arXiv:2303.05897v1 [math.OA] 10 Mar 2023

关于稳定秩一和实秩零 C*-代数的含单位吸收扩张

QINGNAN AN 和 ZHICHAO LIU

Abstract. 设 A, B 是核、可分的 C*-代数，且具有稳定秩一和实秩零，A是含幺单代数， B 是稳定的，并且 ($\mathrm{K}_0(B)$,$\mathrm{K}_0^+(B)$) 按 Elliott 的意义是弱无孔的 [4]。我们证明，任何具有平凡指标映射的 A 被 B 的含幺扩张都是吸收的。

Introduction

C*-代数扩张理论始于 Brown、Douglas 和 Fillmore 对本质正规算子的分类研究 [3]。但很快，它发展成为一个与数学诸多领域相关的理论。吸收扩张在 C*-代数理论中发挥着重要作用。Voiculescu 的非交换 Weyl-von Neumann 定理 [13]表明，对于任意可分 C*-代数 A，每个 A 被$\mathcal{K}$ 的（含幺）本质扩张都是（含幺）吸收的。对于更一般的可分情形，关于 A 被 $B \otimes \mathcal{K}$的本质扩张，Thomsen 证明总存在一个（含幺）平凡扩张，它是（含幺）吸收的 [12]。要确定在什么条件下可分 C*-代数的任意本质扩张都是吸收的，并非易事。

本文研究 C*-代数由 A 到 B 的扩张。若诱导的六项正合列满足

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K}_0(B) & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(E) & \longrightarrow & \mathrm{K}_0(A) \\ {\scriptstyle\delta_1}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle\delta_0} \\ \mathrm{K}_1(A) & \longleftarrow & \mathrm{K}_1(E) & \longleftarrow & \mathrm{K}_1(B) \end{array}$$

其中 δ_0 和 δ_1 均为零映射，则称扩张： 具有 。利用 Elliott 和 Kucerovsky [5] 建立的内在刻画，以及针对稳定 C*-代数的技巧，我们证明以下定理。

定理 0.1。设 A、B 是核、可分、稳定秩一且实秩零的C*-代数。假设 A 是单的， B 是稳定的，并且$(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 主分类 46L80，次分类 46K35 19K35。
Key words and phrases. 吸收的扩张；稳定秩一；实秩零；稳定。1

是弱无孔的。设 e 是一个具有平凡指标映射的含幺扩张:

$$0 \to B \to E \to A \to 0.$$

那么 e是吸收的。

我们将此结果应用于稳定强 Ext 群，并得到从 K_*-群的扩张同构类到强 Ext 群子群的对应关系。

1. Preliminaries

设 A 是一个含幺 C*-代数。若 A 的可逆元集在 A 中稠密，则称 A 具有稳定秩一，记作$sr(A) = 1$。若 A 的自伴可逆元集在 A的自伴元集 A_{sa} 中稠密，则称 A 具有实秩零，记作 $rr(A) = 0$。若 A 不含幺，令$\tilde{}$表示 A 的最小添单位化，记为 A。若非含幺 C*-代数的添单位化具有稳定秩一（或实秩零），则称该代数具有稳定秩一（或实秩零）。

用 $\mathcal{P}(A)$ 表示由 A 中所有投影组成的集合。设 $p,\ q \in \mathcal{P}(A)$。若存在 $x \in A$，使得 $x^*x = p$ 且 $xx^* = q$，则称 p 在 A 中与 q $Murray–von\ Neumann\ equivalent$，记作 $p \sim q$。若 p 等价于 q 的某个子投影，则记作 $p \preceq q$；若 p 是 q 的子投影，则记作 $p \leq q$。用 $\mathcal{K}$ 表示作用在一个无限维可分希尔伯特空间上的紧算子所构成的 C*-代数。$K_0(A)$ 中的投影类 $[p],\ [q] \in A \otimes \mathcal{K}$ 分别记作 $[p],\ [q]$，并且若 $p \preceq q$ 属于 $A \otimes \mathcal{K}$，则称$[p] \leq [q]$。

若对于任意投影 p、q、e、$f \in A$，只要 $pe = 0$、$qf = 0$、$e \sim f$ 且 $p + e \sim q + f$，就有 $p \sim q$，则称 A 具有投影消去性。A 具有投影消去性，当且仅当 $p \sim q$ 蕴含存在酉元 $u \in \tilde{A}$，使得 $u^*pu = q$（见 [8, 3.1]）。每个稳定秩一的含幺 C*-代数都具有投影消去性，因此，任何两个具有相同 K 理论的投影所生成的理想相同。我们用 I_p 表示 A 中由 p 生成的理想。

若 C*-代数 A 与其和 C*-代数 $\mathcal{K}$ 的张量积同构，即 $A \cong A \otimes \mathcal{K}$，则称其为 $stable$。

若 C*-代数 A 的 C*-子代数 B 不包含于 A 的任何真双边闭理想中，则称其为 $full$。记 $\mathcal{M}(A)$ 为 A 的乘子代数。给定 $\mathcal{M}(A)$ 中的一个投影 p，pAp 是 A 的遗传子代数，称为一个角。若 $\mathcal{M}(A)$ 中的投影 p 所对应的角 pAp 在 A 中是满的，则称该投影是满的。

定义 1.1. 设 A、B 是 C*-代数，并且

$$e : 0 \to B \to E \xrightarrow{\pi} A \to 0$$

是 A 由 B 构成、Busby 不变量为 τ： $A \to \mathcal{M}(B)/B$ 的扩张。若 τ 是单射，则称扩张 e 为 $essential$。当 A 含幺时，我们称 e 为

$unital$，若 τ 含幺；若存在含幺的 $*$-同态 $\rho: A \to E$，使得 $\pi \circ \rho = id_A$，则称含幺扩张 e 为 $unital\ trivial$。

注意，如果 A 是含幺单代数且 $B \neq 0$，那么任意以 A 为理想、以 B 为商代数的含幺扩张 e 都是本质的。

定义 1.2. 设 $e_i: 0 \to B \to E_i \to A \to 0$ 是两个扩张，其 Busby 不变量分别为 τ_i，对应于 $i = 1,2$。若存在酉元 $u \in \mathcal{M}(B)$，使得对于所有 $a \in A$，e_1 和 e_2 满足 $\tau_2(a) = \pi(u)\tau_1(a)\pi(u)^*$，则称它们 $strongly\ unitarily equivalent$，记作 $e_1 \sim_s e_2$，其中 $\pi: \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(B)/B$.

假设 B 是稳定的。固定一个从 $\mathcal{K}$ 到 $M_2(\mathcal{K})$ 的同构；此同构诱导出一个同构 $B \cong M_2(B)$，进而诱导出同构$\mathcal{M}(B) \cong M_2(\mathcal{M}(B))$ 和 $\mathcal{M}(B)/B \cong M_2(\mathcal{M}(B)/B)$。这些同构在酉等价意义下唯一确定。

令 s_1, s_2 是 $\mathcal{M}(B \otimes \mathcal{K})$ 中满足 $s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1$ 的两个等距元。定义加法 $e_1 \oplus e_2$ 为以 B 为理想、商代数为 A 且 Busby 不变量为下式的扩张

$$\tau_1 \oplus \tau_2 := s_1 \tau_1 s_1^* + s_2 \tau_2 s_2^*.$$

若含幺扩张 e 的 Busby 不变量为 τ，且它与其和任意含幺平凡扩张所得的扩张强酉等价，即对于任意含幺平凡扩张 σ，均有 $e \sim_s e \oplus \sigma$，则称该扩张 $absorbing$。

定义 1.3。 ([5]) 设 E 是一个 C*-代数，且 B 是 E的一个闭双侧理想。称 E 相对于 $purely\ large$ 是满的，B 如果对每个元素 c 属于 $E\backslash B$，由 * 生成的 C cBc^* -代数（与 B 的交，即 *生成的遗传子 C E -代数） cc^*都包含一个稳定且在 *中为满的子 C B-代数。

设 $e: 0 \to B \to E \to A \to 0$ 是由 B 对 A 的扩张，若 C*-代数 E 相对于 B 的像是纯大的，则称 e 是 $purely\ large$。

以下是在核情形下 [5] 的主要结果。

定理 1.4. ([5, 定理 6]) 设 A 和 B 是核、可分的 C*-代数，其中 B 稳定且 A 含幺。A 对 B 的含幺扩张是吸收的，当且仅当它是纯大的。

我们将频繁使用以下定理。

定理 1.5. ([2, 定理 2.8]). 若 B 是 A 的一个满遗传 C*-子代数，且 A 和 B 各自都有严格正元素，则 $B \otimes \mathcal{K}$ 与 $A \otimes \mathcal{K}$ 典范同构。

注 1.6. 设 A 是一个稳定秩一的可分 C*-代数，且 p 是 $\mathcal{M}(A)$ 中的一个满投影。记 $\iota: pAp \to A$ 为自然嵌入映射。由定理 1.5，$pAp \otimes \mathcal{K}$ 与 $A \otimes \mathcal{K}$ 同构，且该同构由偏等距 $v \in \mathcal{M}(A \otimes \mathcal{K})$ 诱导，它将 x 映至 $v^* x v$。

注意，包含映射 ι 在 K_0 上诱导出与 $v^*(\cdot)v$ 相同的序。对于任意投影 $q \in pAp \otimes \mathcal{K}$，我们将 $(\iota \otimes id_{\mathcal{K}})(q)$ 与 q 视为相同。注意，

$v^*q \in A \otimes \mathcal{K}$ 满足

$$v^*q(v^*q)^* = v^*qv \quad \text{and} \quad (v^*q)^*v^*q = q,$$

这意味着 $\mathrm{K}_0(\iota)([q]) = [v^*qv]$。（更一般化的结果可见 [6, 命题 5。1]。）

对于任意 C*-代数 A，K_0 的正锥和尺度为

$$\mathrm{K}_0^+(A) = \{[p] : p \in \mathcal{P}(A \otimes \mathcal{K})\}, \quad \Sigma A = \{[p] : p \in \mathcal{P}(A)\}.$$

现在我们列出一些由 Rørdam 给出的关于稳定代数的结果。

命题 1.7。 ([10, 命题 3。1]) 设 A 是一个具有消去性质且有一个由投影构成的可数近似单位的C*-代数。那么，当且仅当 A 稳定时，$\Sigma A = \mathrm{K}_0^+(A)$。

定义 1.8。 ([10, 定义 3.2]) 如果三元组 $(G,\ G^+,\ \Sigma)$ 中的 $(G,\ G^+)$ 是有序阿贝尔群，且 Σ是 G^+ 的上向有向、遗传、充满子集，则称其为带尺度有序阿贝尔群，即

(i) $\forall x_1,\ x_2 \in \Sigma,\ \exists x \in \Sigma :\ x_1 \le x,\ x_2 \le x$;
(ii) $\forall x \in G^+,\ \forall y \in \Sigma :\ x \le y \Rightarrow x \in \Sigma$; (iii)
$\forall x \in G^+,\ \exists y \in \Sigma,\ \exists k \in \mathbb{N} :\ x \le ky$。

设 $(G,\ G^+)$ 是一个有序阿贝尔群，并设 Σ_1 和 Σ_2 是 G^+的向上有向、遗传且充满的子集。定义 $\Sigma_1 \hat{+} \Sigma_2$ 为所有满足如下条件的元素 $x \in G^+$ 的集合：存在 $x_1 \in \Sigma_1$ 和 $x_2 \in \Sigma_2$ 使得 $x \le x_1 + x_2$。注意，$\Sigma_1 \hat{+} \Sigma_2$ 是 G^+的向上有向、遗传且充满的子集。

将 $\Sigma \hat{+} \Sigma \hat{+} \ldots \hat{+} \Sigma$ 的 k重和记为 $k \cdot \Sigma$。利用 Σ是向上有向的这一点可知，$y \in k \cdot \Sigma$ 当且仅当对某个 $x \in \Sigma$有 $0 \le y \le kx$ 。

若 A 是稳定秩一的 C*-代数，且具有由投影构成的近似单位，则 $\left(\mathrm{K}_0(A), \mathrm{K}_0^+(A)\ \Sigma A\right)$ 是一个带尺度有序阿贝尔群，并且

$$\left(\mathrm{K}_0\left(M_k(A)\right), \mathrm{K}_0^+\left(M_k(A)\right), \Sigma\left(M_k(A)\right)\right) \cong \left(\mathrm{K}_0(A), \mathrm{K}_0^+(A), k \hat{\cdot} \Sigma A\right).$$

定义 1.9。 ([4],[7, 8.1]) 若有序阿贝尔群 (G, G_+) 满足以下两个条件，则称其为弱无孔的。

(i) 给定 $x \in G$ 和 $m \in \mathbb{N}$，使得 $mx \in G_+$，存在 $t \in \mathrm{tor}(G)$，使得 $x + t \in G_+$ 且 $mt = 0$。

(ii) 给定 $y \in G_+, t \in \mathrm{tor}(G)$，以及 $n \in \mathbb{N}$，若 $ny + t \in G_+$，则 $y \pm t \in G_+$。

现在我们证明以下关于非单纯有序群情形的结果，它推广了 [10, 命题 3.3]。

命题 1.10。 设 (G, G_+, Σ) 是一个弱无孔、带标度的有序阿贝尔群，并假设对某个 $n \in \mathbb{N}$，有 $n \hat{\cdot} \Sigma = G_+$。那么 $\Sigma = G_+$。

证明。 令 $g \in G_+$，则 $(n+1)g \in G_+$。由于 $n \hat{\cdot} \Sigma = G_+$，存在元素 $x \in \Sigma$，使得 $nx \ge (n+1)g$。由 $n(x - g) \in G_+$ 以及定义

1.9 (i)，存在 $t \in \mathrm{tor}(G)$，使得 $x-g+t \in G^+$ 且 $nt=0$。于是 $x+t \in G_+$，从而，

$$n(x+t)+t=(n-1)x+x+t \in G_+.$$

根据定义 1.9 (ii)，我们有 $x+2t \in G^+$。于是，

$$(nx-(n+1)g)+(x+2t)+nt=(n+1)(x-g+t)+t \in G^+.$$

再次根据定义 1.9(ii)，我们有

$$x-g=x-g+t-t \in G^+.$$

由 Σ 的遗传性质，我们得到 $g \in \Sigma$。因此 $\Sigma = G^+$。

□

以下结论可直接由上文得出。

推论 1.11. 设 A 是一个具有稳定秩一和实秩零的可分C*-代数，且其 $(\mathrm{K}_0(A),\mathrm{K}_0^+(A))$ 弱无孔。若某个整数 $n \geq 1$ 使得 $M_n(A)$ 稳定，则 A 稳定。

证明。 若某个整数 $n \geq 1$ 使 $M_n(A)$ 稳定，由于

$$\left(\mathrm{K}_0\left(M_n(A)\right),\mathrm{K}_0^+\left(M_n(A)\right),\Sigma\left(M_n(A)\right)\right) \cong \left(\mathrm{K}_0(A),\mathrm{K}_0^+(A),n\hat{\cdot}\Sigma A\right),$$

根据命题 1.7，我们有 $n\hat{\cdot}\Sigma A=\mathrm{K}_0^+(A)$。 于是命题 1.10 推出$\Sigma A=\mathrm{K}_0^+(A)$。再次根据命题 1.7， A 是稳定的。

□

注 1.12。 我们声称，若不假设 A 具有由投影组成的可数近似单位，则 $(\mathrm{K}_0(A),\ \mathrm{K}_0^+(A)\ \Sigma A)$ 不一定是带标度的有序阿贝尔群。这里给出一个简短的例子。

Take

$$A=\{f \in M_2(C[0,1]):\ f(0)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \text{ and } f(1)=\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \lambda,\mu \in \mathbb{C}\}.$$

于是我们得到如下正合列，

$$0 \to M_2(C_0(0,1)) \xrightarrow{\iota} A \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}\oplus\mathbb{C} \to 0,$$

其中 ι 是自然嵌入，且对于 $f \in A$，有 $\pi(f)=(\lambda,\ \mu)$。诱导得到的著名六项正合列如下:

$$0 \to \mathrm{K}_0(A) \to \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \xrightarrow{(2,-1)} \mathbb{Z} \to \mathrm{K}_1(A) \to 0,$$

其中 $\mathrm{K}_0(M_2(C_0(0,\ 1)))=0$，且 $\mathrm{K}_1(\mathbb{C}\oplus\mathbb{C})=0$。因此我们得到

$$\mathrm{K}_0(A)=\{(a,b) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}:\ 2a-b=0\} \cong \mathbb{Z}$$

and

$$\mathrm{K}_0^+(A)=\{(n,2n) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}:\ n \in \mathbb{N}\} \cong \mathbb{N}.$$

注意， A 是一个稳定秩一的非含幺次齐次代数，因此， A 具有投影消去性。由于 A中唯一的投影是 0，即 A 无投影， A 没有由投影组成的可数近似单位

那么我们无法将生成元 $(1,\ 2)\ \in \mathrm{K}_0^+(A)$ 提升为 A中的任何投影。我们有

$$\Sigma A = \{(0,0)\} \subset \mathrm{K}_0^+(A),$$

这意味着定义 1.8(iii) 不成立。还要注意，生成元 $(1,\ 2)$ 可以提升为投影 p 在 $M_2(A)$ 中，且满足

$$p(0) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad p(1) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Unital Absorbing Extensions

本节中，我们考虑 A 经由 B 的含幺扩张：

$$0 \to B \to E \to A \to 0,$$

其中 A，B，E 均为稳定秩一且实秩零的可分 C*-代数，B 稳定，且 A 为含幺单代数。我们始终将 B 视为其在 E 中的像。

以下命题众所周知，参见 [9, 命题 4]。

命题 2.1. 设

$$0 \to B \to E \to A \to 0$$

是C*-代数的一个扩张。令 $\delta_j : \mathrm{K}j(A) \to \mathrm{K}1-j(B)$ 为该序列中对应于 $j = 0,1$ 的指标映射。

(i) 假设 A 和 B 的实秩为零。则以下三个条件等价：

(a) $\delta_0 \equiv 0$,
(b) $rr\ (E) = 0$,
(c) A 中的所有投影都是 E 中投影的像。

(ii) 假设 A 和 B 具有稳定秩一。则以下条件等价：

(a) $\delta_1 \equiv 0$,
(b) $sr(E) = 1$。

此外，若 E (和 A)含幺，则 *(ii)* 中的 *(a)* 和 *(b)* 等价于

(c) A 中的所有酉元都是 E中酉元的像。

由此可直接推出以下推论，这表明研究具有平凡指标映射的扩张是很有意义的。

推论 2.2。设 A、B 为稳定秩一且实秩零的 C*-代数。设 $e : 0 \to B \to E \to A \to 0$ 为一个扩张。当且仅当 E 具有稳定秩一且实秩零时，e 具有平凡指标映射。

设 A，B 是稳定秩一且实秩零的可分 C*-代数。A 中的理想格与 $\mathrm{K}_0(A)$ 中的序理想格同构（见 [16], [7]）。群的正态射 $\phi : \mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(B)$ 诱导出

一个映射 $I \mapsto I'$，将 A 的理想映到 B 的理想。这里，I' 是 B 中唯一的理想，使得 $\mathrm{K}_0(I')$ 在 $\mathrm{K}_0(B)$ 中的像是由 $\phi(\mathrm{K}_0(I))$ 生成的序理想。映射 $\mathrm{K}_0(I) \to \mathrm{K}_0(A)$ 是单射，因为 A 具有稳定秩一。

命题 2.3. 设 A 是一个稳定秩一且实秩零的可分C*-代数，p 是 $\mathcal{M}(A)$中的一个投影。记 ι : $pAp \to A$ 为自然嵌入映射。则 $\mathrm{K}_0(\iota) : \mathrm{K}_0(pAp) \to \mathrm{K}_0(A)$ 是单射。

此外，以下陈述等价:
(i) pAp 在 A中是满的; *(ii)* $\mathrm{K}_0(\iota) : \mathrm{K}_0(pAp) \to \mathrm{K}_0(A)$ 是同构。

证明。 考虑自然包含图

$$\begin{array}{ccc} pAp & \xrightarrow{\iota} & A, \\ {\scriptstyle \iota_1}\downarrow & \nearrow_{\iota_2} & \\ I_p & & \end{array}$$

其中，I_p 是由 pAp生成的 A 的理想。它导出如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_0(pAp) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota)} & \mathrm{K}_0(A). \\ {\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1)}\downarrow & \nearrow_{\mathrm{K}_0(\iota_2)} & \\ \mathrm{K}_0(I_p) & & \end{array}$$

根据定理 1.5 和注 1.6，我们有 $pAp \otimes \mathcal{K}$ 与 $I_p \otimes \mathcal{K}$ 典范同构，且 $\mathrm{K}_0(\iota_1)$ 是一个同构。由命题2.1(ii)(a)，我们有 $\mathrm{K}_0(\iota_2)$ 是单射。因此，复合映射 $\mathrm{K}_0(\iota)$ 是单射。

对于 (i) $\Rightarrow$ (ii)，pAp 在 A 中是满理想意味着 $I_p = A$，因此，$\mathrm{K}_0(\iota_2)$ 是一个同构。因此，复合映射 $\mathrm{K}_0(\iota)$ 是一个同构。

对于 (ii) $\Rightarrow$ (i)，我们已证明 $\mathrm{K}_0(\iota) : \mathrm{K}_0(pAp) \to \mathrm{K}_0(A)$ 是一个单射。根据假设，$\mathrm{K}_0(\iota) : \mathrm{K}_0(pAp) \to \mathrm{K}_0(A)$ 是一个同构。这等价于说，$\mathrm{K}_0(A)$ 中由 $\mathrm{K}_0(\iota)(\mathrm{K}_0(pAp))$ 生成的理想就是 $\mathrm{K}_0(A)$ 本身。由于 A 是一个稳定秩一且实秩零的可分 C*-代数，我们有 $\mathrm{Lat}(A) \cong \mathrm{Lat}(\mathrm{K}_0(A))$。此外，上述论证意味着 A 中由 pAp 生成的理想就是 A 本身。

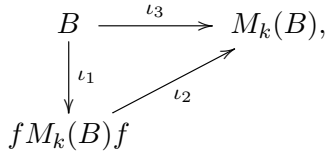
□

引理 2.4。 设 A、B 是核、可分的 C*-代数，且具有稳定秩一和实秩零。假设 A 含幺，且 B 稳定。设 e 是一个含幺本质扩张

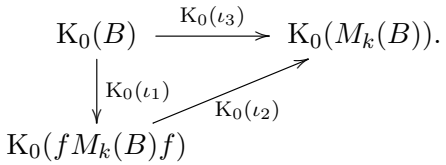
$$0 \to B \to E \to A \to 0.$$

对于任意投影 f，若 $M_k(E)$ 满足 $1_E \leq f \leq 1_{M_k(E)}$，其中某个 $k \in \mathbb{N}$，则有 $fM_k(B)f \cong B$ 是稳定的，且 B 在 $fM_k(B)f$ 中是满的。

证明。 考虑自然包含图



其中， B 被视为 $M_k(B)$的第一角。它导出以下交换图



由于 B 在 $M_k(B)$中是满的，因此 $fM_k(B)f$ 在 $M_k(B)$中也满。由定理 1.5 和注 1.6 可知，$\mathrm{K}_0(\iota_2)$和$\mathrm{K}_0(\iota_3)$都是同构。由交换性可知，$\mathrm{K}_0(\iota_1)$也是同构；根据命题 2.3， B在 $fM_k(B)f$中是满的。

对于 B中的任意投影 p，由于$\mathrm{K}_0(\iota_1)([p]) = [\iota_1(p)]$,，我们有

$$\mathrm{K}_0(\iota_2)\circ\mathrm{K}_0(\iota_1)(\Sigma B)\subset \mathrm{K}_0(\iota_2)\left(\Sigma\left(fM_k(B)f\right)\right)\subset\Sigma\left(M_k(B)\right).$$

应用命题1.7 于 B 和 $M_k(B)$，则

$$\Sigma B=\mathrm{K}_0^+(B)=\Sigma\left(M_k(B)\right).$$

由于 B 在 $M_k(B)$中是满的，根据定理1.5 和注1.6，我们有

$$\mathrm{K}_0(\iota_2)\circ\mathrm{K}_0(\iota_1)(\Sigma B)=\Sigma\left(M_k(B)\right),$$

我们得到

$$\mathrm{K}_0(\iota_1)(\Sigma B)=\Sigma\left(fM_k(B)f\right),$$

也就是说,

$$\Sigma(fM_k(B)f)=\mathrm{K}_0(\iota_1)(\mathrm{K}_0^+(B))=\mathrm{K}_0^+(fM_k(B)f).$$

由命题 1.7， $fM_k(B)f$ 是稳定的，因此由定理 1.5,

$$fM_k(B)f\cong B.$$

□

引理 2.5。 设 A, B 是核、可分的C*-代数，具有稳定秩一和实秩零。假设 A 含幺， B 稳定，且$(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$弱无孔。设 e 是一个含幺本质扩张，具有平凡指标映射

$$0\to B\to E\to A\to 0.$$

假设 p, f 是 $M_k(E)$ 中的投影，满足

$$[1_E]\le n\cdot[p]=[f],\ p\le f,\ 1_E\le f\le 1_{M_k(E)}$$

对于某些 $n, k\in\mathbb{N}$。于是， $pM_k(B)p\cong B$ 是稳定的，而 $pM_k(B)p$ 在$fM_k(B)f$中是满的。

证明。由引理 2.4，我们有 $fM_k(B)f \cong B$，且 B在 $fM_k(B)f$中是满的。由于 $[f] = n\cdot[p]$，$1_E \le f \le 1_{M_k(E)}$ 以及 $p \le f$，注意到 E 具有稳定秩一，我们有 $\underbrace{p \oplus p \oplus \cdots \oplus p}_{n-1}$ 与 $f - p$ 中的 $M_l(E)$ 对某个 l成立，令 $p_1 = p$，于是有

$$f = p_1 + p_2 + \cdots + p_n,$$

其中每个 $p_i \in M_k(E)$ 都是 f的子投影，$p_i \sim p_1$ 且对任意 $i \neq j$都有 $p_i p_j = 0$。记 v_j 为 $M_k(E)$ 中满足下式的偏等距

$$v_j v_j^* = p_1, \quad v_j^* v_j = p_j \quad \text{for any } j = 1, 2, \cdots, n.$$

现在证明 $pM_k(B)p$在 $fM_k(B)f$中是满的。注意到 $fM_k(B)f$也是 $fM_k(E)f$的一个理想，因此我们只需证明 $fM_k(B)f$是由 $pM_k(B)p$生成的 $fM_k(E)f$的理想。（若 C是 D和 W都是 C*-代数，且 D是 W 的一个理想，C 是 D的一个理想，则 C 也是 W的一个理想。）

对于任意 $x \in fM_k(B)f$，都有 $x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i x p_j$。对于任意 i，j，$p_i x p_j \in fM_k(B)f$，有

$$v_i p_i x p_j v_j^* \in pM_k(B)p,$$

这意味着

$$v_i^* v_i p_i x p_j v_j^* v_j = p_i x p_j,$$

即，$p_i x p_j$ 包含在由 $pM_k(B)p$生成的 $fM_k(B)f$ 的理想中。于是，x 包含在由 $pM_k(B)p$生成的 $fM_k(B)f$ 的理想中。一般而言，$pM_k(B)p$在 $fM_k(B)f$中是满的。

此外，将 $\{v_i v_j^*\}$ 视为矩阵单位，并将 $pM_k(B)p$ 视为第一角，我们自然有

$$pM_k(B)p \otimes M_n \cong fM_k(B)f$$

自然地。

由于 $pM_k(B)p$在 $fM_k(B)f$中是满的，根据定理1.5，我们有

$$pM_k(B)p \otimes \mathcal{K} \cong fM_k(B)f \otimes \mathcal{K} \cong B.$$

那么 $(\mathrm{K}_0(pM_k(B)p),\ \mathrm{K}_0^+(pM_k(B)p)) \cong (\mathrm{K}_0(B),\ \mathrm{K}_0^+(B))$ 是弱不可约的。

将自然嵌入映射 $\iota\colon pM_k(B)p \to fM_k(B)f$记为定理 1.5和注 1.6，我们通过 $\mathrm{K}_0^+(pM_k(B)p)$ 与 $\mathrm{K}_0^+(fM_k(B)f)$ 相识别，即通过 $\mathrm{K}_0(\iota)$。

对 1.7应用命题 $fM_k(B)f$，得到

$$n\widehat{\cdot}\Sigma\,(pM_k(B)p) = \Sigma(fM_k(B)f) = \mathrm{K}_0^+(fM_k(B)f) = \mathrm{K}_0^+(pM_k(B)p).$$

于是由命题 1.10，可得

$$\Sigma\,(pM_k(B)p) = \mathrm{K}_0^+(pM_k(B)p).$$

根据命题 1.7，$pM_k(B)p$ 是稳定的，因此，$pM_k(B)p \cong B$。

□

定理 2.6。 设 A, B 是核、可分的稳定秩一且实秩零C*-代数。假设 A 是含幺单代数， B 是稳定的，并且$(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$ 是弱无孔的。设 e 是一个具有平凡指标映射的含幺扩张

$$0 \to B \to E \xrightarrow{\pi} A \to 0.$$

于是， e是吸收的。

证明。 我们只需证明 e 是纯大的。

对于任意 $c \in E\backslash B$, $\pi(c) \neq 0$。由于 E 具有实秩零，因此存在一个非零投影 $p \in cEc^*$ 使得 $p \in E\backslash B$。否则，若不存在这样的 p，根据 $rr(cEc^*) = 0$，我们将有 $cEc^* \subset B$，这意味着 $c \in B$，从而产生矛盾。

注意到 $pBp \subset c\overline{Bc^*}$，我们将证明 pBp 是稳定的，且在 B中是满的。

由于 $p \in E\backslash B$， $\pi(p)$ 是 A中的一个非零投影。由于 A 是含幺单代数且具有稳定秩一，因此存在一个整数 n ，使得 $n\cdot[\pi(p)] \geq 2[1_A]$。现在我们有

$$\mathrm{K}_0(\pi)(n \cdot [p] - 2[1_E]) \geq 0 \quad \text{in } \mathrm{K}_0^+(A).$$

由于 E 具有实秩零，根据命题 2.1(i)(c)，存在 $x \in \mathrm{K}_0^+(E)$，使得

$$\mathrm{K}_0(\pi)(n \cdot [p] - 2[1_E]) = \mathrm{K}_0(\pi)(x).$$

回忆一下， e具有平凡指标映射，因此有如下正合列

$$0 \to \mathrm{K}_0(B) \to \mathrm{K}_0(E) \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\pi)} \mathrm{K}_0(A) \to 0.$$

因此，$\mathrm{K}_0(B)$可识别为$\mathrm{K}_0(E)$的子群。由正合性可知，存在投影 d, r ，属于 B ，使得

$$n[p] - 2[1_E] + [d] - [r] = x \geq 0 \quad \text{in } \mathrm{K}_0^+(E).$$

此外，我们有

$$n[p] + n[d] \geq 2[1_E] \quad \text{in } \mathrm{K}_0^+(E).$$

由于 E 具有稳定秩一，我们可以将 $n[p] + n[d]$ 提升为$M_k(E)$ $(k \geq 2)$中的一个投影 f ，满足

$$1_E \leq 1_{M_2(E)} \leq f \leq 1_{M_k(E)}.$$

由于 $p \leq 1_E$ 和 $d \leq 1_E$，我们将 $p\oplus d$ 视为 $M_2(E) \subset M_k(E)$中的一个投影。因此我们有

$$p \oplus d \leq 1_{M_2(E)} \leq f \quad \text{in } M_k(E).$$

应用引理2.5，我们有 $(p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d) \cong B$ 并且 $(p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d)$ 在 $fM_k(B)f$ 中是满的。

考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccc}
(p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d) & \xrightarrow{\iota_6} & M_k(E) & \xleftarrow{\iota_4} & E \\
\downarrow{\scriptstyle \iota_1} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_5} & & \uparrow{\scriptstyle \iota_7} \\
fM_k(B)f & \xrightarrow[\iota_2]{} & M_k(B) & \xleftarrow[\iota_3]{} & B\ ,
\end{array}$$

其中，对于每个 i， ι_i 都是自然嵌入映射（B 和 E 分别被视为 M_k（B）和 M_k（E）的第一角）。由此可得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K}_0((p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d)) & \xrightarrow{\mathrm{K}_0(\iota_6)} & \mathrm{K}_0(M_k(E)) & \xleftarrow{\mathrm{K}_0(\iota_4)} & \mathrm{K}_0(E) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_1)} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_5)} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{K}_0(\iota_7)} \\ \mathrm{K}_0(fM_k(B)f) & \xrightarrow[\mathrm{K}_0(\iota_2)]{} & \mathrm{K}_0(M_k(B)) & \xleftarrow[\mathrm{K}_0(\iota_3)]{} & \mathrm{K}_0(B)\ . \end{array}$$

由于 E 具有稳定秩一和实秩零，根据命题 2.3，一方面，对每个 $1\leq i\leq 7$，我们有 $\mathrm{K}_0(\iota_i)$ 是单射；另一方面，由于我们已得到满性，对每个 $1\leq i\leq 4$，我们有 $\mathrm{K}_0(\iota_i)$ 是一个同构。

注意，$(p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d)$ 是稳定的，并且也具有稳定秩一，因此对于任意投影 $q\in B$，我们可以将其提升

$$\mathrm{K}_0(\iota_1)^{-1}\circ\mathrm{K}_0(\iota_2)^{-1}\circ\mathrm{K}_0(\iota_3)([q])\in\mathrm{K}_0^+((p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d))$$

为一个投影 $q'\in(p\oplus d)M_k(B)(p\oplus d)$。于是

$$\iota_6(q')\leq p\oplus d \quad \text{in } M_k(E).$$

结合交换性，我们得到

$$\mathrm{K}_0(\iota_5)\circ\mathrm{K}_0(\iota_3)([q])=\mathrm{K}_0(\iota_6)([q'])\leq[p\oplus d]=[p]+[d] \quad \text{in } \mathrm{K}_0^+(M_k(E)).$$

由 q 的任意性，选取满足 $[\widetilde{q}]=[q]+[d]$ 的 $\widetilde{q}$，我们得到

$$\mathrm{K}_0(\iota_5)\circ\mathrm{K}_0(\iota_3)([q])\leq[p]\in\mathrm{K}_0^+(M_k(E)). \qquad (*)$$

注意，我们可以通过单射 $\mathrm{K}_0(\iota_5)\circ\mathrm{K}_0(\iota_3)$，将 $\mathrm{K}_0(B)$ 识别为 $\mathrm{K}_0(E)$ 的子群。

由于 $p\leq 1_E$, $pM_k(B)p$ 可自然地识别为 B 中的 pBp 。记 $\iota:pBp\to B$ 为自然包含。由于 B 具有稳定秩一，我们可以将 $\mathrm{K}_0^+(pBp)$ 识别为 $\mathrm{K}_0^+(B)$ 的子半群（命题 2.3）。现在，$(*)$ 蕴含$\Sigma(pBp)=\mathrm{K}_0^+(B)$，这意味着 $\mathrm{K}_0^+(pBp)=\mathrm{K}_0^+(B)$。然后由命题 1.7 可知， pBp 是稳定的，因此， $pBp\cong B.$ 。由命题 2.3 可得， pBp 在 B中是满的。现在， e 是纯大的，因此由定理 1.4，e 是吸收的。

□

推论 2.7。 设 A， B， E满足定理 2.6的假设。那么对于任意 $p\in\mathcal{P}(E\backslash B)$ 和 $q\in\mathcal{P}(B)$，有 $[q]\leq[p]$ 属于 $\mathrm{K}_0(E)$。

3. Applications

定义 3.1. 设

$$e_i:\quad 0\to B\to E_i\to A\to 0$$

是两个扩张，其 Busby 不变量为 τ_i，对应于 $i=1$，2。

若存在含幺平凡扩张σ_1，σ_2，使得 $e_1 \oplus \sigma_1 \sim_s e_2 \oplus \sigma_2$，则称两个含幺扩张 e_1 和 e_2 为 $stably\ strongly\ unitarilyequivalent$，记作 $e_1 \sim_{ss} e_2$。

若 A 是含幺的，则用 $\mathrm{Ext}^u_{ss}(A, B)$ 表示 A 被 B 扩张所得的含幺扩张在稳定强酉等价下的等价类集合。

由主要结果定理2.6，可得

推论 3.2. 设 A、B 是核、可分的 C*-代数，且具有稳定秩一和实秩零。假设 A 是含幺单代数，B 是稳定的，并且$(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$ 是弱无孔的。设 e_1、e_2 是两个指标映射平凡的含幺扩张:

$$e_i : 0 \to B \to E_i \to A \to 0.$$

那么 $e_1 \sim_{ss} e_2$ 当且仅当 $e_1 \sim_s e_2$。

定义 3.3. 给定阿贝尔群 H，K 和两个扩张

$$e_i : 0 \to K \to G_i \to H \to 0, \quad i = 1, 2,$$

如果存在同态 α 使得下图交换，则称 e_1, e_2 为 $equivalent$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G_1 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G_2 & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

记 $\mathrm{Ext}(H, K)$ 为 H 被 K 扩张的所有等价类的集合。众所周知，$\mathrm{Ext}(H, K)$ 构成一个阿贝尔群。

设 $h_0 \in H$。我们考虑以下以 h_0 为基点的 H 被 K 扩张,

$$e : \quad 0 \to K \to (G, g_0) \xrightarrow{\psi} (H, h_0) \to 0,$$

其中 $g_0 \in G$ 和 $\psi(g_0) = h_0$。

假设我们有如下扩张

$$e_i : \quad 0 \to K \to (G_i, g_i) \xrightarrow{\psi} (H, h_0) \to 0, \quad i = 1, 2$$

其中 $\psi(g_i) = h_0$。若存在同态$\phi: G_1 \to G_2$，满足 $\phi(g_1) = g_2$，则称 e_1 和 e_2 等价，使得下图交换

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & (G_1, g_1) & \longrightarrow & (H, h_0) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & (G_2, g_2) & \longrightarrow & (H, h_0) & \longrightarrow & 0\ . \end{array}$$

令 $\mathrm{Ext}((H, h_0) K)$ 表示所有以 h_0为基点、由 H扩张 K 所得扩张的等价类集合。

设 A 和 B 是 C*-代数。当 A 含幺时，我们定义

$$\mathrm{Ext}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A),\mathrm{K}_*(B))=\mathrm{Ext}((\mathrm{K}_0(A),[1_A]),\mathrm{K}_0(B))\oplus\mathrm{Ext}(\mathrm{K}_1(A),\mathrm{K}_1(B)),$$

$$\mathrm{Hom}_{[1]}(\mathrm{K}_0(A),\mathrm{K}_1(B))=\{\rho\in\mathrm{Hom}((\mathrm{K}_0(A),[1_A]),\mathrm{K}_1(B)):\rho([1_A])=0\},$$

$$\mathrm{Hom}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A),\mathrm{K}_*(B))=\mathrm{Hom}_{[1]}(\mathrm{K}_0(A),\mathrm{K}_1(B))\oplus\mathrm{Hom}(\mathrm{K}_1(A),\mathrm{K}_0(B))。$$

记 $\mathcal{N}$ C*-代数的“bootstrap”类 [11]。对于“UCT”的含幺版本，Wei 使用含幺扩张的稳定强酉等价类，得到了以下定理（类似的表述可见于 [15, 命题 3。2]）。

定理 3.4。 ([14, 定理 4。9]) 设 A 是一个含幺、可分、核的C*-代数，满足 $A\in\mathcal{N}$，且 B 是可分稳定的C*-代数。那么存在一个群的短正合列

$$0\to\mathrm{Ext}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A),\mathrm{K}_*(B))\to\mathrm{Ext}^u_{ss}(A,B)\to\mathrm{Hom}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A),\mathrm{K}_*(B))\to 0.$$

结合推论3.2，我们得到以下结果。

定理 3.5。 设 A,B 是具有稳定秩一、实秩零且 $A\in\mathcal{N}$的核、可分C*-代数。假设 A 是含幺单代数， B 是稳定的，并且$(\mathrm{K}_0(B),\mathrm{K}_0^+(B))$ 是弱无孔的。记 $\mathrm{Text}^u_s(A,B)$ 为所有以 B 为理想、以 A为商代数且指标映射平凡的含幺扩张的强酉等价类集合。则有

$$\mathrm{Ext}_{[1]}(\mathrm{K}_*(A),\mathrm{K}_*(B))\cong\mathrm{Text}^u_s(A,B).$$

在 [1], 推论2.7 和定理3.5 中，我们将其用于构造一个实秩零的 Elliott 猜想反例，并在稳定秩一和实秩零的条件下获得 C*-代数的分类定理。

Acknowledgements

作者非常感谢薛逸丰和魏长国进行的许多有益讨论。第一作者得到国家自然科学基金（编号：12101113）的资助。第二作者得到国家自然科学基金（编号：12101102）的资助。

References

[1] Q. An 和 Z. Liu，全 Cuntz 半群、扩张与实秩零条件下的 Elliott 猜想，即将出版。[3]

[2] L. G. Brown，C*-代数遗传子代数的稳定同构，Pacific J. Math., 71 2 1977 335 348 3 ( ) ( )，–。L. G. Brown、R. G. Douglas 和 P. A. Fillmore，C*-代数的扩张与 K-同调，Ann. of Math., 105 2 1977 265 324 1 ( ) ( )，–。[4] 1, 4

G. A. Elliott，带挠的维数群，Internat. J.Math., 1(4)(1990年), 361–380。[5] G. A. Elliott 和 D. Kucerovsky，抽象 Voiculescu-Brown-Douglas-Fillmore 吸收定理，Pacific J. Math., 198 (2) (2001年), 385–409。1，3

[6] G. Gong 和 H. Lin，非幺正可核单C*-代数的分类，III：值域与约化，Ann. K-Theory，
7 2 2022 279 384 4 ( ) ( )，–。K. R.
[7]
Goodearl，实秩零 C*-代数乘子代数的 K 理论，K-theory， 10 5 1996 419 489 4, 6 ( ) ( )，–。
0
H. Lin，《可核 C*-代数分类导论》，World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ,
[8]
2001 2 。H. Lin 和 M. Rørdam，圆周代数归纳极限
[9]
的扩张，J. London Math. Soc.， 51 2 1995 603 613 6 ( ) ( )，–。M. Rørdam，
C*-代数的稳定性并非稳定性质，[10]Doc. Math., 2 (1997年), 375–386。4[11] J. Rosenberg 和 C.
Schochet，Kasparov 广义 K 函子的 Künneth 定理与泛系数定理，Duke Math. J., 55 (2) (1987
年), 431–474。13[12] K. Thomsen，关于吸收扩张，Proc. Amer. Math. Soc., 129 (5) (2001年),
1409–1417。1[13] D. Voiculescu，非交换 Weyl-von Neumann 定理，Rev. Roumaine Math.
Pures Appl.， 21 1 1976 97 113 1 ( ) ( )，–。C. Wei，关于某些 C*-代数
含幺扩张的分类，[14]Houston J. Math.， 41 3 2015 965 991 13 ( ) ( )，–。Y. Xue，含幺
扩张酉等价类的 Ext群，Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)，[15]
27 12 2011 2329 2342 13 ( ) ( )，–。S. Zhang，乘子代数的 Riesz 分解性
[16]
质与理想结构，J. Operator Theory, 24 (2) (1990年), 209–225。6

School of Mathematics and Statistics, Northeast Normal University, Changchun, 130024, China*Email address*: qingnanan1024@outlook.com

School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian, 116024, China*Email address*: lzc.12@outlook.com