基于规则的定理证明器：中学证明入门

Joana Teles*CMUC / 科英布拉大学数学系，葡萄牙
jteles@mat.uc.pt

Vanda Santos †
CIDTFF、阿威罗大学和CISUC，葡萄牙
vandasantos@ua.pt

Pedro Quaresma‡CISUC / 科英布拉大学数学系，葡萄牙
pedro@mat.uc.pt

在中学引入自动演绎系统面临着诸多瓶颈。除了课程大纲和教师方面的问题外，几何自动定理证明器的输出与学校中提出猜想和证明的常规实践之间存在差异，这也是此类工具难以在教育环境中得到更广泛应用的一大障碍。

自几何自动定理证明器早期实现以来，人工智能方法的应用，以及基于推理规则并采用前向链式推理的综合法证明器，一直被认为最适合教育用途。

选择一组合适的规则，并选择一种能够运用这些规则的自动化方法，是一项重大挑战。我们探讨了这样一套规则，以及如何利用几何演绎数据库方法（GDDM）实现它。我们通过一些选定的几何猜想来测试这种方法，这些猜想可作为七年级（≈12岁的学生）课堂的目标。文中还介绍了一份教案，旨在引入证明几何定理的形式化论证，并尝试激励学生朝这一目标努力。

1 引言

在中学引入自动演绎系统面临着若干瓶颈。许多国家的课程大纲中缺少几何这门学科本身，也缺少严谨的数学证明，更不用说形式证明了；教师缺乏相关知识（和/或培训）；以及现有几何自动定理证明器（GATP）的输出与中学教育中通常采用的提出猜想和证明的实践之间存在不协调——在我们看来，这些是最重要的问题。

根据 [5], ，思维结构的形成是数学教学的主要目的之一。为实现这一目标，教学应以序列式学习为基础，在课堂中构建知识，形成概念层级，并系统研究各概念的性质，培养清晰、严谨的论证能力。这些是假设演绎推理的基本要素，而假设演绎推理正是数学推理的典范。归纳推理在数学中也发挥着重要作用，因为它能够帮助人们提出猜想，而后可通过演

*本研究部分获得科英布拉大学数学中心（UIDB/00324/2020）的资助，资金由葡萄牙政府通过 FCT/MCTES 提供。

†本研究由国家资金通过 FCT - 科学与技术基金会（I.P.）资助，资助范围包括项目 UIDB/00194/2020，以及第57/2016号法令第23条第4、5和6款规定的框架合同；该法令于8月29日颁布，并经7月19日的第57/2017号法律修订。

‡本研究由国家资金通过 FCT - 科学与技术基金会（I.P.）资助，资助范围包括项目 CISUC - UID/CEC/00326/2020；此外，还获得了欧洲社会基金通过中部地区2020年区域运营计划提供的资助。

J. Marcos、W. Neuper 和 P. Quaresma（编）：《教育软件的定理证明组件》2022年（ThEdu'22），EPTCS 375，2023年，第24–37页，
doi:10.4204/EPTCS.375.3

© J.Teles、V.Santos 和 P. Quaresma
本作品采用知识共享署名许可协议授权。

绎推理加以证明。各种形式的推理过去在数学课程 [13]中占有一席之地，如今依然如此。

新的课程文件 [7, 8] 也进一步强调了培养和运用计算思维的重要性，即培养分析和定义算法的能力，从而使思维更有条理，并为学生提供更多解决问题和证明结果的工具。技术资源的使用不可或缺，数学学习也能从中受益。本研究将这些目标融为一体。

本文结构如下：首先，在第 2 节中，将介绍一些动态几何工具和几何自动定理证明器。第 3 节将介绍基于规则的几何自动定理证明器的算法，以及示例中将使用的规则集。第 4 节将分析两个示例，以及基于规则的几何自动定理证明器所生成的形式证明片段。第 5 节将提出一份教案提纲，用于讲解其中一个示例。最后，第 6 节将总结全文并讨论未来的研究工作。

2 几何推理

学习几何涉及一定的认知复杂性。根据 [6] ，学习几何涉及三种认知过程：可视化（与空间表征有关）、作图（使用工具）和推理（尤其是旨在拓展知识过程、用于演示和解释的论述过程）。这些过程可以彼此独立地进行，也就是说，可视化并不依赖于作图。即使作图先于可视化，作图过程也只取决于数学性质与工具限制之间的联系。如果说可视化是一种有助于找到证明的直觉性辅助，那么在某些情况下，它也可能产生误导。证明的有效性完全取决于现有命题体系（定义、公理、定理）。

正如 Duval 所指出的：“这三种认知过程紧密相连，它们的协同作用对于精通几何在认知上是必不可少的” [6, 第 38] 页。本文旨在为一个复杂问题作出贡献：如何让 ≈ 12 岁的学生在课程中的特定内容范围内理解并看出这些过程之间的联系。

2.1 动态几何工具

动态几何系统（DGS）推动了对学生数学证明观念的研究。有研究表明，动态几何系统的这一贡献体现在两个方面。首先，它们提供了让学生自由探索的环境，使学生能够在寻找规律、一般性质等的过程中轻松验证自己的直觉和猜想。其次，它们为学生学习和理解数学概念与方法提供了非传统途径 [21]。动态几何系统的优势之一是能够执行各种任务，不仅可以探索几何情境，还可以研究工具本身在移动对象时所呈现的情境，从而为学生和教师提供宝贵的支持。在众多可用于支持几何学习的动态几何系统中，值得一提的有：Cabri [20], C.a.R. [12], Cinderella [24], GeoGebra [14], GeometerSketch- pad [15]和 JGEx [26]。

2.2 几何自动定理证明器

自 20 世纪 60 年代以来，几何领域中的自动演绎一直是自动推理领域的一个重要方向。人们研究并开发了各种方法和技术，用于自动证明

和发现几何定理 [22]。聚焦于动态几何系统/几何自动定理证明平台，即将动态几何系统与一个（或多个）几何自动定理证明器相结合的平台，我们可以重点介绍以下系统（其中一些前面已经提到）：Cinderella，配备了随机化证明器；GCLC [16], ，其中包含多个证明器（面积法、吴方法和格罗布纳基方法）[17]；GeoGebra，包含多个代数证明器 [18, 19]；以及 JGEx，其中包含多个证明器（面积法、全角法、演绎数据库法、吴方法和格罗布纳基方法）。在这些系统的最后一个——JGEx（*Java* 几何专家）中，可以识别出三个组件：动态几何组件、自动演绎组件，以及最具特色的组件——生成平面几何证明的动态可视化呈现。

以下各节将使用 JGEx，具体来说，是其基于演绎数据库方法的几何自动定理证明器。

3 基于规则的几何自动定理证明器

自早期与人工智能相关的尝试以来，基于推理规则并采用前向链式推理的综合法证明器一直被视为更适合教育的方案。通过采用恰当的规则集并使用前向链推理，它们能够更轻松地模仿学生进行证明时预期的行为 [2, 22]。

JGEx 几何演绎数据库方法证明器是基于一组推理规则实现的高效综合法证明器。对于给定的几何构形，该程序可以根据固定的一组几何推理规则求出其不动点；换言之，它可以找出利用这些规则能够推导出的几何构造（猜想）的所有性质 [4]。

求出不动点后，如果猜想包含在所有推导事实中，就证明了该猜想。随后可以用自然语言和可视化呈现生成综合法证明。该方法并不完备：如果猜想不在推导事实之中，并不意味着它不是定理，而是意味着必须采用其他方法，例如判定过程（如面积法）。

该算法很简单，采用基于数据的搜索策略，维护一个“新数据”列表；对于每条新数据，系统都会搜索规则集，以找出并应用使用该数据的规则（见图 1） [4]。

在原始实现 [4] 以及正在完成的新实现 [1], 中，均采用基于全角法的规则集 [3] 。这两个实现均为开源软件，可在 GitHub 服务器上获取。[1]

也可以采用不同的规则集，同时保留高效的数据库搜索策略。下文将介绍一套更适用于葡萄牙课程纲要中七年级学生（≈ 12岁） [5, 7, 8] 的规则集 [9, 10], ，并说明如何应用该规则集，通过形式证明来证明一些几何定理。

3.1 七年级规则集

此处介绍的规则集包含于教程系统 *QED-Tutrix* [9, 10, 11]中实现的规则集内。[2] 此处给出了它在 *TPTP FOF* 格式 中的形式化表示[3]。此规则集将添加到用于实现演绎数据库证明器的规则集中 [1, 4], 。请注意，其中一些规则

[1]JGEx：https://github.com/yezheng1981/Java-Geometry-Expert，OGP-GDDM：https://github.com/opengeometryprover/OpenGeometryProver [2]只选用了证明中所需的规则。[3] http://tptp.cs.miami.edu/TPTP/QuickGuide/Problems.html

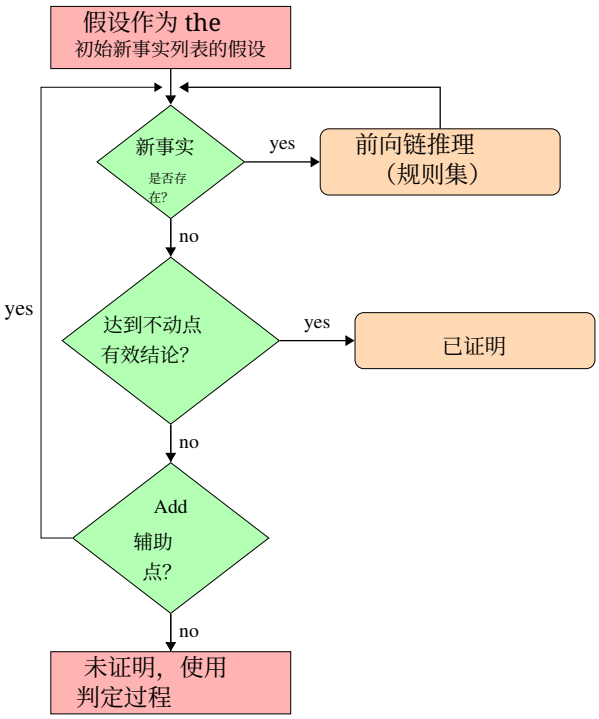

图 1：基于规则的几何自动定理证明器

已被采用（与该规则集中的规则相同）。选择 *FOF*格式，是因为它是上述演绎数据库方法新实现所使用的格式 [1]。几何谓词[4] 是 [4], 中所述的谓词，并作了一些补充，其含义应该很清楚。

R1（平行四边形的定义）四边形 [ABCD] 是平行四边形，当且仅当 AB 平行于 CD，且 BC 平行于 AD。fof(ruleR1, axiom, (![A, B, C, D]: (para(A, B, D, C) & para(A, D, B, C) =>parallelogram(A, B, C, D)))). fof(ruleR1a, axiom, (![A, B, C, D]: (parallelogram(A, B, C, D) =>para(A, B, D, C)))). fof(ruleR1b, axiom, (![A, B, C, D]: (parallelogram(A, B, C, D) =>para(A, D, B, C)))). R2 如果两条直线平行，那么由一条截线所截得的内错角相等。这是演绎数据库方法的规则 D40 [4]。fof(ruleD40, axiom, (![A, B, C, D, P, Q]: (para(A, B, C, D) =>eqangle(A, B, P, Q, C, D, P, Q)))). R3 （三角形全等的角边角判定）。这是演绎数据库方法的规则 D61 [4]。fof(ruleD61, axiom, (![A, B, C, P, Q, R]: (simtri(A, B, C, P, Q, R) & cong(A, B, P, Q) =>contri(A, B, C, P, Q, R)))).

[4]para = 平行；perp = 垂直；eqangle = 相等（完全）角；cong = 全等线段；simtri = 相似三角形；contri = 全等三角形；coll =共线

R4 已知两个全等三角形 $[ABC]$和 $[DEF]$, , 它们的边及对应角相等: $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{BC}=\overline{EF}$, $\overline{CA}=\overline{FD}$; 角 $\widehat{BAC}=\widehat{EDF}$、$\widehat{CBA}=\widehat{FED}$ 和 $\widehat{ACB}=\widehat{DFE}$也相等。

```
fof(ruleR4,公理,(![A,B,C,P,Q,R]:(全等(A,B,P,Q)&全等(A,C,
P,R)&全等(B,C,Q,R)=>contri(A,B,C,P,Q,R)))).fof(ruleR4
a,公理,(![A,B,C,P,Q,R]:(contri(A,B,C,P,Q,R) =>全等(A,B,
P,Q)))).fof(ruleR4b,公理,(![A,B,C,P,Q,R]:(contri(A,B,C,
P,Q,R) =>全等(A,C,P,R)))).fof(ruleR4c,公理,(![A,B,C,
P,Q,R]:(contri(A,B,C,P,Q,R) =>全等(B,C,Q,R)))).
```

R5 （矩形的定义）四边形 $[ABCD]$是矩形，当且仅当所有内角都是直角。

```
fof(ruleR5,axiom,(![A,B,C,D]:(rightangle(D,A,A,B)&ri
ghtangle(A,B,B,C)&rightangle(B,C,C,D)&rightangl
e(C,D,D,A)=>rectangle(A,B,C,D)))).fof(ruleR5a,
axiom,(![A,B,C,D]:(rectangle(A,B,C,D) =>rightangle
(D,A,A,B)))).fof(ruleR5b,axiom,(![A,B,C,D]:(rectangle
(A,B,C,D) =>rightangle(A,B,B,C)))).fof(ruleR5c,
axiom,(![A,B,C,D]:(rectangle(A,B,C,D) =>rightangle
(B,C,C,D)))).fof(ruleR5d,axiom,(![A,B,C,D]:(rectangl
e(A,B,C,D) =>rightangle(C,D,D,A)))).fof(ruleR5e,
axiom,(![A,B,C,D]:(rectangle(A,B,C,D) =>平行(A,B,D,C)
))).fof(ruleR5f,axiom,(![A,B,C,D]:(rectangle(A,B,C,
D) =>平行(A,D,B,C)))).
```

R6 如果角ABC 是直角，那么直线AB 和BC 互相垂直。

```
fof(ruleR6,公理,(![A,B,C]:(直角(A,B,B,C) =>垂直(A,B,B,
C)))).
```

R7 两条垂直于第三条直线的直线彼此平行。这是演绎数据库方法 [4]中的规则D9。

```
fof(ruleD9,公理,(![A,B,C,D,E,F]:(垂直(A,B,E,F)&垂直(C,D,E,F) =>
平行(A,B,C,D)))).
```

R8 两条直角边分别相等的两个直角三角形，其斜边相等。

```
fof(ruleR8,公理,(![A,B,C,D,E,F]:(直角(A,B,B,C)&直角(D,E,E,F)
&全等(A,B,D,E)&全等(B,C,E,F) =>全等(A,C,D,F)))).
```

D58 一条规则，是演绎数据库方法 [4],证明定理所需的 1.

```
fof(ruleD58,公理,(![A,B,C,P,Q,R]:(等角(A,B,B,C,P,Q,Q,R)&等角(A,
C,B,C,P,R,Q,R)&~共线(A,B,C) =>相似(A,B,C,P,Q,R)))).
```

4 七年级几何的一些问题

在循序渐进的学习过程中，预期学生在中小学阶段能够逐步熟练运用假设—演绎推理和数学论证。预计到七年级时，学生将能够较为准确地完成一些简短的证明 [5]。

要将这些内容付诸实践，最合适的领域是“几何与测量” [5] 或新课程文件中的“几何” [8]。在七年级学习四边形时，学生会学习四边形及其对角线的一些性质。运用已经学过的一些概念和结论，例如三角形全等、内错角、同位角等，只要掌握所有必要的工具，学生就能够也应该能够证明其中的一些性质。以下定理阐释了其中的一些性质，也是更大一组可得结论的一部分。

还应注意，在这一主题中，恰当地使用技术工具会非常有价值：教师和学生都可以用它们绘图、进行严谨的作图，以及可视化图形及其性质。

定理及其证明中所使用的符号和术语，采用的是 [5]中定义并且目前在葡萄牙语教科书中使用的符号和术语。几何作图、猜想和证明均使用 JGEx[5] 完成（见图 2–3）；非形式化证明及相应的形式化证明摘录由作者撰写。预计这些证明将由正在开发的新型几何自动定理证明器自动生成（见第 6 节）。由于证明采用了全角规则 [3, 4], ，因此使用了两种不同的角的概念：“普通”角由两条射线定义，用于非形式化规则；全角由两条直线定义，用于形式规则。将这两种定义相互转换，需要通过把形式证明转换为自然语言形式的非形式化表达来完成。然而，这种转换并非没有问题。例如，已知的三角形全等规则——边角边（s.a.s.）规则——在使用全角时并不成立 [4]。

定理 1 (平行四边形的对边)。 如果 $[ABCD]$是一个平行四边形，那么两组对边分别相等，即 $AB = CD$ 和 $AD = BC$（见图 *2*）。

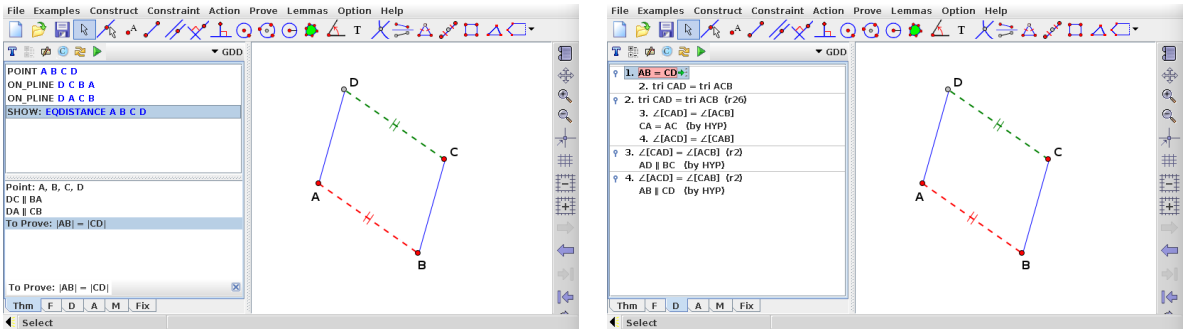

图 2：JGEx 中的平行四边形的对边

[5]JGEx 证明器使用的规则编号（例如“(r26)”）与本文所述规则的编号没有直接对应关系。

证明。 [*ABCD*] 是一个平行四边形，根据规则 R1（平行四边形定义），直线 *AB* 与*CD* 平行，直线 *AD* 与 *BC* 也平行。

B根据规则 R2，由于直线 *AB* 和*CD* 平行，因此角*BAC* 和 *DCA* 相等 .

根据规则 R2，由于直线*AD* 和 *BC* 平行，因此角*ACB* 和*CAD* 相等。

由于*BAC* 和*DCA* 是相等的角，*ACB* 和*CAD* 也是相等的角，并且*AC* =*CA*，根据规则 R3（角边角全等判定），三角形 [*ABC*]和 [*CDA*]全等。

最后，根据规则 R4，我们得到*AB* =*CD* 以及*BC* = *DA*。 □

基于规则的几何自动定理证明器给出的形式证明摘录。 如第 3 节所述，演绎数据库方法证明器通过对规则集进行前向链推理来工作，从猜想出发，并管理两组事实：“新事实”和“旧事实（已知事实）”。

下表试图说明证明器如何工作以得出预期结论。通过应用演绎数据库方法规则，还会生成许多其他事实，以逐步达到不动点。所呈现的事实与规则链是从结论反向推导至猜想而得出的，并将用于生成自然语言的非形式化证明描述。为避免列出不必要的更多事实，旧事实列表从一开始便以累积方式编写，也就是说，只列出新增的内容。

```
包含('geometryDeductiveDatabaseMethod.ax').
fof( theorem1 , 猜想 , (! [A, B , C ,D]:
                          parallelogram(A, B , C ,D)  => 全等 (A, B , C ,D) & 全等 (A, D, B , C) ) ) .
```

新事实	规则	已知事实	非退化条件.[6]
平行四边形(A,B,C,D)	由假设		
平行(A,B,C,D) 平行(A,D,B,C)	R1a,R1b	平行四边形(A,B,C,D)	
等角(A,B,B,C,C,D,D,A) 等角(A,C,B,C,C,A,D,A)	D40 (×2)	平行(A,B,C,D) 平行(A,D,B,C)	
相似三角形(A,B,C,C,D,A) 全等(B,D,B,D)[7]	D58	等角(A,B,B,C,C,D,D,A) 等角(A,C,B,C,C,A,D,A)	¬共线(A,B,C)
全等三角形(A,B,C,C,D,A)	D61	相似三角形(A,B,C,C,D,A)	¬共线(A,B,C)
全等(A,B,C,D) 全等(D,A,B,C)	R4a,R4b	全等三角形(A,B,C,C,D,A)	¬共线(A,B,C)

□

通过实际实现演绎数据库方法得出的形式证明会包含更多步骤，例如一些琐碎步骤，以及调整字母顺序以便应用规则。非退化条件（ndgs.）会由证明器自动添加；必须将其加入假设，才能确保猜想成立。所有这些最终都会形成对形式证明的非正式（严谨）语言表述：隐藏琐碎步骤（或许附带解释），说明需要非退化条件，并将形式规则转换为“普通”的中学用语。例如，规则 R3/D61 可表述为三角形全等的角边角（a.s.a.）规则。

定理 2 (矩形的对角线)。 如果 [*ABCD*] 是一个矩形，那么它的对角线相等，即 *AC* =*BD*（见图 *3*）。

[6] ndg. — 非退化条件。[7] 应用推理规则时会自动添加这一点是显而易见的。

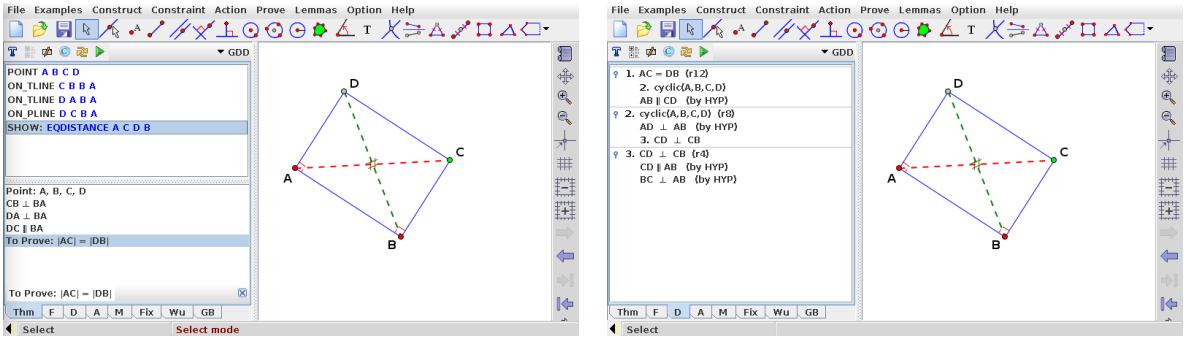

图 3：JGEx 中的矩形的对角线

证明。如果 [*A BCD*] 根据规则 R5 是一个矩形，角 *BAD*、*CBA*、*DCB* 和 *ADC* 都是直角 s.
根据规则 R6，直线*AB* 与*AD* 垂直，直线*BC* 与*AB* 垂直，直线*BC* 与*CD* 垂直，直线*AD* 也与*CD* 垂直。

根据规则 R7，由于*AB* 和*CD* 都垂直于*AD*，因此*AB* 与*CD* 平行；又由于*AD* and *BC* 也垂直于*AB*，因此*AD* 与*BC* 平行。（[ABCD] 是一个平行四边形，根据规则 R1）
重复定理 1 证明中的步骤，可得 $AD = BC$。
由于 $\overline{AD} = \overline{BC}$，*BAD* 和*CBA* 都是直角，且$AB = BA$，根据规则 R8（直角三角形全等的边角边判定），三角形 [*ABD*]和 [*BAC*]全等。
最后，利用 R4，可得 $AC = BD$。 □

```
includ e('几何演绎数据库方法.ax').
fof(th eorem2, 猜想, ( ! [A, B, C, D]: 矩形(A, B, C, D) => 全等(A, C, B, D) ) ) .
```

GDDM 证明器完成的形式证明摘录。

新事实	规则	已知事实	ndg.
矩形(A,B,C,D)	由假设		
直角(D,A,A,B) 直角(A,B,B,C) 平行(A,B,D,C) 平行(A,D,B,C)	R5a,R5b,R5e,R5f	矩形(A,B,C,D)	
直角(D,A,A,B) 直角(A,B,B,C) 平行四边形(A,B,C,D)	R1	平行(A,B,D,C) 平行(A,D,B,C)	
直角(D,A,A,B) 直角(A,B,B,C) 全等(A,B,C,D) 全等(A,D,B,C) 全等(A,B,A,B)[8]	定理 1	平行四边形(A,B,C,D)	

全等(A,B,C,D) 全等(A,C,B,D)	R8	直角(D,A,A,B) 直角(A,B,B,C) 全等(A,D,B,C) cong(A,B,A,B)	

□

如图 3 所示，JGEx 完成的证明采用了不同的方法。它利用了点 *A*、*B*、*C* 和 *D* 共圆这一事实，以及矩形的对角线是圆的直径这一事实。这种方法并不适合预期的中学教学水平；但是，如果使用 JGEx，它就会生成这样的证明。演绎数据库方法的实现应允许选择给定的一组规则；这种可能性将在最后一节讨论（见第 6 节）。

5 教案

教案必须反映将向学生提出的内容。这里概述了一份教案，旨在让学生在课堂上学习定理 1 并进行其形式证明。完整教案详见附录 A。

本教案旨在实现以下核心学习目标 [8]：在动态几何环境（如 GeoGebra）中探索边数不同的凸多边形；根据对研究对象共有规律的识别，提出猜想、推广和论证；在动态几何环境中确立猜想并对其进行探索。

由这些目标可引出一系列任务，让学生针对动态几何系统中探索的各种性质提出猜想。

任务1- 四边形、边长和角度

- 构造一个四边形。
- 确定各边的长度。
- 确定角度。

任务2- 平行四边形

- 构造三个平行四边形。
- 确定这些平行四边形各边的长度
- 你能对平行四边形的边作出什么猜想?

任务3- 证明这个猜想。请按照以下步骤进行：

- 作一个平行四边形 [*ABCD*]
- 作出平行四边形的一条对角线。
- 利用平行四边形边的平行性，标出度数相同的角（在作图中标记这些角，并注明它们的度数）。

- 回想三角形全等的角边角判定，根据图示，你能得出哪些三角形全等?

[8]这是一个显而易见的事实，应用推理规则时会自动添加。

• 用相同颜色标出图中长度相同的线段。

如前所述，我们的目标是借助动态几何系统和几何自动定理证明器等计算工具，探索几何猜想及其证明。

在课程的最后部分、结束之前，教师将使用 JGEx 向学生展示该结果的完整证明。通过预览窗口，可以逐步跟进演示，查看每个步骤的图示，并了解形式规则是如何运用的。教师需要将形式语言和规则本身转换成非正式语言，使其更贴近学生使用的语言。

6 结论与未来工作

本研究旨在探讨一个复杂的问题：如何让一名 ≈12岁的学生理解并看出可视化、作图与推理之间的联系，尤其是如何通过论述过程拓展知识过程，以用于演示和解释。

此处介绍的规则（见第 3.1 节）以严谨的数学（自然）语言编写，适用于课堂环境。此外，还介绍了一套相应的形式规则，适用于基于规则的定理证明器。我们以 Font [9]提出的规则集和 Chou 等人 [4] 提出的规则集为起点，旨在构建一套一致的规则，从而缩小几何自动定理证明器的结果与学校中提出猜想和进行证明的常规实践之间的差异。

使用我们研究小组 [1] 正在开发的基于规则的定理证明器，将能够实现一组规则，既满足自动化的需要，也适用于预定的目标受众。未来还面临许多挑战：实现高效的证明器；将规则集与推理机制分离，即无需每次都构建不同的几何自动定理证明器（GATP），便能根据当前任务调整规则集；实现自然语言呈现，即将形式证明转化为适合课堂环境使用的严谨证明；以及建立 GeoGebra（学生和教师都熟知的动态几何系统）与 GATP 之间的联系，从而使作图、猜想和证明能够在视觉上相互关联。

所介绍的教案（见附录 A）可应用于实际课堂。我们计划在课堂中开展实践活动，首先与职前教师进行实验，之后再在实际的七年级课堂中开展。

参考文献

[1] Nuno Baeta 与 Pedro Quaresma（2022）：几何演绎数据库证明器。《数学与人工智能年刊》。即将出版。[2] Shang-Ching Chou 与 Xiao-Shan Gao（2001）：几何中的自动推理。载于 John Alan Robinson 与 Andrei Voronkov（编）：《自动推理手册》，爱思唯尔科学出版社，第 707–749 页，doi:10.1016/B978-044450813-3/50013-8。[3] Shang-Ching Chou、Xiao-Shan Gao 与 Jing-Zhong Zhang（1996）：利用几何不变量自动生成可读证明，*II*：全角定理证明。《自动推理杂志》17(3)，第 349–370 页，doi:10.1007/BF00283134。

[4] Shang-Ching Chou、Xiao-Shan Gao 与 Jing-Zhong Zhang（2000）：一种用于自动几何定理证明与发现的演绎数据库方法。《自动推理杂志》25(3)，第 219–246 页，doi:10.1023/A:1006171315513。[5] Ministério da Educação e Ciência [MEC]（2013）：基础教育数学课程。里斯本：Ministério da Educação e Ciência。可访问：https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/ Basico/Metas/Matematica/programa_matematica_basico.pdf。[6] R Duval（1998）：从认知视角看几何。载于《21世纪几何教学展望：ICMI研究》，Kluwer Academic，第 37–51 页。[7] Direção-Geral da Educação [DGE]（2018）：核心学习内容：与学生画像相衔接——七年级——基础教育第三阶段——数学。里斯本：Direção-Geral da Educação。可访问：http://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf。[8] Direção-Geral da Educação [DGE]（2021）：核心学习内容：与学生画像相衔接——七年级——基础教育第三阶段——数学。里斯本：Direção-Geral da Educação。可访问：https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf。[9] Ludovic Font（2021）：为几何辅导软件自动生成证明。博士论文，蒙特利尔理工学院。可访问：https://publications.polymtl.ca/9090/。[10] Ludovic Font、Philippe R. Richard 与 Michel Gagnon（2018）：通过自动化证明生成改进 QED-Tutrix。载于 Pedro Quaresma 与 Walther Neuper（编）：《第六届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，瑞典哥德堡，2017年8月6日，《理论计算机科学电子论文集》267，Open Publishing Association，第 38–58 页，doi:10.4204/EPTCS.267.3。[11] M. Gagnon、N. Leduc、P.R. Richard 与 M. Tessier-Baillargeon（2017）：QED-Tutrix：创建并扩展问题数据库，为几何证明学习提供个性化问题路径。载于：《欧洲数学教育研究学会第十届大会（CERME10）论文集》。[12] René Groth mann（2016）：C.a.R. 几何程序。《国际计算机发现数学杂志》1(1)，第 45–61 页。[13] Gila Hanna（2020）：数学证明、论证与推理，第 561–566 页。doi:10.1007/978-3- 030-15789-0 102。_ [14] M Hohenwarter（2002）：GeoGebra——用于平面动态几何与代数的软件系统。硕士论文，奥地利萨尔茨堡大学。[15] N Jackiw（2001）：《几何画板》v4.0。Key Curriculum Press。[16] Predrag Janiˇci´c（2006）：GCLC——一款用于构造欧几里得几何及其他用途的工具。载于 Andrés Iglesias 与 Nobuki Takayama（编）：《数学软件——ICMS 2006》，《计算机科学讲义》4151，施普林格，第 58–73 页，doi:10.1007/11832225_6.[17] Predrag Janiˇci´c、Julien Narboux 与 Pedro Quaresma（2012）：面积法：回顾。《自动推理杂志》48(4)，第 489–532 页，doi:10.1007/s10817-010-9209-7。[18] Zoltan Kovács、Tomas Recio 与 Maria Pilar. Vélez（2018）：在几何证明教学与学习中使用 GeoGebra 的自动推理工具。《国际数学教育技术杂志》25(2)，第 33–50 页，doi:10.1564/tme_v25.2.03。[19] Zoltan Kovács、Tomas Recio 与 Maria Pilar Vélez（2022）：《人工智能时代的数学教育》，章节“GeoGebra 自动推理工具：是什么？有什么用？”，Springer Nature，doi:10.1007/978-3-030-86909-0_2。[20] J. M. Laborde 与 R. Strässer（1990）：Cabri-Géomètre：一个用于指导式发现学习的几何微世界。《国际数学教育评论》——《数学教学中心评论》90(5)，第 171–177 页。

[21] Ramón Marrades 和 Ángel Gutiérrez（2000年）：中学生在动态计算机环境中学习几何时所作的证明。数学教育研究 44(1/2)，第 87–125 页，doi:10.1023/A:1012785106627。[22] Pedro Quaresma（2022年）：自动演绎与几何动态构造的发展，第 1 章，第 3–22 页。数字时代的数学教育 17，施普林格，doi:10.1007/978-3-030-86909-0。[23] Pedro Quaresma 和 Vanda Santos（2022年）：在中学引入自动演绎的四个几何问题。载于：第十届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集，理论计算机科学电子论文集 354，开放出版协会，第 27–42 页，doi:10.4204/eptcs.354.3。[24] Jürgen Richter-Gebert 和 Ulrich Kortenkamp（1999年）：交互式几何软件 *Cinderella*。施普林格。[25] Vanda Santos 和 Pedro Quaresma（2021年）：借助学习环境探索几何猜想——一项针对职前教师的案例研究。数学与技术电子期刊2(1)。[26] Zheng Ye、Shang-Ching Chou 和 Xiao-Shan Gao（2011年）：*Java* 几何专家简介。载于 Thomas Sturm 和 Christoph Zengler 编：几何中的自动演绎，计算机科学讲义6301，施普林格柏林海德堡，第 189–195 页，doi:10.1007/978-3-642-21046-4_10。

教案

学科：几何

子主题：平面图形

摘要：四边形的性质：平行四边形边长之间的关系。使用动态几何程序探索任务。问题解决。形式证明。

内容：四边形和内角。

背景

- 平行四边形定义。
- 两条平行线被一条截线所截时形成的角（内错角）。
- 三角形全等判定条件。
- 了解如何使用各种工具，包括数字技术，具体而言是使用特定的计算机程序（GeoGebra）来探索平面图形的性质。

核心学习

在动态几何环境（例如 GeoGebra）中探索边数不同的凸多边形。

基于对所研究对象共有规律的识别，提出猜想、推广和论证。

在动态几何环境（如 GeoGebra）中提出猜想并加以探索。

方法论/策略

展示对话 .....。探索动态几何环境。创造个人和小组 p

合作机会。

教学资源/材料

- 计算机
- 动态几何系统
- 投影仪
- PowerPoint，用于辅助向学生布置任务
- 活动单《一起来探索平行四边形》

课堂组织

课堂空间安排在计算机教室内。

课程描述 - 课堂策略与实施

- 任务介绍与课堂学习方式（10分钟）

学生进入课堂后，课程开始，教师将总结内容写在黑板上。学生把总结内容记录在日常笔记本中。随后，教师会向他们布置“让我们一起来探索平行四边形”这一任务。教师会邀请学生两人结对，并选择一台计算机进行操作。教师向学生说明，他们将在计算机上以小组形式完成预先提供的任务。

将通过完成以下任务来探索动态几何环境（共50分钟）：

任务1- 四边形、边长和角度（10分钟）。

- 构造一个四边形。
- 确定边长。
- 确定角度。

任务2- 平行四边形（10分钟）。

- 画出三个平行四边形。
- 测量这些平行四边形各边的长度
- 关于平行四边形的边，你能提出什么猜想?

任务3- 证明这个猜想（30分钟）。请按以下步骤进行：

- 画一个平行四边形 $[ABCD]$。
- 画出平行四边形的一条对角线。
- 利用平行四边形边的平行性，标出度数相同的角（在你的作图中标记这些角，并注明它们的度数）。
- 回想三角形全等的角边角判定定理。在图中，你能得出哪些三角形全等?

- 在图中用相同颜色标记长度相同的线段。

完成以下句子：“在平行四边形中，.....边
.....。”

• 任务讨论（10 分钟）

• 综合与形式证明（20 分钟）

任务执行的最后阶段将进行综合。事实上，这将与讨论同时进行。

在课程的最后阶段、结束之前，教师将使用 JGEx 向学生展示完整的结果证明。借助预览窗口，可以逐步跟随演示，查看每一步的说明，并了解形式规则的使用方式。教师需要将形式语言和规则本身转换为更接近日常表达、也更贴近学生用语的非正式语言。

时间安排

• 任务介绍：10分钟

• 自主完成任务：50分钟

• 讨论：10分钟

• 综合与形式证明：20分钟