相交，那么 $S^{w,\,-w'}_{u}$ 和$S^{w',\,-w'}_{u}$ 也不相交：事实上，假设 $x \in S^{w,\,-w'}_{u} \cap S^{w',\,-w'}_{u}$。那么 $\langle x, w\rangle$ 是 $\langle \cdot, w\rangle$ 在S_u上的最小值，而 $\langle x, w'\rangle$ 是 $\langle \cdot, w'\rangle$ 在 S_u上的最小值。因此， $\langle x, w'\rangle$ 也是 $\langle \cdot, w'\rangle$ 在 S_u^w上的最小值，即 $x \in S^{w,\,w'}_{u}$。于是， $x \in S^{w,\,w'}_{u} \cap S^{w,\,-w'}_{u} = \varnothing$。因此，我们可以取 $w_1 = -w'$并将其补成 W的一组基。

假设 $S^{w,\,w'}_{u}$ 和 $S^{w,\,-w'}_{u}$ 确有交集，那么 $\langle \cdot, w'\rangle$ 和 $\langle \cdot, -w'\rangle$ 会在 S_u^w 的某个公共点处取到最小值，因此它们在整个 S_u^w上取值恒定。于是，$S_u^{w'}$ 要么包含 S_u^w 的全部，要么与 S_u^w 完全不相交。若为后一种情况，任取一个基即可完成证明。若为前一种情况， $S_u^{-w'}$ 与 $S_u^{w'}$ 的交集至少包含 S_u^w。但此时 $\langle \cdot, w'\rangle$ 和 $\langle \cdot, -w'\rangle$ 在这些面上的取值相同，因此 $\langle \cdot, w'\rangle$ 在整个 S_u 上取值恒定，这意味着 S_u 包含于 $\operatorname{span}(w')$ 的正交补中。由于 π 是满射，这种情况仅发生在一个零测集上，我们可以将其去掉。

因此，我们可以取 $w_1 = w'$，并将其补全为 W的一组基。对于 $\mathcal{O}'$，我们从 u 中去掉所有满足以下条件的$u \in \mathcal{O}$： S_u 包含于 span(w') 的正交补中。□

注 3.8. 我们不知道纤维体的所有面是否都是暴露面。对于谱胚，这一性质确实成立，因此在这种情况下，纤维体也可能具有这一性质。

定义 3.9. 对于任意闭凸集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 和任意面 $F \subseteq C$， F 的法锥为

$$\mathcal{N}_C(F) = \{u \in \mathbb{R}^n : \langle u, x\rangle \leq \langle u, y\rangle \, \forall\, x \in F, y \in C\}.$$

对于任意点 $x \in C$，我们将法锥 $\mathcal{N}_C(x)$ 定义为 F处的法锥，其中 F是 x的支撑面，即包含 x的 C 的最小面。

固定一个标量积并将 $\mathbb{R}^n$ 与其对偶空间等同后，这与$\{l \in (\mathbb{R}^n)^\vee$相同： $l(x) \leq l(y)\ \forall\, x \in F, y \in C\}$。

定理 3.10. 设 $0 \neq w \in W$，并设 $F \subseteq \Sigma_\pi K$ 为方向 w上的面。那么 F 的法锥由下式给出

$$\mathcal{N}_{\Sigma_\pi K}(F) = \overline{\bigcup_{\mathcal{O}} \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \mathcal{N}_{S_u}(S_u^w)}$$

其中，联合遍历所有满足其补集 $\mathcal{O}^c$ 是零测集的子集 $\mathcal{O} \subseteq V$。

证明。 设 $F_u := S_u^w$。对于每个 $\mathcal{O}$，法锥的交包含于 F 处的法锥中，这由引理 2.6得出。因此

$$\mathcal{N}_{\Sigma_\pi K}(F) \supseteq \bigcup_{\mathcal{O}} \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \mathcal{N}_{S_u}(S_u^w).$$

由于左 端是闭集，我们也可以取右端的闭包。

假设存在一个 w'，它不属于任何交集，却位于 F 处法锥的相对内部。那么存在一个非零测度的集合 $\mathcal{O}$，使得对于每个 $u \in \mathcal{O}$： $S_u^{w'} \neq F_u$。由引理 3.7 可知，我们可以找到 w_1，……， $w_s \in W$，使得对于所有满足 $\mathcal{O}'$ 具有非零测度的 $u \in \mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}$， $S^{w'}$、$_u$ ^{w_1} $^{w_s} \neq F^{w_1}$、……、……、$_u$ ^{w_s} 都是极点。因此，$(\Sigma_\pi K)^w$、$_{w_1}$、……、$^{w_s} \neq (\Sigma_\pi K)^{w'}$、$_{w_1}$、……、$_{w_s}$，因为定义极点的截面基本上是唯一的，这由命题 2.4 得出。但这意味着 $F \neq (\Sigma_\pi K)^{w'}$，与 w' 位于 F 的法锥中这一事实矛盾。因此，

$$\operatorname{int}(\mathcal{N}_{\Sigma_\pi K}(F)) \subseteq \bigcup_{\mathcal{O}} \bigcap_{u \in \mathcal{O}} \mathcal{N}_{S_u}(S_u^w)$$

对两边取闭包即可得出结论。 □

注 3.11。 定理 3.10 也可以表述如下：设 N 为 F处的法锥，且 N_u 为 S_u^w处的法锥。如果 $w \notin N_u$ 对所有 $u \in \mathcal{O}$ 都成立，其中 $\mathcal{O}$ 是一个具有非零测度的集合，那么 $w \notin N$。反过来，如果 $w \in N_u$对几乎所有 u都成立，那么 $w \in N$。

注意， w 包含于 N_u，对一个具有非零测度的集合中的所有 u 都成立，并不能得出任何结论。

注 3.12。 粗略地说，定理3.5 指出，纤维体的面倾向于尽可能大。而定理 3.10 意味着法锥倾向于尽可能小，从而使边界看起来尽可能光滑。

命题 3.13。 设 $S := S_u, u \in V$ 是一个谱半空间，其代数边界由多项式 F定义，且 $r \in \mathbb{N}$。假设

(i) S中秩为 r 的点只有有限个；*(ii)* 不存在秩为 $< r$的点；*(iii)* $\operatorname{aff}(S) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 与秩为 r 的矩阵集合的交在所有点处都是横截的。

那么，在 u 的邻域内，秩 r 点随 u 连续变化。

此外，如果在任一半正定秩为 r 的点处，F 的泰勒展开的最低次项不可约，并且对于 u 邻域内的所有 u'，该项的次数相同，且半正定秩为 r 的点的数量保持不变，那么秩为 r 的点处的法锥也随 u 连续变化。

证明。 S 上的秩为 r 的点由交集 $(\operatorname{aff}(S) \otimes \mathbb{C}) \cap \{\operatorname{rk} \leq r\}$中的实半正定矩阵给出。由于该交集是横截的，交点的数量在 u 的邻域内保持不变。因此，根据隐函数定理，它们连续依赖于 u 。

任意秩为 r 的点处法锥的代数边界，是该点处 F 的泰勒展开最低次项所对应的对偶簇。根据假设，这个最低次数是常数，且系数连续依赖于 u。因此，法锥的边界也具有相同性质。□

4. Faces of Gram spectrahedra

在第 5 节和第 6 节中，我们研究两个格拉姆谱胚族的纤维体。本节介绍格拉姆谱胚的必要背景，并证明一个用于计算法锥维数的公式（定理 4.5）。

令 n、$d \in \mathbb{N}$。我们将 $\mathbb{R}[x]_d = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_d$记作变量 x_1、…、x_n上的齐次 d 次多项式的向量空间。考虑所有平方和的锥$\Sigma_{n,2d} \subseteq \mathbb{R}[x]_{2d} = \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]_{2d}$，即 $\mathbb{R}[x]_{2d}$中满足以下条件的所有型的集合：存在$f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[x]_d$使得 $f = \sum_{i=1}^r f_i^2$。令 $N := \dim \mathbb{R}[x]_d$，并考虑 Gram 映射$\mu$: 对称化映射$^N \to \mathbb{R}[x]_{2d}$, $G \mapsto XGX^T$，其中 X 是按某个固定顺序排列的$\mathbb{R}[x]_d$的单项式基所构成的向量。由于这是一个线性映射，我们可以使用第 3 节的纤维体构造。

在第5 节和第6节中，我们运用上一节的研究结果，考察若干类格拉姆谱胚的纤维体边界。因此，我们回顾关于这类格拉姆谱胚边界的已知结论。文中引用的所有结果均出自 [13] 和[15]。

我们将不再使用对称矩阵，而是使用对称张量；只要固定一个基，两者便等价。我们用$\mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_d$ 表示 $\mathbb{R}[x]_d$的第二对称幂。设$\vartheta \in \mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_d$ 满足 $\vartheta = \sum_{i=1}^r a_i p_i \otimes p_i$，$a_i \in \mathbb{R}$。若对每个$\lambda \in (\mathbb{R}[x]_d)^\vee$，都有 $\sum_{i=1}^r a_i \lambda(p_i)^2 \geq 0$，则称张量 ϑ 为半正定（$\vartheta \succeq 0$）。我们用 $\operatorname{im}(\vartheta)$ 表示 ϑ的像，它定义为线性映射 $\mathbb{R}[x]_d^\vee \to \mathbb{R}[x]_d$，$\lambda \mapsto \sum_{i=1}^r a_i \lambda(p_i) p_i$的像。

设 $f \in \Sigma_{n,2d}$。我们将 $\operatorname{Gram}(f) = \{\vartheta \in \mathcal{S}_2^+\mathbb{R}[x]_d : \mu(\vartheta) = f\}$记作 f 的 Gram 谱体，其中 $\mu: \mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_d \to \mathbb{R}[x]_{2d}$ 是由 $p \otimes p \mapsto p^2$给出的 Gram 映射。我们倾向于采用这种与坐标无关的设定，但在方便时也会相当自由地转换视角。我们沿用第 3 节中的记号，并将 μ 的核记为 W，将其关于反极配对的正交补记为 V：对于 $i = 1, \ldots, n$，定义微分算子 $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}$和 $\partial := (\partial_1, \ldots, \partial_n)$，$\partial^\alpha = \partial^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n}$（当 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$时）。对于$f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[x]_d$，定义 $f(\partial) := \sum_\alpha c_\alpha \partial^\alpha$。于是，对每个 $m \geq 0$，我们都有如下双线性形式

$\mathbb{R}[x]_d$上的双线性形式:

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{d!} f(\partial)(g) = \frac{1}{d!} g(\partial)(f),\ \forall\, f, g \in \mathbb{R}[\underline{x}]_d.$$

这可以推广为 $\mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_d$ 上的一个标量积: 事实上，设 $p\otimes p, q\otimes q \in \mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_d$，则在秩 1 张量上定义$\langle p\otimes p, q\otimes q\rangle := \langle p, q\rangle^2$，并将其双线性延拓。容易验证，这仍定义了一个标量积。

我们主要将 Gram(f) 视为 W 的子集。注意，根据引理 3.2，我们在 W 内部还是在它的某个平移像中进行研究并无区别。

设 $U \subseteq \mathbb{R}[x]_d$ 是一个子空间。我们用 U^2 表示由所有满足 $p, q \in U$ 的乘积 pq 在 $\mathbb{R}[x]_{2d}$ 中张成的子空间；用 ΣU^2 表示 U 的平方和锥，即所有满足以下条件的 $f \in \mathbb{R}[x]_{2d}$ 的集合：存在 $f_1, \ldots, f_r \in U$，使得 $f = \sum_{i=1}^r f_i^2$。由于锥 $\Sigma_{n,2d}$，锥 ΣU^2 是空间 U^2 中的满维、闭、凸尖锥。特别地，$\dim U^2 = \dim \Sigma U^2$。对于形式 $f \in \Sigma_{n,2d}$，属于 ΣU^2 的相对内部等价于存在一个平方和表示 $f = \sum_{i=1}^r f_i^2$，其中 $f_1, \ldots, f_r$ 是 U 的一组基；这又等价于存在一个像为 U 的格拉姆张量。

注 4.1。 如果我们使用矩阵而非张量，就在对称矩阵集合上采用标准迹双线性形式。请注意，迹内积与反极配对
并非完全对应。前者在 $\mathbb{R}(\binom{N}{2})$ 上给出标准标量积，而后者中的单项式则按多重阶乘和次数加权。

尤其是在第 6 节中，我们将坚持采用张量视角，因为某些面的刻画用这种方式更为自然。

推论 4.2。 设 $U \subseteq \mathbb{R}[x]_d$ 是一个子空间，$u = v + w \in V \oplus W$ 是任意一个像为 U 的张量。那么，对每个 $f \in \Sigma U^2$，沿方向 u 的格拉姆(f) 的面为$\{G \in$格拉姆$(f) : \mathrm{im}(G) \subseteq \mathrm{im}(u)\} \neq \varnothing$。

尤其是，对每个 $f \in \mathrm{int}\, \Sigma U^2$，沿方向 u 的格拉姆(f) 的面维数为维数 $\mathcal{S}_2 U -$维数 U^2。

证明。 这是命题 3.3 在格拉姆谱胚情形下的表述。证明也可见于 [13, 节 2] □

注 4.3。 注意，只要 U 满足 $U^2 = \mathbb{R}[x]_{2d}$，就存在一个具有非空内部的半代数集，即 int ΣU^2，使得对于每个 $f \in$int ΣU^2，格拉姆(f) 上沿方向 u 的面都具有相同的维数 dim $\mathcal{S}_2 U -$dim $U^2 = \binom{\dim U+1}{2} - \binom{n+2d-1}{2d}$。

为了理解 $\Sigma_\mu K$ 的边界，我们不仅要考察各个面的维数，还要考察每个点处的法锥。由于纤维体甚至可能不是半代数集，我们尤其无法像谱胚情形那样按秩对其边界进行分层。作为替代，我们将使用法锥的维数。这在我们感兴趣的格拉姆谱胚情形下尤其有用，因为边界上各点的秩也决定了法锥的维数。

对于格拉姆谱胚的法锥，我们有以下定理 .

定理 4.4 ([7, 定理 2.9.])。 设 $f \in$int $\Sigma_{n,\,2d}$ 且 $\vartheta \in$格拉姆(f)。记 $U :=$ im(ϑ)且 $r :=$ dim U。则

$$\dim \mathcal{N}_{\mathrm{Gram}(f)}(\vartheta) = \dim(\mathcal{S}_2\mathbb{R}[\underline{x}]_d) - \dim(\ker \mu \cap \mathrm{Sym}(U \otimes \mathbb{R}[\underline{x}]_d))$$

其中 对称化映射 是对称化映射 $\mathbb{R}[x]_d \otimes \mathbb{R}[x]_d \to \mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_d$。

定理 4.5。 设 $f \in$积分$\Sigma_{n,\,2d}$且 $\vartheta \in$格拉姆(f)。记 $U\colon=$像(ϑ)且 $r\colon=$维数 U。则

$$\dim \mathcal{N}_C(\vartheta) = \dim(\mathcal{S}_2\mathbb{R}[\underline{x}]_d) - \dim\ker(\mathrm{d}\phi(U)) + \binom{r}{2}.$$

其中 $\mathrm{d}\phi(U)\colon \mathbb{R}[x]_d^r \to \mathbb{R}[x]_{2d}$，$(p_1,\dots,p_r) \mapsto 2\sum_{i=1}^r p_i q_i$，其中 $q_1,\dots,q_r$是 U 的一组基。

证明。 我们记 V:$\mathbb{R}[x]_{2d}$。根据定理 4.4 我们需要证明

$$\dim(\ker\mu \cap \mathrm{Sym}(U\otimes V)) = \dim\ker(\mathrm{d}\phi(U)) - \binom{r}{2}.$$

由于 UV是 $\mathrm{d}\phi(U)$ 的像，因此我们有

$$\dim UV = r\cdot\dim V - \dim\ker(\mathrm{d}\phi(U)).$$

$\mathrm{Sym}(U\otimes V)$ 的维数为 $\binom{\dim V+1}{2} - \binom{\dim V-r+1}{2}$，因为 $\mathrm{Sym}(U\otimes V) \cong \mathcal{S}_2V/\mathcal{S}_2(U^\perp)$。映射 $\mu|_{\mathrm{Sym}(U\otimes V)}\colon \mathrm{Sym}(U\otimes V) \to UV$是满射，因此我们计算

$$\begin{aligned}\dim(\ker\mu \cap \mathrm{Sym}(U\otimes V)) &= \\ &= \dim\mathrm{Sym}(U\otimes V) - \dim UV \\ &= \binom{\dim V+1}{2} - \binom{\dim V-r+1}{2} - r\dim V + \dim\ker(\mathrm{d}\phi(U)) \\ &= \dim\ker(\mathrm{d}\phi(U)) - \binom{r}{2}.\end{aligned}$$

□

这给出了下一节中所需的所有法锥的维数。

注 4.6。 法锥的维数仅取决于 $\mathrm{im}\,\vartheta$，而不取决于 ϑ 本身。

5. Binary sextics

我们考虑 $n = 2$，$d = 3$ 二元六次型的情形。一般半正定二元六次型的 Gram 谱体是一个三维凸集。这是 Gram 谱体不再是多胞体的第一个情形。事实上，若 $d = 1$，也就是说我们考虑二元二次型，则 Gram 谱体是一个点。若 $d = 2$，Gram 谱体是一条线段，因而是一个多胞体。由于纤维体的维数相同，它本身也就是一条线段。下一个情形 $d = 3$则有趣得多。我们证明，纤维体的边界仅由极点构成，并且恰有一个顶点，也就是说，恰有一个具有满维法锥的极点。这非常出乎意料：一方面，几乎所有半正定二元六次型的 Gram 谱体都恰有四个顶点；另一方面，根据定理 3.10，我们预期边界尽可能光滑，且每个点都具有一维法锥。

此情形下有关格拉姆谱胚的一般情况如下，详见 [13]。法锥的维数由定理4.5得出。

定理 5.1。 设 $f \in \mathrm{int}\,\Sigma_{2,\,6}$。*Gram* 谱体 $\mathrm{Gram}(f) \subseteq \mathcal{S}_2^+\mathbb{R}[x]_3$ 的维数为 *3*。若 f 取为具有不同零点的情形，则边界上恰有 *4* 个秩 *2 Gram* 张量，每个都有一个 *3* 维法锥。边界的其余部分由秩 *3 Gram* 张量构成，它们都是极点，并且各有一个一维法锥。

对于特　对于 f 的 l 种选择，秩 *2 Gram* 张量的数量也可能少于 4.

本节中我们证明如下结论。

定理 5.2。 纤维体 $\Sigma_\mu K$ 的维数为 *3*，且其边界上的每一点都是极点。恰有一点 Θ 具有三维法锥，其余每一点都具有一维法锥。该点 Θ 对应于满足 $\gamma(f) = \vartheta$ 的（本质上唯一的）截面 γ，其中 ϑ 是一个秩 *2* 点，对应于 f 的因式分解，其中一个因子的零点虚部全为正（另一个因子的零点虚部则全为负）。此外，定义法锥的多项式不等式是已知的，尤其是三维法锥是半代数的。

证明。由命题 2.4 可立即看出，边界上的每一点都是极点，因为纤维也具有这一性质。其余结论将由定理 5.6和命题5.9推出。 □

注 5.3。 存在一个 3 维法锥这一事实意味着，对于法锥中的任意方向/线性泛函，在任意具有互异零点的半正定二元六次型的 Gram 谱体上将该线性泛函最小化时，最优解将是一个秩2格拉姆张量。

注 5.4。 在这种情况下，纤维体的所有面都是暴露面，因为每个暴露面都是一个极点。

本节余下部分旨在证明关于法锥的陈述。我们选择 $\mathbb{R}[x]_3$ 的基为 x^3、x^2y、xy^2、y^3，顺序如上。这些矩阵

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是构成 $W = \ker \mu$ 关于迹内积的一组正交基。我们通过这一标量积来识别 W 和 $V = W^\vee$。

我们用 K' 表示所有具有互异零点的正定二元六次型的集合。令 $f \in K'$。任意一个因式分解 $f = gg$ 都对应于一个 $\overline{f}$ 的格拉姆张量，该张量对应于平方和表示 $f = \left(\frac{1}{2}(g + \overline{g})\right)^2 + \left(\frac{1}{2i}(g - \overline{g})\right)^2$。令 ϑ_f 为所有 g 的零点虚部均为正时对应的格拉姆张量，并令 ϑ_2、ϑ_3、ϑ_4 为另外 3 个秩 2 格拉姆张量。

引理 5.5。 考虑以下两个零点为

$$\{1 + 6i, 1 - 6i, 2 + 5i, 2 - 5i, 3 + 4i, 3 - 4i\},$$
$$\{-4 + 2i, -4 - 2i, -2 + 2i, -2 - 2i, -1 + 2i, -1 - 2i\}.$$

点 ϑ_2、ϑ_3、ϑ_4 处的六个法锥互不相交。

证明。 对于这两个二元型，我们计算三个秩为 2 的 Gram 矩阵 ϑ_2，ϑ_3，ϑ_4，以及型 $\vartheta_i + \sum_{i=1}^3 \lambda_i R_i \in \mathbb{R}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$ 的三个二次部分（这是 Gram 谱体的代数边界在 ϑ_i处的泰勒展开）。法锥由这些二次型所对应的对称矩阵取逆得到。随后我们用 `Mathematica` 验证，两个不同法锥中不包含同一个非零点。请注意，我们无需确定由二次型定义的双侧锥中哪一侧实际上是法锥。

事实上，即使是双侧锥，两个不同的锥也不会相交。为完整起见，我们列出定义法锥的对称矩阵。对于第一个六次型，它们是

$$\begin{pmatrix} -5 & 11 & 101 \\ 11 & -149 & 277 \\ 101 & 277 & -4017 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & 115 \\ 1 & -107 & 135 \\ 115 & 135 & -4567 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 19 & 55 \\ 19 & -163 & 545 \\ 55 & 545 & -4683 \end{pmatrix}$$

对于第二个，我们得到

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \\ 3 & 7 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -10 & -25 \\ 0 & -25 & -100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4 & -12 \\ -4 & -14 & -47 \\ -12 & -47 & -220 \end{pmatrix}.$$

□

定理 5.6. Θ的法锥表示为

$$S := \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \colon \lambda_2^2 \leq 4\lambda_1\lambda_3,\, 0 \leq \lambda_1, \lambda_3\}$$

在基 R_1, R_2, R_3 中。

引理 5.7. 设 $0 \neq w \in W \setminus S$。那么存在 $q \in \mathbb{R}[x]_3$ 和 $v \in \underline{V}$，使得 $q \otimes q = v + w$。

证明. 设 $w = \sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{||R_i||} R_i$ 且设 $q = a_1x^3 + a_2x^2y + a_3xy^2 + a_4y^3$。通过直接计算可知，$q \otimes q = v + w\,(v \in V,\, w \in W)$（$v$ 是 V 中映射到 q^2 的唯一点，因为 $\mu(q \otimes q) = q^2$ 且 $\mu(w) = 0$）如果

$$\lambda_1 = 2(-a_2^2 + a_1a_3), \quad \lambda_2 = 2(-a_2a_3 + a_1a_4), \quad \lambda_3 = 2(a_3^2 + a_2a_4).$$

因此，给定 w，或者等价地给定 λ_1、λ_2、$\lambda_3 \in \mathbb{R}$，我们要找出如上所述的 a_1，……，$a_4 \in \mathbb{R}$。我们利用 Mathematica 在实数域上求解，从而得到 S的补集。□

注记 5.8。 若想避免使用 Mathematica，也可以手工完成，因为可以明确写出解。其中唯一需要仔细考察的项是

$$\sqrt{-4\lambda_1^2\lambda_3 + a_2^2(\lambda_2^2 - 4\lambda_1\lambda_3)}$$

这很容易做到。不过，根据是否存在某个 $i \in \{1, 2, 3\}$ 使得 $\lambda_i = 0$，需要区分几种情况。

命题 5.9。 设 $0 \neq w \in W \setminus S$。$\Sigma_\mu K$ 沿 w 方向的面具有一维法锥。

证明。由引理 5.7 可知，我们可以找到$q \in \mathbb{R}[x]_3$、$v \in V$，使得 $q \otimes q = v + w$。令 $U = \mathrm{span}(q)^\perp$。那么，对于每个 $f \in \mathrm{int}\ \Sigma U^2$，Gram($f$) 沿 w方向的面是一个像为U的格拉姆张量，因此法锥的维数为 1。对于一般的 $f \in \Sigma U^2$，秩 2 点的法锥由 f 连续变化（由命题 3.13 可知），因为 f 只有单根，因此在 f的一个邻域内，沿 w 方向的面具有一维法锥。由此，根据定理 3.10，$\Sigma_\mu K$ 沿 w 方向的法锥维数为 1。□

定理 5.6 的证明。 设 $w \in S$。那么 w 不张成任何 Gram 谱体上秩 3 点的法锥，因为根据引理 5.7 的证明，我们无法将其补全为半正定秩 1 张量。因此，在所有这些谱体上，该面都是一个秩 2 极点。根据引理 5.5，存在 $f \in K'$，使得沿方向 w 的面为 ϑ_f。由于集合 S 是凸的，

尤其是连通的；对于 K' 也是如此，因为秩 2 点处的法锥随 f 连续变化。由此可知，对于每个 f， S 都包含在 ϑ_f 处的法锥中。（注意， ϑ_f 处的法锥通常更大。）□

注 5.10。 图 1左侧展示了二元六次型情形下的三维纤维体。该图使用 `Julia` [1]按如下方法生成：我们首先随机抽取 50 个半正定二元六次型，以及 W中的 10000 个随机点。针对每个 Gram 谱体和每个方向求解半定规划，我们在全部 50 种情形中共找到边界上的 10000 个点。对于任意方向，纤维体在该方向上的面取为这 50 个点的平均值。图中左下方的极点是边界上唯一具有三维法锥的点。

图 1 右侧展示了如下形式的 Gram 谱体 $x^6 + y^6$。根据 `Julia` 中的实验，随机半正定二元六次型的 Gram 谱体很可能具有另外三个秩 2 点，其位置与该 Gram 谱体类似，即法锥彼此相交。纤维体的边界上也能看到这一现象，因为这三个方向看起来更加“尖锐”，尽管它们的法锥是一维的。

注 5.11。 根据 `Mathematica`中的实验，三维法锥实际上是一个极限，而不是有限个法锥的交集。似乎对于每个 f， $w = R_3$都位于法锥的内部，但在纤维体上却位于法锥的边界。这使得 Θ 处的法锥具有如此简单的半代数描述，更令人惊讶。

我们不知道纤维体本身是否是一个半代数集。

6. 三元四次型

本节研究三元四次型情况下的纤维体，即 $n = 3,\ d = 2$。在这种情况下，格拉姆谱胚通常具有 6 维，并且既有正维面，也有更多可能的法锥维数。此外，这是 Pataki 范围长度为 3 的第一个情形，即一般半正定三元四次型的格拉姆谱体上的极点可能具有秩 3、4 或 5。我们证明，纤维体的面结构与一般格拉姆谱胚的面结构相当不同。一方面，面的维数有所增加：二维面的二维族被三维面的二维族所取代。另一方面，纤维体的每个面都有一维法锥，而格拉姆谱胚的法锥维数为 1、3 和 6（定理 6.5）。

对于任意 $f \in \mathbb{R}[x]_{2d}$和 $r,\ s \in \mathbb{N}_0$我们用 $S_f(r,\ s)$ 表示所有秩为 r 且位于维数为 s的面的相对内部中的 f 的格拉姆张量所构成的半代数集。

定理 6.1 ([15], [12])。 设 $f \in \Sigma_{3,\ 4}$ 为一般的。格拉姆谱体 $\mathrm{Gram}(f) \subseteq \mathcal{S}_2^+\mathbb{R}[x]_2$ 的维数为 *6*。边界上的一般点是秩为 *5* 的极点。每个秩为 *5* 的极点都有一个一维法锥。半代数集 $S_f(5, 2)$ 的维数为 *4*，其中每个点也都有一个一维法锥。集合 $S_f(4, 0)$ 的维数为 *3*，且每个点都有一个三维法锥。此外，恰有 *8* 个秩为 *3* 的格拉姆矩阵，每个矩阵都有一个六维法锥。

不存在秩低于 *3* 的格拉姆张量，除上述面之外也不存在其他面（对于一般的 f）。

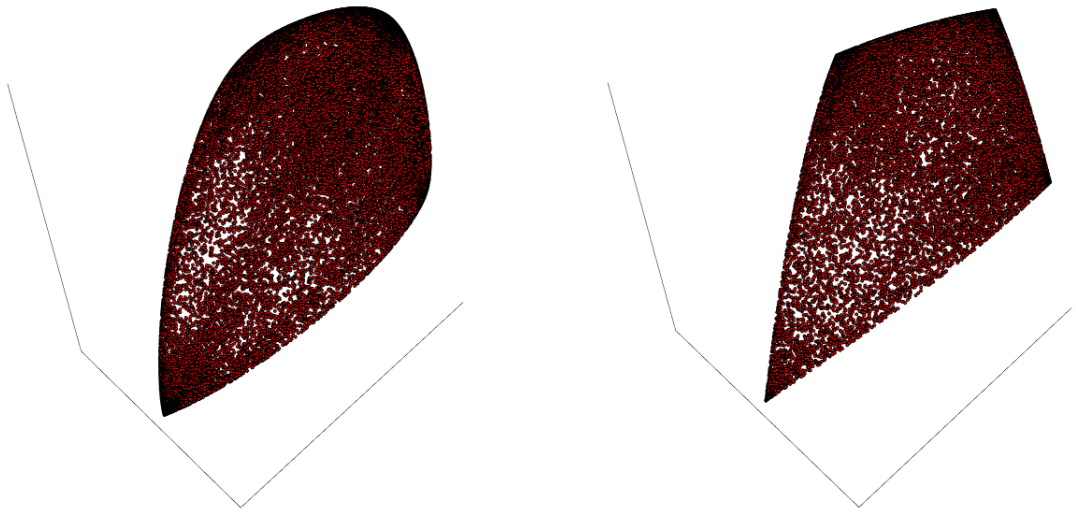

FIGURE 1. 左：二元六次型情形下的纤维体。右：形式 x^6+y^6 的 Gram 谱体。

命题 6.2 ([15, 命题 5.2 的证明。])。 设 $f \in \Sigma_{3,4}$ 光滑，且 $\vartheta \in$ 格拉姆(f) 是一个秩为 *5* 的张量，满足 $U :=$像(ϑ)。那么

(i) ϑ 是一个极点，当且仅当 维数 $U^2 = 15$，即 $U^2 = \mathbb{R}[x]_4$；_等价地， $U^\perp$由一个秩 *3* 的二次型张成；*(ii)* ϑ 包含于一个二维面的相对内部，当且仅当 维数 $U^2 =13$ ，当且仅当 $U^\perp$ 由一个秩 *2* 的二次型张成。

注 6.3。 如果 $U^\perp$ 由一个秩 1 的二次型张成，那么 U 中的元素有一个公共实零点，因此 f 也有同样的性质；这对于光滑的 f是不可能的。

对于三元四次型的情形，我们将 $\mathbb{R}[x]_2$ 的单项式基按 $(x^2,\ y^2,\ z^2,_xy,\ xz,\ yz)$ 排序。采用这一选择， W 的一组基为

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$R_4=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1&0\\0&0&0&-1&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix},R_5=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0\end{pmatrix},R_6=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&-1&0\end{pmatrix}.$$

因此， V 的每个元素都具有如下形式

$$A(c_{400},\dots,c_{004})=\begin{pmatrix}c_{400}&\frac{1}{3}c_{220}&\frac{1}{3}c_{202}&\frac{1}{2}c_{310}&\frac{1}{2}c_{301}&\frac{1}{4}c_{211}\\\frac{1}{3}c_{220}&c_{040}&\frac{1}{3}c_{022}&\frac{1}{2}c_{130}&\frac{1}{4}c_{121}&\frac{1}{2}c_{031}\\\frac{1}{3}c_{202}&\frac{1}{3}c_{022}&c_{004}&\frac{1}{4}c_{112}&\frac{1}{2}c_{103}&\frac{1}{2}c_{013}\\\frac{1}{2}c_{310}&\frac{1}{2}c_{130}&\frac{1}{4}c_{112}&\frac{1}{3}c_{220}&\frac{1}{4}c_{211}&\frac{1}{4}c_{121}\\\frac{1}{2}c_{301}&\frac{1}{4}c_{121}&\frac{1}{2}c_{103}&\frac{1}{4}c_{211}&\frac{1}{3}c_{202}&\frac{1}{4}c_{112}\\\frac{1}{4}c_{211}&\frac{1}{2}c_{031}&\frac{1}{2}c_{013}&\frac{1}{4}c_{121}&\frac{1}{4}c_{112}&\frac{1}{3}c_{022}\end{pmatrix}$$

对于某种选择的 c_{400}、……、 $c_{004}\in\mathbb{R}$。在 Gram 映射 μ 下，这样的矩阵映射为多项式 $f=\sum_{\alpha\in\mathbb{Z}^3}c_\alpha x^\alpha\in\mathbb{R}[x]$。– –

用张量语言表示，正交基为

$$R_1=x^2\otimes y^2-xy\otimes xy,\quad R_2=x^2\otimes z^2-xz\otimes xz,\quad R_3=y^2\otimes z^2-yz\otimes yz$$
$$R_4=x^2\otimes yz-xy\otimes xz,\quad R_5=y^2\otimes xz-xy\otimes yz,\quad R_6=z^2\otimes xy-xz\otimes yz.$$

从现在起，我们只处理这些张量，并将 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 上的标量积记为$\mathcal{S}_2\mathbb{R}[x]_2$ ，该标量积在第 4节中引入。

注6.4。对 于 $i=1$，2，3，我们有 $\langle R_i,R_i\rangle=-\frac{3}{4}$；对于 $i=4$，5，6，我们有 $\langle R_i,R_i\rangle=1$。

我们证明以下关于 $\Sigma_\mu K$ 的边界结构的定理。

定理 6.5。 $\Sigma_\mu K$ 的边界包含一个由三维面构成的二维族。边界上的其他每个点都是极点。每个面的法锥维数均为 *1*。

注6.6。 与二元六次型的情形一样，我们不知道纤维体是否为半代数的。

首先，我们证明定理 6.11 ，这是关于三维面存在性的定理6.5的第一部分。

引理 6.7。 设 $w=R_1$。存在一个由型 $f\in\Sigma_{3,\,4}$ 构成的全维半代数集，使得格拉姆(f) 在方向 w 上的面维数为 *2*。

证明。 对于任意 $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$，在方向 w 上的面与在方向 λw 上的面相同。令$0\neq q\in\mathbb{R}[x,y]_2$ 为一个二次型。那么

$$q\otimes q=\vartheta+\frac{\langle R_1,q\otimes q\rangle}{\langle R_1,R_1\rangle}R_1=\vartheta-3\,\mathrm{disc}(q)R_1$$

其中， $\vartheta\in V$是唯一满足 $\mu(\vartheta)=q^2$ 的格拉姆张量。

令 $q\in\mathbb{R}[x,y]_2$ 满足 $\mathrm{disc}(q)<0$ 并令 $U_q:=$ 张成空间$(q)^\perp\subseteq\mathbb{R}[x]_2$。由于 $\mathrm{rk}(q)=2$ ，根据命题 6.2，我们知道 $\dim(U^2)=13$。对于每个 $f\in\operatorname{int}\Sigma U^2$，Gram$(f)$ 在以下方向上的面

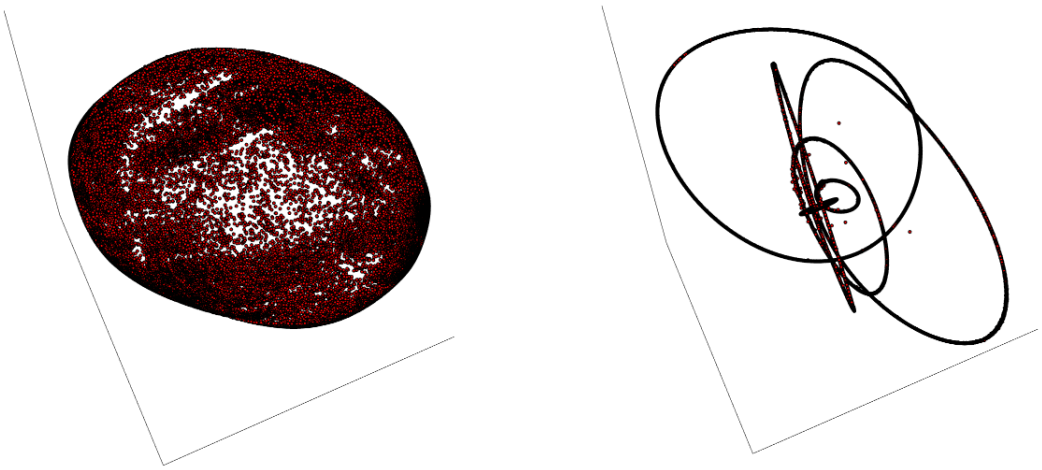

FIGURE 2. 左：方向 R_1上的纤维体的三维面。右：方向 R_1上的 Gram 谱体二维面的六条边界。

方向 $\vartheta - 3\mathrm{disc}(q)R_1$ 的维数为 2，这也是方向 R_1 上的面。考虑半代数集

$$X = \bigcup \operatorname{int} \Sigma U_q^2$$

其中，取遍所有满足 $\mathrm{disc}(q) < 0$ 的 $q \in \mathbb{PR}[x,y]_2$ 的并集。我们断言该集合的维数为 15。假设 $f \in \operatorname{int}\Sigma(U_q)^2 \cap \operatorname{int}\Sigma(U_p)^2$。那么，方向 R_1 上 $\mathrm{Gram}(f)$ 的面上的每个格拉姆张量的像都是 U_p 和 U_q，因此它们相同，且 $p = q$(在 $\mathbb{PR}[x,y]_2$ 中)。由于这样的 q 构成一个二维集合，且 $\dim \Sigma U_q^2 = 13$，我们得到 $\dim X = 15$。□

注 6.8。证明还表明，通过选择判别式为正的$q \in \mathbb{PR}[x,y]_2$，在方向 $-R_1$ 上同样成立。

此外，注意到 $\mathrm{disc}(q) = 0$ 意味着 q 是一个秩 1 二次型，且具有如下形式$q = l^2$，其中 l是某个线性形式。这意味着每个 $f \in \Sigma U_q^2$都有一个对应于 l 的实零点，并且 $\dim(U_q)^2 = 12$。在这种情况下，张量 $q \otimes q$ 包含于 V中。

命题 6.9。设 $l_1, l_2 \in \mathbb{R}[x]_1$线性无关，且 $w = \pm(l_1^2 \otimes l_2^2 - l_1 l_2 \otimes l_1 l_2) \in W$。存在一个全维半代数集，其元素为型 $f \in \Sigma_{3,4}$，使得格拉姆(f) 在方向 w 上的面维数为 2。

证明。根据引理 $l_1 = x$，$l_2 = y$，$w = R_1$，我们已经知道这一结论成立。应用线性坐标变换即可证明该结论。□

注 6.10。 设 $f \in \Sigma_{3,4}$ 光滑，且其格拉姆(f)上有一个二维秩 5 面 F，对应的子空间为 U，即对于任意相对内部点 $\vartheta \in F$，$U = \operatorname{im} \vartheta$。设 $\operatorname{span}(q) = U^{\perp}$。则 $\operatorname{rk}(q) = 2$，且对于某个 l_1，$l_2 \in \mathbb{R}[x]_1$，有 $q \in \mathbb{R}[l_1, l_2]_2$。我们已知，此时 F 处的法锥由 $\pm(l_1^2 \otimes l_2^2 - l_1 l_2 \otimes l_1 l_2)$ 给出。

定理 6.11。 设 $w = \pm(l_1^2 \otimes l_2^2 - l_1 l_2 \otimes l_1 l_2)$。$\Sigma_\mu K$ 在方向 w 上的面维数为 *3*，其一维法锥由 w 张成。

证明。 经过坐标变换后，我们不妨设 $w = R_1$（或者 $w = -R_1$，但论证保持不变）。考虑向量空间

$$W_1 := \operatorname{span}(z^2 \otimes l^2 - (zl) \otimes (zl) \colon l \in \mathbb{R}[\underline{x}]_1) = \sum \ker(\mu|_{\mathcal{S}_2 U_q^2} \colon \mathcal{S}_2 U_q^2 \to \mathbb{R}[\underline{x}]_4)$$

其中求和遍历所有满足 $\operatorname{disc}(q) < 0$ 的 $q \in \mathbb{R}[x, y]_2$。

我们断言 $W_1 =$ 张成空间为(R_2, R_3, R_6)。这三个 R_2, R_3, R_6 均具有 W_1生成元的形式，因此包含在 W_1 中。另一方面，R_1, R_4, R_5 属于正交补，因此等式成立。

容易验证，从 $q \in \mathbb{R}[x, y]_2$ 中移除一个零测集，不会改变满足 $\operatorname{disc}(q) < 0$ 的维数；事实上，任意两个一般核就已足够。

定理 3.5 给出了关于维数的论断，而注 6.10、定理 3.10 给出了关于法锥的陈述。□

注 6.12。 图 2展示了这个三维面 $(\Sigma_\mu K)^{R_1}$。对于 Σ_3 的一个满维子集，$_4$ 格拉姆(f) 沿方向 R_1 的面是一个二维面，其仿射包（经过平移后）包含于三维空间 W_1中。这些二维面在该空间中的旋转角度各不相同，从图 2右侧可以看出。对有限多个这样的二维面取闵可夫斯基和，或构造纤维体，最终得到一个三维凸集。

推论 6.13。 对于每个 $0 \neq w \in W$ 不具有定理 *6.11* 中形式的，其面$(\Sigma_\mu K)^w$ 都是一个极点。

证明。 根据备注6.10，对于一般的 $f \in \Sigma_{3,4}$，面 $\operatorname{Gram}(f)^w$ 是一个极点，因为它不是二维面，且不存在其他正维面。因此，$(\Sigma_\mu K)^w$ 也是一个极点。□

定理 6.5尚待证明的是关于法锥维数的陈述。为此，我们首先确定秩 1 张量在 W上的投影。

引理 6.14。 设 $q = a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{101}xz + a_{011}yz \in \mathbb{R}[x]_2$，并令$\vartheta = q \otimes q$。记 Q 为与二次型 q相关联的对称 3×3 矩阵。那么

$$Q^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} a_{200} & \frac{1}{2}a_{110} & \frac{1}{2}a_{101} \\ \frac{1}{2}a_{110} & a_{020} & \frac{1}{2}a_{011} \\ \frac{1}{2}a_{101} & \frac{1}{2}a_{011} & a_{002} \end{pmatrix}^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} \langle \vartheta, R_3 \rangle & -\langle \vartheta, R_6 \rangle & -\langle \vartheta, R_5 \rangle \\ -\langle \vartheta, R_6 \rangle & \langle \vartheta, R_2 \rangle & -\langle \vartheta, R_4 \rangle \\ -\langle \vartheta, R_5 \rangle & -\langle \vartheta, R_4 \rangle & \langle \vartheta, R_1 \rangle \end{pmatrix}$$

证明。 这很容易通过手工验证。□

定义 6.15。 对于任意 $w \in W$、$w = \sum_{i=1}^{6} \frac{\lambda_i}{\langle R_i, R_i \rangle} R_i$，我们通过矩阵定义相应的二次型 $Q(w)$

$$Q(w) := \begin{pmatrix} \lambda_3 & -\lambda_6 & -\lambda_5 \\ -\lambda_6 & \lambda_2 & -\lambda_4 \\ -\lambda_5 & -\lambda_4 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

为了证明 $\Sigma_\mu K$ 的每个面都有一维法锥，我们将根据 $Q(w)$ 的秩和特征值考察几种情况。

命题 6.16 $(\det Q(w) > 0)$。设 $w \in W$ 满足 $\det Q(w) > 0$。那么，$\Sigma_\mu K$ 沿方向 w 的面具有一维法锥。

证明。设 $A := Q(w)^{\mathrm{adj}}$，并设 $q \in \mathbb{R}[x]_2$ 为 A 对应的二次型。那么$A^{\mathrm{adj}} = \det(Q(w))Q(w)$，且根据引理 6.14，$\mathrm{pr}_W(q \otimes q) = \det(Q(w))w$。因此，对于每个 $f \in \operatorname{int} \Sigma(\operatorname{span}(q)^\perp)^2$，Gram($f$) 沿方向 w 的面都是一个具有一维法锥的极点。此外，$U^2 = \mathbb{R}[x]_4$，故由定理 3.10 可得该结论。□

备注 6.17。这种情况特别简单，因为我们实际上可以在 $\Sigma_{3,4}$ 中找到一个满维集合，使得每个 Gram 谱体上沿方向 w 的面都具有一维法锥。其他 w 则并非如此。

例 6.18. 令 $U = \mathbb{R}[x,y]_2 \oplus$张成空间为($z^2$)，则 $U^\perp =$张成空间为(xz, yz)。令 $f \in \operatorname{int} \Sigma U^2$ and $q_1 = 2xz + 2yz$, $q_2 = 2xz + 4yz \in U^\perp$。方向为 $\vartheta = q_1 \otimes q_1 + q_2 \otimes q_2$的 Gram($f$) 面是一个一维面，其像为 U。我们计算

$$Q(\mathrm{pr}_W(\vartheta)) = q_1^{\mathrm{adj}} + q_2^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

该矩阵的秩为 2（$\neq 1$），因此 $\Sigma_\mu K$ 上沿 $\mathrm{pr}_W(\vartheta)$ 方向的面是一个极点。

备注 6.19. 令 $w \in W$。如果 $\mathrm{rk}(Q(w)) = 1$，则 $\Sigma_\mu K$ 上沿 w 方向的面维数为 3，且法锥为一维。如果 $\det Q(w)$ 为正，则该面是一个极点，且法锥为一维。

设 $f \in \Sigma_{3,\,4}$ 光滑。设 $F \subseteq \mathrm{Gram}(f)$ 为任意一个秩为 5 的极点，其对应子空间为 U，正交补由 q 张成 $= U^\perp$。由于 F 是极点，$\mathrm{rk}(q) =$3。设 Q 为相应的对称矩阵，A 为其伴随矩阵。于是 $\det(A) \neq 0$，因为 $\mathrm{rk}(q) = 3$，且 $\det(A) = \det(Q)^2 > 0$。因此，F 的法锥由 $w^\perp = \frac{4}{3}A_{33}R_1 + \frac{4}{3}A_{22}R_2 + \frac{4}{3}A_{11}R_3 - A_{23}R_4 - A_{13}R_5 - A_{12}R_6$ 张成。

但请注意，对于满足 $\det Q(w) > 0$ 的 $w \in W$，方向 w 上 Gram(f) 的面不一定是秩 5 点。这一结论仅对所有 $f \in \operatorname{int} \Sigma U^2$ 成立；它是一个全维半代数集，但并非所有 $\Sigma_{3,\,4}$ 都成立。

现在我们考虑其他情形 $\det Q(w) < 0$ 且 $\mathrm{rk}\, Q(w) = 2$。区别在于，我们无法找到这样的格拉姆谱胚，使得这些方向上的面具有一维法锥。在这里，这些面总是具有维数至少为 3 的法锥。不过，我们将看到，尽管如此，这些方向上的纤维体的法锥维数仍为 1。

命题 6.20 $(\det Q(w) < 0)$。设 $0 \neq w \in W$满足 $\det Q(w) < 0$。则存在 Σ_3的一个满维半代数子集$_{,4}$，使得对于该子集中的每个 f，格拉姆(f) 在方向 w 上的面都是一个秩 *4* 极点。

证明。首先，通过对角化很容易看出，$Q(w)$ 可以写成 $Q(w) = Q_1 + Q_2$，且 $\det Q_i > 0\,(i = 1,2)$。扰动 Q_1后，我们有 $Q(w) = Q_1' + (Q(w) - Q_1')$，并且两个矩阵的行列式仍为正。因此，存在一个满维子集 $\mathcal{O}$，它属于

对称 3×3 矩阵集合，使得 $Q(w) = Q_1 + Q_2$，其中 $Q_1 \in \mathcal{O}$，且 $\det Q_i > 0 (i = 1,2)$。

对于任意这样的分解 $Q(w) = Q(w_1) + Q(w_2)$，我们有

$$\mathrm{pr}_W\left(\frac{1}{\det(Q(w_1))} q_1 \otimes q_1 + \frac{1}{\det(Q(w_2))} q_2 \otimes q_2\right) = w_1 + w_2 = w$$

其中 q_i 是与 $Q(w_i)^{\mathrm{adj}}$ $(i = 1, 2)$ 相关联的二次型，如命题 6.16 所述。令 $U = \mathrm{span}(q_1, q_2)^\perp$，则对于任意 $f \in \mathrm{int}\ \Sigma U^2$，沿方向 w 的 $\mathrm{Gram}(f)$ 面是对应于子空间 U 的秩 4 面。由于 $\mathrm{rk}(q_i) = 3$，可知 $\dim U^2 = 10$，且该秩 4 面是一个极点：事实上，令 $\mathrm{span}(q) = \mathrm{span}(q_1)^\perp \subseteq \mathrm{span}(q_1, q_2)$。由命题 6.2，$(U \oplus \mathrm{span}(q))^2 = \mathbb{R}[x]_4$，也就是说，映射 $\mathcal{S}_2(U \oplus \mathrm{span}(q)) \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}[x]_4$ 是单射。因此，$\mathcal{S}_2 U \xrightarrow{} \mathbb{R}[x]_4$ 也是单射。我们记作 $U_{q_1} := U$（或 U_{q_2}）。与引理 6.7 类似，我们考虑集合

$$X = \bigcup_{q \in \mathcal{O}} \mathrm{int}\ \Sigma U_q^2$$

我们断言 $\dim X = 15$。与引理的证明6.7一样，每个 f 至多包含在 $\mathrm{int}\ \Sigma U_q^2$中的一个 $q \in \mathcal{O}$。因此，对于一般的 $U = U_q$，至少存在一个一维的 $q' \in \mathcal{O}$ 族，且 $U = U_{q'}$。我们需要证明这个族的维数恰好为 1。

我们需要检查上述形式为 $\frac{1}{\det(Q(w_1))} q_1 \otimes q_1 + \frac{1}{\det(Q(w_2))} q_2 \otimes q_2$ 的两个张量何时具有相同的像。该像由下式给出

$$\mathrm{span}(q_1, q_2) = \mathrm{span}(Q(w_1)^{\mathrm{adj}}, (Q(w) - Q(w_1))^{\mathrm{adj}}).$$

根据 $Q(w)$ 的正特征值个数，我们分别研究两种情况。

(i)：假设 $Q(w)$ 有两个正特征值 d_1，d_2 和一个负特征值 d_3。对角化后，我们可以写成

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2d_3 \end{pmatrix}$$

这给出了分解 $Q(w) = Q_1 + Q_2$，其中 $\det Q_i > 0\,(i = 1, 2)$，且 Q_1 正定。由于 $Q(w_1)$ 正定，存在一个坐标变换（作为二次型），使得该像可表示为张成空间 $(I, (D - I)^{-1})$，其中 I 是单位矩阵，D 是某个对角矩阵。这个空间完全由对角矩阵构成。因此，若在坐标变换后 $\mathrm{span}(q_1', q_2') = \mathrm{span}(q_1, q_2)$，该空间也由两个对角矩阵张成，并可表示为张成空间 $(D_1, (D - D_1)^{-1})$，其中 D_1 为对角矩阵。现在我们将矩阵 D, D_1 参数化，并在 Sage [14] 中检验：对于一般的 D，存在一个由这类对角矩阵 D_1构成的一维族。这表明 X 的维数确实为 15。

因此，存在 $\Sigma_{3,4}$ 的一个满维子集，使得 $\mathrm{Gram}(f)$ 上沿方向 w 的面是一个秩 4 极点，即 X。（

ii)：假设 th 在 $Q(w)$ 处有 3 个负特征值 d_1, d_2, d_3。由此我们得到一个分解

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2d_1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_3}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2d_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_3}{2} \end{pmatrix}$$

分成两部分 行列式为 $\det Q_i > 0\,(i = 1, 2)$ 的矩阵，但两者都不是正定矩阵。我们有

$$\operatorname{span}(Q(w_1)^{\mathrm{adj}}, (Q(w) - Q(w_1))^{\mathrm{adj}}) = \operatorname{span}(Q(w_1)^{\mathrm{adj}}, (-Q(w) + Q(w_1))^{\mathrm{adj}}).$$

现在，$-Q(w)$ 是正定的，因此我们可以通过坐标变换使 $-Q(w)$ 成为单位矩阵，并将 $Q(w_1)$ 对角化。因此，我们需要考虑空间 $\operatorname{span}(D^{-1}, (I + D)^{-1})$。现在我们使用与情形 (i) 中相同的论证，问题便解决了。□

注记 6.21 ($\operatorname{rk} Q(w) = 2$)。现在令 $\operatorname{rk} Q(w) = 2$。同样，我们根据特征值的符号分别讨论各种情形。如果至少有一个特征值为正，我们就能得到一个分解，其中一个矩阵是正定的。事实上，若 $d_1,\ d_2 > 0$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

而如果 $d_1 > 0,\ \ d_2 < 0$ 则有

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2d_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

再次利用 Sage 检查纤维的维数是否正确。剩下的情形是 $Q(w)$ 为负半定。如同 (ii) 中那样，我们将 $-Q(w)$ 化为对角矩阵，使其对角线上有两个 1。在这种情形下，我们无法将其他矩阵对角化，因此我们对这两个对称矩阵进行完整参数化，并在 Sage 中求解该问题。纤维的维数仍为 1。

注记 6.22. 我们简要说明如何检验 Sage 中的纤维维数。这里只处理情形 (i)，其余情形可类似处理。考虑集合

$$\left\{(D, D_1) \in (\mathbb{R}^3)^2 \colon \operatorname{span}\left(I, (D - I)^{\mathrm{adj}}\right) = \operatorname{span}\left(D_1^{\mathrm{adj}}, (D - D_1)^{\mathrm{adj}}\right)\right\}.$$

其扎里斯基闭包由矩阵中 3×3 子式所生成的理想定义，其中包含 I，$(D - I)^{\mathrm{adj}}$，D_1^{adj}，$(D - D_1)^{\mathrm{adj}}$ 将它们写成一个 4×9 矩阵后。这个簇的维数为 4，且到第二个因子的投影在 $\mathbb{R}^3$ 中稠密。因此，一般纤维的维数为 1，也就是说，对于一般的 D，存在一维集合 D_1，使得这两个子空间相等。

现在很容易看出，$\Sigma_\mu K$ 的各个面的法锥维数至多为 3。

推论 6.23. *$\Sigma_\mu K$ 的每个边界点的法锥维数至多为 3。*

证明. 设 $F \subseteq \Sigma_\mu K$ 为一个暴露面，其法锥为 N，且 $w \in N$。若 $\operatorname{rk} Q(w) = 1$ 或 $\det Q(w) > 0$，则根据备注 6.19，F 有一个一维法锥。若 $\det Q(w) < 0$，则由命题 6.20 和定理 3.10 可知，法锥的维数至多为 3。因此，现在可以假设每个 $w \in N$ 都满足 $\operatorname{rk} Q(w) = 2$。根据 [4]，对称矩阵 3×3 的行列式的法诺簇至多只包含三维向量空间，不包含四维向量空间。因此，N 的维数至多为 3。□

命题 6.24 ($\det Q(w) < 0, \operatorname{rk} Q(w) = 2$)。*设 $0 \neq w \in W$ 满足 $\det Q(w) < 0$ 或 $\operatorname{rk} Q(w) = 2$。$(\Sigma_\mu K)^w$ 的法锥维数为 1。*

证明。设 w' 是 w 的一个扰动，且不是其标量倍数。与命题6.20 的证明一样，我们考虑 $\Sigma_{3,4}$ 的满维半代数子集

$$X_w = \bigcup_{q\in\mathcal{O}_w} \operatorname{int}\Sigma U_q^2, \quad X_{w'} = \bigcup_{q\in\mathcal{O}_{w'}} \operatorname{int}\Sigma U_q^2$$

与命题 6.20 中一样，$\mathcal{O}_w,\mathcal{O}_{w'} \subseteq \mathbb{R}[x]_2$ 具有非零测度。由于 w' 是对 w的一个扰动，两个满维集合 $X_w, X_{w'}$ 再次相交于一个全维半代数集 X。令 $f \in X$ 为一般的，且 $f \in \Sigma U_{q_1}^2 \cap \Sigma U_{q_2}^2$ 满足 $q_1 \in \mathcal{O}_w$, $q_2 \in \mathcal{O}_{w'}$。我们断言 $U_{q_1} \neq U_{q_2}$。证明这一点后，我们便知道，对于每个 $f \in X$，方向 w 和 w' 上的面都不同，因此面 $(\Sigma_\mu K)^w$ 和 $(\Sigma_\mu K)^{w'}$ 也不同，从而 $(\Sigma_\mu K)^w$ 的法锥维数为 1。假设这不成立。为简化记号，在本证明中，我们不区分二次型 $q \in \mathbb{R}[x]_2$ 及其对应的对称矩阵，并且用 w, w' 代替 $Q(w)$ $Q(w')$。

(i)：假设我们可以找到一个分解 $Q(w) = Q_1 + Q_2$，其中 Q_1 正定且 $\det Q_2 > 0$。那么存在一个满维子集 $\mathcal{O}'_w \subseteq \mathcal{O}_w$，使得对每个 $Q_1 \in \mathcal{O}'_w$，都存在 $Q_2 \in \mathcal{O}_{w'}$，满足

$$\operatorname{span}(Q_1^{\mathrm{adj}}, (w-Q_1)^{\mathrm{adj}}) = \operatorname{span}(Q_2^{\mathrm{adj}}, (w'-Q_2)^{\mathrm{adj}}).$$

由于 Q_1 是正定的，因此存在 $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$，使得 $SQ_1S^t = I$ 且 $SwS^t = D$是对角的。因此，SQ_2S^t 和 $Sw'S^t$ 也都是对角的。于是，对于每个 $Q \in \mathcal{O}'_w$，这三个二次型 Q、w、w'同时对角化。根据 [8, 定理 10]，这等价于 SwS^t 和 $Sw'S^t$ 可交换，即

$$(SwS^t)(Sw'S^t) = (Sw'S^t)(SwS^t) \Leftrightarrow \underbrace{w'^{-1}w}_{=:A} = (S^tS)\underbrace{(ww'^{-1})}_{=:B}(S^tS)^{-1}.$$

由于 $\mathcal{O}'_w$ 是满维的，我们可以找到一个满维子集 $\mathcal{U} \subseteq \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ∩对称化映射$^+_3$，使得对每个 $G \in \mathcal{U}$ 都有 $A = GBG^{-1}$。令 $G \in \mathcal{U}$ 为 $\mathcal{U}$ 的一个内点，并写作$TGT^t = I$, $T \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$。那么我们可以假设 $\mathcal{U}' := T\mathcal{U}T^t$ 是 I 的一个满足以下条件的邻域

$$(TPT^t)\underbrace{((T^t)^{-1}BT^t)}_{=:B'}(TPT^t)^{-1} = TPBP^{-1}T^{-1} = \underbrace{TAT^{-1}}_{=:A'}$$

对 $P \in \mathcal{U}$。由于 $I \in \mathcal{U}'$，可得 $B' = A'$。令 $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, d_3)$ 为 $\mathcal{U}'$ 中的对角矩阵，则 $DB'D^{-1} = A' = B'$。由于 $\mathcal{U}'$ 是 I 的一个邻域，可得 B' 是一个对角矩阵。现在，利用这些矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

并比较各项可知，对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$，有 $B' = \lambda I$。因此，A 和 B 也同样成立。特别是，$w' = \lambda w$，这与假设矛盾。

(ii)：假设 $Q(w)$ 是负定的。取 $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$，使得 $-SwS^t = I$ 且 SQ_1S^t 为对角矩阵。那么 $Sw'S^t$ 也为对角矩阵。因此，w，w' 以及任意 $Q_1 \in \mathcal{O}'_w$ 都同时对角化。根据 [8, 定理 10]，这意味着

$$(SQ_1S^t)(Sw'S^t) = (Sw'S^t)(SQ_1S^t) \Leftrightarrow (Sw'S^t) = (SQ_1S^t)^{-1}(Sw'S^t)(SQ_1S^t)$$

（请注意，尽管 S 取决于 Q_1，但根据定理 10]，我们可以选择任意一个能使该等式中的 $-w$ 成为单位矩阵的 S，即 [8, ）。然而，这意味着 $Sw'S^t$ 保持不变

在 $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 的一个满维子集 ∩对称化映射3和 $\det(Sw'S^t) \neq 0$的作用下，而这仅当 λI、$\lambda \in \mathbb{R}$时才成立。因此， $Sw'S^t = \lambda I$，并且根据假设 $SwS^t = I$，即 $w = S^{-1}(S^t)^{-1}$ 和 $w' = \lambda w$。

(iii)：秩 $Q(w) = 2$ 和 $Q(w)$ 为负半定。如果 w， w' 中有一个可逆，我们就属于情形 (i) 或 (ii)。因此，我们可以假设二者的秩均为 2。令 $||\cdot||$ 为任意一个矩阵范数，满足 $||T|| = ||T^t||$ 对所有实 3×3 矩阵均成立，例如由迹双线性形式诱导的范数。我们应用 [8, 引理 5]，该引理指出我们可以找到 $S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ $||S|| = 1$，使得

$$SwS^t = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Sw'S^t = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} \text{ or } Sw'S^t = \begin{pmatrix} B & s \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

其中 A 是一个秩为 2 的对角矩阵， B 是一个 2×2 对称矩阵，并且 $s \in \mathbb{R}$。我们有

$$||SwS^t - Sw'S^t|| = ||S(w - w')S^t|| \leq ||w - w'||||S||||S^t|| = ||w - w'||.$$

因此， B 是对 A 的扰动，故其秩为 2。由于 w' 的秩为 2，我们可知$s = 0$。但现在，两个矩阵 SwS^t 和 $Sw'S^t$ 都是分块矩阵，且只有左上角的 2×2 块非零。因此，这两个矩阵可以同时对角化，因为它们本质上是 2×2 矩阵。由于 w 为负半定，我们现在可以假设$S \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$满足

$$SwS^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A', \quad Sw'S^t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B'.$$

因此，对于每个 $Q_1 \in \mathcal{O}'_w$，都存在 $Q_2 \in \mathcal{O}_{w'}$ 使得

$$\mathrm{span}(Q_1^{\mathrm{adj}}, (A' - Q_1)^{\mathrm{adj}}) = \mathrm{span}(Q_2^{\mathrm{adj}}, (B' - Q_2)^{\mathrm{adj}})$$

其中 B' 也是负半定的，因为它是对秩 2 的 A' 的扰动。我们记

$$Q_1 = \begin{pmatrix} c_1 & c_4 & c_5 \\ c_4 & c_2 & c_6 \\ c_5 & c_6 & c_3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 & a_5 \\ a_4 & a_2 & a_6 \\ a_5 & a_6 & a_3 \end{pmatrix}$$

并计算两个空间各自生成元之差。由此得到

$$Q_1^{\mathrm{adj}} - (A' - Q_1)^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} -c_3 & 0 & c_5 \\ 0 & -c_3 & c_6 \\ c_5 & c_6 & -c_1\text{-}c_2\text{-}1 \end{pmatrix}, \; Q_2^{\mathrm{adj}} - (B' - Q_2)^{\mathrm{adj}} = \begin{pmatrix} ba_3 & 0 & -ba_5 \\ 0 & aa_3 & -aa_6 \\ -ba_5 & -aa_6 & -ab + ba_1 + aa_2 \end{pmatrix}.$$

若一般地选取 Q_1，则 Q_1^{adj} 和 c_3 的 (1，2) 项均非零。第一个假设意味着等式

$$Q_1^{\mathrm{adj}} - (A' - Q_1)^{\mathrm{adj}} = \lambda(Q_2^{\mathrm{adj}} - (B' - Q_2)^{\mathrm{adj}})$$

对于某个 $\lambda \in \mathbb{R}$成立。由此可得 $0 \neq -c_3 = \lambda ba_3 = \lambda aa_3$，进而得到 $a = b$，这表明B' 是 A的正标量倍。□

至此，定理 6.5的证明完成。

注 6.25。 我们不知道三维面的边界上的所有极点是否都是暴露面。与二元六次型的情形一样，其他面都不可能是非暴露的，因为所有其他边界点都是极点。

注 6.26。 我们讨论 [11, 表 2] 其中展示了在三元四次型的格拉姆谱胚上优化线性泛函时的一些统计数据，并且还包含了取决于最优解秩的代数次数。

首先，此处得到的概率与我们关于法锥的发现相当吻合。如果随机选择 $w \in W$，那么有一半的情况下 $\det Q(w) < 0$。如果 $\det Q(w) > 0$，那么方向 w 上的面仅在$\Sigma_{3,\,4}$的一个满维半代数子集上才是秩为 5 的极点。因此，找到秩 5 点的概率必定相当低。此外，对于任意光滑半正定三元四次型，在其 Gram 谱体上对满足 $\det Q(w) < 0$ 的 $w \in W$ 进行最小化，所得点的秩为 3 或 4。

其次，我们解释秩为 5 的极点对应的最优解的代数次数；此前发现该次数为 1。

命题 6.27。 设 $f \in \Sigma_{3,\,4}$ 有理、光滑且 $0 \neq w \in W$ 有理，并且 $\mathrm{Gram}(f)$ 在方向 w 上的面是一个秩为 *5* 的极点 ϑ。那么 ϑ 可在 $\mathbb{Q}$上定义，且与 ϑ相对应的 f 的平方和表示也如此。

证明。由于 w 张成了 ϑ 处的法锥，我们知道 $\det Q(w) > 0$。因此，我们可以找到$q \in \mathbb{R}[x]_2$，使得 $\mathrm{pr}_W(q \otimes q) = \lambda w$，其中某个 $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ 满足条件。于是 $f \in \mathrm{int}\ \Sigma(\mathrm{span}(q)^\perp)^2$，且 ϑ 的像由 $\mathrm{span}(q)^\perp$给出。由命题 6.16 的证明可知， q 是 $Q(w)$ 的伴随矩阵，因此若 $Q(w)$ 是有理的，则它也是有理的。因此，$\mathrm{span}(q)^\perp$ 有一个 $\mathbb{Q}$-基。格拉姆张量 ϑ 给出了一个平方和表示 $f = \sum_{i=1}^5 f_i^2$，其中 f_1、……、f_5 是 $\mathrm{span}(q)^\perp$的一组基。由 [3, 引理 4.4] 可知， f 的这一表示定义在 $\mathbb{Q}$上。因此，$\vartheta = \sum_{i=1}^5 f_i \otimes f_i$ 也是有理的。□

7. 问题

最后，我们提出若干由本文结果引出的问题。

注7.1。 一般而言，纤维体并非半代数集。不过，鉴于二元六次型的情形中，描述满维法锥的不等式特别简单（定理5.6），且尤其是我们证明了它是一个半代数集，不妨问：至少在这一特殊情形下，纤维体本身是否也是半代数集?

当然，也可以对三元四次型情形下的纤维体，或该情形下的三维面提出同样的问题。不过，这似乎不太可能，因为例如三维面已经发生了维数跃迁：它们来自格拉姆谱胚上的二维面。

注7.2。 我们还可以继续研究更高次数二元型的格拉姆谱胚的纤维体，并探讨其中是否仍存在具有满维法锥的极点。不难看出，与 R_1, R_3 对应的高维类似方向，也与秩 2 格拉姆张量存在特殊的相互作用；该张量对应于这样一种平方和表示：二元型的所有零点都按虚部的正负分组。

那么，这与二元六次型的情形有相同的解释：对于固定次数的几乎所有二元型，此法锥中包含的每个方向/线性泛函都在某个秩2格拉姆张量上取到最小值。

请注意，在更高次数下，格拉姆谱胚的代数边界是一个由正维子空间所生成的超曲面。因此，纤维体边界上的一般点也不再是极点。

注 7.3。是否还有其他有趣的谱胚族，其纤维体可以得到很好的理解？在这种情况下，它是否是半代数的？如果我们经常使用的、注 3.4 中所述的完备化方法表现良好，那么这一问题可能会特别容易。

例如，对于代数边界为四次对称行列式曲面的谱胚族，情况会如何（参见 [10]）？在这种情况下，「良好」族的纤维体在其边界上是否仍有特殊的极点？「一般」族的纤维体或许会失去所有特殊点，也就是说，其边界仅由法锥为一维法锥的极点组成。它们是半代数的吗？

注 7.4. 关于一般谱胚，还可以提出这样一个问题：假设我们已知某个线性映射对应的纤维体的面结构，那么关于一般纤维，我们能得出什么结论？当然，一般而言这会非常困难。不过，如果边界上的一般点是极点，并且正维面要么维数较低，要么接近余维为 1，那么或许可以根据纤维体来理解这些纤维。

致谢。我要感谢 Bernd Sturmfels 在他访问康斯坦茨大学期间提出这个问题。最要感谢的是 Chiara Meroni，她就这一主题与我进行了多次讨论，并回答了关于纤维体的无数问题。

References

[1] J. Bezanson、A. Edelman、S. Karpinski 和 V. B. Shah。Julia：一种数值计算的新方法。《SIAM 评论》，59(1):65–98，2017年。13[2] L. J. Billera 和 B. Sturmfels。纤维多胞体。《数学年刊》（第二辑），135(3):527–549，1992年。1[3] J. Capco 和 C. Scheiderer。关于有理系数平方和的两点说明。载于《代数、逻辑与数论》。第五届联合会议论文集，波兰贝德莱沃，2018年6月24日至29日，第25–36页。华沙：波兰科学院数学研究所，2020年。23[4] M. Chan 和 N. Ilten。行列式与永久式的法诺概形。《代数与数论》，9(3):629–679，2015年。20[5] M. D. Choi、T. Y. Lam 和 B. Reznick。实多项式的平方和。载于 K理论与代数几何：与二次型和除代数的联系。关于二次型与除代数的夏季研究所，1992年7月6日至24日，加利福尼亚大学圣巴巴拉分校，美国加利福尼亚州圣巴巴拉，第103–126页。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会，1995年。1[6] L. Chua、D. Plaumann、R. Sinn 和 C. Vinzant。格拉姆谱胚。载于《有序代数结构及相关主题》。2015年10月12日至16日在法国吕米尼 CIRM 举行的国际会议论文集，第81–105页。罗德岛州普罗维登斯：美国数学会（AMS），2017年。2[7] M. K. De Carli Silva 和 L. Tun̨cel。由椭圆体、θ体及其相关对象产生的谱胚的顶点。《SIAM优化杂志》，25(1):295–316，2015年。9[8] R. Jiang 和 D. Li。矩阵的同时对角化及其在二次约束二次规划中的应用。《SIAM优化杂志》，26(3):1649–1668，2016年。21, 22[9] L. Mathis 和 C. Meroni。纤维凸体。《离散与计算几何》，2022年。1, 2, 3[10] J. C. Ottem、K. Ranestad、B. Sturmfels 和 C. Vinzant。四次谱半代数体。《数学规划》，151(2 (B)):585–612，2015年。24[11] D. Plaumann、B. Sturmfels 和 C. Vinzant。四次曲线及其双切线。《符号计算杂志》，46(6):712–733，2011年。2, 23[12] V. Powers、B. Reznick、C. Scheiderer 和 F. Sottile。希尔伯特关于三元四次型定理的新方法。《巴黎科学院数学报告》，339(9):617–620，2004年。13[13] C. Scheiderer。二元型格拉姆谱胚的极点。《离散与计算几何》，67:1174–1190，2022年。2, 8, 9, 10[14] Sage 开发者。SageMath，Sage 数学软件系统（9.4版），2021年。https://www.sagemath.org. 19

[15] J. Vill。三元四次型的格拉姆谱胚。《符号计算杂志》，116:263–283，2023年。2，8，13，14[16] G. M. Ziegler。《多胞体讲义》，第152卷，数学研究生教材柏林：施普林格出版社，1995年。1

Fakultät für Mathematik, Otto-von-Guericke Universität Magdeburg, Universitätsplatz2, 39106 Magdeburg, Germany电子邮箱：julian.vill@ovgu.de