arXiv:2303.05876v1 [math.CO] 10 Mar 2023

宇宙多胞体的三角剖分

MARTINA JUHNKE-KUBITZKE、LIAM SOLUS 和 LORENZO VENTURELLO

Abstract. 给定一个费曼图，即可定义一个宇宙学多胞体；其典范形式可用于计算该费曼图对某些宇宙学模型波函数的贡献。给定一个多胞体的细分，其典范形式可表示为该细分各个面的典范形式之和。本文通过代数技术，确定了此类典范形式公式。我们证明，每个宇宙学多胞体的环面理想都存在一个具有平方自由初始理想的 Gr¨obner 基，从而得到该多胞体的正则幺模三角剖分。在包括树和圈在内的一些具体情形中，我们恢复了此类三角剖分各个面的图论刻画，可据此计算所需的典范形式。对于路径和圈，这些刻画还可以简便地进行枚举。因此，我们得到了这些多胞体的归一化体积公式，并推广了 K¨uhne 和 Monin 先前的观察。

1. Introduction

Arkani-Hamed、Benincasa 和 Postnikov [2]引入了无向连通图 $G = (V, E)$ 的宇宙学多胞体 C_G，其中 V 是 G 的有限顶点集（或节点集），E 是其有限边集；也就是说，边是形如 ij 的点对，其中 i、$j \in V$。若要强调 V 和 E 分别是 G 的顶点集和边集，我们可以分别写作 $V(G)$ 和 $E(G)$。我们用 ij 表示连接 i 与 j 的无向边；需要标示边方向时，则用 (i, j) 表示有向边 $i \to j$。

我们在有限维实欧几里得空间 $\mathbb{R}^{|V|+|E|}$ 中进行研究，其标准基向量为 x_i 和 x_e，对所有 $i \in V, e \in E$ 均成立。G 的宇宙学多胞体 C_G 为

$$\mathcal{C}_G = \operatorname{conv}\{x_i + x_j - x_e, x_i - x_j + x_e, -x_i + x_j + x_e \ : \ e = ij \in E\}.$$

只要求图 G 是连通的无向图，且具有有限的顶点集和边集。例如，G 不必是简单图。在 [11]，中，作者采用了 C_G 定义的一种略微推广形式，允许 G 不连通。然而，就本文而言，我们只考虑连通G。

在物理背景下，图 G 可解释为一幅费曼图，此时宇宙学多胞体为计算由 G 表示的费曼图对所谓宇宙波函数 [2]的贡献提供了一个几何模型。近期研究通过一种称为正几何 [1]的凸多胞体推广形式来研究散射振幅的物理。这种联系源于正几何的一种独特微分形式，它沿着其边界仅具有对数奇点。这种形式称为其典范

日期：2023年3月13日。

形式 [1]。对于宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$而言，典范形式给出了一个公式，用于计算费曼图 G 对某些我们感兴趣的波函数的贡献。

计算多胞体 P 的典范形式 Ω_P 的一种方法，是将其细分的面 $S_1, \ldots, S_m$ 的典范形式相加；即，

$$\Omega_P = \Omega_{S_1} + \cdots + \Omega_{S_m}. \tag{1}$$

这一技术已在若干情形中成功应用 [5, 7, 8, 10, 14]。

对于宇宙学多胞体，文献 [2] 针对一些特定的 G 示例指出，宇宙学多胞体的特殊细分对应于经典物理理论，这些理论用于计算费曼图对波函数的贡献。这一观察表明，宇宙学多胞体的细分可能对应于用于计算波函数的物理理论，因此促使人们寻找适用于任意图 G的优良宇宙多胞体细分。这类细分有望为波函数计算提供新的物理理论。文献 [2]将寻找适用于任意图 G 的细分留作未来工作。本文通过代数技术给出了这类细分。

宇宙学多胞体是一个格多胞体；即， $\mathbb{Z}^{|V|+|E|}$中有限个点的凸包。从这一视角来看，研究它细分为幺模单纯形或许是最自然的做法；也就是说，研究将其细分为欧几里得体积最小的格单形。这类细分的优点在于，式（1）中的每一项都具有相对简单的有理函数形式

$$\frac{\omega}{f_1 \cdots f_r},$$

其中 $f_1, \ldots, f_r$是该单纯形的面定义方程，且 ω是相应正几何上的正则形式 [3]。因此，我们不仅希望考察$\mathcal{C}_G$ 的幺模三角剖分是否存在，还希望完整描述其各个面。

本文通过代数技术开启了对这一问题的研究。对于任意连通无向图 G，我们计算了宇宙学多胞体 C_G 的环面理想的一族 Gr¨obner 基，其中每个基都有一个平方自由初始理想。已知，这类 Gr¨obner 基的初始项对应于 C_G [15] 的某个正则幺模三角剖分的极小非面。因此，我们得到以下主要结果：

定理 A.（推论 *2.10*）任意无向连通图 G 的宇宙学多胞体 G都存在正则幺模三角剖分。

对于另一类与图相关的格多胞体，也有类似的结果，即 对称边多胞体 [9, 13]。有趣的是，这些多胞体与宇宙学多胞体有着密切的联系：同一图的对称边多胞体是该图的宇宙学多胞体的一个面的特定投影。

已识别出的格罗布纳基给出了三角剖分的极小非面，而由此获得面描述并非易事。本文的贡献之一，是为若干重要图族的宇宙学多胞体给出这样的刻画。

定理 B. 对于项序的特定选择，我们得到了宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$的一个正则幺模三角剖分的面描述，其中 G为：

- 一条路径（定理 3.2）；- 一个圈（定理 4.1）；- 一棵树（定理 5.11）。

对于路径和圈的情形，这些刻画形式相对简单，因此可以进行枚举。由此，我们得到了这两种情形下 $\mathcal{C}_G$ 的归一化体积公式。对于路径，我们重新得到 [11], 中给出的公式；而对于圈， $\mathcal{C}_G$ 的归一化体积此前尚不为人所知。事实上，我们的方法使我们能够证明以下简洁公式：

定理 C。 （定理 4.2）宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_{C_n}$ 对应于 n-圈 C_n 的归一化体积为

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{C}_{C_n}) = 4^n - 2^n.$$

虽然这些多胞体的归一化体积为我们提供了公式（1）中计算 $\Omega_{\mathcal{C}_G}$ 所用加项数量的信息，但定理 3.2、4.1和5.11给出的树和圈的面之显式描述，使我们能够精确计算这一典范形式。定理A表明，通过进一步分析本文中确定的 Gr¨obner 基，对更一般的图进行此类刻画也应当是可行的。

2. Gröbner Bases for the toric ideal of C_G

本节将介绍一族用于宇宙学多胞体环面理想的 Gr¨obner 基，其对应的初始理想均无平方因子。我们先给出一些定义。对于顶点集为 V、边集为 E 的任意无向图 G，定义一个含有 $|V| + 4|E|$ 个变量的多项式环，每个变量对应于 C_G 的一个格点。更准确地说，我们引入三族变量：

- 对每个 $k \in V \cup E$，取一个变量 z_k。我们称这些变量为 z-变量。- 对每条边 $e = ij \in E$，取变量 y_{ije} 和 y_{jie}。我们称这些变量为y-变量。- 对每条边 $e \in E$，取一个变量 t_e。我们称这些变量为 t-变量。

设 R_G 为由这些 $|V| + 4|E|$ 个变量构成的多项式环，其系数取自域 K，并考虑如下定义的 K-代数满同态

$$\begin{aligned}
\varphi_G : R_G &\to K[\mathbf{w}^p \ : \ p \in \mathcal{C}_G \cap \mathbb{Z}^{V\cup E}] \\
z_k &\mapsto w_k \\
y_{ije} &\mapsto w_i w_j^{-1} x_e \\
y_{jie} &\mapsto w_i^{-1} w_j w_e \\
t_e &\mapsto w_i w_j w_e^{-1}.
\end{aligned}$$

理想 $I_{\mathcal{C}_G} := \ker(\varphi_G)$ 是 C_G 的环面理想。注意， R_G 中的变量对应于 C_G 的格点。当图 G 可由上下文推知时，我们可以简单地用 φ 表示 φ_G。现在我们在 $I_{\mathcal{C}_G}$ 中定义一些特殊的二项式，它们将成为该理想的 Gr¨obner 基的元素。

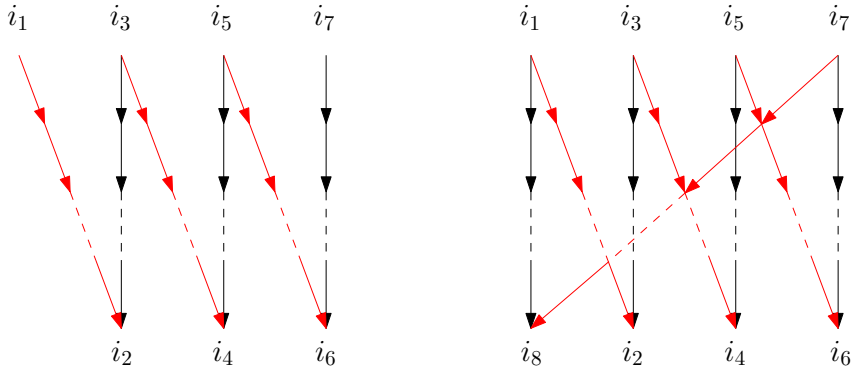


FIGURE 1. 一个之字形对和一个循环对（E_1, E_2）。E_1 中的边以红色绘制。

定义 2.1。我们定义 G 的有向子图对的两种类型。

(i) 设 P 是 G 中的一条路径，其中 $E(P) = \{i_1i_2, i_2i_3, \ldots, i_{k-1}i_k\}$。对于 $E(P)$ 的任意划分 (P_1, P_2)，将其分为两个非空块，我们考虑 $E_1 = \{i_j \to i_{j+1} : i_ji_{j+1} \in E(P_1)\}$ 和 $E_2 = \{i_{j+1} \to i_j : i_ji_{j+1} \in E(P_2)\}$。称这一对 (E_1, E_2) 为 G 的一个之字形对。此外，我们将 (E_1, E_2) 的终端顶点定义为 $v_1 = i_k$ 和 $v_2 = i_1$。(ii) 设 C 是 G 中的一个圈，其中 $E(C) = \{i_1i_2, i_2i_3, \ldots, i_{k-1}i_k, i_ki_1\}$。对于 $E(C)$ 的任意划分 (C_1, C_2)，将其分为两个块（其中一个块可以为空），我们考虑 $E_1 = \{i_j \to i_{j+1} : i_ji_{j+1} \in E(C_1)\}$ 和 $E_2 = \{i_{j+1} \to i_j : i_ji_{j+1} \in E(C_2)\}$。称这一对 (E_1, E_2) 为 G 的一个循环对。

Defi义 2.2. 对于每个之字形对 (E_1, E_2)，我们定义之字形二项式 l

$$b_{E_1,E_2} = z_{v_1} \prod_{e=i\to j\in E_1} y_{ije} \prod_{e=i\to j\in E_2} z_e - z_{v_2} \prod_{e=i\to j\in E_2} y_{ije} \prod_{e=i\to j\in E_1} z_e.$$

对于每个循环对 (E_1, E_2)，我们定义循环二项式

$$b_{E_1,E_2} = \prod_{e=i\to j\in E_1} y_{ije} \prod_{e=i\to j\in E_2} z_e - \prod_{e=i\to j\in E_2} y_{ije} \prod_{e=i\to j\in E_1} z_e.$$

在 $E_1 = \varnothing$ 或 $E_2 = \varnothing$的情况下，我们将所得的循环二项式称为圈二项式。特别地，圈二项式由一个仅含 y-变量的单项式和一个仅含 z-变量的单项式组成。

定义 2.3. 我们定义以下由 R_G中的二项式构成的集合。

$$\begin{aligned} B_G = \{&\underline{y_{ije}y_{jie}} - z_e^2,\ \underline{y_{ije}t_e} - z_i^2,\ \underline{y_{jie}t_e} - z_j^2,\\ &\underline{y_{ije}z_j} - z_iz_e,\ \underline{y_{jie}z_i} - z_jz_e,\ \underline{t_ez_e} - z_iz_j\ :\ e = ij \in E(G)\} \cup \\ &\{b_{E_1,E_2}\ :\ (E_1, E_2) \text{ is a zig-zag pair or a cyclic pair of } G\}. \end{aligned}$$

我们称这 些包含在第一个集合中的 $6|E|$ 个二项式为基本二项式。

定义2.4。 称 R_G 上的项序为 良好 项序，如果 B_G 中的二次二项式的首项是定义 2.3 中加下划线的元素，并且圈二项式的首项是仅含 y 变量的单项式。

我们注意到良好项序确实存在。例如，可以考虑任意一种字典项序，其中 y 变量和 t变量都大于任意一个 z 变量。现在我们将证明，对于任意无向连通图 G，集合B_G 是关于任意良好项序的 $I_{\mathcal{C}_G}$ 的 Gr¨obner 基。为此，我们需要几个引理。

引理 2.5. 设 $b = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ 是 $I_{\mathcal{C}_G}$ 中的一个二项式，并假设没有变量同时整除 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$。若 $t_e|\mathbf{m}_1$，对于 G 的某条边 $e = ij$ 成立，则对于任意良好项序，$\mathbf{m}_1$ 都能被 B_G 中某个基本二项式的首项整除。

证明. 假设 $t_e|\mathbf{m}_1$，并回忆 $\varphi(t_e) = w_i w_j w_e^{-1}$。由于 $b \in I_{\mathcal{C}_G}$，我们有$\varphi(\mathbf{m}_1) = \varphi(\mathbf{m}_2)$。特别地，变量 w_e 要么在 Laurent 单项式 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中以负指数出现，要么在 $\varphi(\mathbf{m}_1/t_e)$ 中以正指数出现。第一种情况与 b 不可约这一事实矛盾：事实上，由于 t_e 是唯一一个使变量 w_e 在 $\varphi(t_e)$ 中以负指数出现的变量，这将意味着 $t_e|\mathbf{m}_2$。

在第二种情况下，我们有一个变量 v，使得 w_e 以正指数出现在 $\varphi(v)$ 中，它必定整除$\mathbf{m}_1$。这些变量要么是 z_e、y_{jie}，要么是 y_{ije}。证明至此完成，因为单项式 $t_e z_e$、$y_{jie}t_e$ 和 $y_{ije}t_e$ 是相对于所选项序，B_G 中某个二项式的首项。□

现在，我们将任意二项式$\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$与 G 的一对有向子图（$\overrightarrow{G_1}$，$\overrightarrow{G_2}$）关联起来，方法如下：对于整除$\mathbf{m}_1$（分别为$\mathbf{m}_2$）的任意变量 y_{ije}，图 $\overrightarrow{G_1}$（分别为 $\overrightarrow{G_2}$）包含顶点 i 和 j，以及从 i 到 j 的若干条有向边，其条数等于 y_{ije} 在$\mathbf{m}_1$（分别为$\mathbf{m}_2$）中的度。

定义 2.6。对于有向图 $\overrightarrow{G}$ 和顶点 $i \in V(\overrightarrow{G})$，我们定义 $\deg_{\overrightarrow{G}}(i)$ =$\mathrm{outdeg}_{\overrightarrow{G}}(i)$ −$\mathrm{indeg}_{\overrightarrow{G}}(i)$，其中 $\mathrm{outdeg}_{\overrightarrow{G}}(i) = |\{j \in V(\overrightarrow{G}) : (i,j) \in E(\overrightarrow{G})\}|$，而 $\mathrm{indeg}_{\overrightarrow{G}}(i) = |\{j \in V(\overrightarrow{G}) : (j,i) \in E(\overrightarrow{G})\}|$。如果 $\deg_{\overrightarrow{G}}(i) > 0$，我们称 i 是 $\overrightarrow{G}$ 的正顶点。如果 $\deg_{\overrightarrow{G}}(i) < 0$，我们称 i 是 $\overrightarrow{G}$ 的负顶点。

引理 2.7. 设 $b = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ 是 $I_{\mathcal{C}_G}$中的不可约二项式，且$(-\overrightarrow{G_1}, -\overrightarrow{G_2})$ 是与之关联的一对有向图。假设在 B_G 中，关于某个良好项序的基本二项式的首项均不整除$\mathbf{m}_1$ 或$\mathbf{m}_2$。则：

(1) 若 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) < 0$，则 $i \in V(\overrightarrow{G_1}) \cap V(\overrightarrow{G_2})$。此外，若 $i \in V(\overrightarrow{G_1}) \cap V(\overrightarrow{G_2})$，则 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) = \deg_{\overrightarrow{G_2}}(i)$。*(2)* 若 $i \in V(\overrightarrow{G_1}) \setminus V(\overrightarrow{G_2})$ 且 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) > 0$（$i \in V(\overrightarrow{G_2}) \setminus V(\overrightarrow{G_1})$，并且 $\deg_{\overrightarrow{G_2}}(i) > 0$，则 $z_i|m_2$ ($z_i|m_1$,，依此类推)。*(3)* 若 $e \in E(\overrightarrow{G_1}) \setminus E(\overrightarrow{G_2})$（$e \in E(\overrightarrow{G_2}) \setminus E(\overrightarrow{G_1})$，依此类推），则 $z_e|m_2$ ($z_e|m_1$，依此类推)。

证明。(1) 若 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) < 0$，则 w_i 在 $\varphi(\mathbf{m}_1)$ 中的度为负。由于 $b \in I_{\mathcal{C}_G}$，w_i 在 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中的度也为负。由于只有形如 y_{jie} 的变量 v 才会使 w_i 在 $\varphi(v)$ 中的指数为负，其中顶点为 j，边为 e，因此

结论成立。由于 $i \in V(\overrightarrow{G_1})$，至少有一条边与 $\overrightarrow{G_1}$ 中的 i 相接。因此，$\mathbf{m}_1$ 可被变量 y_{ije} 或 y_{jie} 整除，其中顶点为 j，边为e。特别地，由于我们假设 $y_{ije}z_i$ 不能整除 $\mathbf{m}_1$，因此可得出结论：z_i 不能整除 $\mathbf{m}_1$。由对称性可知，z_i 不能整除 $\mathbf{m}_2$。因此，$\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i)$ 等于变量 w_i 在 $\varphi(\mathbf{m}_1)$ 中的度，而 $\deg_{\overrightarrow{G_2}}(i)$ 等于变量 w_i 在 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中的度。由于 $b \in I_{\mathcal{C}_G}$，我们得出结论：$\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) = \deg_{\overrightarrow{G_2}}(i)$。

(2) 与前一种情况一样，$\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i)$ 等于变量w_i 在 $\varphi(\mathbf{m}_1)$ 和 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中的度。由于 $i \notin V(\overrightarrow{G_2})$，在 $\mathbf{m}_2$ 中，唯一对 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 的正度有贡献的变量是 z_i。

(3) 同样，由于 $b \in I_{\mathcal{C}_G}$，w_e 在 $\varphi(\mathbf{m}_1)$ 和 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中的度相同。根据引理 2.5，变量 t_e 既不整除 $\mathbf{m}_1$，也不整除 $\mathbf{m}_2$,，而且这是唯一一个使 w_e 在 $\varphi(v)$ 中具有负度的变量。因此 w_e 在 $\varphi(\mathbf{m}_1)$ 和 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中都具有正度。由于 $e \notin E(\overrightarrow{G_2})$，唯一对 w_e 在 $\varphi(\mathbf{m}_2)$ 中的正度有贡献的变量是 z_e。□

下面的引理汇集了有向无环图的一些简单性质，这些性质将会派上用场。

引理 2.8。设 H 是一个有向无环图，至少包含一条边且没有孤立顶点。那么 H 至少有一个正顶点和一个负顶点。此外，对于每个正顶点 $i \in V(H)$，都存在一个负顶点 $j \in V(H)$，使得 H 包含一条从 i 到 j的有向路径；对于每个负顶点 $j \in V(H)$，都存在一个正顶点 $i \in V(H)$，使得 H 包含一条从 i 到 j的有向路径。

证明。每个至少包含一条边的有向无环图都至少有一个汇点和一个源节点。由于汇点是正顶点，而源节点是负顶点，因此第一个断言成立。第二个断言源于这样一个事实：有向无环图中的每个顶点都至少有一个作为汇点的后代，并且每个顶点都有至少一个作为其祖先的源节点。□

现在我们可以证明本节的主要结果了。

定理 2.9。集合 B_G 是 $I_{\mathcal{C}_G}$ 的 *Gr¨obner* 基，且适用于每一种良好项序。

证明。设 $b = \mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2$ 是 $I_{\mathcal{C}_G}$中的一个二项式，并假设没有变量同时整除 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$。我们证明存在一个二项式 $f \in B_G$，使得 $\mathrm{lt}(f)|\mathbf{m}_1$或 $\mathrm{lt}(f)|\mathbf{m}_2$。这说明 $I_{\mathcal{C}_G}$ 中的任意二项式都可以用 B_G中的一个元素约化。由于这一步约化会产生另一个二项式，且约化序列必定终止，因此最终必定得到零多项式。特别地，由 $I_{\mathcal{C}_G}$ 的一组生成二项式得到的所有S-多项式都可约化为零，这意味着 B_G 是一个 Gr¨obner 基。

如果 B_G 中一个基本二项式的首项整除 $\mathbf{m}_1$ 或 $\mathbf{m}_2$,，那么结论便成立。

假设 B_G 中没有任何基本二项式的首项$\mathbf{m}_1$或 $\mathbf{m}_2$的因子。特别地，根据引理 2.5，形如 t_e 的变量都不是$\mathbf{m}_1$ 或$\mathbf{m}_2$的因子。考虑与 G 中的$\mathbf{m}_1$ 和$\mathbf{m}_2$相关联的一对有向子图$(-\overrightarrow{G_1}, -\overrightarrow{G_2})$。

如果— $\overrightarrow{G_1}$ （分别地，—$\overrightarrow{G_2}$ ）含有有向环 C，那么根据构造，$\mathbf{m}_1$ （$\mathbf{m}_2$，分别地）可被单项式 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E(C)} y_{ije}$ 整除。根据良好项序的定义，该单项式是一个圈二项式的首项，因此得出结论。

$\longrightarrow\longrightarrow$ $\longrightarrow$假设 G_1 和 G_2 都是有向无环的。由于 b 不可约， G_1 和 $\longrightarrow G_2$ 没有任何公共有向边，因为这些边对应的变量会同时整除$\mathbf{m}_1$ 和$\mathbf{m}_2$。

假设 — $\overrightarrow{G_1}$ 中存在一个正顶点 i，使得 $i \in V(—\overrightarrow{G_1}) \setminus V(—\overrightarrow{G_2})$。注意，由引理 2.7 (2)可知，这意味着 $z_i|\mathbf{m}_2$。令 $i_1 = i$ 和 j_1 为 — $\overrightarrow{G_1}$ 的一个负顶点，且存在一条从 i_1 到 j_1 的有向路径。根据引理 2.7 (1)， j_1 也是 G_2 的一个负顶点，且 —

$\rightarrow$ $\longrightarrow$。根据引理 2.8，存在 G_2的一个正顶点 i_2，使得 — $\overrightarrow{G_2}$ 中存在一条从 i_2 到 j_2的有向路径。若 $i_2 \in V(—\overrightarrow{G_1})$，根据引理 2.7 (1)，有 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i_2) = \deg_{\overrightarrow{G_2}}(i_2) > 0$。然后，我们可以重复这一过程，直到出现以下情况之一：

情形 1： $i_k \notin V(—\overrightarrow{G_1})$。在此情形下，令 E_1 为从 i_t 到 j_t的有向路径（ $t = 1$, ……， $k-1$ ）的有向边之并，令 E_2 为从 i_{t+1} 到 j_t的有向路径（ $t = 1$, ……， $k-1$）的有向边之并。因此，(E_1, E_2) 是一个之字形对。根据图（$—\overrightarrow{G_1}$,$—\overrightarrow{G_2}$）的定义，我们有 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_1} y_{ije}$整除 $\mathbf{m}_1$ ，且 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_2} y_{ije}$ 整除 $\mathbf{m}_2$。此外，根据引理 2.7 (2)，我们有 $z_{i_k}|\mathbf{m}_1$ ，以及 $z_{i_1}|\mathbf{m}_2$。最后，根据引理 2.7 (3)，$\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_2} z_e$ 整除 $\mathbf{m}_1$，且 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_1} z_e$ 整除 $\mathbf{m}_2$。特别地，$\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 都能被 b_{E_1,E_2}的两个单项式整除；b_{E_1,E_2}是与之字形对 (E_1, E_2) 对应的二项式。

情形 2： $i_k = i_\ell$，其中 $\ell < k$。在此情形下，令 E_1 为从 i_t 到 j_t 的有向路径的有向边之并，其中 $t = \ell, \ldots, k-1$；令 E_2 为从 i_{t+1} 到 j_t 的有向路径的有向边之并，其中 $t = \ell, \ldots, k-1$，再加上从 i_k 到 j_ℓ 的有向边。(E_1, E_2) 是一个循环对。再次根据图（$—\overrightarrow{G_1}$, $—\overrightarrow{G_2}$）的定义，我们有 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_1} y_{ije}$ 整除 $\mathbf{m}_1$ ，且 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_2} y_{ije}$ 整除 $\mathbf{m}_2$。此外，根据引理 2.7 (3)，$\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_2} z_e$ 整除 $\mathbf{m}_1$，且 $\prod_{\vec{e}=(i,j)\in E_1} z_e$ 整除 $\mathbf{m}_2$。特别地，$\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_1$ 均可被 b_{E_1,E_2} 的两个单项式整除；b_{E_1,E_2} 是与循环对 (E_1, E_2) 对应的二项式。情形 2 证毕。

G_1)，如果其中有个一个与顶点 i 相同，我们可以用与上文相同的论证得出结论。 $\overrightarrow{G_2}$ 满足 $i \in V(\overrightarrow{G_2}) \setminus V(\overrightarrow{G_2})$ 并且对于所有满足 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) > 0$ 的顶点 i，都有 $i \in V(\overrightarrow{G_2})$ 并且对于所有满足 $\deg_{\overrightarrow{G_2}}(i) > 0$ 的顶点 i，我们有 $i \in V(—\overrightarrow{G_1})$。我们将 i_1 初始化为任意一个满足 $\deg_{\overrightarrow{G_1}}(i) > 0$ 的顶点，并且与前一种情况一样，开始构造从 i_t 到 j_t、位于 G_1 中的 $\longrightarrow$ $\longrightarrow$ 条两两不相交的有向路径，以及从 i_{t+1} 到 j_t、位于 G_2中的路径。由于图 $\longrightarrow$ $\longrightarrow G_1$ 和 G_2 是有限的，存在 k，使得对于某个 $\ell < k$，有 $i_k = i_\ell$。令 E_1 为从 i_t到 j_t的有向路径的有向边之并，其中 $t = \ell, \ldots, k-1$；令 E_2 为从 i_{t+1} 到 j_t的有向路径的有向边之并，其中$t = \ell, \ldots, k-1$，再并上从 i_k到 j_ℓ的有向边。数对 (E_1, E_2) 是一个循环对。完全按照情况 2 的方法，我们得到 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 均可被整除

$b_{E_1、E_2}$ 的两个单项式，即与循环对 (E_1、E_2) 对应的二项式。由此证明完毕。□

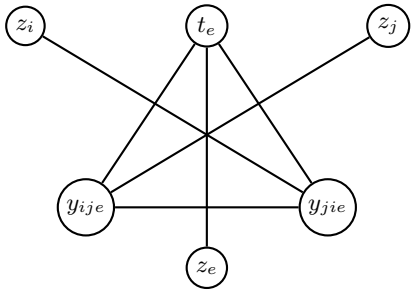
2.1. 正则幺模三角剖分。整点构形 A 的环面理想 I_A 的初始理想与其凸包 A 的正则三角剖分相对应，该三角剖分由格单形组成（不使用额外顶点）。更准确地说，I_A 的任一初始理想的根基，都是某个 conv(A) 的正则三角剖分的 Stanley-Reisner 理想，即由对应于该三角剖分非面的所有单项式生成的无平方因子单项式理想（参见 [15, 定理 8.3] 或 [6, 第 9.4] 节）。此外，conv(A) 的所有正则三角剖分都可以通过这种方式得到。对应于无平方因子初始理想的三角剖分是幺模的，也就是说，其面数量等于 conv(A) 的归一化体积。由于根据定理 2.9，集合 B_G 关于任何仅有无平方因子初始项的良好项序都是 $I_{\mathcal{C}_G}$ 的 Gr¨obner 基，因此我们得到以下推论。

推论 2.10. 设 G 是任意一个图。宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$ 具有一个正则幺模三角剖分。

推论 2.10 证明了对于任意$\mathcal{C}_G$，所需细分的存在性 G。尽管这个结果是构造性的，但所得三角剖分是以其极小非面的形式呈现的。为了应用公式（1）计算典范形式 $\Omega_{\mathcal{C}_G}$，我们需要用其面来描述这些三角剖分。在接下来的章节中，我们将给出若干 G族的这类刻画。为推导这些结果，我们将使用一些观察结果；对于任意图G，这些结果对由良好项序导出的所有正则幺模三角剖分均成立。本小节汇总这些结果以及将在后续章节中使用的相关记号。

我们先引入一些记号。下文中，设我们有一个图 $G = (V, E)$ 以及一个良好项序。根据定理 2.9，Gr¨obner 基由基本二项式、之字形二项式和循环二项式构成，其初始理想无平方因子。由于宇宙学多胞体 $\mathcal{C}_G$ 的维数为 $|V|+|E|-1$，相应的正则幺模三角剖分的面由所有$(|V| + |E|)$个变量的子集构成：y_{ije}，y_{jie}，t_e，z_e，z_i 这些子集不含该 Gr¨obner 基中二项式的任何首项。

基本二项式意味着某些变量的二元子集不能包含在面中。对于每条边 $e = ij \in E$，需要避开的这些二元子集对应于以下图中的边：



为了表示三角剖分的面，我们为每个变量引入一个符号：令 $i \in V$ 和 $e = ij \in E$:

● 变量 z_i 用符号 ○ 表示。如果不存在 z_i，则顶点 i 改用 ● 表示。

● 变量 z_e 用边类型 –表示,
● 变量 t_e 用边类型 〰表示,
● 变量 y_{ije} 用从 i 指向 j的边类型 → 表示，并且
● 变量 y_{jie} 用从 j 指向 i的边类型 ← 表示。

给定 R_G 的生成元的一个子集 S，我们用 G_S 表示根据 S 中的元素、用上述符号绘制的图。我们还令 $Z := \{z_i : i \in V\}$、$Z_S := S \cap Z$ 和 $\mathfrak{Z}_S := \{i \in V : z_i \in Z_S\}$。例如，如果 G 是一条含 3 个顶点的路径，我们用图 G_S 表示变量集 $S = \{z_1, z_3, y_{12}, z_{12}, t_{23}$:



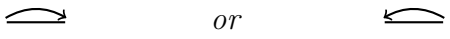
在这个例子中，$Z = \{z_1, z_2, z_3\}$、$Z_S = \{z_1, z_3\}$ 和 $\mathfrak{Z}_S = \{1, 3\}$。

基本二项式蕴含：如果一个变量子集对应于三角剖分的一个面，那么与之关联的图不包含以下任何子图:

(2) 

我们将这六个子图称为基本障碍。下面的引理显然成立。

引理 2.11。设 G 是一个简单连通无向图，并设$\mathcal{T}$是由 R_G 上的良好项序所诱导的$\mathcal{C}_G$ 的正则幺模三角剖分。如果 S 是$\mathcal{T}$的一个面，那么 G_S 仅包含单边和双边。此外，任意双边的形式为



.

给定 R_G 中变量的一个子集 S，我们将 S（或 G_S）的支撑图 定义为以 V 为顶点集、以

$$\{e = ij \in E : S \cap \{t_e, z_e, y_{ije}, y_{jie}\} \neq \varnothing\}.$$

下面的命题表明，任意面的支撑图都尽可能大。

命题 2.12。设 $G = (V, E)$ 是一个连通无向图，并设$\mathcal{T}$是由良好项序所诱导的 $\mathcal{C}_G$ 的三角剖分。令 S 为 R_G 中变量的一个子集。如果 S 是$\mathcal{T}$的一个面，那么 S 的支撑图等于 G。特别地，S 的支撑图是连通的。

证明。设 S 是 $\mathcal{T}$ 的一个面，并反设存在某条边 $e = ij \in E$，使得 $S \cap \{t_e, z_e, y_{ije}, y_{jie}\} = \varnothing$。我们注意到，变量 t_e 不会出现在任何之字形二项式、循环二项式或循环二项式中。t_e 唯一出现的位置是基本二项式 $y_{ije}t_e - z_i^2$的首项中，

$y_{jie}t_e - z_j^2$和 $t_e z_e - z_i z_j$。然而，由于根据假设， y_{ije}、 y_{jie} 和 z_e 均不包含在 S中，因此 $S \cup \{t_e\}$ 也是 T 的一个面。这与 S 是一个面相矛盾。□

在接下来的章节中，我们将应用这些结果，推导出由$\mathcal{C}_G$ 上良好项序所产生的 R_G 的特殊情形下， G的正则幺模三角剖分的面3的面作出明确刻画。第 G 为路径图时，我们将刻画在特定良好项序下该三角剖分的面。第4节中，我们将展示，第3节中的方法可以扩展，从而得到圈的三角剖分的面的一种类似刻画。最后，在第5节中，我们将把路径三角剖分的面刻画推广到一般的树。

3. The Cosmological Polytope of the Path

本节中，我们将明确描述与关于 ¨ 的环面理想的良好项序下的 Gröbner 基相对应的正则幺模三角剖分；该环面理想对应于n路径的宇宙学多胞体， I_n；也就是说，该图的顶点集为 $V = [n+1]$，边集为 $E = \{ii+1 \,:\, i \in [n]\}$。

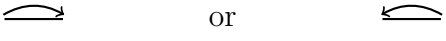
本文给出了该多胞体各面面的组合描述，从而可以枚举这些面。由此得到的 $\mathcal{C}_{I_n}$ 的归一化体积公式 [11]与文献中的公式一致。各面的组合描述也可用于以一种新颖的方式计算该多胞体的典范形式，这或许能为计算与此类费曼图相关的波函数提出新的物理理论。

下文中，我们采用如下变量排序

$$\begin{aligned} &y_{12} > y_{23} > \cdots > y_{n-1n} > y_{nn-1} > \cdots > y_{32} > y_{21} > z_{12} > \cdots \\ &\cdots > z_{n-1n} > t_{12} > \cdots > t_{n-1n} > z_1 > \cdots > z_n, \end{aligned} \tag{3}$$

对于边 $e = ii+1$，我们分别用 y_{ii+1} 和 y_{i+1i} 表示变量 y_{ii+1e} 和 y_{i+1ie}。可以验证，关于这一变量排序， R_{I_n} 中单项式上的字典序项序是定义2.4所说的良好项序。由于图 $G = (V, E)$ 的宇宙学多胞体 C_G 的维数为 $|V|+|E|-1$，相应的正则幺模三角剖分的面由变量 y_{ije}、 y_{jie}、 t_e、 z_e、 z_i 的所有 $(2n+1)$-元子集构成，且这些子集不包含该 Gröbner 基中二项式的首项。我们的目标是根据第2.1小节中定义的图 G_S 的结构来刻画这些子集 S。

根据命题 2.12，我们知道，只要 G_S 是一个面， S 就是连通的。根据引理2.11 ，我们还知道 G_S 中的所有边要么是单边，要么是双边，并且所有双边都具有如下形式



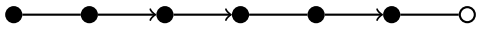
由于路径图不含圈，定理 ¨中给出的 Gröbner 基2.9 对于I_{I_n} 仅包含基本二项式和之字形二项式。现在我们已经在 R_{I_n} 上指定了一个具体的良好项序，也就可以确定由之字形二项式的首项所禁止的子图。

也就是说，如果 S 是三角剖分的一个面，那么 G_S 不包含任何以 ○ 结尾、朝右定向的部分有向路径；也就是说，它不包含

以下形式的任何子图：令 $\pi = \{ii+1,\ i+1i+2,\ ..,\ j-1j\}$ with$1 \le i < j \le n+1$ 为 I_n的一条子路径。给定 π的边的一个划分 $(E_1,\ E_2)$，其中 $E_1 \neq \varnothing$，我们称符号集合的图 G_R

$$R = \{y_{\ell\ell+1} \ :\ \ell\ell+1 \in E_1\} \cup \{z_{\ell\ell+1} \ :\ \ell\ell+1 \in E_2\} \cup \{z_j\}$$

一个向右的部分有向路径（以 ○）结尾）。例如，若 S 是一个面，则它不能包含符号子集 R，从而得到以下图：



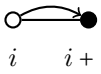
下面的引理总结了当 S 是一个面时， G_S 的一些其他有用性质。

引理 3.1。 设 S 是生成环 R_{I_n}的变量子集。若 S 是三角剖分的一个面，且 $\mathfrak{Z}_S = \{ i_1 < i_2 < \cdots < i_{n+1-k}\}$，则有

(1) G_S 恰好包含 k 条双边，(2) G_S 在 $[i_1]$ 上的导出子图中的双边数为 $i_1 - 1$，(3) G_S在$\{i_j, \ldots, i_{j+1}\}$ 上的导出子图中的双边数为$i_{j+1} - i_j - 1$，对所有 $j \in [n-k]$均成立，以及(4) G_S在$\{i_{n-k+1}, \ldots, n+1\}$上的导出子图中的双边数为 $n+1-i_{n-k+1}$。

证明。 由于 S是一个面，我们知道 $|S| = 2n+1$。我们还从命题 2.12得知， G_S 的支撑图是连通的，且等于 I_n。因此，对于 I_n中的所有边， G_S 中至少有一条边。 此外，根据引理2.11 我们知道， G_S只包含单边和双边。由于 $|Z_S| = n+1-k$ 且 $|S| = 2n+1$，因此 G_S 恰好包含 k 条双边。

现在考虑 G_S 中 $i < j$ 之间的子图，其中 $z_i,\ z_j \in S$ 并且对所有$i < \ell < j$均有。我们断言，该子图中至多有 $j-i-1$ 条双边。为此，假设实际上有 $j-i$ 条双边。那么该子图中的所有边都是双边，且具有引理 2.11所规定的形式。由于该子图不可能包含基本障碍 ◦ ←，因此第一对双边的形式为



由于子图中所有剩余的边也必须是双边，并且这些双边集合都必须分别包含无向边 $\ell\ell+1$ （对于 $i \le \ell \le j-1$），因此该子图包含一条以 ○ 结尾的向右的部分有向路径，而根据某个之字形二项式的首项，这是一种禁用子图。因此，我们得到了矛盾。

由抽屉原理可知，对于由一对节点 $i < j$ 所确定的 G_S 的每个子图，若 $z_i, z_j \in S$，但对所有 $i < \ell < k$ 都满足 $z_\ell \notin S$；或 $z_i \in S$，但对所有 $\ell < i$ 都满足 $z_\ell \notin S$；或 $z_i \in S$，但对所有 $i < \ell$ 都满足 $z_\ell \notin S$，则其中双边的数量恰好等于黑色节点的数量。这就证明了断言 (2) – (4)。□

根据引理 3.1，考察面与集合 $Z = \{z_i : i \in [n+1]\}$ 的交集或许会有所帮助。若某个面 S 满足 $Z_S = S \cap Z = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\}$，其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$，我们可以将图 G_S 划分为节点集 $\{1, \ldots, i_1\}$、$\{i_k, \ldots, n+1\}$ 和 $\{i_j, i_j+1, \ldots, i_{j+1}\}$ 上的导出子图，其中对所有 $j \in [k-1]$ 均成立；然后考虑如何在每个导出子图中放置适当数量的边，以确保 $|S| = 2n+1$。按照这种方式生成所有此类图的规则，将给出该三角剖分各面的组合描述。下一个定理将刻画对应于该三角剖分各面的图。下文中，我们用 $\leftrightarrow$ 表示可以在两个箭头之间任选其一（即 $\leftarrow$ 或 $\rightarrow$）。

定理 3.2. 设 S 是环 R_{I_n} 的生成元的一个子集，并设 $Z_S = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\}$ 其中 $i_1 < \cdots < i_k$。那么，当且仅当以下三条条件全部成立时，S 是由 $\mathcal{C}_{I_n}$ 所诱导的字典序对应的三角剖分的一个面，该字典序由 (3) 给出：

(1) G_S 在节点 $[i_1]$ 上的导出子图具有如下形式



也就是说，所有边都是双边，并带有一个 $\leftarrow$。

(2) 对于所有 $j \in [k-1]$，G_S 在 $\{i_j, i_j+1, \ldots, i_{j+1}\}$ 上的导出子图具有如下形式



or



or



or



也就是说，或者（*1*）恰有一条其最小顶点为黑色节点的边，该边要么是〰，要么是 $\leftarrow$；这条边右侧的所有边都是双边，并带有一个 $\leftarrow$；这条边左侧的所有边都是双边，并带有箭头（$\leftarrow$ 或 $\rightarrow$），但第一条边必须带有 $\rightarrow$；或者（*2*）最左边的边要么是 $-$，要么是 〰，且其右侧的所有边都是双边，并带有一个 $\leftarrow$。

(3) 由节点 $\{i_k、\ i_k+1、\ \ldots\ldots、\ n+1\}$ 导出的子图 G_S 具有如下形式



也就是说，除了第一条边必须带有 $\rightarrow$之外，所有边都是带有任一箭头（$\leftarrow$ 或 $\rightarrow$）的双边。

证明。 我们首先注意到，任何满足所列性质的 S G_S 集合都是一个面。首先请注意，对每个可能的子图选择边，都不会包含基本二项式所排除的导出子图。此外，任何向右的部分有向路径，要么被形如 $\leftarrow$ 或 $\rightsquigarrow$的单边中断，要么终止于一个黑色节点。因此，这样的 G_S 也不包含锯齿二项式首项所禁止的任何子图。由于每个黑色节点恰有一条双边，也可推出 $|S| = 2n+1$。由于$\mathbf{C}I_n$ 的维数为 $2n$，因此 G_S 是该三角剖分的一个面。

现在假设 S 是该三角剖分的一个面，并考虑与之关联的图 G_S。由于 S是一个面，我们知道 $|S| = 2n+1$；根据引理 3.1 ，我们还知道 G_S是连通的，并且节点集为$\{1,..,i_1\}$、$\{i_k,\ldots,n+1\}$ 和$\{i_j, i_j+1,..,i_{j+1}\}$ 的 $j \in [k-1]$ 任一导出子图中，黑色节点的数量都与双边数量相等。因此，只需证明 G_S 的这些子图属于上面列表中指定的某种可能形式即可。

首先考虑 G_S 在节点集 $[i_1]$上导出的子图。由于 S 是一个面，根据引理 3.1，我们知道该子图中的每条边都是双边，因此形式为$\{(i, i+1)\ ii+1\}$或$\{(i+1, i)\ ii+1\}$。由于 S不能包含任何基本二项式的首项，因此它不会同时包含 z_{i_1} 和 $y_{i_1-1i_1}$。所以，该子图必须包含双边$\{(i_1, i_1-1)\ i_1-1i_1\}$。同理，由于$S$ 不能包含任何之字形二项式的首项，该子图不能包含任何向右的部分有向路径。因此，该子图中的所有双边都具有形式$\{(i+1, i)\ ii+1\}$。由此， G_S满足上面列表中的第一项判据。

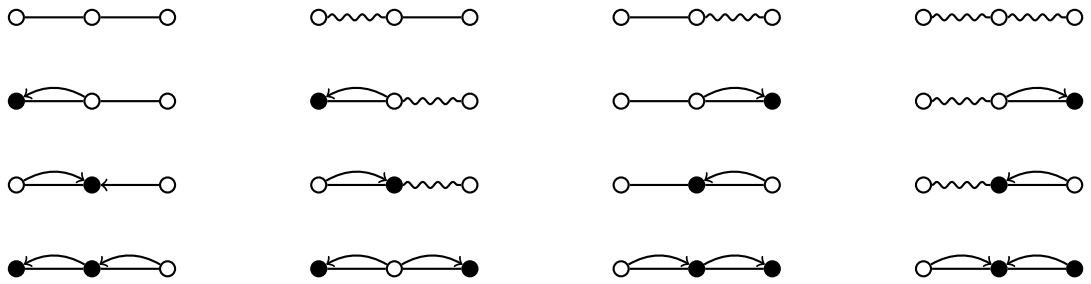
类似地，对于 G_S 在节点集 $\{i_j, i_j+1, \ldots, i_{j+1}\}$ 上诱导的图，根据引理 3.1，我们知道该图必须连通，且恰好包含 $i_{j+1}-i_j-1$ 条双边。因此，图中恰好有一条单边。假设这条边是最左侧的边（即位于 i_j 和 i_j+1 之间）。在这种情况下，这条边可以是 $\rightsquigarrow$ 或 $-$，但不能是 $\leftarrow$ 或 $\rightarrow$。要看出它不可能是 $\leftarrow$，注意这意味着某个基本二项式的首项包含在 S 中。要看出它不可能是 $\rightarrow$，注意由于子图中的所有其余边都必须是双边（因此包含一个 $-$），这将推出 S 包含某个之字形二项式的首项，矛盾。类似地，所有双边都必须具有 $\{(i+1, i)\ ii+1\}$ 的形式。否则， S 将包含某个之字形二项式的首项。

现在假设子图中的单边连接的是某个 $t>1$ 对应的 i_j+t 和 i_j+t+1。根据与前一种情况相同的论证，其余所有边都必须是双边，并且 i_j+t+1 右侧的所有双边都必须具有 $\{(i+1,\ i)\ ii+1\}$ 的形式。我们还必须有 i_j 和 i_j+1 之间的双边具有 $\{(i_j,\ i_j+1)\ i_ji_j+1\}$ 的形式，否则 S 将包含某个基本二项式的首项。然而，对于$1 \le s < t$，i_j+s 和 i_j+s+1 之间的所有双边都可以具有 $\{(i+1,\ i)\ ii+1\}$ 或 $\{(i,\ i+1)\ ii+1\}$ 的形式，因为单边会阻断任何向右的部分有向路径。进一步注意，单边必须具有 $\leftarrow$ 或 $\rightsquigarrow$ 的形式，因为任何其他选项都会与无向边以及 i_j 和 i_j+1 之间的有向边结合，形成一条以 $\bigcirc$ 结束的向右部分有向路径。因此，如果 S 是一个面，

对于所有 $j \in [k-1]$， G_S 在区间 $\{i_j,\ i_j+1$、……、$i_{j+1}\}$ 上对应的导出子图都具有上述列表中第 (2) 项的形式。

最后，对于节点集为 $\{i_k, \ldots, n+1\}$ 的 G_S 的导出子图，根据引理 3.1，我们知道所有边都是双边，因此形式为 $\{(i+1,i)\ ii+1\}$ 或 $\{(i,i+1)\ ii+1\}$。为了避免出现基本二项式所禁止的子图，连接 i_k 和 i_k+1 的双边也必须是 $\{(i,i+1)\ ii+1\}$ 的形式。然而，由于路径在节点 i_k 右侧不含任何 ○，我们可以自由选择其余所有双边中箭头的方向。因此，该子图的形式与上列第 (3) 项所示相同，由此完成证明。□

例 3.3. 根据定理 3.2，$\mathcal{C}_{I_2}$ 的三角剖分的面由以下十六个图给出：



这些图各自编码了 $\mathcal{C}_{I_2}$ 的三角剖分中对应面的顶点集合，由此我们可以恢复单纯形的面定义方程，进而计算典范形式 Ω_{I_2}。

由于该三角剖分是幺模的，因此$\mathcal{C}_{I_n}$ 的归一化体积等于满足引理 G_S 中所列性质的所有图 3.2之和。利用这些性质对子图的分解，我们可以得到 $\mathcal{C}_{I_n}$ 的归一化体积公式，该公式见 [11]。

推论 3.4. $\mathcal{C}_{I_n}$ 的归一化体积为 4^n。

证明。 我们首先利用引理 $\mathcal{C}_{I_n}$ ，通过枚举三角剖分的面，推导出其归一化体积的公式3.2。然后我们证明该公式可化简为 4^n。

根据引理3.2枚举这些面时，我们先选取子集$\{i_1,\ldots,i_k\}$，它属于 $[n+1]$，其中假设 $i_1 < \cdots < i_k$。令 S为一个面，且 $Z_S = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\}$。节点集 $[i_1]$上只有一个可能的导出子图。 G_S在节点集$\{i_k, i_k+1,\ldots,n+1\}$ 上的可能导出子图数量如下

$$\begin{cases} 1, & \text{if } i_k = n+1, \\ 2^{n-i_k}, & \text{if } i_k < n+1. \end{cases}$$

给定一个区间 $\{i_j, i_j+1, \ldots, i_{j+1}\}$，在此区间上， G_S 的可能导出子图必须在 i_j+s 和 i_j+s+1 之间，对于 $s \in \{0,1,\ldots,i_{j+1}-i_j-1\}$，恰好包含一条单边。根据引理 3.2，这条边总是有两种选择。此外，根据同一引理，当 $s=0$时，恰好有两种可能的子图

在 G_S 的此区间上。对于 $s>0$，有 2^s 种选择（包括单边的边类型选择）。因此，总共有

$$\begin{aligned}2+\sum_{s=1}^{i_{j+1}-i_j-1}2^s &= 1+\sum_{s=0}^{i_{j+1}-i_j-1}2^s,\\ &= 1+(2^{i_{j+1}-i_j}-1),\\ &= 2^{i_{j+1}-i_j}\end{aligned}$$

该区间的可能子图。带有 $Z_S=\{i_1、\ldots\ldots、i_k\}$ 的三角剖分的面数 S 因此等于

$$\begin{cases}1\cdot\left(\prod_{j=1}^{k-1}2^{i_{j+1}-i_j}\right)\cdot 1, & \text{if } i_k=n+1,\\ 1\cdot\left(\prod_{j=1}^{k-1}2^{i_{j+1}-i_j}\right)\cdot 2^{n-i_k}, & \text{if } i_k<n+1\end{cases}=\begin{cases}2^{i_k-i_1}, & \text{if } i_k=n+1,\\ 2^{n-i_1}, & \text{if } i_k<n+1.\end{cases}$$

对 $[n+1]$ 的所有真子集求和，得到

$$\begin{aligned}\sum_{\varnothing\neq Z\in 2^{[n+1]}}2^{n-\min(Z)}+\sum_{Z\in 2^{[n]}}2^{n+1-\min(Z)} &= \sum_{\ell=1}^{n}2^{n-\ell}\cdot 2^{n-\ell}+\sum_{\ell=1}^{n}2^{n-\ell}\cdot 2^{n+1-\ell}+1\\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1}4^{\ell}+2\sum_{\ell=0}^{n-1}4^{\ell}+1\\ &= 3\sum_{\ell=0}^{n-1}4^{\ell}+1\\ &= 3\frac{4^n-1}{4-1}+1=4^n,\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

4. The Cosmological Polytope of the Cycle

现在考虑与 $\mathcal{C}_{C_n}$ 相关联的 n-圈 C_n；即顶点集为 $V=[n]$、边集为 $E=\{ii+1:i\in[n]\}$ 的图，其中 $i+1$ 按模 n 取值。通过对第 3 节中观察结果的适度扩展，我们可以刻画由良好项序导出的 $\mathcal{C}_{C_n}$ 的正则幺模三角剖分的面。这提供了一种计算典范形式 Ω_{C_n} 的方法。此外，我们可以枚举这些面，从而得到 $\mathcal{C}_{C_n}$ 归一化体积的闭式公式；这一结果此前尚不为人所知。

我们使用第 3 节中引入的记号。特别地，我们用图 S 来表示 R_{C_n} 中的变量集 G_S。对于边 $e=ii+1$，我们也记作 y_{ii+1} 和 y_{i+1i}，表示相应的 y-变量。与第 3 节中一样，我们考虑由关于以下变量排序的字典序项序所诱导的 $\mathcal{T}$ 对 $\mathcal{C}_{C_n}$ 的三角剖分

$$\begin{aligned}&y_{12}>y_{23}>\cdots y_{n-1n}>y_{n1}>y_{1n}>y_{nn-1}>\cdots>y_{21}>z_{12}>\cdots\\ &\cdots>z_{n-1n}>t_{12}>\cdots>t_{n-1n}>z_1>\cdots>z_n.\end{aligned}\tag{4}$$

可以看出，这个项序是一个良好项序（参见定义 2.4）。

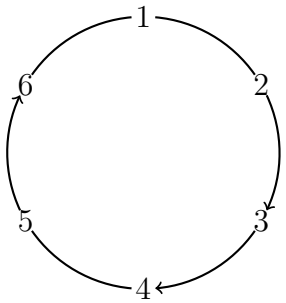
对于这样的项序，之字形二项式的首项再次对应于以$\circ$结尾的部分有向路径，正如第 3 节所示。值得注意的是，对于任意

图的任意诱导路径（其内部顶点的度为 2），只要采用任意一种良好顶序，并且路径一个方向所对应的变量大于另一方向所对应的变量，上述结论对宇宙学多胞体的面也成立。

现在我们还必须避开与循环二项式首项相对应的子图。对于圈二项式，这意味着我们必须避开有向环（包括顺时针和逆时针方向）这样的子图，例如



对于非圈二项式的循环二项式，由于 $y_{ii+1} > y_{j+1j}$ 对于每个 $i, j \in [n]$（加法模 n），首项总是对应于顺时针定向的部分有向环，例如



因此，我们必须避开顺时针定向的部分有向环子图。下面的定理根据这些禁用子图刻画了该三角剖分的面。

定理 4.1. 设 S 是环 R_{C_n} 的生成元的一个子集，并设 $Z_S = \{z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\}$ 其中 $i_1 < \cdots < i_k$。那么 S 是 $\mathcal{C}_{C_n}$ 在由 (4) 诱导的字典序下的三角剖分的一个面，当且仅当以下条件全部成立：

(1) $Z_S \neq \varnothing$，(2) 在 G_S 上的导出子图 $\{i_t、\ i_t + 1、\ \ldots\ldots、\ i_{t+1}\}$ 具有定理 3.2 所述的形式，对所有 $t \in [k-1]$ 均成立；以及(3) 在 G_S 上的导出子图 $\{i_k、\ i_k + 1$ 模 $n、\ \ldots\ldots、\ i_1\}$ 具有定理 3.2 所述的形式，其中最右侧的节点为 i_1。

证明。假设 S 是 $\mathcal{T}$ 的一个面。那么 $|S| = 2n$。若 $Z_S = \varnothing$，则根据基本二项式所对应的禁用子图，我们知道 G_S 中的每条边都是一条双边，由一条无向边和一条有向边组成。然而，这意味着 G_S 包含一个对应于某个循环二项式首项的子图，这与假设矛盾。因此，$Z_S \neq \varnothing$。条件 (2) 和 (3) 成立这一事实，可由指定的变量序以及定理 3.2 的证明中给出的论证得出。

同样，反向结论可由定理3.2证明中的论证推出，此外还需注意，任意两个白色节点之间指定的路径都包含一条单边，而这些单边阻止了顺时针部分定向圈和有向圈的存在。□

与第3节的结果类似，我们可以利用定理4.1中的刻画来枚举三角剖分的面，并推导出$\mathcal{C}_{C_n}$的归一化体积的闭式公式。

定理 4.2. *n-圈的宇宙学多胞体 C_n 的归一化体积为*

$$\mathrm{Vol}(\mathcal{C}_{C_n}) = 4^n - 2^n.$$

证明. </style>令 为上述三角剖分 T 的一个面，且 $\{$，……，$z_{i_k}\}$，其中 $i_1 < \cdots < i_k$。对于 $1 \le \ell \le k$， G_S在 $\{i_\ell$，……，$i_{\ell+1 \bmod k}\}$ 上的导出子图具有定理 3.2 (2) 中所述的形式。由推论 3.4 的证明可知，该区间有 $2^{i_{\ell+1 \bmod k} - i_\ell}$ 个可能的子图，因此有 $\prod_{\ell=1}^{k} 2^{i_{\ell+1 \bmod k} - i_\ell} = 2^n$ 个可能的图 G_S，其白色顶点集合是预先指定的。让后者遍历所有非空顶点子集，可得总共 $(2^n - 1)\dot{2}^n = 4^n - 2^n$ 个可能的子图 G_S。还需验证这些子图中没有一个包含顺时针部分定向圈或完全定向圈。为此，只需注意：若对于 $1 \le \ell \le k$，$\{i_\ell$，……，$i_{\ell+1 \bmod k}\}$ 上的任何导出子图属于定理3.2 (2) 中的前三种类型之一，那么唯一的单边便足以阻止此类圈的存在。另一方面，若所有考察的子图均属于第四种类型，则变量 $y_{ii+1 \bmod n}$ 均不存在。因此， G_S 既不包含顺时针部分定向圈，也不包含完全定向圈。证明完毕。□

5. The Cosmological Polytope of a Tree

第3 节中对路径采用良好项序所得到的正则幺模三角剖分的面描述，可以推广到任意树。为此，我们首先为节点集 T 上的任意树$[n+1]$ 指定一种良好项序，以推广第3节所用的项序。

⟶固定 T 的一个叶节点 r，并考虑与之关联的 T定向，记作 T，其中所有边都从 r向外定向。令 $\preceq_r$ 表示 $[n+1]$上的偏序，该偏序由节点 $i \in [n+1]$ 到 r的距离给出；也就是说，当从 r 到 i 在T 中的唯一有向路径的长度⟶小于或等于从 r 到 j 在 T中的唯一有向路径的长度⟶时， $i \preceq_r j$。按以下方式固定 $\prec_r$ 的一个线性扩张 $\prec_r$：

有根有向树中的一个小花由节点 i 及其所有子节点组成；也就是说，是满足 $i \to j$为树的一条边的节点 j。依次考察离 r距离为 $k-1$的节点，其中 T表示节点→到 $k = 1$的距离。这些节点已按 $i_1 < \cdots < i_t$完全排序。对于 $\ell = 1$，依次考察 i_ℓ，……，t，从而将 i_ℓ的子节点完全排序。然后将 $i_{\ell+1}$ 的子节点完全排序，使得 $i_{\ell+1}$ 的所有子节点都大于 i_ℓ的子节点。示例见图 3a。

接着，我们将 $-\vec{T}$ 的边完全排序，使得对于 $(i,\ j)$，$(s,\ t) \in E(-\vec{T})$，如果 $(i,\ j) \prec (s,\ t)$，则

（1） $i \prec_r s$，或

（2） $i = s$ 和 $j \prec_r t$。

利用这些序，我们可以进一步定义变量 y_{ij}、 z_{ij}、 t_{ij} 和 z_i 的一个全序 $\prec$，使得

(1) 如果 $(i,\ j),\ (s,\ t) \in E(\overrightarrow{T})$ 且 $(i,\ j) \prec (s,\ t)$，那么

- $y_{ij} > y_{st}$,
- $y_{ts} > y_{ji}$,
- $z_{ij} > z_{st}$，且
- $t_{ij} > t_{st}$，(2) 如果 $(i,\ j),\ (s,\ t) \in E(\overrightarrow{T})$，那么
- $y_{ij} > y_{ts}$,
- $y_{ji} > t_{st}$,
- $z_{ij} > z_s$,
- $y_{ij} > z_{st}$、
- $y_{ij} > z_s$、
- $t_{ij} > z_s$，以及
- $y_{ji} > z_{st}$、
- $y_{ji} > z_s$,
- $y_{ij} > t_{st}$、
- $z_{ij} > t_{st}$,

(3) 如果 $i <_r j$，那么 $z_i > z_j$。

可以看出，这种变量序将变量序（3）推广了；而在 R_T 中单项式上对应的字典序项序是一个良好的项序。因此，根据推论 2.10，我们得到 $\mathcal{T}$ 的一个正则幺模三角剖分 $\mathcal{C}_T$。

我们指出所选的 T 边序具有以下性质。

引理5.1. 假设 $i <_r j$，并令 $\pi = \{i_1 i_2, \ldots, i_{k-1} i_k\}$ 为T 中连接 $i_1 = i$ 和 $i_k = j$的唯一路径。则$(i_2, i_1) \prec (i_{k-1}, i_k)$。

证明。首先注意，由于 $i <_r j$，在 T 中从 r 到 j 的距离至少等于在 T中从 r 到 i 的距离。假设这两个距离相等。令 $\alpha = \min_{<_r}\{i_1, \ldots, i_k\}$，并令 π_1和 π_2分别为连接 i_1 与 α以及 i_k与 α的唯一路径。我们将 π_1编号为 $\pi_1 = \{i_{0,1}i_1,1, i_{1,1}i_2,1, \ldots, i_{t-1,1}i_t,1\}$，将 π_2编号为$\pi_2 = \{i_{0,2}i_1,2, i_{1,2}i_2,2, \ldots, i_{t-1,2}i_t,2\}$，其中$i_{0,1} = i_{0,2} = \alpha$, $i_{t,1} = i_1$和$i_{t,2} = i_k$。注意，由于 i 和 j 到 r的距离相同， π_1 和 π_2 的长度也相同。

现在我们断言，对于所有 $j = 1, \ldots, t$，$i_{j,1} <_r i_{j,2}$。为此，反设存在一个 j，使得 $i_{j,1} >_r i_{j,2}$。那么，$i_{j,2}$ 对应的小花，其子节点的排列顺序先于$i_{j,1}$对应的小花。这意味着 $i_{j+1,2} >_r i_{j+1,1}$。重复这一论证可得 $i = i_{t,1} >_r i_{t,2} = j$，这就产生了矛盾。因此，对于所有 $j = 1, \ldots, t$，$i_{j,1} <_r i_{j,2}$。由此可得

$$(i_2, i_1) = (i_{t-1,1}, i_{t,1}) \prec (i_{t-1,2}, i_{t,2}) = (i_{k-1}, i_k),$$

正如所需。

现在假设，在 T 中，从 r 到 j 的距离严格大于在 T 中，从 r 到 i 的距离。那么， π_1 仅包含与 r 的距离至多为 t 的节点，而 π_2包含一个与 r的距离为 $t+1$的节点，其中 t取为最小值。根据选定的边序， π_2中从距离为 t 的节点到距离为 $t+1$ 的节点的边，大于 π_1中的所有边。还可以看出，这条边等于或小于 (i_{k-1}, i_k)，从而完成证明。□

对于每条边 $ij \in E(T)$，中的基本二项式 B_T 意味着，如果 S 是 R_T 中对应于 $\mathcal{T}$的一个面的生成元子集，那么图 G_S 不包含（2）中列出的任何子图。

同样， B_T 中的之字形二项式 G_S 意味着，如果 S 是$\mathcal{T}$的一个面，那么图沿路径不得包含某些子图。这些子图推广了第3 节中的部分有向递增路径，定义如下：

令 i_1、i_k 为 T 的顶点，满足 $i_1 <_r i_k$；令 $\pi = \{i_1i_2、i_2i_3、\ldots\ldots、i_{k-1}i_k\}$ 为 T 中连接 i_1 和 i_k 的唯一路径，并令 $\alpha = \min_{<_r}\{i_1、\ldots\ldots、i_k\}$。此外，令 π_1 和 π_2 分别表示 π 中连接 i_1 与 α 、以及 i_k 与 α 的子路径。根据上述变量排序，π 上任意一个对应于之字形对的之字形二项式，其首项的关联图必为以下之一：

(1) 朝向 i_1 、以 ○ 结尾的部分有向路径，其中包含一条在 π_1 上朝向 i_1 的有向边。(2) 朝向 i_k 、以 ○ 结尾的部分有向路径，其中包含一条在 π_2 上朝向 i_k 的边，以及 (3) 朝向 i_1 、以 ○ 结尾的部分有向路径，其中 π_2 上的所有边均为有向边，π_1 上的所有边均为无向边。

注意，取 $i_1 = \alpha$ 后，(2) 中的路径包含了第 3 节中路径的之字形二项式首项所排除的路径。为说明这三种情形包含了之字形二项式所有可能的首项，考虑路径 π 上的一个之字形对 (E_1, E_2) ，其中 E_1 是朝向 i_k 的边，E_2 是朝向 i_1 的边。如果 E_1 含有 上的边，或者 E_2 含有 上的边，那么根据给定的变量序，这些边所表示的某个 y 变量最大。因此，根据给定的项序，相关之字形对的首项由类型 (1) 或 (2) 的图表示。

另一方面，若 E_1 是 π_1 上的所有边，且 E_2 是 π_2上的所有边，则根据引理 5.1，首项由 y-变量在 E_2中的项给出。因此，这样的之字形对由上文列出的图 (3) 表示。

我们称这些路径为之字形障碍。对于$i = 1$，2、3，形式为 (i) 的之字形障碍称为类型 i 的之字形障碍。

例5.2。 在图 2 中，我们看到四个图。从左到右看，前三个图分别包含类型 1、2 和 3 的之字形障碍。第二个图用红色突出显示了一个类型 2 的之字形障碍，它还包含另外三个之字形障碍（类型相同）。这些障碍可通过恰好将其中一条有向边替换为无向边得到；或者，也可以考虑由红色边构成的子图，并忽略两条有向边中较小的那条。最右侧的图展示了一个不含之字形障碍的图。

对于选定的项序，我们可以进一步约简为I_T识别出的 Gr¨obner 基。考虑形如 $\pi = \{i_1, \ldots, i_k\}$ 的路径，其中 $i_1 <_r i_2 <_r \cdots <_r i_k$。我们将类型 1 简单之字形对定义为之字形对（ E_1, E_2）， 其中 $E_1 = \{i_1 \to i_2\}$ 且$E_2 = \{i_{t+1} \to i_t : t \in \{2, \ldots, k-1\}\}$。再考虑形如 $\pi = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ 的路径，其中对所有 $j = 2, \ldots, k-1$， $i_j <_r i_1$，但 $i_1 <_r i_k$。令 $\alpha = \min_{<_r}\{i_1, \ldots, i_k\}$, 并像之前一样取 π_1 和 π_2 。此路径上的类型 2 简单之字形对是之字形对（E_1, E_2），其中 E_1 由 π_1 上所有朝向 α 的边组成，而 E_2 由 π_2 上所有朝向 α的边组成。

引理 5.3. 设 T 是一棵树。在 R_T 上与 $<$ 对应的字典序下，任意之字形二项式的首项都能被某个简单之字形二项式的首项整除。

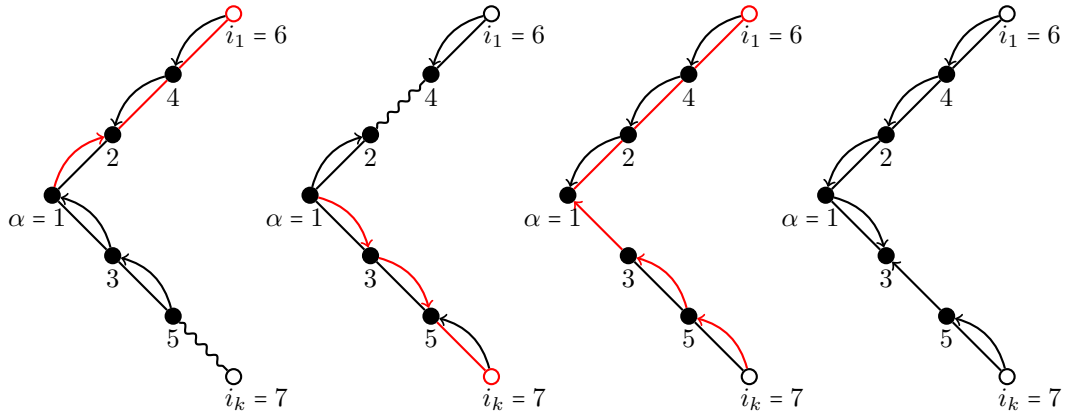


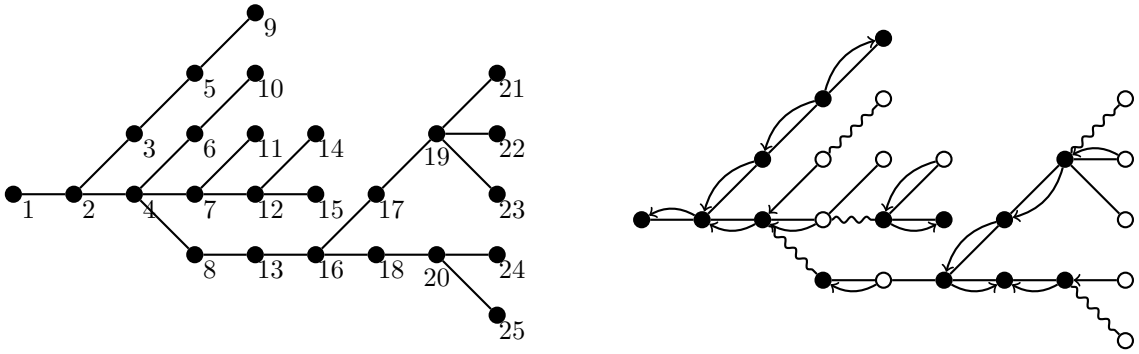
FIGURE 2. 前三个图从左到右依次是类型 1、2 和 3 的之字形障碍示例，障碍以红色标出。最右侧的图则是一个不含任何之字形障碍的图。序 $<_r$ 是顶点集上的自然序。

证明。在给定的项序下，简单之字形对对应的之字形二项式的首项，在图形上表示为一条从i_1 到 i_k 的部分有向路径，其中第一条边 $i_1 \to i_2$ 指向 i_k，其余边均无向；此外还包含一个表示变量 z_{i_1}的符号。对于首项由类型 1 之字形障碍表示的之字形二项式，其对应路径$\pi = \{i_1, \ldots\ldots, i_k\}$满足：子路径 π_1中至少有一条指向 i_1的有向边。在 π_1 上选取一条符合这一形式的边 $i_s \leftarrow i_{s+1}$，使得 s 最小。该边与 i_1 之间的其余边必定无向，因此，$\{i_1, \ldots\ldots, i_s\}$上的子路径就是类型 1 简单之字形对对应的之字形二项式首项的图形表示。因此，该之字形二项式的首项能被简单之字形对对应的之字形二项式的首项整除。同样的论证表明，所有首项由类型 2 之字形障碍表示的之字形二项式，也都能被某个类型 1 简单之字形对对应的之字形二项式首项整除。

对于首项由类型 3 之字形障碍表示的之字形二项式，子路径 $\{i_1, \ldots\ldots, i_t = \alpha, i_{t+1}, \ldots\ldots, i_s\}$，其中 i_s是 π_2上大于 i_1 在 $<_r$下的第一个节点，是类型 2 简单之字形对的之字形二项式首项的图形表示。由引理 5.1 可知这一点。因此，所有这类之字形二项式的首项也都能被某个简单之字形对的之字形二项式首项整除。证明至此完成。□

令 S 为类型 1 简单之字形对的之字形二项式首项中的变量子集。我们称图 G_S 为 *1* 型简单之字形障碍。类似地，我们定义 类型 *2* 的简单之字形障碍。

例5.4。 图 2中第一个和第三个图的之字形障碍都很简单（分别为类型 1 和类型 2）。另一方面，第二个图中的之字形障碍并不简单，但包含一个作为子图的类型 2 简单之字形障碍。这个障碍可通过删除图中的两条有向边中的第一条得到。



(a) 一棵树 T。 (b) 图 G_S。

FIGURE 3. 树 T 和图 G_S 对应于环 R_T中变量的一个子集 S 。

这种子图包含关系对应于首项的整除性，正如引理 5.3 的证明中所见。

由于 T是顶点集为 $[n+1]$的树，$\mathcal{C}_T$的维数为 $|V|+|E|-1=2n$。根据引理 5.3，由指定的良好项序给出的三角剖分$\mathcal{T}$的 $\mathcal{C}_T$ 的面可刻画为所有子集 S，这些子集由变量生成，且R_T满足 $|S|=2n+1$，并且对应的图 G_S不包含任何基本障碍或简单之字形障碍。

下文中，在无向图 $G=(V,E)$中，若存在一条路径 $\pi=\{i_1i_2,\ldots,i_{k-1}i_k\}$，使得$i_1=i$，$i_k=j$且 $i_2,\ldots,i_{k-1}\notin C$，我们就称两个节点 i和j 在给定子集 $C\subset V$时是连通的。若顶点子集 B中的所有顶点在给定 C 时都连通，并且不存在一对顶点 $i\in B$ 和 $j\notin B$，使得 i 和 j 在给定 C时连通，我们就称图 G的顶点子集 B在给定 C 时是极大连通的。对于树 T以及环 R_T中变量的子集 S，我们用 $G_{S,1},\ldots,G_{S,M}$表示图 G_S 中由在给定 $\mathfrak{Z}_S$时极大连通的 T 所诱导的子图。我们将图的集合 $G_{S,1},\ldots,G_{S,M}$称为 G_S的 Z_S-分支。

回顾命题 2.12， G_S 的三角剖分中 S 的面所对应的支撑图是树 T。因此，每个$G_{S,j}$ 的支撑图都是 T的子树。下文中，我们需要提及$G_{S,j}$ 的某些子图；这些子图是在$G_{S,j}$ 上由 T的相应导出子图的顶点集所导出的子图。例如，尽管 i 在$G_{S,j}$ 中可能具有大于 1 的度，但如果它是$G_{S,j}$ 支撑图中的叶节点，我们就称它为$G_{S,j}$ 的叶节点。类似地，如果$G_{S,j}$ 的某个子图是其支撑图中某条路径的节点集所导出的子图，即使其中可能包含同一对顶点之间的重边，我们也可以称它为$G_{S,j}$ 中的一条路径。不过，这种轻微的术语滥用应当能从上下文中看清。首先，我们称图$G_{S,j}$ Z_S是有界的，如果$G_{S,j}$ 的所有叶节点都属于 $\mathfrak{Z}_S$。否则，我们称它为Z_S-无界的。

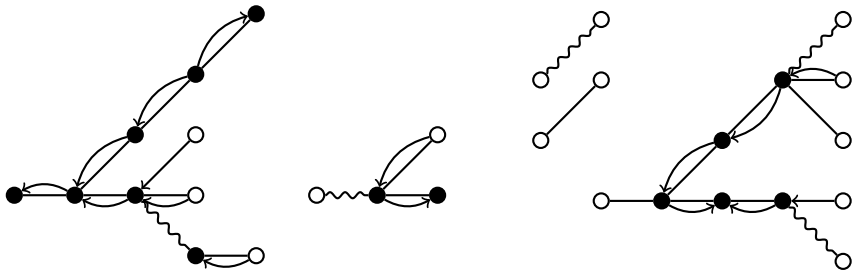


FIGURE 4. 图 Z_S的连通分支 G_S 见图3b。

例 5.5。 考虑树 T 和图 G_S，它们分别如图 3a 和图 3b所示。对于 G_S，我们有

$$\mathfrak{Z}_S = \{6, 7, 10, 11, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 25\}.$$

取顶点集上的自然序为 $<_r$，其中 $r = 1$，据此可见， G_S 不含基本障碍，也不含简单之字形障碍。从 G_S 还可看出， $|S| = 2n + 1$，其中 $n = 24$，因此 S 是三角剖分 T 的一个面。

图 G_S 具有 Z_S个连通分支，如图4所示，其中最左侧的两个图是 Z_S-无界的，其余图则是 Z_S-有界的。

为了分析图 $G_{S,\,j}$，引入边对顶点的分离这一概念会很有帮助。给定一个图 G，其顶点集为 V，边集为 E，若对于节点子集 $A \subset V$ 中的任意一对节点，所有从 i 到 j 且位于 G 中的路径都包含一条属于 B的边，则称节点子集 $A \subset V$ 被边子集 $B \subset E$ 分离。注意，集合 B 是一个割集，其对应的每个割在 A中都只包含一个顶点。下面的引理将会用到。

引理 5.6。 设 T 为一棵树，其叶节点集合为 A。如果集合 A 由B分隔，则 $|B| \geq |A| - 1$。

证明。 注意，若 B 是一组边，将树 T的叶节点 A 分隔开，那么从 T 中删除 B 中的边后，会得到一个森林，其中至少有 $|A|$ 个连通分量，并且 T 中任意两个叶节点都不在同一个分量中。这是因为从森林中移除一条边，总会使连通分量的数量恰好增加 1。因此，要得到 $|A|$ 个各自包含唯一叶节点的连通分量，我们必须移除 $|A| - 1$ 条边，由此得出所需的下界。 □

引理 5.7。 设 T 为一棵树，其叶节点集合为 A，并设 B 为 T中的一组边，它们将 A分隔开。如果 $|B| = |A| - 1$，那么对于每条边 $e \in B$，都存在唯一的顶点对 $i, j \in A$，使得 B将 i与 j 分隔开，但 $B \setminus e$ 不会。

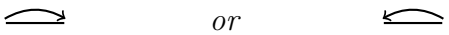
证明。根据引理 5.6，集合 B 是 A 的一个极小分离集。因此，从 B 中移除单边 $e = st \in B$，至少会使 T 的一对叶子连通。假设有两对叶子连通，分别为 i、j 和 k、ℓ。那么，不失一般性， i和 k 以及 j 和 ℓ 分别位于单边 e 的同一侧；也就是说，删除边 e 后，它们处于同一个连通分量中。设 j 和 ℓ 位于包含 t 的分量中，而 i 和 k 位于包含 s 的分量中。

由于 T 是一棵树，i 和 k 之间存在唯一路径，而这条路径必定由 i 和 s 之间的路径与 k 和 s 之间的路径首尾相接组成。由于这条路径不包含 e，它必定包含另一条边 $e' \in B$。不失一般性，假设 e' 位于 i 和 s 之间的路径上。这与从分离集移除 e 后使 i 和 j 连通的假设相矛盾，证明完毕。□

我们称边 e 相对于 $B \subset E$ 临界分隔图$G = (V, E)$中的一对节点 i 和 j，如果 B 分隔了 i 和 j，但 $B \setminus e$ 没有分隔。引理 5.7 指出，若 G 是一棵树，其叶节点集为 A，且 B 分隔了 A 与$|B| = |A| - 1$，那么 B中的每条边都会在 G 中临界分隔一对唯一的叶节点。对于固定的树 T，我们令 $m_j := |V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S|$。下面的结果将引理 3.1 推广到任意树。

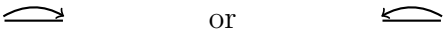
引理 5.8。设 T是节点集为 $[n+1]$ 的一棵树，且 S是$\mathcal{C}_T$的三角剖分中的一个面。若 $\mathfrak{Z}_S = \{i_1 <_r \cdots <_r i_{n+1-k}\}$ 则可得

(1) G_S 恰好包含 k 条双边，(2) 所有双边都具有以下形式



(3) $\overline{G_{S,j}}$ 对所有 $j \in [M]$都恰好包含 $m_j - 1$ 条单边。

证明。（2）成立这一事实可由（2）中列出的前四个基本障碍推出。因此，G_S 中的所有边要么是单边，要么是以下形式的双边



现在证明（1）成立。由于 S是一个面，且 $\dim(\mathsf{C}_T) = |V(T)| + |E(T)| - 1 = 2n$，因此有 $|S| = 2n+1$。现在假设 $|\mathfrak{Z}_S| = n-k+1$。根据命题 2.12，我们知道 G_S 的支撑图等于 G，因此 G_S 至少包含 n 条边。由于 $|\mathfrak{Z}_S| + n = 2n - k + 1$ 和 $|S| = 2n + 1$，且 G_S 中的每条边不是单边就是双边，因此 G_S 恰好包含 k 条双边。

接下来要证明（3）成立。首先考虑$G_{S,\,j}$ 是 Z_S有界的情况。令 $n_j = |V(\overline{G_{S,\,j}})|$。我们断言，$\overline{G_{S,\,j}}$中至多有 $n_j - m_j$ 条双边；等价地，$\overline{G_{S,\,j}}$中至少有 $m_j - 1$ 条单边。为此，注意到$G_{S,\,j}$ 中的单边必须将 $V(G_{S,\,j}) \cap \mathfrak{Z}_S$中的所有节点分隔开。也就是说，支撑图中与$G_{S,\,j}$ 中的单边相对应的$G_{S,\,j}$ 的边，必须将该支撑图的叶节点分隔开。否则，G_S中至少存在一个简单之字形障碍，这将与 S 是一个面相矛盾。

为证明这一断言，反设不然。于是存在一对顶点 $i_1, i_k \in V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S$，使得 T中连接 i_1和 i_k的唯一路径 $\pi = \{i_1 i_2, \ldots, i_{k-1} i_k\}$ 在 $G_{S,j}$ 中仅包含双边。不失一般性，设 $i_1 <_r i_k$。由于 $i_1, i_k \in \mathfrak{Z}_S$，我们知道这些节点是 G_S中的 ○ 节点。令 $\alpha = \min_{<_r}\{i_1, \ldots, i_k\}$，并令 π_1 和 π_2 分别表示 π 中连接 i_1 与 α、以及 i_k 与 α的子路径。如果在 π_1 或π_2 上分别有一个指向 i_1 或 i_k的有向箭头，那么 G_S 就包含一个类型 (1) 或 (2) 的之字形障碍，因此也包含一个 1 型简单之字形障碍。这将与 S 是一个面相矛盾。因此，

π 上的所有有向边都必须指向 α。然而，这意味着 G_S包含一个 2 型简单之字形障碍，这同样构成矛盾。

因此，不存在这样的双边路径，我们由此得出，单边必须将 $V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S$ 中的节点分隔开。由于 T 是一棵树，我们要求 $m_j - 1$ 中至少有 $G_{S,\,j}$ 条这样的单边，依据引理5.6。类似地，如果 $G_{S,j}$ 是 Z_S-无界的，我们可以考虑 $G_{S,j}$ 的导出子图，该子图由 T 中连接 $V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S$ 中各顶点的唯一路径上的所有节点构成，同样的论证也适用。因此，$G_{S,j}$ 中至少有 $m_j - 1$ 条单边，且至多有 $n_j - m_j$ 条双边。

我们现在断言，$G_{S,j}$ 中恰好有 $m_j - 1$ 条单边。根据我们对 Gröbner 基的选择，图 $G_{S,j}$ 也对应于支撑图 T' 的宇宙学多胞体三角剖分的一个面，其中该支撑图属于 $G_{S,j}$。由于 T' 是一棵有 n_j 个顶点的树，并且 $|V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S|$ 包含 m_j 个顶点，由 (1) 可知，$G_{S,j}$ 必须恰好包含 $n_j - m_j$ 条双边。等价地，它必须恰好包含 $m_j - 1$ 条单边，由此完成证明。□

在引理 5.8 的证明中，我们使用了这样一个事实： Z_S-分量 $G_{S,\,j}$ 中的单边集对应于该分量支撑图中将其叶节点分隔开的边集。下文中，如果某个 Z_S-分量中的一组边 分隔一组节点 A ，我们就简称这组边分隔了 A，即相应的支撑图中的边分隔了 A。

根据定义，每个 Z_S-分量$G_{S,\,j}$ 都有一个唯一的极小节点 $r_{S,\,j}$——→按照顶点序 $<_r$而言。该节点是 T在顶点集 $V(G_{S,\,j})$ 上的导出子图的根。从根节点 $r_{S,\,j}$ 到叶节点 i的路径，称为这棵子树中的根到叶路径。我们可以考虑图 $G_{S,\,j}$中由这条路径的节点集导出的子图。为简单起见，我们将这样的子路径称为 $G_{S,\,j}$中的根到叶路径，并指出它可能包含重边。提到叶到根路径时，我们设想将这样的根到叶路径反向读取，即从叶节点读到根节点。

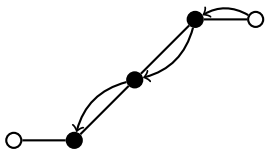
对于每个节点 $i \in V(G_{S,j}) \cap (\mathfrak{Z}_S \setminus \{r_{S,j}\})$，考察从 i 到 $r_{S,j}$ 在 $G_{S,j}$中的叶到根路径上遇到的第一条单边。根据引理 5.7，这条边临界分隔一对唯一的顶点 $s, t \in V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S$ （相对于 $G_{S,j}$中的单边集合）。此外，应用与引理 5.7 的证明类似的论证可知，这两个顶点中必有一个是 i，不妨设为 $s = i$。令 $\pi = \{i_1 i_2, \ldots, i_{k-1} i_k\}$ 表示 T中连接 i与 t的唯一路径，并令$\alpha = \min_{<_r}\{i_1, \ldots, i_k\}$。我们称连接 α与 i的路径为 i的阈值路径。若取 $i = i_k$和 $\alpha = i_t$，其中 $t \in [k]$ 属于 π，则可见 $i_t <_r i_{t+1} <_r \cdots <_r i_k$；也就是说，按照序 $<_r$，阈值路径是从 i 到 α 的递减路径。因此，阈值路径总包含 π 上分隔 i与 t 的那条唯一单边，因为用于定义阈值路径的叶到根路径同样是递减的。

如果 $i <_r t$ 由此可知，阈值路径就是路径 π_1，且如果 $t <_r i$ 它是 π_2。在前一种情况下，我们称阈值路径为类型 *1*；在后一种情况下，则称其为类型 *2* 。如果路径中 i与第一条单边之间的部分仅由无向边和指向远离 i 的有向边配对组成，且该单边是指向远离 i 的有向边或一个 ⇝，那么类型 1 阈值路径就是阻塞 的。如果路径中 i

与第一条单边之间的部分仅由无向边和指向远离 i 的有向边配对组成，并且满足以下条件之一：

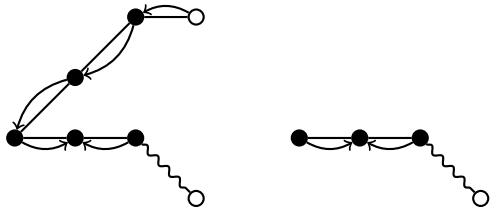
(1) 单边是无向的，并且阈值路径上的所有有向边都背离 i；或者 (2) 单边是 $\rightsquigarrow$；或者 (3) 单边是背离 i 的有向边，并且路径上 α 与这条单边之间的部分至少有一条有向边指向 i。

例 5.9. 我们来看一些例子，考察图 Z_S 的最右侧分量中的阈值路径 G_S（见例 5.5）。例如，这个 Z_S 分量中顶点 22 的阈值路径为



从 22 到 $r = 1$ 的叶到根路径上唯一的边，其首条单边是此处所示的连接顶点 13 和 16 的无向边。这条边临界分隔节点 13，$22 \in \mathfrak{Z}_S$（相对于 Z_S 分量中所有单边的集合而言），因此，22 的阈值路径是 Z_S 分量中从 22 到 13 的整条路径。由于 $13 <_r 22$，这是一条类型 2 阈值路径。我们看到它是阻塞的，因为它满足 (1)。

作为第二个例子，考虑同一 Z_S 分支中的叶节点 25。其叶到根路径上的第一条边是单边。这条边临界分隔了节点 22，$25 \in \mathfrak{Z}_S$。这些节点之间的路径如下图左侧所示，而 25 的阈值路径如下图右侧所示：



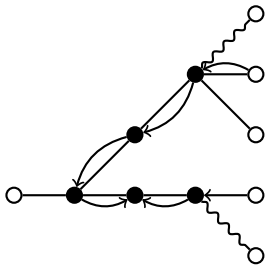
由于 $22 <_r 25$，25 的阈值路径也是类型 2，根据 (2) 可知它是阻塞的。

作为第三个也是最后一个例子，考虑同一 Z_S 分支中从节点 21 出发的根到叶路径。由于这条路径上的第一条边是单边，并且临界分隔了节点 21 和 22，因此节点 21 和 22 之间的路径如左图所示，而 21 的阈值路径如右图所示：

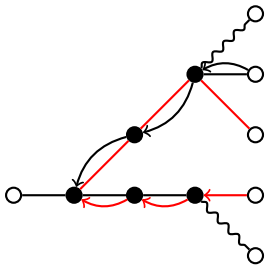


由于 $21 <_r 22$ 这是类型 1 阈值路径，可见它是阻塞的，因为这条单边是一个 $\rightsquigarrow$。

我们将在刻画 C_T 的三角剖分的各个面时使用阻塞路径的概念。此外，我们还需要另一种类型的路径。给定一个



(a) 图 G_S in 的一个 Z_S-分量图 3b。



(b) 图 Z_S-分量，见图 5a，其中一条边的方向被反转。

FIGURE 5. 部分定向分支的示例和非示例。红色部分展示了一个部分定向分支。

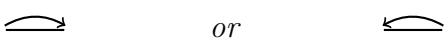
图 T 的节点 i，如果 $i <_r j$，且在 T 中从 j 到 r 的唯一路径上，没有节点大于 i，我们就称节点 j 覆盖 i。令 $\pi = \{i_1 i_2, .., i_{k-1} i_k\}$ 为 T 中连接 i 和 j 的唯一路径，并令 $\alpha = \min_{<_r}\{i_1, \ldots, i_k\}$。从 j 到 i 的部分定向分支 是 π 的一种部分定向，其中 i 与 α 之间路径上的所有边均无定向，而 j 与 α 之间路径上的所有边均定向为指向 α。

例5.10。 我们考虑图 Z_S中的分量，见图5a，其对应的图G_S 见图 3b。节点 23 被节点 24 和 25 覆盖。观察该图可知，从 24 到 23 或从 25 到 23 均不存在部分定向分支 Z_S-分量。然而，如果反转节点 16 和 18 之间边的方向，就会得到一个从 24 到 23 的部分定向分支，如图5b所示。

下面的定理刻画了在指定的良好项序下，树 T 的 $\mathbf{C}_T$ 的三角剖分的面。

定理 5.11。 设 S 是 R_T 的生成元子集，其中 T 是节点集为 $[n+1]$ 的树。设 $G_{S,1}$，...，$G_{S,M}$ 是 G_S 的 Z_S-连通分量。集合 S 是与由序 $<$ 诱导的字典序相对应的 $\mathcal{T}$ 对 $\mathcal{C}_T$ 的三角剖分的一个面，当且仅当满足以下条件：

（1） G_S 连通，（2） G_S 仅包含单边和双边，其中所有双边均为以下形式



(3) 对所有 $j \in [M]$ *(a)* $G_{S,j}$ 恰好包含 $|V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S| - 1$ 条单边；*(b)* 对所有 $i \in V(G_{S,j}) \cap (\mathfrak{Z}_S \setminus \{r_{S,j}\})$，$i$ 的阈值路径都是阻塞的；*(c)* 对所有 $i \in V(G_{S,j}) \cap (\mathfrak{Z}_S \setminus \{r_{S,j}\})$，不存在从覆盖 i 的节点通往 i 的部分定向分支；*(d)* 若 $r_{S,j} \in \mathfrak{Z}_S$，则与其关联的边要么是一条单边，要么是一条无向边，要么是一条无向边加上一条背离 $r_{S,j}$ 的边。

证明。首先假设 S 是一个面。由命题 2.12 可知，条件 (1) 成立。由引理 5.8 可知，条件 (2) 和 (3)(a) 也成立。

为证明 (3)(b) 成立，考虑一条从 $i \in V(G_{S,j}) \cap (\mathfrak{Z}_S \setminus \{r_{S,j}\})$ 出发的叶到根路径，以及这条路径上直到并包括第一条单边的部分。注意，这是一条 i 的阈值路径的子路径。由于 S 是一个面，因此单边之前的所有边都是双边，并且根据 (2)，它们具有上文指定的形式。由于这条路径是叶到根路径，因此从单边向外读取其顶点时，会得到节点关于序 $<_r$ 的递增序列。因此，如果这些双边中有任何一条包含指向 i 的箭头，那么 G_S 就会包含一个 1 型简单之字形障碍，这与 S 是一个面矛盾。

现在考虑 $V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S$ 中被这条路径上的单边分隔开的唯一一对顶点，其中一个是 i，另一个记为 t。将这条路径记为 π，并考虑其关联的 α 值，以及 α 与 i 之间和 α 与 t 之间的两条路径 π_1 和 π_2。这里，令 π_1 表示 α 与 i 、t 中按 $<_r$ 排序较小的顶点之间的路径，令 π_2 表示 α 与这两个顶点中较大的顶点之间的路径。注意，单边总是在包含 i 的路径 π_1 或 π_2 上。由于给定的单边是分隔 i 和 t 的唯一分隔边，我们知道这条路径上的其他边都是双边，且具有 (2) 中指定的形式。如果 $i <_r t$ 且单边位于 π_1 上（即从两个节点 i 和 t 中较小者到 α 的路径），那么 π_2 必须只由指向 α 的双边组成。否则， G_S 将包含一个 1 型简单之字形障碍。由于除单边外， π_1 上的所有边也都是双边，如果单边无向， G_S 就会包含一个 2 型简单之字形障碍。如果该边指向 i，则会包含一个 1 型简单之字形障碍，因此唯一有效的选项是一个 $\rightsquigarrow$，或一条指向 α 的边。因此， i 的阈值路径属于类型 1 且具有阻塞性。

另一方面，如果 $t <_r i$，那么 i 与 t 之间路径上的唯一单边将位于 π_2 上（即，从 i 与 t 中较大的节点到 α 的路径上）。因此，为了避免 1 型简单之字形障碍， π_1 上的所有边都是双边，并且都指向 α。我们注意到，该单边不能是指向 i 的有向边，否则也会导致 1 型简单之字形障碍。若该边无向，则只有当 π_2 上的所有有向边都指向 α 时， G_S 才不含 1 型简单之字形障碍。若该单边是 $\rightsquigarrow$，则单边与 i 之间的所有有向边都必须指向 α。最后，若该单边指向 α，则 α 与该单边之间必须至少有一条有向边指向 i。否则， G_S 将包含一个 2 型简单之字形障碍。因此，在这种情况下，阈值路径也必须是阻塞的。由此，(3)(b) 对于 S 面成立。

为证明 (3)(c) 成立，请注意，若存在这样的部分定向分支，则 G_S 必然包含一个 2 型简单之字形障碍，这与 S 是一个面相矛盾。

要证明 (3)(d) 成立，只需注意，在 $r_{S,j}$ 处采用任何其他边配置，都会意味着 G_S 包含一个基本障碍。因此，若 S 是该三角剖分的一个面，则所列条件均成立。

反过来，假设所列条件对 S成立。令 $|Z_S| = n+1-k$。现在我们将证明 (3)(a) 意味着 G_S 恰好包含 k 条双边。由于G_S是顶点集为 $[n+1]$的连通图，它至少包含 n条边。若这些边中恰好有k 条是双边，则 $|S| = 2n+1$，这正是 S成为一个面的正确维数。为证明这一断言，假设 (3)(a) 成立；也就是说，假设每个$G_{S,j}$都恰好包含 $m_j - 1$ 条单边，其中令 $m_j = |V(G_{S,j}) \cap \mathfrak{Z}_S|$。我们对 G_S中 Z_S分支的数量 $M \geq 1$ 进行归纳。容易看出，当 $M = 1$时结论成立，因为此时 $m_j - 1 = (n+1-k) - 1$。现在假设结论对至多含有 $M-1 \geq 0$ Z_S个 Z_S分支的 G_S 成立，并考虑含有M Z_S个 Z_S分支的 G_S。由于 $M > 1$，至少有一个 Z_S分支包含一个不含根节点 r的 T 的 $\longrightarrow$汇点。假设该分支为$G_{S,j}$，且其支撑图有 n_j 条边。注意，$r_{S,j}$ 必定是一个 ○ 节点，因为 $r_{S,j} \neq r$。

于是，删除$G_{S,\,j}$ 的支撑图中的所有边后， T 所对应的子图是一棵包含 $n - n_j$ 条边的树。由于$G_{S,\,j}$ 不包含 r，且包含 — $\vec{T}$的一个汇点，因此从 G_S中删除 $V(G_{S,\,j}) \setminus \{r_{S,\,j}\}$中的所有顶点及其所有关联边后，得到的图 $G_{\tilde{S}}$ 包含$n+1-k-(m_j-1) = (n+1-k) - m_j + 1$ ○个节点。根据归纳假设， $G_{\tilde{S}}$包含$(n+1-k) - m_j$ 条单边。根据假设，$G_{S,\,j}$ 包含 $m_j - 1$ 条单边。因此， G_S 包含 $n-k$ 条单边，等价地说， k 包含条双边。

由于 $|S| = 2n+1$的大小恰好符合 S 成为一个面的要求，因此只需证明集合 S 不包含基本障碍或简单之字形障碍。由(2)以及(3)(d)和(3)(b)（考察阻塞的定义时）可知， G_S 不包含基本障碍。由(3)(b)和(3)(c)可知，G_S 不包含简单之字形障碍，证明至此完成。□

6. Open problems

本文最后提出几个尚待解决的有趣问题。正如我们对圈和树所做的那样，对第¨2节中给出的格罗布纳基进行组合分析，可以揭示相应三角剖分的显式面描述。此外，正则幺模三角剖分的一个特点是，体积的计算可以简化为对各面的计数。进一步深入理解这一点将很有意义。

问题6.1。 为更一般的图族的宇宙学多胞体的正则幺模三角剖分给出面描述。任意图的宇宙学多胞体的体积能否用初等图不变量表示?

从组合观点来看，人们通常会关注比格多胞体的体积更精细的不变量。其中一个常见例子是 h^*-多项式；也就是说，它是一个单变量多项式，具有整数系数，并作为格多胞体的 埃尔哈特级数 的分子出现（例如参见 [4, 第 3]章）。例如，我们通过实验观察到，树的宇宙学多胞体的 h^*-多项式，其中的树有 $n+1$ 个顶点，等于 $h^*(t) = (1+3t)^n$。

问题 6.2。 求宇宙学多胞体 C_G 的 h^*-多项式，并用 G 的图不变量表示。

最后，正如我们在引言中所述，由于多胞体的典范形式计算可以归结为计算任意三角剖分各个面的典范形式，我们提出以下问题：

问题 6.3. 描述面数最少的宇宙多胞体三角剖分。

选择一种字典序项序，使得 z-变量大于其他变量，则相应的初始理想将包含所有 z-变量的平方作为生成元，因为每个平方都是某个基本二项式的首项。由此得到的三角剖分，其各个面并非都具有最小体积，但其面数可能显著少于幺模情形。例如，实验表明，这一方法可将具有 $n+1$ 个顶点的树的宇宙多胞体剖分为 2^{n-1} 个面，而幺模三角剖分则有 4^n 个面。

致谢。作者谨此感谢 Paolo Benincasa、Lukas K¨uhne 和 Leonid Monin 提供的宝贵讨论。我们也要感谢在奥地利 Kleinwalsertal 的 Haus Bergkranz 举办的*2022* 年组合学协作工作坊：代数与几何组合学专题，本研究便是在此处开始的。Liam Solus 获得了由克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会资助的瓦伦堡自主系统与软件计划（WASP）、KTH 数字未来实验室、G¨oran Gustafsson 青年研究者奖，以及瑞典研究理事会（Vetenskapsr˚adet）2019-05195 号启动基金的支持。

References

[1] Nima Arkani-Hamed、Yuntao Bai 和 Thomas Lam。《正几何与典范形式》。高能物理学杂志，2017(11)：1–124，2017。1，2[2] Nima Arkani-Hamed、Paolo Benincasa 和 AlexanderPostnikov。《宇宙学多胞体与宇宙波函数》。arXiv 预印本 arXiv:1709.02813，2017。1，2[3] Nima Arkani-Hamed、Andrew Hodges 和 Jaroslav Trnka。《振幅体中的正振幅》。高能物理学杂志，2015(8)：1–25，2015。2[4] Matthias Beck 和 Sinai Robins。《离散地计算连续对象》。数学本科生教材。施普林格，纽约，第二版，2015。多面体中的整点枚举，David Austin 绘图。28[5] Paolo Benincasa 和 William J Torres Bobadilla。《散射振幅与宇宙波函数的物理表示》。SciPost Physics，12(6)：192，2022。2[6] Jes´us A. De Loera、J¨org Rambau 和 Francisco Santos。《三角剖分》，数学中的算法与计算丛书第25卷。施普林格出版社，柏林，2010。算法与应用的结构。8[7] Pavel Galashin 和 Thomas Lam。《振幅体的奇偶对偶》。Compositio Mathematica，156(11)：2207–2262，2020。2[8] Enrico Herrmann、Cameron Langer、Jaroslav Trnka 和 Minshan Zheng。《正几何、局部三角剖分与振幅体的对偶》。高能物理学杂志，2021(1)：1–101，2021。2[9] Akihiro Higashitani、Katharina Jochemko 和 Mateusz Micha˙lek。《对称边多胞体的算术方面》。Mathematika，65(3)：763–784，2019。2

[10] Ryota Kojima 和 Cameron Langer。《振幅体的符号翻转三角剖分》。高能物理学杂志，2020(5)：1–34，2020。2[11]Lukas K¨uhne 和 Leonid Monin。《宇宙学多胞体的面》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.08069*，2022。1，3，10，14[12] Thomas Lam。《正几何入门》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2208.05407*，2022。2[13] Tetsushi Matsui、Akihiro Higashitani、Yuuki Nagazawa、Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。《由图导出的埃尔哈特多项式的根》。*J. Algebraic Combin.*，34(4)：721–749，2011。2[14] Fatemeh Mohammadi、Leonid Monin 和 Matteo Parisi。《振幅体的三角剖分与典范形式：一种超越多胞体的基于纤维的方法》。*Communications in MathematicalPhysics*，387(2)：927–972，2021。2[15] Bernd Sturmfels。格罗布纳基与凸多胞体，第8卷。美国数学学会，1996。2，8

Department of Mathematics, University of Osnabrück, Albrechtstrasse 28a, 49076 Osnabrück, Germany电子邮箱地址: juhnke-kubitzke@uni-osnabrueck.de

Department of Mathematics, KTH Royal Institute of Technology, SE-100 44Stockholm, Sweden电子邮箱地址: solus@kth.se

Department of Mathematics, Università di Pisa, L.go B. Pontecorvo, 5, 56127Pisa, Italy电子邮箱地址: lorenzo.venturello@unipi.it