arXiv:2303.05881v1 [math.GR] 10 Mar 2023

通过平均阶刻画 A_5

Marius T˘arn˘auceanu

2022年12月15日

摘要

设 $o(G)$为有限群 G的平均阶。M. Herzog、P. Longobardi 和 M. Maj [7] 证明，若 G是非可解的，且$o(G) = o(A_5)$，则$G \cong A_5$。本文证明，对于任意有限可解群 G，等式$o(G) = o(A_5)$均不成立。因此，在同构意义下， A_5 由其平均阶确定。

MSC2000：主要分类 20D60；次要分类 20D10、20F16。关键词：平均阶、元素阶之和、可解群。

1 引言

给定一个有限群 G，我们用 $\psi(G)$ 表示 G的元素阶之和，用 $o(G)$ 表示 G的平均阶，即

$$\psi(G) = \sum_{x \in G} o(x) \text{ and } o(G) = \frac{\psi(G)}{|G|}.$$

近年来，人们对研究这些函数的性质及其与 G 的结构之间的关系越来越感兴趣（例如参见 [1]-[7], [9]-[10], [12] 和 [14]-[16]）。

在 [9], A. Jaikin-Zapirain 使用平均阶来确定有限 p-群/幂零群的共轭类数的一个下界。他还提出了以下问题：“设 G 是一个有限（p-）群，N 是 G 的一个正规（阿贝尔）子群。是否有 $o(G) \geq o(N)^{\frac{1}{2}}$? ”最近，E.I. Khukhro、A. Moret´o 和 M. Zarrin 证明了以下结果（见 [10] 的定理 1.2）：

定理 A. 设 $c > 0$ 是一个实数，且 $p \geq \frac{3}{c}$ 是一个素数。那么存在一个有限 p-群 G，它有一个正规阿贝尔子群 N，使得 $o(G) < o(N)^c$。

注意，定理 A 对 Jaikin-Zapirain 的问题给出了否定答案，即使将指数 $\frac{1}{2}$ 替换为任意正实数 c也是如此。在同一篇论文 [10], 中，作者提出了以下猜想：

猜想。设 G 是一个有限群，并假设 $o(G) < \frac{211}{60} = o(A_5)$。那么 G 是可解的。

这一猜想已由 M. Herzog、P. Longobardi 和 M. Maj 证实 [7]。

定理 B。设 G 是一个有限群。若 $o(G) < \frac{211}{60}$，则 G 是可解的。此外，若 G 是一个非可解有限群，则 $o(G) = \frac{211}{60}$ 当且仅当 $G \cong A_5$。

这构成了当前工作的出发点。我们的主要结果如下。

定理 1.1。若 G 是一个有限可解群，则 $o(G) \neq \frac{211}{60}$。

现在显然，定理 B 和定理 1.1 得出以下关于 A_5 的刻画。

推论 1.2. 在同构意义下，A_5 是唯一满足 $o(G) = \frac{211}{60}$ 的有限群 G。

为了证明我们的结果，我们需要下面的定理。

定理 C. 设 G 是一个有限群，且 $n_d(G)$ 是 G 中阶为 d 的元素个数，$\forall\, d \in \mathbb{N}$。那么以下结论成立：

1)（T.J. Laffey [11]）若 p 是 $|G|$ 的一个素因子，且 G 不是一个 p-群，那么

$$n_p(G) \leq \frac{p}{p+1}\,|G| - 1.$$

2)（G.A. Miller [13]）若 G 是非阿贝尔的，那么

$$n_2(G) \leq \frac{3}{4}\,|G| - 1.$$

我们使用的大部分记号都是标准的，通常不再赘述。关于群的初等概念和结果可参见 [8]。

2 主要结果的证明

我们先给出下面这个简单但重要的引理。

引理 2.1. 设 G 是一个阶为 n 的有限群，$n_d(G)$ 表示 G 中阶为 d 的元素个数，$\forall\, d \in \mathbb{N}^*$。若 $o(G) = \frac{211}{60}$，则

$$4n_2(G) + 3n_3(G) + 2n_4(G) + n_5(G) \geq \frac{149}{60}\, n - 5. \tag{1}$$

证明. 由于 $n = \sum_{d\in\mathbb{N}^*} n_d(G)$，我们可推得

$$\begin{aligned}\psi(G) &= 1 + 2n_2(G) + \ldots + 6n_6(G) + \ldots \\ &\geq 1 + 2n_2(G) + \ldots + 5n_5(G) + 6(n_6(G) + n_7(G) + \ldots) \\ &= 1 + 2n_2(G) + \ldots + 5n_5(G) + 6(n - 1 - n_2(G) - \ldots - n_5(G)) \\ &= 6n - 5 - (4n_2(G) + 3n_3(G) + 2n_4(G) + n_5(G)).\end{aligned}$$

由于 $o(G) = \frac{211}{60}$，可得 $\psi(G) = \frac{211}{60}\, n$。因此我们有

$$\frac{211}{60}\, n \geq 6n - 5 - (4n_2(G) + 3n_3(G) + 2n_4(G) + n_5(G)),$$

这等价于 (1)，证明完毕。 □

我们的第二个引理表明，不是 p-群的有限幂零群的平均阶不可能是某些有理数。

引理 2.2. 设 G 是一个有限幂零群。若 G 不是 p-群，则 $o(G) \notin \left\{\frac{61}{15}, \frac{211}{60}\right\}$。

证明. 我们将 G 写成其西洛子群的直积

$$G = G_1 \times \cdots \times G_k,$$

其中，对于所有 $i = 1, ..., k$，$k \geq 2$ 和 $G_i \in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$。由于函数 o 是乘法性的，我们得到

$$o(G) = o(G_1) \cdots o(G_k).$$

设 $|G_i| = p_i^{n_i}$, $i = 1, ..., k$，并假设 $p_1 < ... < p_k$。那么对于每个 i，我们有

$$o(G_i) \geq \frac{1 + p_i(p_i^{n_i} - 1)}{p_i^{n_i}} = p_i - \frac{p_i - 1}{p_i^{n_i}} \geq p_i - \frac{p_i - 1}{p_i} > 1.$$

对于 $k \geq 3$，我们得到

$$o(G) \geq o(G_1)o(G_2)o(G_3) \geq \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{2}{3}\right)\left(5-\frac{4}{5}\right) = \frac{147}{10} > \frac{61}{15} > \frac{211}{60}.$$

若 $k = 2$ 且 $(p_1, p_2) \neq (2, 3)$，则

$$o(G) = o(G_1)o(G_2) \geq \min\left\{\left(3-\frac{2}{3}\right)\left(5-\frac{4}{5}\right), \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(5-\frac{4}{5}\right)\right\} = \frac{63}{10} > \frac{61}{15}.$$

因此，我们可以假设 $(p_1, p_2) = (2, 3)$。若 $(n_1, n_2) \neq (1, 1)$，则

$$o(G) = o(G_1)o(G_2) \geq \min\left\{\left(2-\frac{1}{4}\right)\left(3-\frac{2}{3}\right), \left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{2}{9}\right)\right\} = \frac{49}{12} > \frac{61}{15}.$$

最后，对于 $(n_1, n_2) = (1, 1)$，我们有 $G \cong C_6$，因此

$$o(G) = \frac{7}{2} \notin \left\{\frac{61}{15}, \frac{211}{60}\right\},$$

正如所需。 □

现在我们可以证明主要结果。注意，使用 GAP 进行搜索可以发现，不存在阶小于 1000 的可解群 G，使得 $o(G) = \frac{211}{60}$。

定理 1.1 的证明。假设存在一个阶为 $n = 2^2 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdots$ $\alpha_2\ \alpha_3 \geq 1$ H 2 G 的有限可解群 G，且满足 $(G) = \frac{211}{60}$。那么 $60\psi(G) = 211n$，这意味着 with ,。令 be a Sylow -subgroup of。我们区分以下两种情况。

情形 1。 $H \cong C_4$

那么， G 有一个阶为 $m = 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} \cdots$ 的正规 2-补 K。首先，我们证明

$$n_4(G) = 2m = \frac{1}{2}n. \tag{2}$$

假设 $n_4(G) < 2m$。由于 $n_4(G)$ 2 整除 m，因此可得 $n_4(G)$ 2 $\leq \frac{m}{3}$，于是 $n_4(G) \leq \frac{2}{3}m = \frac{1}{6}n$。这意味着 $n_2(G) \leq \frac{1}{12}n$。此外，由于 G 的所有奇阶元素都包含在 K 中，我们得到 $n_3(G)\ n_5(G) < m = \frac{1}{4}n$。因此有

$$4n_2(G) + 3n_3(G) + 2n_4(G) + n_5(G) < \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)n = \frac{5}{3}n,$$

将其与 (1) 结合可得

$$\frac{149}{60}\,n-5<\frac{5}{3}\,n,$$

即 $n\le 6$，矛盾。

接下来我们证明

$$n_2(G)=m=\frac{1}{4}\,n\,. \tag{3}$$

假设 $n_2(G)<m$。由于 G 的每个 2 阶子群都包含在至少三个 Sylow 2-子群中，我们推得 $n_2(G)\le \frac{m}{3}=\frac{1}{12}\,n$。类似地，我们得到

$$4n_2(G)+3n_3(G)+2n_4(G)+n_5(G)<\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{4}+1+\frac{1}{4}\right)n=\frac{7}{3}\,n$$

因此

$$\frac{149}{60}\,n-5<\frac{7}{3}\,n$$

由 (1) 得。因此 $n\le 33$，矛盾。

等式 (2) 和 (3) 表明，G 的任意两个 Sylow 2-子群的交都是平凡的，并且 G 的每个偶数阶元素都是 2-元素。我们推得 G 是一个 Frobenius 群，因此其核 K 是幂零的。另一方面，我们有

$$\frac{211}{60}\,n=\psi(G)=\psi(K)+2n_2(G)+4n_4(G)=\psi(K)+\frac{5}{2}\,n,$$

这意味着

$$\psi(K)=\frac{61}{60}\,n=\frac{61}{15}\,m,$$

或者等价地

$$o(K)=\frac{61}{15}\,.$$

这与引理 2.2 矛盾。

情形 2. $H\cong C_2^2$

由于 G 可解，因此它有一个阶为 $m=3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}\cdots$ 的 Hall 2-子群 K。下面分两种情况讨论。

子情形 2.1. K 是 G的正规子群

于是， K 包含 G的所有奇数阶元素。利用定理 C 的 1)，对于 $p=3$，可得 $n_3(G) \leq \frac{3}{4}m = \frac{3}{16}n$。此外，我们有 $n_3(G)+n_5(G) \leq m-1 = \frac{n}{4}-1$。于是

$$3n_3(G)+n_5(G) = 2n_3(G)+(n_3(G)+n_5(G)) \leq \frac{3}{8}n+\frac{1}{4}n-1 = \frac{5}{8}n-1,$$

这意味着

$$4n_2(G)+3n_3(G)+2n_4(G)+n_5(G) \leq 4n_2(G)+\frac{5}{8}n-1.$$

由 (1) 得

$$n_2(G) \geq \frac{223}{480}n-1. \tag{4}$$

设 H_i、 $i=1$、2、3 是 H 的 2 阶子群。则 $G = KH_1 \cup KH_2 \cup KH_3$，因此对于任意 $i=1$、2、3， $n_2(G) = 3n_2(KH_i)$。另一方面，由西洛定理可知 $n_2(KH_i) \mid m$。若 $n_2(KH_i) < m$，则$n_2(KH_i) \leq \frac{m}{3}$，由此得到

$$n_2(G) \leq m = \frac{1}{4}n. \tag{5}$$

现在，由 (4) 和 (5) 得

$$\frac{223}{480}n-1 \leq \frac{1}{4}n,$$

即 $n \leq 4$，矛盾。因此，对于所有 $i=1$、2、3， $n_2(KH_i) = m$，且$n_2(G) = 3m = \frac{3}{4}n$。于是，由定理 C，2），可得 G 是阿贝尔群。由于 $o(G) = \frac{211}{60}$，这与引理 2.2 矛盾。

子情形 2.2。 K 在 G中不是正规子群

那么， K 在 G中有两个或四个共轭子群。令 $C = 核_G(K)$。由于$[G : C]$ 整除 $4! = 24$，我们得到 $[G : C] = 12$，因此 $[K : C] = 3$。我们注意到，A_4 是阶为 12 且含有多个阶为 3 的子群的唯一群。因此， $G/C \cong A_4$和 K 在 G 中有四个共轭子群，记为 K_i、 $i=1$、.....、4。于是 G 拥有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{4} K_i\right| = m+3\left(m-\frac{m}{3}\right) = 3m$$

奇数阶元素。此外，我们有

$$n_3(G) = n_3\left(\bigcup_{i=1}^{4} K_i\right) \leq n_3(K_1) + 3\left|\bigcup_{i=2}^{4}(K_i \setminus K_1)\right|$$
$$\leq \frac{3m}{4} + 3\left(m - \frac{m}{3}\right) = \frac{11}{4}\,m = \frac{11}{16}\,n \tag{6}$$

通过应用定理 C，1），对于群 K_1 和 $p = 3$。

假设 $n_2(G) = m$。那么，G 的 Sylow 2-子群的个数 s_2 至少为 $\frac{m}{3}$。由于 G 的所有 Sylow 2-子群都包含在 CH 和$|CH| = 4 \cdot \frac{m}{3}$ 中，我们得到 $s_2 \mid \frac{m}{3}$，因此 $s_2 = \frac{m}{3}$。这再次表明G 是一个 Frobenius 群，矛盾。因此

$$n_2(G) \leq \frac{m}{3} = \frac{n}{12}\,.$$

由于 C 包含了 G的所有 Sylow 5-子群，因此可得

$$n_5(G) \leq |C| - 1 = \frac{m}{3} - 1 = \frac{n}{12} - 1\,.$$

Then

$$4n_2(G)+3n_3(G)+2n_4(G)+n_5(G) \leq \frac{n}{3}+3n_3(G)+\frac{n}{12}-1 = 3n_3(G)+\frac{5}{12}\,n-1$$

这与 (1) 一起推出

$$3n_3(G) \geq \left(\frac{149}{60} - \frac{5}{12}\right) n - 4,$$

也就是说

$$n_3(G) \geq \frac{31}{45}\,n - \frac{4}{3}\,. \tag{7}$$

现在，由 (6) 和 (7)，我们得到

$$\frac{31}{45}\,n - \frac{4}{3} \leq \frac{11}{16}\,n,$$

即 $n \leq 960$，矛盾。

证明至此完成。 □

参考文献

[1] H. Amiri 和 S.M. Jafarian Amiri, 《同阶有限群的元素阶之和》, 《代数与应用杂志》10 (2011), 187-190.[2] H. Amiri、S.M. Jafarian Amiri 和 I.M. Isaacs, 《有限群中的元素阶之和》, 《代数通讯》37 (2009), 2978-2980.[3] M. Baniasad Azad 和 B. Khosravi, 《利用元素阶之和判定有限群可解性的准则》, 《代数学杂志》516 (2018), 115-124.[4] M. Baniasad Azad 和 B. Khosravi, 《关于元素阶之和的两个猜想》, 《加拿大数学通报》65 (2022), 30-38.[5] M. Herzog、P. Longobardi、M. Maj, 《有限群可解性的两个新判据》, 《代数学杂志》511 (2018), 215-226.[6] M. Herzog、P. Longobardi 和 M. Maj, 《非循环有限群中元素阶之和的精确上界》, 《纯粹与应用代数》222 (2018), 1628-1642.[7] M. Herzog、P. Longobardi 和 M. Maj, 《有限群可解性的另一判据》, 《代数学杂志》597 (2022), 1-23.[8] I.M. Isaacs, 《有限群论》, 数学研究生教材, 第92卷, 美国数学学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2008.[9] A.Jaikin-Zapirain, 《有限幂零群的共轭类数》, 《数学进展》227 (2011), 1129-1143.[10] E.I. Khukhro, A. Moret´o 和 M. Zarrin, 《元素阶的平均值与有限群的共轭类数》, 《代数学杂志》569 (2021), 1-11.[11] T.J. Laffey, 《有限群中 $x^p = 1$ 的解的个数》, 《剑桥哲学会数学学报》80 (1976), 229-231.[12] M.S. Lazorec 和 M. T˘arn˘auceanu, 《有限群的平均阶》, 《纯粹与应用代数》227 (2023), 文章编号 107276.[13] G.A. Miller, 《关于任意有限群中阶超过二的算子的最小数量》, 《美国数学会通报》13 (1907), 235-239。

[14] M. T˘arn˘auceanu，通过元素阶之和检测有限群的结构性质，《以色列数学杂志》238 (2020), 629-637.[15] M.T˘arn˘auceanu，通过元素阶之和判定有限群的幂零性，《代数通讯》49 (2021), 1571-1577.[16] M. T˘arn˘auceanu，有限群超可解性的另一判据，《代数学杂志》604 (2022), 682-693.[17] GAP 团队，GAP——群、算法与编程，4.11.0 版，2020，https://www.gap-system.org。

Marius T˘arn˘auceanu,
罗马尼亚雅西“Al.I. Cuza”
大学数学系，电子邮件：
tarnauc@uaic.ro