迈向基于 Isabelle/VSCode 的无障碍数学工作环境

Klaus Miesenberger奥地利林茨约翰·开普勒大学
klaus.miesenberger@jku.at

Walther Neuper林茨约翰·开普勒大学 奥地利
walther.neuper@jku.at

Bernhard Stöger林茨约翰·开普勒大学 奥地利
bernhard.stoeger@jku.at

Makarius WenzelWenzel博士 奥格斯堡 德国
makarius@sketis.net

本文汇集了三方开展跨学科合作的前期工作：一是致力于提升残障人士学习无障碍性的专家，二是教育数学软件开发专家，三是交互式证明助手设计与实现方面的专家。

这项合作的启动目标是以合理的投入，为教育开发一个无障碍数学工作环境。促成项目启动的契机，是一个令人欣喜的发现：即将推出的 Isabelle/VSCode 对盲人用户具有很高的无障碍性，且无需 进一步的辅助措施；他们也因此被设定为本项目的目标群体。

文中介绍了理解开发所需投入的关键细节所必需的技术信息。对教育实践在（1）和（2）方面需求的调查，促成了对教育数学软件的愿景。尽管这一愿景必然较为粗略，但足以指导开发，并希望借此邀请数学教学法专家参与合作。

1 引言

Isabelle 是一款证明助手， [32] 数学家在世界各地使用它来形式化自己的理论，以确保这些理论正确无误。通过这种方式，形式化的数学知识远多于大学本科课程所教授的内容。[1] *VS Code*[2] 是 Microsoft 开源的一款面向程序员的源代码编辑器。*Isabelle/VSCode* 是即将推出的证明助手，它以 VSCode 作为新的前端，取代 jEdit。

一次美妙的巧合促成了在 Isabelle/VSCode 中构建无障碍数学工作环境（下文简称 MAWEN）的计划：一位作者发现 Isabelle/VSCode 对他而言极为无障碍。他生来失明，却是一位学术数学家。这是他人生中第一次能够在电脑上阅读证明：只需用鼠标点击公式，就能查阅证明中用到的定理，并以这种简单的方式查阅相关定义[3]。

[1]https://www.isa-afp.org/[2]https://code.visualstudio.com/[3]凭借其实践经验和理论专长，此人将在计划中的项目中发挥重要作用。因此，本项目和本文将仅关注有天赋的盲人的无障碍性，尽管“无障碍”这一概念也包括

J. Marcos、W. Neuper 和 P. Quaresma（编）：《教育软件的定理证明组件》2022（ThEdu'22），EPTCS 375，2023年，第 92–111 页，
doi:10.4204/EPTCS.375.8

© Miesenberger、Neuper、Stöger 和 Wenzel 本作品采用知识共享署名许可协议授权。

基于 Isabelle/VSCode 构建 MAWEN 的想法有着显而易见的技术原因，因为 Isabelle 使用线性公式：像 $\exists \forall \wedge \vee + - x_1$ 或 x^2 这样的（特殊）字符会按顺序排在一行中，而$x+1\,y-2$则显示为 $(x+1)/(y-2)$——这恰好就是视障人士在盲文显示器上接触公式的方式！

这一难得的契机，得益于林茨约翰·开普勒大学综合学习研究所（IIS）长期致力于让数学学习变得无障碍的努力。IIS 还开展了其他活动，并与*ISAC* 项目合作[5] 。该项目二十年来一直致力于开发基于 Isabelle 的教育数学软件原型。如今，与第三方 Isabelle 系统开发团队携手合作，启动 MAWEN 项目顺理成章。这个联合项目对这类软件的需求进行了全面调查，详细说明了用户需求和技术可行性，并在本文中一并介绍。技术可行性已在 Isabelle 研讨会上得到检验[6], ，详细信息已记录在 [42] ；目前，项目正在寻求与相关学术机构开展国际合作。

项目团队兼具证明器技术、无障碍性以及教育实践方面的专长，并期待与该领域教育科学方面的专家合作。这一点十分重要，因为 MAWEN 的设计在一个重要方面颇具新意：
MAWEN 当前的设计旨在涵盖数学问题求解的所有 方面[7] ，即问题建模、规范求解特定问题所需的知识，最后还包括与系统交互、在反馈帮助下逐步解决问题。数学是一门讲究 推理的科学，其中问题解答的每个陈述和步骤都可以且需要得到论证，因此底层软件应实现推理；这项工作由定理证明器 [27] Isabelle 完成，下文简称“证明器”。本文将介绍这项功能如何在*ISAC* 原型中实现，以及 MAWEN 项目将如何进一步支持推理。

在数学教育中，为计算机提供更好的支持对于探究式学习尤为重要，因为计算机可以让公式具备交互式无障碍访问能力（下文将详细展示其在全纳学习方面的潜力），而学习公式是进入数学世界的主要途径（早在欧几里得时代，他就努力尝试用文字理解几何，当时我们还没有精细的数学公式语言）。

数学教学法领域的专家或许会质疑 MAWEN 声称能够涵盖数学问题求解中的所有 活动。事实上，数学教育软件（包括面向残障人士的软件）开发工作数量众多，围绕这些软件产品积累的教育专业知识也已相当丰富；然而，这并不能改变一个事实：如今学校里的数学问题求解仍然是通过“纸笔”完成的。学校中最常用的软件 GeoGebra 完全不具备无障碍功能，而知名数学软件仍将公式呈现为图形（这只有视力正常的人才能理解；例如参见[8]），因此盲人面临的处境尤其不理想。本文将提出改善这一状况的方向。

本文　　结构安排如下：在上述引言之后，第 §2 节阐明　　nt

运动障碍及其他类型的残障。我们认为，这一有限目标涵盖了很大一部分潜在目标群体。因此，本文中的“无障碍”仅指盲人。[4]https://www.jku.at/en/institute-integriert-studieren/[5]https://isac.miraheze.org/[6] https://sketis.net/isabelle/isabelle-workshop-2022[7]除了学习过程中的人机交互，数学活动还包括几何、图形证明方法、填写选择题测试等；但这些功能已有其他软件产品提供。[8]https://www.wolframalpha.com/

MAWEN 项目在无障碍性方面的出发点（§2.1），指出需要应对的挑战（§2.2），以便推导出具体的用户需求（§2.3）。第 §3 节从三个方面探讨数学教育软件面临的诸多挑战：软件在灵活性和适用范围方面的局限（§3.1）、（机械化）证明在工程学中的作用日益增强（§3.2），以及数学问题求解中正确性的论证（§3.3）。第 §4 节介绍一项案例研究，探讨在求解复杂数学问题时，机械化支持能在多大程度上发挥作用；介绍中区分了*ISAC* 原型中已尝试并验证的功能，以及 MAWEN 项目计划实现的功能。第 §5 节转向技术开发：§5.1 指出 MAWEN 计划采用的最新软件组件；§5.2 和 §5.3 则提出项目需要解决的问题。第 §6 节结合 §2 和 §3 中对需求的调查，提出推动 MAWEN 开发的愿景。第 §7 节给出结论和总结。

2 数学软件的无障碍性

人们为实现互联网无障碍付出了巨大努力，浏览器技术等方面取得的成果也十分显著。然而，由于数学公式、符号计算和证明的结构特点，数学内容会带来一些特定问题。在计算机数学中，人们更倾向于使用“项”而非“公式”；不过，下文将根据语境使用这两个概念。

2.1 现状

过去四十年来，盲人和视力受损者从现代信息技术中获益日益增多。然而，遗憾的是，这些益处并未能充分延伸到数学领域。这主要有以下几个原因：

- 数学公式通常以二维图形方式呈现，而盲人使用的自适应工具仅限于一维（线性）内容，无法呈现这种形式，参见下文第 96 页的 UR.1。
- 尽管数学领域确实存在相当多的布莱叶盲文编码，可将数学内容表示为线性形式，但这些编码难以学习、十分复杂、因国家而异，而且视力正常者并不了解。
- 目前缺少一个支持盲人和视力正常者共同进行数学协作的平台。
- 盲人能够获取的数学文献非常有限。
- 盲人在进行数学推导时会遇到极大困难，因为数学项往往很早就变得相当复杂，盲人很快便无法掌握自己所进行的符号计算的整体情况。
- 迄今为止，还没有一种连贯的软件能够恰当地取代数学问题求解中的“纸笔”工作——无论是面向盲人还是视力正常者。

人们已经尝试了许多方法来克服这些重大挑战；然而，迄今没有一种方法能够全面应对这些挑战，也没有一种方法能在从事数学及相关领域工作的中小学生、学生和专业人士中广泛应用。以下简要列举一些此类尝试——虽不完整，但颇具代表性：

- *Infty Reader* [37] 是一款数学光学字符识别解决方案，旨在弥补上述盲人无法获取数学文献的问题。尽管在适当的条件下，该工具能够生成相当准确的识别结果，但它生成的项极难阅读，

因为其中包含大量格式信息，会分散盲人读者的注意力。由于光学字符识别满足着迫切需求，相关功能目前仍是持续研究的课题，而深度学习技术的表现已超越当前最先进水平 [3]。

• *ChattyInfty* [38, 43] 是一款功能全面的数学编辑器，可通过合成语音呈现各项。问题在于，聆听各项会让它们难以理解，而且缺少通过触觉输出——布莱叶盲文——来补充语音呈现的方式。

• 无障碍公式编辑器 https://accessibility.pearson.com/resources/aee/index. php 提供了支持布莱叶盲文的数学编辑功能。问题在于，它仅支持有限数量的数学盲文编码，这大大限制了该产品在全球推广的潜力。

• Prajaks Jitngernamdan 在奥地利林茨大学完成的一篇博士论文研究了助手或向导是否能够帮助学生完成算术中的基础任务 [13, 14, 15,16, 17]。我们所说的助手或向导，是指一种软件程序，它会引导用户完成计算的各个步骤，并在每一步给出操作指示和提示。该程序支持的计算仅限于浮点数算术的四种基本运算——加法、减法、乘法和除法。论文表明，这种向导确实能够为学生提供帮助；但问题在于，相关软件给予的支持过多，以致学生独立工作的能力未能得到充分锻炼。

• Tony Bolkas 在奥地利林茨大学完成的一项实践培训项目也实现了一个软件原型：该原型将 LaTeX 公式转换为 MathML 内容，并通过文本转语音系统（TTS）以合成语音读出。该项目特别注重向听者传达公式的结构，方法是在结构树的关键位置插入停顿，并加入特殊的语音标记关键词，以标示分数、指数、根式等结构元素的起始和结束。

我们对该软件原型的测试表明，即使有音频标记，仅仅听取某个项也不足以让人轻松理解它。此外，还需要一种支持遍历项结构的机制；接下来的两节将对此进行介绍。

为解决让盲人能够使用计算机进行数学学习这一重大难题，人们还进行了其他几项颇有希望的尝试；但由于这些尝试基于有时限的项目，项目结束后，相关开发也随之中止。

2.2 开放挑战

如前所述，目前仍然缺乏面向盲人的无障碍且易用的数学工作环境。根据上一节的分析，要提供这样的工作环境，亟待克服的最重要开放挑战如下：

• 支持目标群体理解复杂的数学术语：传统的图形化数学表示有助于视力正常者理解术语结构，而盲人可用的线性记法却无法帮助他们快速概览复杂结构。因此，必须将折叠/展开大纲视图等软件开发领域的现代工具应用于线性数学记法，以便盲人用户能够快速浏览复杂术语。这应包括轻松地将某个项分解为其子术语、查看某个项的上位术语，以及理解某个术语元素语义的功能。

• 为了设计能帮助盲人高效进行数学计算的工具：显然，视力正常者会以视觉方式组织计算，但这种方式无法直接用于盲人用户。因此，需要采用其他方法来组织计算，尤其是

要能够快速跳转到子计算、中间结果等；这些方法必须符合上文所要求的结构分析与遍历方法，也称为“导航”。

- 为了方便盲人和明眼人协作完成数学任务（通常是明眼教师与盲人学生），如果盲人能够运用上述段落所述的方法高效地进行数学学习，却无法向教师或同学等明眼人展示自己的成果，那么我们的解决方案就不完整。反之，如果明眼人（通常是教师）无法轻松地向盲人（通常是学生）展示数学练习、讲解等内容，那么盲人融入主流学习也就无从实现。

2.3 用户需求

以下是前文针对 Isabelle/VSCode 提出的用户需求。用户需求以“UR”为前缀。

UR.1：将项分解为适当的子术语明眼人能够受益于几个世纪以来逐步形成的高度复杂的项表示法：指数、下标、分数线上下方的分子和分母，以及各种语言的符号等。盲文显示器是一维设备，几乎无法呈现所有这些内容。然而，[18]通过实验表明，借助键盘和盲文显示器，可以实现对子术语和超项的高效导航，从而相当有效地帮助理解项的结构。根据特定的盲文标准，（子）项以 ASCII 字符串表示。

因此，为了满足无障碍性需求，除了项的视觉表示（在 Isabelle 特有的字体中看起来很美观）之外，还必须提供适当的项结构；为了实现全纳学习，这两种表示都应并列呈现。

UR.2：项元素的语义信息：长期以来，集成开发环境都广泛支持请求语义信息，尤其是通过点击程序代码中的相应标识符来获取定义。Isabelle/jEdit 将这一功能扩展到了数学术语：例如，点击某个项中的加法运算符，就能查看半群的定义——半群是含有加法运算符的最简单代数结构。

这一功能已从 Isabelle/jEdit 移植到 Isabelle/VSCode，并且可通过键盘快捷键完美地无障碍使用。人们对 Isabelle 所提供的通用工具寄予厚望，也因此期待点击屏幕上的某个元素时，能够根据用户的数学知识水平显示不同的定义和解释。

UR.3：对结构的概览 视力正常的人只需快速上下滚动屏幕，就能轻松了解理论和证明的结构；而盲文显示器以行为单位显示内容，必须逐行触摸，才能获得较为满意的概览。

为了理解内容，在细节与概览之间任意切换至关重要。Isabelle/jEdit 借助“Sidekick”解析器，以及对理论树结构中相应分支进行折叠和展开的良好支持，充分满足了这一要求；点击某个分支，即可立即显示理论中的相应细节。Isabelle/Isar 中的证明 [39] 通过语法高亮和缩进进行视觉组织，使整体视觉效果清晰地呈现其结构。

视障人士需要能够近似使用所有这些为视力正常的用户提供的实用功能——这种近似方式以触觉、布莱叶盲文和键盘快捷键取代视觉与鼠标操作。一项具体的最低要求是为理论和证明提供“大纲视图”。

3 数学教育软件

数学教育软件种类繁多，教育中也在使用或至少探索专业软件，世界各地仍在不断开发数学教育软件。因此，我们不禁要问：现有软件缺少什么？数学教育软件至今仍不断问世，这是否意味着其中缺少某种本质要素?

由于计划中的项目旨在促进全纳学习，即视力正常学生与视障学生协作学习，本节将从数学教育软件的一般考量出发。

3.1 软件与数学问题求解

在德国，一封广受讨论的关于数学教育的公开信 [20] 批评学校将数学问题求解拆解，并将其分散到不同的“基础能力” [33] 之中，导致许多学生无法应对工程学、生物学、计算机科学等专业学习中遇到的复杂数学问题[9]。在许多国家，类似的批评促使教育机构着手应对中等教育—高等教育过渡（STT）[19]。

类比于数学教育理论中将能力划分为相互独立的部分，用于数学教育的软件工具似乎也将数学问题求解划分为若干独立部分：计算机代数系统（包括手持设备中的系统）用于方程求解、化简和绘图；电子表格则用于计算、统计学和绘图。动态几何系统用于交互式构建以及检验几何命题的真假；大量小应用程序展示特定的数学事实等。

另一方面，在学校中，数学问题求解通常仍然是通过“纸笔”完成的。由此我们得出结论：目前没有足够通用的工具能够涵盖问题求解中的广泛活动；现有工具的适用范围过于有限。此外，这些工具在交互灵活性方面也过于有限： [17] 展示了即使在简单的数值计算中，提供用户指导也有多么困难。旨在开发此类软件工具的项目，既要涵盖广泛的问题求解活动，又要提供灵活的交互和用户指导（同时加以限制，以便通过试错学习来挑战学生），例如 Imps、 [8] ActiveMath [25],eMath Studio [2], ，尚未得到广泛应用。

因此，数学教育面临的主要挑战，即用数学语言教授建模问题并解决这些问题，似乎并未得到软件的充分支持，无论是在学校还是在学术层面。不过，对于后者，至少有一款前景可期的产品 [36]。

因此，我们认为，数学问题求解缺乏适当的软件支持，而这一缺口可以借助计算机数学的研究现状来填补。本文旨在为这一论断提供依据，并说明 MAWEN 项目的筹备工作。

[9]德文原文：“数学教学内容只是零散地呈现，缺乏充分的关联：其结果是数学教学被掏空、去学科化，数学教学的内核被掏空。”

3.2 未来对证明的更多需求

形式化证明是数学区别于其他科学的特征，因此，证明在数学教育中的重要性已得到充分认可 [11]。

然而，证明教学被认为是数学教育中较难的一部分。在高中阶段，证明教学受到限制，因此在中学—高等教育过渡阶段需要付出巨大努力。目前，许多举措正借助软件工具 [1, 5, 6, 9, 12]支持数学证明方面的学术教育，而且这类举措的数量正在迅速增加，尤其是在计算机科学领域。由于这些举措由积极主动的讲师推动，因此前景可期。

工程学院的情况颇为特殊：那里的学术教育通常试图绕开证明教学的难题。迄今为止，这还不被视为严重缺陷；然而，随着计算机科学日益渗透到其他工程学科，“形式化方法”[4] 变得愈发重要，以便通过对关键性质进行数学证明，应对技术系统日益增长的复杂性。

因此，预计对形式化数学教育的需求将不断增长，并超越学术界纯数学的范畴。随着工程学院数学教育范围的扩大，上述证明难题预计会在更广泛的领域显现出来。

我们再次发现缺乏适当的软件支持，这次缺乏的是在证明教学初期阶段提供的支持。理解证明的一个先决条件似乎是具备匹配的经验：将定理的前提与具体的证明情境相匹配，以判断该定理是否适用。 [42] 中的§4.3举例说明了早期数学教育中的匹配，即简单的重写。我们认为，如果不熟悉机械特性，匹配这一证明概念就仍会显得有些深奥。

在早期数学教育中，证明教学尤其困难，因为中小学生的兴趣和心智成熟度各不相同。显然，证明教学不能仅靠几小时的讲座来完成；它需要时间，就像学习一门语言一样，而数学是人类语言中机械性最强的一种。

软件支持有助于缓解这一状况，因为它让人们能够同步积累经验，甚至在专注于数学活动的其他方面时，也能在无意识中积累经验——前提是所用软件实现了相应的推理机制。Isabelle/PIDE/MAWEN也计划提供这类支持，我们期待评估这种新型软件所带来的优势。

迄今为止，向视障学生教授数学证明并非一个待解决的问题，而是被排除在面向有特殊需求者的数学教育范围之外。全球范围内，只有少数杰出人士能够获得数学学位；此外，他们还不得不克服缺乏工具来理解和操作数学术语的困难。

3.3 数学中的论证与透明性

上文提到了两次数学教育软件不足的问题——那么，我们为何有信心认为这一缺口确实能够弥补，而且只需投入合理的努力就能填补？尤其是对于视障学生而言？这份信心源于交互式定理证明及相应的数学机械化所带来的全新概念和技术基础。

多年来，*ISAC* 项目[10] 一直在探索弥补上述教育数学软件缺口的可能性； [21] 从技术和用户两方面回顾了该项目的历史。经过多年的澄清，*ISAC*的构想可以简单概括如下：

> 让软件成为一个完全透明且交互式的数学模型，使学生能够通过试错，
> 学习工程学中解决复杂问题所涉及的一切。

以下是对这条粗体要求的说明：

1. 只有数学这门科学，才可能构建涵盖整个学科内容的软件模型：数学可以是一种由符号构成的抽象游戏，能够在计算机上得到完整且可靠的实现。请注意，这类模型并非 模拟（物理学科中的模型才会是模拟）。

2. 通过试错学习需要用户指导，能够灵活地限制帮助程度，使学生既不会应接不暇，也不会感到无聊。自动生成此类用户指导是一项概念性挑战。对于“求解阶段”，Lucas 解释 [28] [11] 实现了这一点。对于“规格说明阶段”，下一节 §4 将介绍此类用户指导。这回应了问题求解“**交互式**模型”这一方面。

3. 这一理念还涵盖了“问题求解过程中涉及的一切”；这里的“一切”包括一系列任务，旨在实现数学问题求解中“**完整的**模型”这一方面：
   (a) 将物理现实中的情境（在教科书中以图示和文字描述）转化为数学公式；下文将这一过程称为“建模阶段”；(b) 确定以数学方式表述问题所需的知识：定义、公理和推导出的定理——这些都可在“理论”中找到；(c) 如果学生希望获得用户指导，则从预先准备好的集合中确定当前问题的类型（下文称为“问题模式”）；(d) 从预先准备好的集合中选择一种能够求解该问题的方法，其中包含 Lucas 解释所需的程序；(e) 在 Lucas 解释的指导下，像纸笔工作那样逐步求解问题；下文将其称为“求解阶段”；(f) 在这些任务之间不断切换，例如，在第 3(a) 点期间依照第 3(b) 点进行查找，或从第 3(e) 点返回第 3(a) 点处理子问题等。

4. 第 3 部分中处理的所有知识都以人类可读的格式呈现，且接近常用的数学符号——这就是“**透明**模型”这一方面。

“透明模型”这一方面也回应了循序渐进地引入证明的诉求：学生在解决某个工程学问题时，只要想了解细节，系统就会揭示其背后的知识。例如，在“求解阶段”Pt.3e 中进行方程求解的某一步时，学生可以询问系统这一步应用了哪些代数定律。或者，系统根据 Pt.3d 知道下一步该怎么做，便可以建议学生应用某条定律，并让学生动手操作（自动给出建议）——这正是*ISAC* 原型中用于自适应用户指导的对话模块所承担的任务。

---

[10]https://isac.miraheze.org/wiki/History[11]Peter Lucas 是编译器构造领域的先驱之一， [22, 23] 而 Lucas 解释（LI）则是他晚年为教育领域做出的贡献。简而言之，LI 会对程序进行解释，从而提出计算步骤并将用户输入与程序中的计算关联起来。https://de.wikipedia.org/wiki/Peter_Lucas_(信息学家)

这种透明性也提供了证明的预备阶段（通过让学生循序渐进地接触机械式匹配，见 §3.2），因此标题使用了“论证”而不是“证明”。这些预备阶段也可能为将证明引入工程学学习铺平道路。

4 案例研究：求解复杂问题

该案例研究展示了由*ISAC*原型 [21] 实现的软件支持在数学学习中的覆盖范围这一新颖之处（I）。此外，文中还阐述了支持无障碍性的 Isabelle/VSCode 的第二项创新，即其技术特性（II）。（I）并非显而易见：对于数学家而言，它不像对于了解形式化规格说明 [10] 是软件自动化前提的计算机科学家那样显而易见。

通过支持具体的问题求解，学习（而非教学）数学期间的活动得以覆盖得更广。*ISAC*原型已在多次实地测试中展示了更广的覆盖范围 [29, 31, 30]。一个简单的原因阻碍了*ISAC*的广泛应用：缺乏能够支持访问语义信息的公式编辑器。如今，Isabelle/VSCode 对公式的呈现方式使公式成为通往全部数学知识的大门，也是通往形式符号语义的大门 [42]；*ISAC*将采用这一公式编辑器。需要指出的是，Isabelle 的公式包含指数、下标以及几乎所有数学字符（$\wedge$，$\Rightarrow$，$\sum$，$\int$ 等），但它们在线上呈现为一串字符。然而，这恰好就是盲人在盲文显示器上“看到”的内容；因此，这款设想中的软件将服务于一个独特的目标群体：盲人学生及其在全纳学习环境中的同学。

关于（I），案例研究将聚焦问题求解的初始部分，而数学教师通常会以不太正式的方式处理这一部分。在上文提及的实地研究中，教师跳过了这部分，因为对他们而言这部分太新了，他们也不想让学生接触它。然而，在工程师教育中，一个重要目标是首先明确问题“是什么”（这通常无法通过形式化规格说明完整表达），其次再考虑要解决的问题“如何解决”。我们的案例研究将聚焦所谓“规格说明阶段”中的“是什么”；一般认为，与所谓“求解阶段”中的“如何解决”相比，软件更难通过自动化来应对前者。我们对后一个阶段的预期见于 [28]，更广泛的讨论则见于 [27]。

该案例研究旨在展示，即使在这个至关重要的“规格说明阶段”，软件支持学习在多大程度上是可行的，以及软件在多大程度上能够支持相关活动——这些活动过去只能依靠“纸笔”完成，因此盲人学生无法参与其中。例如，上一节§3.3中关于“建模”的Pt.3a，将在下文§4.2中作为规格说明的一部分加以说明。如此广泛的覆盖范围让我们有理由期待，借助无障碍软件，可以克服由众多彼此孤立的解决方案造成的割裂局面；正如§2中所指出的，这些方案在实践中并不能帮助学生。

以下演示使用 *ISAC* 原型的当前实现。演示中明确说明了实现程度，同时也介绍了超出现有实现、留待未来开发的构想[12]。

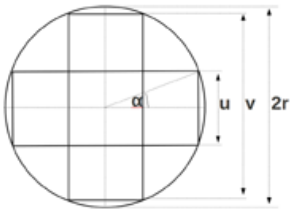
4.1 电气工程中的一个示例

以下文字与图示结合，可见于电气工程教科书中：

[12]因此，本案例研究关注的是技术可实现性，而非对可用性的现场测试。

电线圈的效率取决于铁芯的质量。已知一个铁芯，其横截面积由两个形状相同的矩形构成，如图所示。

给定半径 $r = 7$，确定矩形的长 u 和宽 v，使其横截面积 A（也就是铁芯的质量）最大。

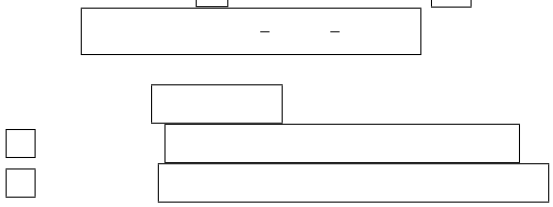


那么这是哪类问题？“最大值”一词表明这是一个优化问题。线性优化？近似又如何？让我们深入了解细节。

4.2 从文本和图形到公式

文本要求求出“最大值”。为了“求出”最大值，我们已经知道什么？哪些事实是“已知”的？以下模板包含用于填写相应内容的字段，分别位于第 05 行和第 07 行（此处的行号仅供纸面参考）：

01 示例 <编号 123a>02 问题“单变量_微积分/优化” 03 Specification： 04 模型： 05 已知：“常数” $r = 706$ Where： $0 < r$07 求：“最大值” A “附加值” uv08 关联： $A = 2 \cdot u \cdot v - u^2 (\frac{u}{2})^2 + (\frac{v}{2})^2 = r^2$09 参考文献： 10 R理论：“Diff_App” 11 x RProblem：“单变量_微积分/优化” 12 o RMethod：“通过单变量_微积分进行优化” 13 Solution：



为了让有经验的读者更快理解，上述模板已经全部填写完毕（方框表示输入项）。在 *ISAC* 原型中，学生选定问题后，系统会立即向其提供该模板，例如 §4.1 中的问题。*“Specification”* 包含一个“模型”（第 04 行）和“参考文献”（第 09 行）：前者用于输入从问题陈述中直接获取的内容，后者用于引用系统中已有的知识，这些知识可能有助于解决问题。“模型”和“参考文献”的内容可以并行输入。

知识分为三类（出于技术原因，名称均以字母“R”开头；复选框“x”和“o”稍后解释）：“R 理论”汇集了系统接受“模型”中的公式所需的所有类型和定义。“RProblem”是生成当前具体问题的问题模式的标识符。“RMethod”能够通过 Lucas 解释自动生成“Solution”（第 13 行），也可以与学生交互生成——如上所述，这部分已折叠且不在此处讨论。

上述 Specification 模板中的输入彼此依赖：例如，如果学生选择了一个尚未定义分数概念的“R理论”，第 08 行中的某些公式就会报语法错误。

后置条件需要特别加以考虑，尤其是对于熟悉形式化方法的读者而言：最准确地说，问题是由其后置条件来表征的。对于优化

问题，后置条件如下：

$$A = 2\cdot u\cdot v - u^2 \quad \wedge\ (\tfrac{u}{2})^2 + (\tfrac{v}{2})^2 = r^2 \quad \wedge$$
$$\forall A'\ u'\ v'.\ (A' = 2\cdot u'\cdot v' - (u')^2\ \wedge\ (\tfrac{u'}{2})^2 + (\tfrac{v'}{2})^2 = r^2) \Longrightarrow A' \leq A$$

一位有工程学院学生教学经验的讲师知道，尽管这些形式化表述最精确地记录了从图形中获得的洞见，学生通常还是会被它们难倒：十字形铁芯的面积 A 为 $A = 2\cdot u\cdot v - u^2$，，也就是矩形 $u\cdot v$ 的面积乘以二，再减去第二个矩形的重叠部分。第二部分（$\frac{u}{2}$）$^2 + (\frac{v}{2})^2 = r^2$ 已经包含了学生所作的一项选择，后文将对此进行讨论。

由于许多后置条件十分复杂，*ISAC* 设计决定只让学生接触后置条件的最基本操作部分，如第 08 行的“Relate”所示。

原型中后置条件的**实现程度与无障碍性**都很有限。后置条件的证明必须由自动证明器完成；Isabelle 中已有这些证明器 [34]，但 *ISAC* 尚未启用。一个特殊的挑战是模式语言：它能将针对整个问题类、以通用模式表述的后置条件实例化为形式化表达。

无障碍设计将着眼于提供便捷跳转至 Specification 各个字段的功能；不过，此阶段的公式仍然很简单。

4.3 通过隐藏的形式化表示实现“下一步指导”

如上所述，关于直角的一般认识可以通过勾股三角形各边的长度形式化表示为 $(\frac{u}{2})^2 + (\frac{v}{2})^2 = r^2$，，但至少还可以用另一个等价公式来表示 $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = r^2$。应当通过“下一步指导” [7, 26]，支持学生尝试所有可能的思路来解决当前问题：系统应始终能够向学生提出下一步建议，而学生可以自由选择采纳或忽略。

对当前问题进行建模时，我们已经至少有两种选择供学生考虑——系统该如何提供支持？为此，*ISAC* 的原型引入了“隐藏的形式化表示”，如下所示（此处省略“参考文献”，两种情况下的参考文献相同）：

$$F_I \equiv [\,[r = 7]\,[A\,[u\ v]]\,[A = 2\cdot u\cdot v - u^2\ (\tfrac{u}{2})^2 + (\tfrac{v}{2})^2 = r^2]\,\{0 < .. < r\}\,]$$
$$F_{II} \equiv [\,[r = 7]\,[A\ \alpha]\,[A = 2\cdot u\cdot v - u^2\ \tfrac{u}{2} = r\sin\alpha\ \tfrac{v}{2} = r\cos\alpha]\,\{0 < .. < \tfrac{\pi}{2}\}\,]$$

这些知识[13] 隐藏在示例背后（第101页第01行），因为每个示例都应支持“下一步指导”——这会增加一些编写工作量；不过，鉴于交互式问题求解中的用户指导之后会自动生成，这部分工作量并不大。

建模是将头脑中构想或问题描述中表达的想法转化为形式化表示的过程。如今有了隐藏的形式化表示，如何引导这一高度创造性且直觉性的过程便显而易见：系统只需将用户输入与形式化表示中的相应条目进行匹配。这样便能提供可靠反馈；输入示例的“模型”中的条目可以获得以下类型的反馈：

- 正确
- 多余，例如 $u^2 + v^2 = (2r)^2$ 除了 $(u\ 2)^2 + (v\ 2)^2 = r^2$
- 缺失，例如“附加值”，因为这些是特定“RMethod: 优化/by_单变量微积分”所必需的

[13] 形式化表示使用括号“[”和“]”，像函数式编程中通常那样表示列表。有些内层列表实际上会被解释为集合。

- 不完整，只要缺少其中一项
- 语法错误
- 假，仅适用于“Where”中的前置条件，前提是$r = 7$未被输入。

匹配用户输入还允许重命名标识符（如果学生有此需求）。

方法的守卫条件与问题的“模型”具有相同的结构。这些形式化表示也可能包含额外项；例如，请注意$r\}$和$\{0 < .. < \frac{\pi}{2}\}$这两个不同的项，分别位于$F_I$和$F_{II}$中：这些开区间确定了方程求解结果在物理条件下有意义的范围；下方第105页的计算展示了该区间的用法。

此处我们还可以解释“RProblem”和“RMethod”前面的复选框“x”和“o”：第101页第11行中，前者被勾选为“x”，而后者未被勾选；这意味着“模型”显示的是“RProblem”的项。否则，勾选“RMethod”将显示额外的“Given”区间，$\{0 < .. < r\}$或$\{0 < .. < \frac{\pi}{2}\}$，具体取决于学生输入实际偏好哪种“模型”。

因此，设想中的系统必须能够处理一个正在构建的示例所对应的一系列形式化表示，并从中选出合适的一个，也就是学生实际上似乎心中所想的那个（具体的新输入可能会使之改变）。

4.4 将问题与已有知识联系起来

前面已经提到过 *ISAC* 原型中形式化的三类知识；现在将对它们作正式介绍，并将其与无障碍性联系起来——无障碍性在本案例研究中首次变得重要。

1. 理论 沿袭自 Isabelle，未作任何改动。这里包含了机械读取公式所需的全部定义，以及在“Where”中评估前置条件、并在“Specification”阶段完成后为“Solution”中的步骤提供依据所需的全部定理。理论被组织成有向无环图（DAGs）——已有用于显示和操作有向无环图的通用工具，而这里出现了实现无障碍性的第一个具体挑战：据我们所知，目前没有可用的无障碍工具。缺乏合适的工具，将大大增加用户需求获取、设计和实现方面的工作量。

2. 问题是带有形式化描述的问题模式的实例。其表示方式已在第101页介绍。只要理论包含所需知识，就会在其中给出问题的定义。问题集合的结构是一棵树——而且各种操作系统都提供许多功能完善的工具，这些工具通过文件浏览器的实现触发，具有很高的无障碍性。
3. 方法包含守卫条件（如§4.3末尾所述）和程序，后者支持为指定问题 [28] 交互式构造解。虽然方法集合的最佳结构尚不明确，*ISAC* 原型仍像组织问题那样，以树形结构收集方法。因此，关于无障碍性的说明在这里同样适用。

在问题求解过程中搜索适当的知识，可能是最能从软件支持中受益的任务。正如上文所述，用于此类搜索的大多数工具都具有很高的无障碍性。理论的有向无环图是个例外；不过，任何能让有向无环图的显示和操作更加无障碍的改进，都会使整个 Isabelle 社区受益。

第104页的图1展示了在使用旧界面的*ISAC*原型中，搜索问题树如何帮助进行方程求解；该界面将由Isabelle/VSCode [40]取代。这个方程预览了第105页的内容，所指的是从第06行到第07行的步骤。此快照拍摄于学生

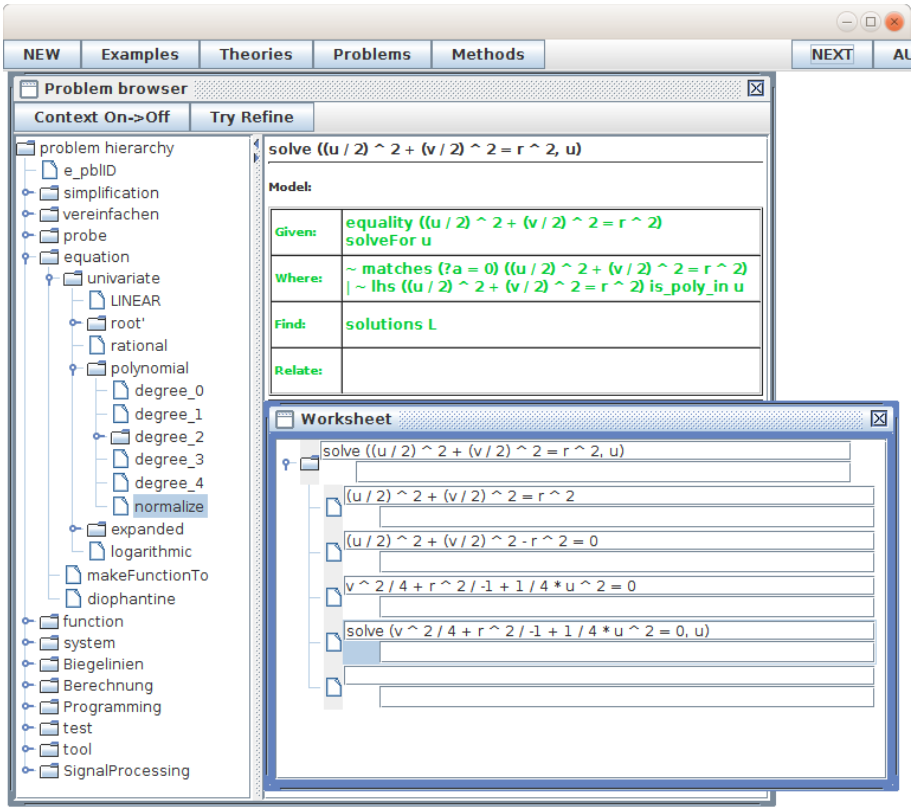


图 1：方程求解过程中有帮助的问题树。

已成功完成方程的规范化（变换为 $lhs\ =0$）；现在的问题是选择哪种类型的方程（以及相应的求解方法）——点击树中的某个项目，会触发对“Where”中相应前置条件的检查，并将判定为 false 的前置条件标红以提供反馈。

实现程度与无障碍性：原型中提供的第 1 至第 3 部分知识足以支持实地测试 [31], [29]and [30]；目前，知识内容涵盖有理式化简、初等微分、积分，以及分数和平方根相关的方程求解。要在教育实践中使用 MAWEN，知识内容必须涵盖其应用于相应年级时课程的主要部分。虽然本案例研究表明该系统对工程学学习有所帮助，但知识内容将按照课程从高中七年级开始逐步实现；此时正是数学教育中引入变量的阶段。

原型中的创作工具仍然薄弱；MAWEN 项目将高度重视相关开发，因为特定知识是下一步指导的前提。无障碍性在此似乎并非难题，因为知识将通过 VSCode 的标准工具呈现，而这些工具完全无障碍。

4.5 遍历各项任务

问题求解是一个迭代过程：在“Specification”阶段，知识的搜索与应用之间不断试错；在随后的“Solution”阶段，实验与成功之间也不断试错。软件支持的过程同样体现了这种迭代特性——请看下文“Solution”的一部分，它是在“Specification”完成后呈现的，而“Specification”已经是 <折叠>:

01 Example <No.123 a>
02 Problem “univariate_calculus/Optimisation”
03 Specification: <*collapsed*>
04 Solution:
05 Problem “make/function”
06 solve_univariate $\left(\left(\frac{u}{2}\right)^2+\left(\frac{v}{2}\right)^2=r^2\ v\right)$ <*collapsed*>
07 $L=\left[v=2\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\ v=-2\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\right]$
08 $v\in\{0<..<r\}$
09 $A=2\cdot u\cdot v-u^2$
10 代入 v
11 $A\ u=2\cdot u\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}-u^2$
12 differentiate $\left(A\ u=2\cdot u\cdot\sqrt{r^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}-u^2\ u\right)$
13 $A'\ u=\frac{d}{du}\left(2\cdot u\ \sqrt{r^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}-u^2\right)$
14 — $\frac{d}{du}(u_1-u_2)=\frac{d}{du}u_1-\frac{d}{du}u_2$
15 $A'\ u=\frac{d}{du}\left(2\cdot u\ \sqrt{r^2-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\right)-\frac{d}{du}u^2$
⋮
29 $[u=6.75 v=12.25]$

“Solution”会遍历以下过程：(a) 交互式地逐步构造问题的解（“Solution”阶段）；以及 (b) 指定子“问题”（“Specification”阶段），可能会指定多个子问题。首先遇到的是第 05 行中的问题“构造/函数”，紧接着第 06 行又出现了另一个问题“solve_univariate”，其格式类似于代数系统中的格式（此时，对话模块可能允许跳过冗长的“Specification”）。

在右侧边缘，除 <折叠>之外，还列出了构造解各步骤的论证；第 09 行中，负元素从解集 L 中删除，因为它不属于形式化 F_I 中已知的区间 $\{0<..<r\}$；第 10 行中的论证是基本运算“代入v”，该运算在第 11 行为问题“构造/函数”构造出解。

第 12 行中的“求导”又是一个来自计算机代数的函数（因此相应的“Specification”被跳过）。该函数会在一个中间数字中创建一系列步骤；此处的依据是著名的定理 $\frac{d}{du}(u_1-u_2)=\frac{d}{du}u_1-\frac{d}{du}u_2$。最后，在某个阶段，工程师会想要得到 u 和 v 的具体数值，并决定在某个交互式“Specification”中改用浮点数。

实现程度与无障碍性：目前，对话模块只是一个用于开展实地研究的必要框架。对话将由用户模型引导，这需要学习理论方面的专业知识；迭代开发也需要扩大用户群体，并依靠用户提供的系统化反馈来推进。无障碍设计将关注在细节与概览之间切换的工具，尤其是处理包含多个子问题的复杂问题解决方案时所需的工具。

5 面向未来开发的软件组件

VSCode 具有无障碍性，并不意味着无障碍的 Isabelle/VSCode 已经完成。此外，现有前端 jEdit 花了十多年时间才发展成为如今这样一款实用的 Isabelle/jEdit 工具。

5.1 交互式证明器技术的现状

我们打算延续交互式证明助手的悠久传统。这一传统始于 1970 年代，当时 LCF证明检查器的读取-求值-打印循环（REPL）还相当简朴 [35], ；如今，它体现在少数几个规模庞大且成功的系统及其相关社群中：HOL4、Coq、Isabelle、Lean证明器等。我们选择的平台是 Isabelle——与其他证明助手相比，它有两个显著特点：

1. **Isabelle/AFP** ——形式化证明档案库。这是一个 Isabelle 形式化理论开发成果集，以在线期刊（https://isa-afp.org）的形式呈现。所有条目均经过最新版本的 Isabelle证明助手形式化检查。用户可以通过常规网页浏览器技术浏览数学内容，也可以下载条目，在 Isabelle开发环境中编辑。

2. **Isabelle/PIDE** ——Isabelle 证明器 IDE 框架，基于 Isabelle/Scala（运行于 Java 平台）。从概念上说，它是一个语义增强型源文本编辑器，配有纯函数式后端（Isabelle/ML）和多种文本编辑器前端。Isabelle/jEdit 是最知名、开发最完善的前端。Isabelle/VSCode 是另一种选择，但目前仍远远落后于 Isabelle/jEdit。

Isabelle生态系统提供了更多支持数学证明的技术，包括自动证明器（自动定理证明器和可满足性模理论求解器）。所有这些技术都与常见的操作系统（Linux、Windows、macOS）良好集成：应用程序可以利用 Isabelle系统发行版，也可以轻松地将自身作为附加组件纳入其中。

此外，Isabelle 工具开发者可以使用现有的集成开发环境技术，例如 Isabelle/jEdit 来进行 Isabelle/ML 数学编程，以及 IntelliJ IDEA 来进行 Isabelle/Scala 系统编程 [41,p. 60]。

5.2 面向无障碍数学的前瞻性技术

对于终端用户，我们需要重点关注能够妥善支持无障碍性的各类软件组件；§2.1 已讨论了各种技术问题。接下来，我们将概述专为 Isabelle 框架及其 *ISAC* 应用设计的架构，并提出有待研究和开发的开放问题。

核心思路是重新利用 HTML/CSS/JavaScript 网页技术，具体采用 Google 将其捆绑在 Microsoft 的 VSCode 编辑器中的 Chrome 浏览器引擎。由此得到的是传统的桌面应用程序（而非 网页应用程序），从而避免了通常所说的“浏览器兼容性噩梦”——HTML 不兼容问题。

具体而言，我们将扩展并改进两个基于 Isabelle 平台的软件项目：Isabelle/VSCode 和*ISAC*。

• Isabelle/VSCode 是 VSCode 文本编辑器的扩展。它将微软语言服务器协议（LSP）[14] 与 Isabelle 证明器 IDE 框架（PIDE） [40]结合起来。由于 VSCode 允许集成自由格式的 HTML 视图，我们对 Isabelle/VSCode 的附加功能将分为两部分：

1. 编辑器支持，使用特定的 VSCode 扩展接口。

[14] https://microsoft.github.io/language-server-protocol/

2. 浏览器支持，采用通用的 HTML/CSS/JavaScript 技术。

- *ISAC* 项目[15] 实现了一种基于 Isabelle 理论内容 [21]的数学推理“下一步指导” [28] 概念。该项目最初基于 Isabelle 命令行构建，并配有 Java 图形用户界面（现已停止维护）。计划是将*ISAC* 改造并整合到 Isabelle/PIDE/VSCode 的交互式文档模型中，从而使其能够利用该环境提供的无障碍支持。

5.3 尚待探讨的问题

其中一些问题将在硕士论文期间得到解答，以积累经验并制定详细的项目计划；另一些将在撰写项目提案期间解答；最后一些则将在项目实施过程中解答。

1. **工作流程**：如何在 Isabelle/VSCode（使用 TypeScript 进行生产 + 开发）、IntelliJ IDEA（使用 Scala 进行开发）和 Isabelle/jEdit（使用 Isabelle/ML 进行生产 +开发）之间开展调查、编码和测试工作，并使此类工作流程更加高效？2. **在 Isabelle/VSCode 中添加“大纲视图”**以满足 UR.3 的要求——这是否涉及扩展 TypeScript 插件、LSP 和 JSON、Isabelle/Scala 以及 Isabelle/ML？3. **将盲文标准**映射为符合 UR.1 要求的、对适当（子）项进行 ASCII 字符串表示的形式——这需要对 TypeScript 插件、LSP 和 JSON、Isabelle/Scala 以及 Isabelle/ML 作出哪些更改？4. **改进 Isabelle/VSCode**——哪些改进能够以最少的工作量，为明眼人和盲人用户带来最大的帮助？5. **Isabelle 的数据库**，包括理论、定理、常数、PIDE 标记等数据库——能否根据 UR.2 的要求利用这些数据库进行调查？能否将解释等特定静态条目添加到这些数据库中？

这些问题表明，开发无障碍性所需的专业知识、JSON 和 LSP 等技术方面的专业知识，以及某些 Isabelle 技术方面的专业知识都有需求。根据上述尚待解决的问题，开发工作将由相应领域的专家承担。

6 教育数学软件的愿景

鉴于 §2 提出了对无障碍性的宏大用户需求，§3 指出了某些软件支持的缺失；另一方面，§4 详细说明了如何弥补这些不足，§5 则介绍了很少用于开发此类软件的软件组件，因此本节将阐述推动 MAWEN 项目的愿景。

使用纸笔记录数学内容，更不用说进行数学计算，仍然是教育领域所有从事数学相关工作的人所采用的主流方法。若考虑到现代信息技术在过去几十年间给社会带来的巨大变化，这一点尤其引人注目。尽管 Mathematica 等计算机代数系统已在数学家中广泛使用，但这些系统无法帮助人们学习如何手工计算，因为计算是由系统替人完成的。我们仍然缺少这样一种系统：利用计算机日益增强的能力来支持人脑，帮助人们亲自完成计算。正如本文所述，这不仅是盲人或视障人士所需要的，视力正常的大众也同样需要。人们会以数字格式发布或传播数学内容，但一旦要亲自计算，通常还是会使用纸笔。

[15] https://hg.risc.uni-linz.ac.at/wneuper/isa

当然，随着触控笔系统不断增多，情况正逐步发生变化，而且变化速度也在加快。这类系统包括数学光学字符识别和数字数学墨迹技术，它们将推动一种新的数字文化的发展，让人们能够以交互方式进行数学活动，并将与计算机代数、定理证明器和辅导系统等工具的交互纳入其中。这些新颖且创新的系统鼓励人们从纸笔转向数字化数学活动，为支持盲人和低视力人士进行导航，尤其是进行数学活动，提供了更好、更丰富的资源：过去用纸笔做数学时，视觉操作流程中那些隐含的内容，如今必须以机器可读、可处理的方式进行形式化和明确描述。由此形成了丰富的数字基础，人们有望在其上高效地加入无障碍性，并据此实现更符合盲人和低视力人士需求的辅助与支持功能。

尽管传统纸笔方法具有无可争议的优势，我们仍坚信，计算机在辅助计算方面潜力巨大，无论使用者是视力正常、视力受损还是盲人。因此，我们设想，原本显然是为相对少数盲人所需的技术支持，也可能对所有从事数学工作的人大有裨益。我们认为，对数据和数学操作过程进行这种形式化标记，是迈向更加个性化数学问题求解方式的第一步；这种方式能够更充分地顾及用户在身体、感官、心理认知和社会因素方面的广泛差异。

7 总结与结论

本文介绍了一个具体项目（名为 MAWEN）的筹备工作，并将无障碍性的范围限定为服务于没有其他障碍的盲人和视力受损学生。

该项目的优势体现在两项创新上：（I）由 *ISAC* 原型实现的、覆盖范围更广的数学学习软件支持；（II）Isabelle/VSCode 在支持无障碍性方面的技术特性。为了阐明这些创新的优势，§2 综述了 MAWEN 的筹备工作，并调查了教育实践中的需求。§3 则综述了数学教育总体需求，指出在数学教育的核心环节——循序渐进地求解数学问题（包括高中阶段的“现实世界”问题以及学术课程中的实际工程问题）——缺乏连贯的软件支持。§3.2 指出，随着形式化方法在工业界不断发展，机械化证明方面的需求也在增加；这再次凸显了软件支持的缺失，尤其是在早期学习数学证明的先决知识（例如匹配）时。

由于软件支持的成效取决于计算机使用机会的多少，因此扩大计算机支持的覆盖范围至关重要——*MAWEN* 计划广泛弥补盲人学生在融合式学习场景中的数学教育所面临的一些缺口，并减少缺乏适用软件的问题。

开发此类广泛适用的软件所需的投入是合理的，因为它可以借鉴 *ISAC* 项目中大量原型开发的成果，而且布莱叶盲文显示器与 *Isabelle* 的公式表示在结构上具有相似性——两者均为线性结构（例如 $(x+1)/\underline{(y\ -2)}$ 而非 $x_{+1}y_{-2}$），并且还具备 *VSCode* 所继承的无障碍性。

第 5 节将讨论 Isabelle/VSCode 中的前端技术如何满足第 2.3 节所述的相应用户需求 UR.1，以及 Isabelle 的其他技术特性如何有助于实现广泛适用、支持包容性数学教育的软件。第 4.1 至 4.5 节中的详尽案例研究进一步证明了这一方案的可行性，第 6 节则总结了 MAWEN 项目所秉持的愿景。

作者希望，对这些准备工作的介绍能够使亲爱的读者相信我们的宏大期望切实可行，能够促使欧洲合作伙伴参与联合项目；最后但同样重要的是，希望能让资助机构相信，扩大面向盲人和视障人士的软件支持范围值得投入资源。

参考文献

[1] Mauricio Ayala-Rincón & Thaynara Arielly de Lima（2020）：向数学家教授交互式证明。载于 Pedro Quaresma、Walther Neuper & João Marcos 编：《第九届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，法国巴黎，2020年6月29日，教育软件的定理证明组件，理论计算机科学电子论文集328，开放出版协会，第1–17页，doi:10.4204/EPTCS.328.1。[2] Ralph-Johan Back & Joakim von Wright（2006）：带有少量逻辑的数学：高中数学中的结构化推导。手稿。[3] Sidney Bender、Monica Haurilet、Alina Roitberg & Rainer Stiefelhagen（2019）：用于数学表达式识别的细粒度图像表征学习。载于：*2019*年国际文档分析与识别会议研讨会（*ICDARW*），第1卷，第56–61页，doi:10.1109/ICDARW.2019.00015。[4] Dines Bjørner & Klaus Havelund（2014）：形式化方法四十年——一些障碍与一些可能性？载于：*FM 2014*：形式化方法——第*19*届国际研讨会，新加坡，*2014*年*5*月*12*日至*16*日。论文集，第42–61页，doi:10.1007/978-3-319-06410-9_4。[5] Merlin Carl（2020）：*Diproche*系统中的数论与公理几何。载于 Pedro Quaresma、Walther Neuper & João Marcos 编：《第九届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，法国巴黎，2020年6月29日，教育软件的定理证明组件，理论计算机科学电子论文集328，开放出版协会，第56–78页，doi:10.4204/EPTCS.328.4。[6] David M. Cerna、Rafael P.D. Kiesel & Alexandra Dzhiganskaya（2020）：用于自主指导式形式推理学习的移动应用程序。载于 Pedro Quaresma、Walther Neuper & João Marcos 编：《第八届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，巴西纳塔尔，2019年8月25日，教育软件的定理证明组件，理论计算机科学电子论文集313，开放出版协会，第35–53页，doi:10.4204/EPTCS.313.3。[7] Gabriella Daróczy & Walther Neuper（2013）：基于定理证明的教育系统中“下一步指导”的错误模式。载于：*eJMT*，《数学与技术电子期刊》，第7卷，第175–194页。参见 https://php.radford.edu/~ejmt/ContentIndex.php#v7n2。专刊“基于定理证明的系统与教育”。[8] William M. Farmer（2000）：关于开发用于数学教育的交互式数学实验室的提议。载于：*CADE-17*数学教育演绎系统研讨会，第20–25页。[9] Asta Halkjær From、Jørgen Villadsen & Patrick Blackburn（2020）：作为逻辑教学元语言的*Isabelle/HOL*。载于 Pedro Quaresma、Walther Neuper & João Marcos 编：《第九届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，法国巴黎，2020年6月29日，教育软件的定理证明组件，理论计算机科学电子论文集328，开放出版协会，第18–34页，doi:10.4204/EPTCS.328.2。[10] David Gries（1981）：程序设计科学。《计算机科学文本与专著》，施普林格出版社，doi:10.1007/978-1-4612-5983-1。[11] Gila Hanna & Michael de Villiers 编（2012）：数学教育中的证明与证明过程：第十九届国际数学教育委员会研究。国际数学教育委员会新研究丛书第15卷，施普林格。[12] Antonia Huertas（2011）：*2000—2010*年用于逻辑教学的计算机辅导系统：经验教训。载于：第三届逻辑教学工具国际大会（*TICTTL’11*）论文集，施普林格出版社，柏林、海德堡，第131–140页，doi:10.1093/jigpal/jzm019。

[13] P. Jitngernmadan & K. Miesenberger（2015）：无障碍动态交互中焦点与光标处理的Java技术比较研究。载于 C. Sikne Lanyi 编：《AAATE会议论文集》，IOS出版社，阿姆斯特丹，布达佩斯。[14] P. Jitngernmadan & K. Miesenberger（2017）：盲人数学教科书中隐性教学法的提取方法。载于 P. Cudd & L. De Witte 编：《2017 年 AAATE 会议论文集：利用技术力量改善生活》，IOS 出版社，阿姆斯特丹。[15] P. Jitngernmadan、A. Petz、B. Stöger & K. Miesenberger（2016）：交互式非视觉用户界面开发中的数学教科书隐性教学法分析。载于 K. Miesenberger、C. Bühler & P. Pe-naz 编：《计算机帮助有特殊需求的人：第15届国际会议，ICCHP 2016》，施普林格，海德堡，奥地利林茨，doi:10.1007/978-3-319-41264-1_3。[16]P. Jitngernmadan、B. Stöger、A Petz & K. Miesenberger（2017）：IDMILE：面向盲人学生的交互式教学数学融合学习环境。《技术与残障》29(1-2)，第47–61页，doi:10.3233/TAD-170173。[17] Prajaks Jitngernmadan（2017）：数学工作环境多模态界面设计的支持功能框架。博士论文，奥地利林茨约翰·开普勒大学。[18] Natalie Karl（2016）：数学公式表示的包容性方法。硕士论文，奥地利林茨哈根贝格应用科学大学。https://static.miraheze.org/isacwiki/0/02/Masterthesis_NatalieKarl.pdf。[19] Boris Koichu & Alon Pinto（2019）：数学中学至高等教育过渡。我们当前面临哪些挑战，又能为此做些什么？《EMS通讯》，第34–35页，doi:10.4171/NEWS。[20] W. Kopef、M Röckner、A. Eichler & G. Heckmann（2017）：关于当前数学教学质量的讨论。《德国数学家协会通报》25(1)，第6–7页，doi:10.1515/dmvm-2017-0005。[21] Alan Krempler & Walther Neuper（2018）：面向教育的“自解释系统”原型设计。载于 Pedro Quaresma & Walther Neuper 编：《第六届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，瑞典哥德堡，2017年8月6日，《理论计算机科学电子论文集》267，开放出版协会，第89–107页，doi:10.4204/EPTCS.267.6。[22] Peter Lucas（1978）：程序设计语言形式化：早期历史与主要方法。载于 D. Bjørner & C. B. Jones 编：《维也纳开发方法：元语言》，《计算机科学讲义》16，施普林格，doi:10.1007/3-540-08766-4_8。[23] Peter Lucas & Kurt Walk（1970）：关于PL/I的形式描述。《自动程序设计年度评论》6，培格曼出版社，牛津。[24] Marco Mahringer（2018）：基于定理证明的系统的公式编辑器：研究现状与ISAC中的原型实现。硕士论文，奥地利哈根贝格应用科学大学。https://static.miraheze.org/isacwiki/d/d7/Mmahringer-master.pdf。[25] Erica Melis & Jörg Siekmann（2004）：用于数学的智能辅导系统。载于 L. Rutkowski、J. Siekmann、R. Tadeusiewicz & L.A. Zadeh 编：《第七届“人工智能与软计算”国际会议（ICAISC）》，《人工智能讲义》3070，施普林格出版社，第91–101页，doi:10.1007/978-3-540-24844-6 12。_[26] Walther Neuper（2012）：结合计算与演绎自动生成用户指导。载于 Pedro Quaresma & Ralph-Johan Back 编：《理论计算机科学电子论文集》79，开放出版协会，第82–101页，doi:10.4204/EPTCS.79.5。[27] Walther Neuper（2019）：教育中“完整、透明且交互式的数学模型”的相关技术。载于 Pedro Quaresma & Walther Neuper 编：《第七届教育软件定理证明组件国际研讨会论文集》，英国牛津，2018年7月18日，《理论计算机科学电子论文集》290，开放出版协会，第76–95页，doi:10.4204/EPTCS.290.6。

[28] Walther Neuper（2020）：Isabelle 函数上的 Lucas 解释。载于 Pedro Quaresma、Walther Neuper 与 João Marcos（编）：第九届定理证明组件教育软件国际研讨会论文集，法国巴黎，2020年6月29日，理论计算机科学电子论文集 328，开放出版协会，第 79–95 页，doi:10.4204/EPTCS.328.5。[29] Walther Neuper 与 Christian Dürnsteiner（2007）：借助适配的基础软件实现应用数学与专业理论。技术报告 683，IMST – 创新让学校卓越！，克拉根福大学教学与学校发展研究所（IUS），9010 克拉根福，Sterneckstrasse 15。[30] Walther Neuper、Johannes Reitinger 与 Angelika Gründlinger（2008）：理解与机械化：代数入门。技术报告 1063，IMST – 创新让学校卓越！，克拉根福大学教学与学校发展研究所（IUS），9010 克拉根福，Sterneckstrasse 15。[31] Walther Neuper 等（2006）：应用数学与专业理论。技术报告 357，IMST – 创新让学校卓越！，克拉根福大学教学与学校发展研究所（IUS），9010 克拉根福，Sterneckstrasse 15。[32] Tobias Nipkow、Lawrence C. Paulson 与 Markus Wenzel（2002）：Isabelle/HOL——高阶逻辑证明助手。《计算机科学讲义》2283，施普林格，doi:10.1007/3-540-45949-9。[33] 经济合作与发展组织（2017）：PISA 2015 数学框架。载于《PISA 2015 评估与分析框架：科学、阅读、数学、金融素养与协作式问题解决》，经合组织出版社，巴黎，doi:10.1787/9789264281820-5-en。[34] Lawrence C. Paulson 与 Jasmin C. Blanchette（2010）：使用 Sledgehammer 三年的经验：自动定理证明器与交互式定理证明器之间的实用桥梁。载于 Schulz S. Sutcliffe G.、Ternovska E.（编）：IWIL 2010，施普林格。http://people.mpi-inf.mpg.de/~jblanche/iwil2010-sledgehammer.pdf。[35] Lawrence C. Paulson、Tobias Nipkow 与 Makarius Wenzel（2019）：从 LCF 到 Isabelle/HOL。《计算的形式方面》31，第 675–698 页，doi:10.1007/s00165-019-00492-1。施普林格，伦敦。[36] Wolfgang Schreiner、Alexander Brunhuemer 与 Christoph Fürst（2018）：通过有限模型自动检查来教授数学理论与算法的形式化。载于 Pedro Quaresma 与 Walther Neuper（编）：ThEdu'17 后续论文集，理论计算机科学电子论文集（EPTCS）267，开放出版协会，第 120–139 页，doi:10.4204/EPTCS.267.8。[37] M. Suzuki、F. Tamari、R. Fukuda、S. Uchida 与 T. Kanahori（2003）：Infty? 一种面向数学文档的集成光学字符识别系统。载于 ACA 文档工程研讨会论文集，第 95–104 页。[38] M. Suzuki 与 K. Yamaguchi（2020）：将 e-Born PDF 自动转换为无障碍 EPUB3 和嵌入音频的 HTML5。载于第十七届计算机帮助有特殊需求人士国际会议（ICCHP 2020）论文集，《计算机科学讲义》12376，施普林格，第 410–416 页，doi:10.1007/978-3-030-58796-3_48。[39] Makarius Wenzel（2007）：Isabelle/Isar——用于人类可读证明文档的通用框架。载于 R. Matuszewski 与 A. Zalewska（编）：《从洞见到证明——纪念 Andrzej Trybulec 论文集》，《逻辑、语法与修辞研究》10(23)，比亚韦斯托克大学。参见 https://www21.in.tum.de/~wenzelm/papers/isar-framework.pdf。[40] Makarius Wenzel（2019）：在 Isabelle/PIDE 中与形式化数学文档交互。载于 Cezary Kaliszyk、Edwin Brady、Andrea Kohlhase 与 Claudio Sacerdoti Coen（编）：智能计算数学（CICM 2019），11617，施普林格，doi:10.48550/arXiv.1905.01735。[41] Makarius Wenzel（2021）：Isabelle 系统手册。参见 https://isabelle.in.tum.de/dist/Isabelle2021/doc/system.pdf。收录于 Isabelle 发行版。[42] W.Neuper、B.Stöger 与 M.Wenzel（2022）：借助 ISAC 与 Isabelle/VSCode 实现无障碍形式化数学。Isabelle 2022 年研讨会 https://sketis.net/isabelle/isabelle-workshop-2022。访问日期：202-10-13。[43] K. Yamaguchi 与 M. Suzuki（2019）：一种可针对多种本地语言进行定制的无障碍 STEM 编辑器。《赋能技术期刊》13(4)，第 240–250 页，doi:10.1108/JET-12-2018-0064。