Mack 自助法的一致性

JULIA STEINMETZ*多特蒙德工业大学统计系，D-44221 多特蒙德，德国；
STEINMETZ@STATISTIK.TU-DORTMUND.DE

AND

CARSTEN JENTSCH 多特蒙德工业大学统计系，D-44221 多特蒙德，德国；
JENTSCH@STATISTIK.TU-DORTMUND.DE

arXiv:2303.05913v1 [math.ST] 10 Mar 2023

摘要。Mack无分布链梯法准备金模型是非寿险精算数学中最受欢迎的方法之一。该模型旨在确定准备金的前两个矩，但无法识别准备金的完整分布。为此，通常会为 Mack模型配套使用量身定制的自助法程序。尽管这种方法在实践中被广泛用于估计准备金风险，但目前尚无理论上的自助法相合性结果为其提供依据。

为填补文献中的这一空白，我们采用 Steinmetz 和 Jentsch（2022）提出的框架，在Mack模型中推导渐近理论。通过将准备金拆分为对应于过程不确定性和估计不确定性的两部分，这一框架首次使我们能够严谨地考察 Mack 自助法的有效性。我们证明，如果个体发展因子的参数分布族设定正确，那么渐近占主导地位的过程不确定性部分的（条件）分布能够由 Mack 自助法正确模拟；否则则不能。相较之下，Mack 自助法通常无法正确捕捉估计不确定性部分的（条件）分布。为解决这一问题，我们提出一种替代 Mack 型自助法，旨在同时捕捉估计不确定性部分的分布。

我们通过模拟说明了研究结果，并展示了新提出的替代 Mack 自助法优于 Mack 自助法。

1. 引言

在非寿险业务中，保险公司需要提取准备金，以应对已发生赔款所带来的未来义务。由于索赔已经发生，但可能尚未报案，或者虽已报案但尚未结案，因此在提取准备金时，索赔的实际金额尚不确定。对未决赔款进行预测的过程称为准备金评估。准确估算未决赔款

2010 数学主题分类。 JEL分类：C13, C18,C53, G22。关键词和短语。 自助法相合性、损失准备金评估、Mack模型、Mack自助法、预测推断。

对于未来保单的定价以及评估保险公司的偿付能力至关重要。在实践中，一种广受欢迎且应用广泛的未来赔款预测方法是链梯模型（CLM），它提供了一种预测未来赔款的算法。在这方面，最常用的模型是 Mack（1993）提出的递归模型，该模型扩展了链梯模型，还允许计算准备金的标准差。

另一种方法是采用基于广义线性模型（广义线性模型）的框架，例如 Renshaw 和 Verrall（1998）所研究的框架，它们使用过度离散泊松分布和对数正态分布来建模准备金的均值和方差。然而，这类参数假设往往具有局限性，而且仅了解准备金的前两个矩，并不足以让精算师对准备金风险和保险公司的偿付能力得出充分结论。准备金风险 是指经济价值准备金不足以支付所有未决赔款的风险，因此必然需要了解准备金的高分位数。为此，England 和 Verrall（2006）提出了 Mack自助法，通过量身定制的自助法程序扩展 Mack模型。England 和 Verrall（1999；2006）、England（2002）以及 Pinheiro 等（2003）也探讨了适用于基于广义线性模型的设置的其他自助法程序。Björkwall 等（2009）在未提供任何相合性结果的情况下，回顾了这些自助法技术，并提出了其他非参数和参数自助法程序。同样，Björkwall 等（2010）提出了适用于分离法的自助法技术，该方法考虑了日历年度效应。近年来，许多精算师青睐基于自助法的方法，因为这类方法在实践中通常能产生合理的分布。然而，正如 Gibson 等（2007）和 Bruce 等（2008）所示，在某些情况下，Mack模型和广义线性模型类型的模型与自助法相结合，无法产生令人满意的结果。对此，人们提出了改进方法，以改善有限样本表现。例如，Verdonck 和 Debruyne（2011）研究了离群值对广义线性模型框架中参数估计的影响，并计算了其对链梯模型的杠杆值。Hartl（2010）建议在广义线性模型框架中使用偏差残差，而非皮尔逊残差。Tee 等（2017）针对采用（过度离散）泊松模型、伽马模型和对数正态模型，并结合不同残差类型对广义线性模型进行自助法处理，提供了一项详尽的案例研究。Peremans 等（2017）提出了一种基于影响函数和M估计量、适用于广义线性模型设定的稳健自助法程序。Peters 等（2010）比较了 Mack自助法与贝叶斯自助法。

然而，即使对于原始 Mack 自助法，现有文献也缺乏更深入且严谨的数学理解。为此，有必要提供一个合适的理论框架，以论证应用 Mack 自助法的合理性。直到最近，Steinmetz 和 Jentsch（2022）才提出了一个合适的理论（随机与渐近）框架，可据此推导 Mack模型中准备金的条件与无条件渐近理论。他们将准备金（以其最佳估计为中心）拆分为两部分，分别代表过程不确定性 和估计不确定性，

。这使得人们能够推导准备金这两部分的无条件极限分布，以及在给定最新观测到的累计赔款时的条件极限分布。由于风险准备金评估通常是一项预测任务，这些条件极限分布可作为相应 Mack 自助法分布的良好基准，用于探讨自助法相合性问题。在温和的正则条件下，且经过适当放大后，估计不确定性部分的条件极限分布为高斯分布；而过程不确定性部分的条件极限分布通常为非高斯分布。联合考虑这两部分时，过程不确定性部分在渐近意义下占主导地位，因此准备金整体的极限分布为非高斯分布。

本文采用 Steinmetz 和 Jentsch（2022）提出的理论框架，研究 Mack 自助法一致性这一长期悬而未决的问题。我们的贡献有两方面。首先，我们分别针对（中心化）Mack 自助法准备金中对应于过程不确定性和估计不确定性的两个部分，推导其自助法渐近理论。我们证明，如果 Mack自助法个体发展因子的参数分布族设定正确，那么渐近占主导地位的过程不确定性部分的（条件）自助法分布能够得到正确模拟；否则，通常无法做到这一点。相比之下，估计不确定性部分的（条件）分布通常无法得到正确刻画。其次，受渐近结果启发，我们提出一种替代 Mack 型自助法，旨在同时刻画估计不确定性部分的分布。

本文结构安排如下。第2节介绍链梯模型（CLM）所需的符号和假设，讨论 Mack模型中的参数估计，并介绍 Steinmetz 和 Jentsch（2022）的渐近与随机框架。第 3 节讨论 England 和 Verrall（2006）提出的 Mack 自助法方法。第 4 节总结 Steinmetz 和 Jentsch（2022）关于过程不确定性项和估计不确定性项的（条件）渐近结果，分别见第 4.1 节；这些结果将作为 Mack 自助法结果的基准。随后，在第 4.2 节中，我们分别针对（中心化）Mack 自助法准备金中对应于过程不确定性和估计不确定性的两个部分，推导其自助法渐近理论。基于这些结果，我们在第 5 节提出一种替代 Mack 型自助法，并在第 6 节推导其渐近性质。我们在第7节通过模拟展示研究结果，并表明新提出的替代 Mack 型自助法在有限样本中的表现优于原始 Mack 自助法。第 8 节作总结。所有证明、辅助结果和补充模拟均放在附录中。

2. 链梯模型

准备金是非寿险公司的资产负债表中最重要的组成部分，因此准确预测准备金至关重要。为此，保险公司将某业务线的所有已观察到的索赔汇总

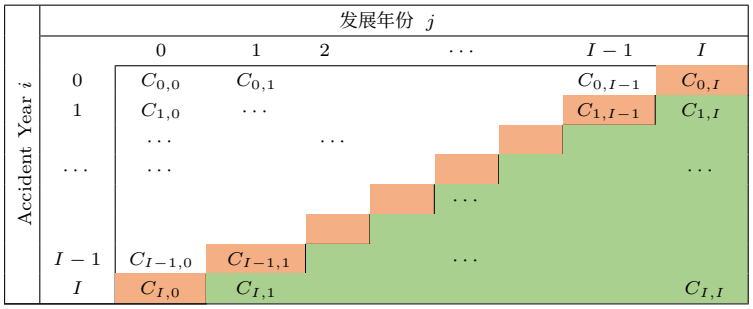


表1。已观测的上三角损失表 $\mathcal{D}_I$ （左上三角形；白色和橙色），其中事故年度为纵轴，发展年度为横轴，对角线 $\mathcal{Q}_I$ （橙色），以及未观测的下三角损失表 $\mathcal{D}_I^c$ （右下三角形；绿色）。

在一个损失三角形中（表1左上方的三角形）。其中的数值，即索赔累计金额$C_{i,\,j}$，按照事故发生的年份 i （纵轴）和索赔发生的年份 j（横轴）排列，其中 i，$j=0$、.....、I，且 $i+j\le I$。因此，（已观察到的）损失三角形包含截至日历年度I已经观察到的所有累计索赔 $C_{i,\,j}$。它构成可用数据基础，记作

$$\mathcal{D}_I=\{C_{i,j}|i,j=0,\dots,I,\ 0\le i+j\le I\}. \tag{2.1}$$

同一日历年度 k的索赔总额 $k=0$，.....，I位于损失三角形的同一条对角线上（从左下角到右上角）。我们用 $\mathcal{Q}_k=\{C_{k-i,i}|i=0,\dots,k\}$表示这些对角线。在此设定中，$I$是与最近事故年度和发展期间相对应的当前日历年度，因此，对角线$\mathcal{Q}_I$ （表1中的橙色对角线）汇总了在年份 I收集的最新累计索赔金额。

为了对未决（未观测）索赔的预测进行理论分析，将（已观测的）上损失三角形 $\mathcal{D}_I$ 扩展为未观测的下三角形是有用的

$$\mathcal{D}_I^c=\{C_{i,j}|i,j=0,\dots,I,\ i+j>I\}$$

其中包含截至时点 I 尚未观察到的所有未来赔款（表1中的绿色三角形）。由此得到的累计赔款矩阵记为 $\mathcal{C}_I=(C_{i,j})_{i,j=0,\dots,I}=\mathcal{D}_I\cup\mathcal{D}_I^c$。对于每个事故年度 i，我们主要关注终端时点 I的准备金，记为$R_{i,I}$，其计算方法是用最终赔款$C_{i,I}$ （最后一列，在时点 I尚未观察到 $i>0$）减去最新观察到的赔款$C_{i,I-i}$ （对角线上的数值，在时点 I）。具体而言，我们将事故年度 i的准备金定义为$R_{i,I}=C_{i,I}-C_{i,I-i}$，其中 $i=0,\dots,I$；并将准备金总额 R_I 定义为

$$R_I=\sum_{i=0}^{I}R_{i,I}, \tag{2.2}$$

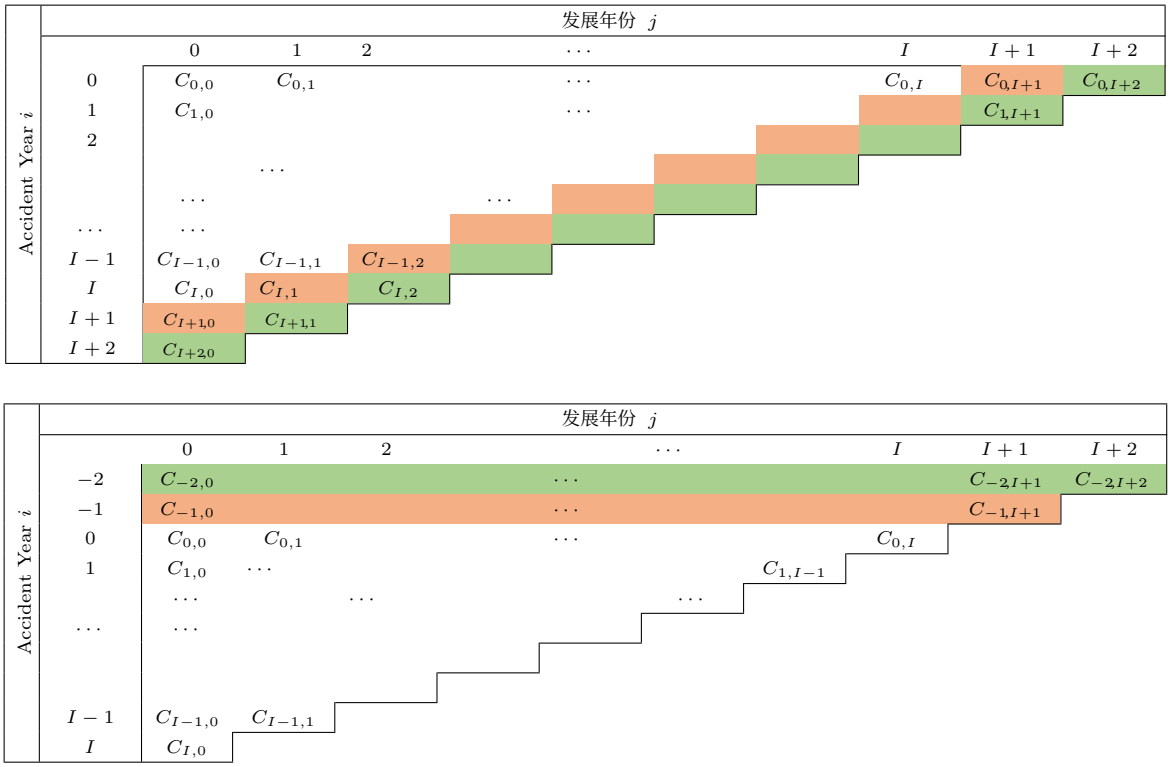


表2. 通过添加对角线（上图）和添加行（下图）构建的两种不断扩大的损失三角形渐近框架。这两种方法得到的损失三角形具有相同的分布（改编自 Steinmetz 和 Jentsch（2022））。

注意，根据构造，$R_{0,I} = C_{0,I} - C_{0,I} = 0$。因此，对于每个事故年度 i，在日历年度 I，要估计$R_{i,I}$，我们必须预测未观察到的最终赔款$C_{i,I}$。从$C_{i,I-i}$开始，我们依次预测所有未来且截至时点 I尚未观察到的赔款 $\{C_{i,j}|j = I - i + 1, \dots, I\}$。对所有 $i = 0, \dots, I$都这样处理后，整个未观察到的损失三角形下半部分 $\mathcal{D}_I^c$ 都需要预测；将$R_{i,I}$的所有预测值相加后，我们也就得到了对 R_I的预测。

然而，为了使上述链梯模型设置便于推导预测推断的渐近理论，Steinmetz 和 Jentsch（2022）为 Mack模型引入了一个适用的随机与渐近框架，本文也采用该框架，并将在下文中加以说明。

2.1. **准备金预测的渐近框架。**

鉴于损失三角形 $\mathcal{D}_I$ 已知，在对角线 $\mathcal{Q}_I$ 条件下进行渐近分析，对保险公司而言颇具意义，因为该对角线包含损失三角形中最新的信息。不过，为此我们不会采用一种看似“自然”的渐近框架，即基于 $I \to \infty$ 的框架，其中增加 I 意味着向损失三角形 $\mathcal{D}_I$ 添加新的对角线 $\mathcal{Q}_{I+h} = \{C_{I-i,i}|i =0, \dots\dots, I + h\}, h \geq 1$（见表2上半部分）。相反，如预测推断中常见的做法（例如参见 Paparoditis 和 Shang（2021）），我们采用另一种渐近

框架贯穿全文。也就是说，我们固定 $\mathcal{D}_I$ 中最新的累计赔款，即 $\mathcal{Q}_I$，并通过添加新的行累计赔款 $\{C_{-h,i}|i=0,\ldots,I+h\}$,$h\geq 1$，使 $\mathcal{D}_I$ 增长（见表2下半部分）。不过，表2中展示的两种以不同方式增长的损失三角形具有相同的分布。下文中的所有渐近结果，均基于一列（上部）损失三角形

(2.3)
$$\mathcal{D}_{I,n}=\{C_{i,j}|i=-n,\ldots,I,\ j=0,\ldots,I+n,\ -n\leq i+j\leq I\},\quad n\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\},$$

被观察到，其中

(2.4)
$$\mathcal{Q}_{I,n}=\{C_{I-i,i}|i=0,\ldots,I+n\},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

表示相应的对角线。注意，$\mathcal{D}_{I,\,0}=\mathcal{D}_I$, $\mathcal{Q}_{I,\,0}=\mathcal{Q}_I$，并且 $\mathcal{D}_{I,\,n}$（以及 $\mathcal{Q}_{I,\,n}$）是通过依次在顶部添加长度分别为 $I+2,\ I+3,\ \ldots,\ I+n+1$ 的 n 行得到的，添加到 $\mathcal{D}_I$ 上（见表2，下图）。与之前一样，对于所有 $n\in\mathbb{N}_0$，我们用一个未观察到的下部三角形 $\mathcal{D}^c_{I,\,n}=\{C_{i,j}|i=-n,\ldots,I,\ j=0,\ \ldots,\ I+n,\ \ i+j>I\}$ 扩展（已观察到的）上部损失三角形 $\mathcal{D}_{I,\,n}$，其中包含截至时间 I 尚未（或尚未被）观察到的所有未来赔款。此外，根据（2.2），准备金总额记为

(2.5)
$$R_{I,n}=\sum_{i=-n}^{I}R_{i,I+n},\quad n\in\mathbb{N}_0,$$

其中，$R_{i,\,I+n}=C_{i,\,I+n}-C_{i,\,I-i}$、$n\in\mathbb{N}_0$ 以及 $R_{-n,\,I+n}=C_{-n,\,I+n}-C_{-n,\,I+n}=0$ 均由构造可知。

在本节余下部分及第3节的论述中，我们将 I 和 n 固定不变；而在第4节中，为推导准备金的极限分布，我们令 $n\to\infty$。

2.2. **Mack无分布假设链梯法准备金评估**。

采用第 2.1 节所述的渐近框架概念后，Mack模型最初由Mack（1993）提出的条件可概括如下。

假设2.1（Mack模型）。对于任意 $n\in\mathbb{N}_0$，设 $\mathcal{C}_{I,\,n}=(C_{i,\,j},\ i=-n、\ldots、I、\ j=0、\ldots、I+n)$ 为定义在某个概率空间（Ω、$\mathcal{A}$、P）上的随机变量，并假定以下条件成立：

(i) 存在所谓的发展因子 $f_0,\ldots,f_{I+n-1}$，使得

(2.6)
$$E(C_{i,j+1}|C_{i,j})=f_jC_{i,j},\quad i=-n,\ldots,I,\ j=0,\ldots,I+n-1.$$

(ii) 存在方差参数 $\sigma_0^2,\ldots,\sigma_{I+n-1}^2$，使得

(2.7)
$$Var(C_{i,j+1}|C_{i,j})=\sigma_j^2C_{i,j},\quad i=-n,\ldots,I,\ j=0,\ldots,I+n-1.$$

(iii) 在事故年度 $i=-n,\ldots,I$ 内，累计赔款彼此随机独立，也就是说，累计赔款矩阵 $\mathcal{C}_{I,\,n}$ 由相互独立的行 $C_{i,\,\bullet}=(C_{i,\,0},\ldots,C_{i,\,I+n})$,$i=-n,\ldots,I$ 组成。

对于任意 $n \in \mathbb{N}_0$，根据可用数据 $\mathcal{D}_{I,\,n}$，所有发展因子 f_j 和方差参数 σ_j^2（针对 $j = 0, \ldots, I+n-1$）均未知，必须根据 $\mathcal{D}_{I,\,n}$ 进行估计。发展因子 $f_0, \ldots, f_{I+n-1}$ 可以通过 $f_{0,\,n}, \ldots, f_{I+n-1,\,n}$（一致地）估计，其中

$$\widehat{f}_{j,n} = \frac{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, \ldots, I+n-1. \tag{2.8}$$

根据 Mack（1993），这些估计量是无偏的，即 $E(f_{j,\,n}) = f_j$，且两两不相关，即 $Cov(f_{j,\,n},\ f_{k,\,n}) = 0$ 对所有 $j \neq k$均成立。通过代入 $f_{j,\,n}$，最终赔款的最佳估计（点预测量）$C_{i,\,I+n}$ 最终赔款$C_{i,\,I+n}$ 可计算为

$$\widehat{C}_{i,I+n} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}, \quad i = -n, \ldots, I.$$

因此，给定 $C_{i,\,I-i}$，准备金 $R_{i,\,I+n}$ 的最佳估计 $R_{i,\,I+n}$ 为

$$\widehat{R}_{i,I+n} = \widehat{C}_{i,I+n} - C_{i,I-i} = C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} - 1 \right), \quad i = -n, \ldots, I, \tag{2.9}$$

而总准备金 $R_{I,\,n}$ 的最佳估计 $R_{I,\,n}$（定义见（2.5））计算为

$$\widehat{R}_{I,n} = \sum_{i=-n}^{I} \widehat{R}_{i,I+n} \tag{2.10}$$

注意到，由于 $\prod_{j=I+n}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,\,n}$，有 $\widehat{R}_{-n,\,I+n} = 0 := 1$。此外，Mack（1993）提出通过以下公式估计方差参数 $\sigma_0^2, \ldots, \sigma_{I+n-1}^2$

$$\widehat{\sigma}_{j,n}^2 = \frac{1}{I+n-j-1} \sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j} \left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} - \widehat{f}_{j,n} \right)^2, \quad j = 0, \ldots, I+n-2, \tag{2.11}$$

它们是无偏估计量，即 $E(\widehat{\sigma}_{j,\,n}^2) = \sigma_j^2$，并通过设定 $\widehat{\sigma}_{I+n-1,\,n}^2 = 0$。

特别值得关注的是随机（未观测到的）准备金 $R_{I,\,n}$ 与其最佳估计 $R_{I,\,n}$（基于观测到的数据 $\mathcal{D}_{I,\,n}$）之差的分布，以下将其称为准备金预测根。也就是说，结合（2.5）和（2.10），可得

$$R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} = \sum_{i=-n}^{I} \left(R_{i,I+n} - \widehat{R}_{i,I+n} \right) = \sum_{i=-n}^{I} \left(C_{i,I+n} - \widehat{C}_{i,I+n} \right). \tag{2.12}$$

尽管近似未知（有限样本）分布的一种常见方法是推导渐近理论，但假设2.1中概述的Mack条件仍不足以确立准备金预测根的极限分布$\widehat{\ }_{,\,n} - R_{I,\,n}$。

2.3. **Mack模型的完整随机框架**。

遵循 Steinmetz 和 Jentsch（2022，第2.2节），为建立足以推导参数估计量渐近理论的理论框架 $\widehat{f}_{j,\,n}$ 以及$\widehat{\sigma}^2_{j,\,n}$，并最终据此推导准备金预测根的极限分布$R_{I,\,n}-\!\!\sim R_{I,\,n}$，我们针对生成累计赔款矩阵的随机机制$\mathcal{C}_{I,\,n}$提出假设2.2、2.3和2.5，并针对发展因子序列和方差参数提出假设2.4。这些假设分别与 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的假设2.2、2.3和3.3，以及假设4.1相似。该框架还将使我们能够在第4节严格考察 Mack自助法的一致性性质。

第一个假设针对初始赔款，即$\mathcal{C}_{I,n}$ （以及$\mathcal{D}_{I,n}$）的第一列。

假设2.2 （初始赔款）。 设初始赔款（$C_{I-n,0}, n \in \mathbb{N}_0$）是支撑集为 $[1,\infty)$的独立同分布（*i.i.d.*）随机变量，即对所有 i，均有$C_{i,0} \geq 1$ 。此外，设 $\mu_0 := E\left(C_{i,0}\right) \in [1,\infty)$ 且 $\tau_0^2 := Var\left(C_{i,0}\right) \in (0,\infty)$ 。

初始赔款的独立性是假设2.1（iii）的直接推论。此外，假设2.2规定初始赔款服从同一分布。在实践中，关于$C_{i,0}$ 的支撑集 $[1,\infty)$的条件并不苛刻，可以放宽为$C_{i,0}$ 有正的下界。

鉴于式（2.6）中的 $E(C_{i,\,j+1}|C_{i,\,j})$，假设累计赔款$C_{i,\,j+1}$ 按以下方式递归定义：

$$C_{i,j+1} = C_{i,j}F_{i,j} = C_{i,0}\prod_{k=0}^{j} F_{i,k}, \quad i = -n,\ldots,I,\ j = 0,\ldots,I+n-1, \tag{2.13}$$

其中 假设个体发展因子 $F_{i,\,j}$ 满足以下条件 .

假设2.3 （个体发展因子的条件分布）。 设个体发展因子（$F_{I-i,\,j},\ i \in \mathbb{N}_0,\ \ j \in \mathbb{N}_0$） 为支撑集为（$\epsilon,\ \infty$）的随机变量，其中某个 $\epsilon \geq 0$ 满足$F_{i,\,j}$ 与$F_{k,\,l}$ 在给定（$C_{i,\,j},\ C_{k,\,l}$） 的条件下相互独立，对所有满足（$k,\ l$）的（$i,\ j$） $\neq$ 均成立，其中

$$E(F_{i,j}|C_{i,j}) = f_j \quad and \quad Var(F_{i,j}|C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}. \tag{2.14}$$

请注意，假设2.2和2.3共同蕴含了假设2.1中的Mack的原始模型设定。还需注意，式（2.13）所确定的随机机制以及假设2.3适用于整个累计赔款矩阵$\mathcal{C}_{I,\,n}$。然而，回想一下，在$\mathcal{C}_{I,\,n}$ 中，我们只能观测到包含在上三角损失表$\mathcal{D}_{I,\,n}$中的那些$C_{i,\,j}$ 。因此，利用式（2.13）中的乘法关系，我们也能完全获知$F_{i,\,j}$、 $i = -n,\ \ldots,\ I-1$、$j = 0,\ \ldots,\ I-i-1$。

根据 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的引理 2.4，假设 2.2 和 2.3 可用于推导 C_{i}、$_{j}$，$i = -n$、……、I，$j =$ 的（无条件）均值和方差

0、.....、$I+n$ 从而得到

$$E(C_{i,j}) = \mu_0 \prod_{k=0}^{j-1} f_k =: \mu_j \quad \text{and} \quad Var(C_{i,j}) = \tau_0^2 \prod_{k=0}^{j-1} f_k^2 + \mu_0 \sum_{l=0}^{j-1} \sigma_l^2 \prod_{n=l+1}^{j-1} f_n^2 \prod_{m=0}^{l-1} f_m =: \tau_j^2,$$

其中，μ_0 和 τ_0^2 由假设2.2定义。结合下文的假设2.4，根据 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的引理4.2，两个序列 $(\mu_j,\ j \in \mathbb{N}_0)$ 和 $(\tau_j^2,\ j \in \mathbb{N}_0)$ 均为非负、单调不减，且分别收敛至 $\mu_j \to \mu_\infty$和 $\tau_j^2 \to \tau_\infty^2$，当$j \to \infty$时，其中 $\mu_\infty := \mu_0 \prod_{j=0}^{\infty} f_j$和 τ_∞^2: $= \tau_0^2 \prod_{k=0}^{\infty} f_k^2 + \mu_0 \sum_{l=0}^{\infty} \left(\prod_{m=0}^{l-1} f_m\right) \sigma_l^2 \left(\prod_{n=l+1}^{\infty} f_n^2\right)$。

假设2.4（发展因子和方差参数）。令 $n \to \infty$，在假设*2.2*和*2.3*的设定下可得

(i) a sequence of development factors $(f_j, j \in \mathbb{N}_0)$ *with* $f_j \geq 1$ *for all* $j \in \mathbb{N}_0$ *and* $f_j \to 1$ *as* $j \to \infty$ *such that* $\prod_{j=0}^{\infty} f_j < \infty$, *which is equivalent to* $\sum_{j=0}^{\infty} (f_j - 1) < \infty$.

(ii) a sequence of variance parameters $(\sigma_j^2, j \in \mathbb{N}_0)$ *with* $\sigma_0^2 > 0$ *and* $\sigma_j^2 \geq 0$ *for all* $j \in \mathbb{N}$ *with* $\sigma_j^2 \to 0$ *as* $j \to \infty$ *such that* $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^2 \sigma_j^2 < \infty$.

假设2.4对发展因子序列（$f_j,\ j \in \mathbb{N}_0$）和方差参数序列（$\sigma_j^2,\ j \in \mathbb{N}_0$）施加的条件相当宽松。实践中，每项索赔最终结清前都有一个有限但可能未知的期限，且期限因保险业务线而异。总之，与 Steinmetz 和 Jentsch（2022，第 3.1 节）所采用的做法一样，这一设定允许$\widehat{\ }$推导参数估计量$f_{j,\ n}$（及其平滑函数）的中心极限定理（CLT），其中 $n \to \infty$。

根据 Steinmetz 和 Jentsch（2022，第3.2节），要为 $\widehat{\sigma}_{j,\ n}^2$也推导出中心极限定理，必须施加以下附加假设。尽管$\widehat{\sigma}_{j,\ n}^2$ 的分布性质不会渐近地体现在准备金的分布中，但要在第 4 节建立自助法渐近理论，仍需具备$\widehat{\sigma}_{j,\ n}^2$ 的 $\sqrt{I+n}$-相合性；这一性质已由 Steinmetz 和 Jentsch（2022，定理3.5）证明。

假设 2.5（个体发展因子的高阶条件矩）。对于所有 $i \in \mathbb{Z}$、$i \leq I$、$j \in \mathbb{N}_0$，假设在给定 $C_{i,\ j}$ 的条件下，个体发展因子 $F_{i,j}$ 的三阶和四阶（中心）矩，即 $E((F_{i,j} - f_j)^3 | C_{i,j})$ 和 $E((F_{i,\ j} - f_j)^4 | C_{i,j})$，均存在，且

$$\kappa_j^{(3)} = E(C_{i,j}^2 E((F_{i,j} - f_j)^3 | C_{i,j})) \quad and \quad \kappa_j^{(4)} = E(C_{i,j}^2 E((F_{i,j} - f_j)^4 | C_{i,j})) \tag{2.15}$$

分别存在且有限。

利用 (2.13)，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下，准备金 $R_{I,n}$ 可写为

$$R_{I,n} = \sum_{i=-n}^{I} C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{I+n-1} F_{i,j} - 1 \right). \tag{2.16}$$

因此，将 (2.9) 和 (2.16) 代入后，式 (2.12) 中的准备金预测根变为

(2.17)

$$R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} = \sum_{i=-n}^{I} C_{i,I-i} \left(\prod_{j=I-i}^{I+n-1} F_{i,j} - \prod_{j=I-i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} \right) = \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F_{I-i,i} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} \right),$$

其中我们在最后一步将索引 i 翻转为 $I-i$。

3. Mack自助法方案

England 和 Verrall（2006）提出了 Mack 自助法，通过加入重抽样程序，为 Mack模型配备了估计（预测）准备金整体分布的方法。由于该方法提供了一种相对容易实施的算法，可通过估计准备金分布的高分位数来估计准备金风险，因此在实践中广受欢迎并被广泛使用。

按照 England 和 Verrall（2006）的提议，为了模拟准备金预测根的分布 $\widehat{R}_{I,n} - R_{I,n}$，Mack 自助法构造了它的某个自助法版本 $R^*_{I,n} - R_{I,n}$。一方面，这个自助法预测根依赖于对准备金的同一最佳估计 $\widehat{}$，其中心 $R^*_{I,n}$ 也位于 $R_{I,n}$。另一方面，它通过结合两种互补的（非参数和参数）自助法方法，对上三角和下三角中的个体发展因子进行重抽样，从而构造出准备金的某个双重自助法版本 $R_{I,n}$，即 $R^*_{I,n}$：

(i) 首先，对上三角应用非参数基于残差的自助法（见下文步骤 4），以构造自助法个体发展因子 $F^*_{i,j}$, $j = 0, \ldots, I+n-1$, $i = -n, \ldots, I-j-1$，从而得到自助法发展因子估计量 $\widehat{}$mators $f^*_{j,n}$, $j = 0, \ldots, I+n-1$.$\widehat{}$(ii) 其次，利用 (i) 中的自助法发展因子估计量 $f^*_{j,n}$，结合参数自助法（见下文步骤 5），还构造自助法个体发展因子 $F^*_{i,j}$, $i = -n, \ldots, I$, $j = 0, \ldots, I+n-1$ 和 $i + j \geq I$，即下三角部分。为此，必须选定一个（条件）自助法分布的参数族。

最后，由于在估计准备金风险时，我们处理的是一个预测问题，因此，准备金预测根在最新观测到的累积索赔条件下的极限性质至关重要，必须通过适当的重抽样程序加以模拟。为此 $\widehat{}$，采用 Mack 自助法，通过条件自助分布来估计 $R_{I,n} - R_{I,n}\widehat{}$ 在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 条件下的条件分布。

3.1. **Mack自助法算法**。

给定上三角 $\mathcal{D}_{I,n}$ 后，Mack自助法算法定义如下：

步骤 **1.** 通过计算 $\widehat{f}_{j,n}$ 和 $\widehat{\sigma}^2_{j,n}$，估计 $\mathcal{D}_{I,n}$ 中的发展因子 f_j 和方差参数 σ^2_j，其中 $j = 0, \ldots, I+n-1$ 的定义分别见 (2.8) 和 (2.11)。

步骤 2. 对所有满足 $\widehat{\sigma}^2_{j,n} > 0$的 $j = 0, \ldots, I+n-1$，计算“残差”

$$\widehat{r}_{i,j} = \sqrt{C_{i,j}}(F_{i,j} - \widehat{f}_{j,n})/\widehat{\sigma}_{j,n}, \quad i = -n, \ldots, I-j-1, \tag{3.1}$$

并对其重新居中和缩放，得到 $\widetilde{r}_{i,\,j} = \frac{1}{s}(\widehat{r}_{i,\,j} - r)$，其中[1]

$$\overline{r} = \frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{k=0}^{I+n-2}\sum_{l=-n}^{I-k-1}\widehat{r}_{l,k}, \quad s^2 = \frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{k=0}^{I+n-2}\sum_{l=-n}^{I-k-1}(\widehat{r}_{l,k} - \overline{r})^2.$$

步骤 3. 从重新居中和缩放后的残差 $\widetilde{r}_{i,\,j}, j =$ 中有放回地随机抽取

$0, \ldots, I+n-2, i = -n, \ldots, I-j-1$ to get 'bootstrap errors' $r^*_{i,j}, j = 0, \ldots, I+n-1,$ $i = -n, \ldots, I-j-1.$

步骤 4. 定义自助法个体发展因子

$$F^*_{i,j} = \widehat{f}_{j,n} + \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}} r^*_{i,j}, \quad j = 0, \ldots, I+n-1,\ i = -n, \ldots, I-j-1, \tag{3.2}$$

令 $\mathcal{F}^*_{I,\,n} = \{F^*_{i,j} | j = 0, \ldots, I+n-1,\ i = -n, \ldots, I-j-1\}$，并计算 Mack自助法发展因子估计量

$$\widehat{f}^*_{j,n} = \frac{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}F^*_{i,j}}{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}} = \widehat{f}_{j,n} + \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}\sum_{i=-n}^{I-j-1}\sqrt{C_{i,j}}r^*_{i,j}}{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}}, \quad j = 0, \ldots, I+n-1. \tag{3.3}$$

步骤 5. 为 $F^*_{i,\,j}$ 给定条件下的（条件）自助法分布选择一个参数族

$C^*_{i,j}, \mathcal{D}_{I,n}$ and $\mathcal{F}^*_{I,n}$ such that $F^*_{i,j} > 0$ a.s. with

$$E^*(F^*_{i,j}|C^*_{i,j}, \mathcal{F}^*_{I,n}) = \widehat{f}^*_{j,n}, \quad Var^*(F^*_{i,j}|C^*_{i,j}, \mathcal{F}^*_{I,n}) = \frac{\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{C^*_{i,j}}, \quad i = -n, \ldots, I,\ j = I-i, \ldots, I+n-1,$$

其中 $E^*(\cdot) := E^*(\cdot|\mathcal{D}_{I,n})$、$Var^*(\cdot) := Var^*(\cdot|\mathcal{D}_{I,n})$ 等分别表示 Mack 自助法均值、方差等，即以数据 $\mathcal{D}_{I,n}$ 为条件。然后，给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$，使用递推生成自助法最终赔款 $C^*_{i,I+n}$ 和准备金 $R^*_{i,I+n} = C^*_{i,I+n} - C^*_{i,I-i}$，其中 $i = -n, \ldots, I$

$$C^*_{i,j+1} = C^*_{i,j}F^*_{i,j}, \quad j = I-i, \ldots, I+n-1. \tag{3.4}$$

步骤 6。计算自助法总准备金 $R^*_{I,n} = \sum_{i=0}^{I+n} R^*_{I-i,I+n}$ 及其自助法预测根

$$R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} = \sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^*_{I-i,i} - \prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}\right). \tag{3.5}$$

步骤 7。将上述步骤 3 - 6 重复 B 次，其中 B 很大，以获得自助法预测根 $(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})^{(b)}$，$b = 1, \ldots, B$，并将其经验分布的 α 分位数记为 $q^*(\alpha)$。

[1]注意，根据构造，$\widehat{\sigma}^2_{I+n-1,n} = 0$ 使得 $\widehat{r}_{-n,I+n-1}$ 在 (3.1) 中被排除，因此至多可以计算 $(I+n+1)(I+n)/2 - 1 = ((I+n+1)(I+n)-2)/2$ 个残差。如果 $\widehat{\sigma}^2_{j,n} = 0$ 对其他j也成立，则相应的残差也会在 (3.1) 中被排除，并且必须相应地调整 r 和 s 的公式。下文为方便记号起见，假设只有 $\widehat{\sigma}^2_{I+n-1,n} = 0$ 和 $\widehat{\sigma}^2_{j,n} > 0$ 对所有 $j = 0, \ldots, I+n-2$ 以及所有 $n \in \mathbb{N}_0$均成立。

步骤 8. 为 $R_{I,n}$ 构造 $(1-\alpha)$ 等尾预测区间，形式如下：

$$\left[\widehat{R}_{I,n} + q^*(\alpha/2), \widehat{R}_{I,n} + q^*(1-\alpha/2)\right].$$

注释 3.1 (关于 Mack 的自助法方案)。

(i) 尽管准备金的 *Mack* 自助法预测根 $R^*_{I,n} - R_{I,n}$ 在中心化时使用相同的最佳估计值 $R_{I,n}$ （如 $R_{I,n} - R_{I,n}$），但它依赖于总准备金 $R_{I,n}$ 的某种双重自助法版本 $R^*_{I,n}$，该版本使用 $f^*_{j,n}$，而非仅使用 $f_{j,n}$，但采用 $\widehat{\sigma}^2_{j,n}$。然而，尽管 $E^*(F^*_{i,j}|C^*_{i,j}, \mathcal{D}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n}) = \widehat{f}^*_{j,n}$ 成立，对于下三角中的个体发展因子，我们仍有 $E^*(F^*_{i,j}|C^*_{i,j}) = f_{j,n}$。相较之下，对于方差，我们有 $Var^*(F^*_{i,j}|C^*_{i,j}, \mathcal{F}^*_{I,n}) = \widehat{\sigma}^2_{j,n}/C^*_{i,j}$，但是

$$Var^*(F^*_{i,j}|C^*_{i,j}) = \frac{\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{C^*_{i,j}} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{\sum_{k=n}^{I-j-1} C_{k,j}}.$$

(ii) 由于步骤 *4* 中采用的固定设计自助法不会生成自助法累计赔款 $C^*_{i,j}$（因此也不会生成自助法上三角损失表 $\mathcal{D}^*_{I,n}$），而只生成 $F^*_{i,j}$，因此，对于 $j \neq k$，在给定 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下，(3.3) 中定义的自助法发展因子估计量 *bootstrap development factor estimators* $f^*_{j,n}$ 和 $f^*_{k,n}$ 是独立的。这与发展因子估计量 $f_{j,n}$ 和 $f_{k,n}$ 形成对比：它们对于 $j \neq k$ 渐近独立，但在有限样本中仅不相关，因此对于 $j \neq k$，有 $E(\widehat{f}^2_{j,n}\widehat{f}^2_{k,n}) < 0$。

(iii) 步骤 *4* 中用于构造 $f^*_{j,n}$ 的非参数自助法使用了残差，但根据假设*2.2*和*2.3*，*Mack*模型中并不存在可由这些残差近似的误差。事实上，任何能够成功模拟 $C_{i,j+1}$ 在给定 $C_{i,j}$ 条件下的一阶和二阶条件矩的（可能是参数）自助法方案，都能正确模拟 $f_{j,n}$ 的极限分布。

(iv) 鉴于上述讨论，可以采用完全参数化的实现方式，在步骤 *4* 中也使用步骤 *5* 中相同的参数族来获得自助法发展因子 $F^*_{i,j}$*'s*。

(v) 一种完全非参数的方法是，在步骤 *5* 中也使用步骤 *4* 中的非参数自助法；这在理论上可行，但由于 $F^*_{i,j}$*'s* 可能为负，因此会导致有限样本表现下降。

4. Mack自助法的渐近理论

尽管 England 和 Verrall（2006）提出并在第3节中描述的 Mack 自助法已广泛用于准备金风险估计，但文献中仍缺少能够证实其相合性的极限结果。本节基于第2节所述的渐近与随机框架，推导 Mack 自助法的渐近理论，从而能够对其相合性特征进行严格考察。

Mack自助法旨在模拟准备金的预测根 $R_{I,n} - R_{I,n}$ 在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下的分布，其依据是相应 Mack

准备金的自助法预测根 $R^*_{I,\,n} - R_{I,\,n}$ 在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\,n}$的条件下的自助法分布。因此，有必要更仔细地考察这两个表达式。回顾式（2.17）中准备金的预测根 $R_{I,\,n} - R_{I,\,n}$ 的表示形式，可以将其分解为两个加法部分，分别对应预测误差和估计误差。具体而言，通过减去并加上 $\sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,\,i} \prod_{j=i}^{I+n-1} f_j$，得到

$$
\begin{aligned}
R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} &= \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{I+n-1} f_j \right) + \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} f_j - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \\
&=: \left(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} \right)_1 + \left(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} \right)_2 , \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

其中，$(R_{I,\,n} - R_{I,\,n})_1$ 表示过程不确定性（包含过程方差），而 $(R_{I,\,n} - R_{I,\,n})_2$ 表示估计不确定性（包含估计方差）。

类似地，对于式（3.5）中的准备金 Mack 自助法预测根 $R^*_{I,\,n} - R_{I,\,n}$，通过减去并加上 $\sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,\,i} \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{j,\,n}$，可得

$$
\begin{aligned}
R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} &= \sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{j,n} \right) + \sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \\
&=: \left(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} \right)_1 + \left(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n} \right)_2 , \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

其中，$(R^*_{I,\,n} - R_{I,\,n})_1$ 和 $(R^*_{I,\,n} - R_{I,\,n})_2$ 分别是 $(R_{I,\,n} - R_{I,\,n})_1$ 和 $(R_{I,\,n} - R_{I,\,n})_2$, 的 Mack 自助法版本。

由于我们主要关注给定$R_{I、\,n} - R_{I、n}$的条件下$\mathcal{Q}_{I,\,n}$准备金预测根的分布，鉴于分解（4.1）和（4.2），首先分别考察给定$\mathcal{Q}_{I、n}$条件下（$R_{I、\,n} - R_{I、\,n}$）和（$R_{I、\,n} - R_{I、\,n}$）的（极限）分布是有益的。这些分布将为第 4.2 节研究 Mack自助法的一致性性质提供有价值的基准分布。Steinmetz 和 Jentsch（2022，第 4 节）已确立了此类渐近结果。我们将在第 4.1 节简要总结相关的条件极限分布。

4.1. **准备金预测根的条件渐近**。

下面我们分别回顾 Steinmetz 和 Jentsch（2022，定理 4.3、4.10、4.12 及推论 4.13）确立的条件渐近结果：第 4.1.1 节中的过程不确定性项（$R_{I、\,n} - R_{I、\,n}$）$_1$、第 4.1.2 节中的估计不确定性项（$R_{I、\,n} - R_{I、\,n}$）$_2$，以及第 4.1.3 节中对$R_{I、\,n} - R_{I、\,n}$ 的联合分析。

4.1.1. 准备金预测的条件渐近：过程不确定性。

基于 Steinmetz 和 Jentsch（2022）的定理 4.3，以下定理给出了过程不确定性项（$R_{I,\,n} - R_{I,\,n}$）在给定 $\mathcal{Q}_{I,\,n}$ 条件下的极限分布。

定理 4.1（关于 （$R_{I,\,n} - R_{I,\,n}$）$_1$ 在给定 $\mathcal{Q}_{I,\,n}$）**的渐近性质**）。假设 假设 *2.2*，*2.3* 和 *2.4* 成立。那么，当 $n \to \infty$ 时，在给定 $\mathcal{Q}_{I,\,n}$ 的条件下，（$R_{I,\,n} - R_{I,\,n}$）$_1$ 以 L_2-意义收敛

^至非退化随机变量 $(R_{I,\infty} - R_{I,\infty})_1$。也就是说，我们有

$$E\left(\left((R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1 - (R_{I,\infty} - \widehat{R}_{I,\infty})_1\right)^2 |\mathcal{Q}_{I,n}\right) \xrightarrow{p} 0, \tag{4.3}$$

其中

$$(R_{I,\infty} - \widehat{R}_{I,\infty})_1 := \sum_{i=0}^{\infty} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{\infty} F_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{\infty} f_j\right) \sim \mathcal{G}_1. \tag{4.4}$$

^在给定 $\mathcal{Q}_{I,\infty} = (C_{I-i,i}|i \in \mathbb{N}_0)$的条件下， $\mathcal{G}_1$ 均值为零， $E((R_{I,\infty} - R_{I,\infty})_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}) = 0$, 且方差为

$$Var\left((R_{I,\infty} - \widehat{R}_{I,\infty})_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} C_{I-i,i} \sum_{j=i}^{\infty} \left(\prod_{k=i}^{j-1} f_k\right) \sigma_j^2 \left(\prod_{l=j+1}^{\infty} f_l^2\right) = O_P(1). \tag{4.5}$$

定理 4.1 中的（条件） L_2-收敛结果也立即推出（条件）依分布收敛。也就是说，对于 $n \to \infty$，有

$$(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1|\mathcal{Q}_{I,n} \xrightarrow{d} (R_{I,\infty} - \widehat{R}_{I,\infty})_1|\mathcal{Q}_{I,\infty} \sim \mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}. \tag{4.6}$$

此外，根据定理 4.1（另见 Steinmetz 和 Jentsch 2022，注释 4.4 中的讨论），条件极限分布 $\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 通常非高斯分布，并且取决于个体发展因子 $F_{i,j}|C_{i,j}$的（条件）分布。

4.1.2. 准备金预测的条件渐近：估计不确定性。

^与定理^4.1 中给出的 $(R_{I,n} - R_{I,n})_1$ 的条件极限结果相比，推导 $(R_{I,n} - R_{I,n})_2$ 的渐近结果的方法相当不同，也复杂得多。尤其是，为了得到非退化极限分布，我们必须将 $(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2$ 放大 $\sqrt{I+n+1}$；所得的（高斯分布）分布依赖于 (Steinmetz 和 Jentsch 2022, 第3节和附录 C) 中建立的关于^（发展因子估计量的）CLT$f_{j,n}$。为推导渐近理论，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$,^的条件下，进一步将 $(R_{I,n} - R_{I,n})_2$ 分解为以下形式颇有助益

$$\begin{aligned}
&(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2 \\
&= \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} f_j - \prod_{j=i}^{I+n-1} f_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n})\right) + \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} f_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \\
&= (R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2^{(1)} + (R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2^{(2)},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

其中 $(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2^{(1)}$ 关于 $\mathcal{Q}_I$ 可测，$_n$ 和 $f_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) := \mu_{j+1,n}^{(1)}(\mathcal{Q}_{I,n})/\mu_{j\,n}^{(2)}$， $(\mathcal{Q}_{I,n})$ 满足 $\mu_{j+1,n}^{(1)}(\mathcal{Q}_{I,n}) = E(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j+1}|\mathcal{Q}_{I,n})$，且 $\mu_{j\,n}^{(2)}, (\mathcal{Q}_{I,n}) = E(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}|\mathcal{Q}_{I,n})$。^要推导 $(R_{I,n} - R_{I,n})_2$ 的（条件）渐近理论，还需要对个体发展因子 $F_{i,j}$ 的随机性质作出额外假设，这些假设将在下文的假设 4.2 和假设 4.3 中概述，其形式类似于 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的假设 4.6 和假设 4.8。

假设 4.2 (支撑条件和方差参数**)**。 个体发展因子 $(F_{i,j},\ i \in \mathbb{Z},\ i \leq I,\ j \in \mathbb{N}_0)$ 是支撑集为 (ϵ, ∞) 的随机变量，其中 $\epsilon > 0$ 为某个值，且方差参数序列 $(\sigma_j^2, j \in \mathbb{N}_0)$ 在 $j \to \infty$ 时收敛于 0，使得 $\sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^2 \frac{\sigma_j^2}{\epsilon^j} < \infty$。

—

除了假设 4.2 中关于支撑集和方差参数的条件外，还需要对累计索赔的后向条件分布$C_{i,\ j}$ 在给定$C_{i,\ j+1}$ 时满足正则性条件。

假设4.3 （后向条件矩）。 假设 *2.2*、*2.3*、*2.4* 和假设 *4.2* 均成立，使得对所有 $K \in \mathbb{N}_0$、$k \geq 0$ 以及 j、j_1、$j_2 \in \{0, \ldots, K\}$、$j_1 \leq j_2$，我们有

$$|E(C_{i,j}|C_{i,j+k}) - E(C_{i,j}|C_{i,j+k+1})| \leq a_k X_i,$$

$$|Cov(C_{i,j_1}, C_{i,j_2}|C_{i,j_2+k}) - Cov(C_{i,j_1}, C_{i,j_2}|C_{i,j_2+k+1})| \leq b_k Y_i,$$

其中$(X_i、\ i \in \mathbb{Z}、\ i \leq I)$、$(Y_i、\ i \in \mathbb{Z}、\ i \leq I)$ 是非负独立同分布随机变量序列，且 $E(X_i^{2+\delta}) < \infty$，其中某个 $\delta > 0$ 满足条件，且 $E(Y_i^2) < \infty$；此外，$(a_j、\ j \in \mathbb{N}_0)$ 和$(b_j、\ j \in \mathbb{N}_0)$ 是非负实值序列，满足 $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^2 a_j < \infty$ 以及 $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^2 b_j < \infty$。

虽然 Mack模型旨在按照递推式 (2.13) 以相当简单的前向方式生成损失三角形，从而可以轻松计算前向条件均值$E(C_{i,j+1}|C_{i,j})$和方差 $Var(C_{i,j+1}|C_{i,j})$，但要计算后向条件均值 $E(C_{i,\ j}|C_{i,j+1})$和方差 $Var(C_{i,j}|C_{i,j+1})$则并不简单；参见 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的例4.9。

基于 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的定理 4.10，该定理依赖于（Steinmetz 和 Jentsch 2022，附录 C）中所述的关于给定$\mathcal{Q}_{I,n}$ 时发展因子估计量 $f_{j,n}$ （的光滑函数）的条件中心极限定理^，以下定理给出了在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$条件下估计不确定性项 $(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2$ 的极限分布。虽然 $(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2^{(1)}$ 关于 $\mathcal{Q}_{I,n}$可测，但假设 4.2 和 4.3 可用于证明，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$的条件下，$\sqrt{I+n+1}(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2^{(2)}$ 具有渐近正态性。

———

^**定理 4.4** （$(R_{I,\ n} - R_{I,\ n})_{\ 2}$ 在给定 $\mathcal{Q}_{I,\ n}$）**的渐近性质）**。假设假设 *2.2*、*2.3*、*2.4*、*4.2* 和 *4.3* 成立。那么，当 $n \to \infty$ 时，以下结论成立：

（*i*）无条件地，$\sqrt{I+n+1}(R_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})_{\ 2}^{(1)}$ 依分布收敛到一个非退化极限分布 $\mathcal{G}_2^{(1)}$。也就是说，我们有

$$\sqrt{I+n+1}(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2^{(1)} \xrightarrow{d} \left\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_{\infty}^{(1)} \right\rangle \sim \mathcal{G}_2^{(1)}, \tag{4.8}$$

其中，$\mathbf{Y}_{\infty}^{(1)} = (Y_{(1)\,i}, i \in \mathbb{N}_0)$ 表示一个中心高斯过程，其协方差为

$$Cov(Y_{i_1}^{(1)}, Y_{i_2}^{(1)}) = \lim_{K \to \infty} \mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j}^{(1)}(i_1, i_2), \quad i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0,$$

其中，$\mathbf{\Sigma}_{K\ ,\prod f_j}^{(1)}(i_1, i_2)$ 在 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）的推论 *C.2* 中定义。这里，两个随机序列 $\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 和$\mathbf{Y}_{\infty}^{(1)}$ 是随机独立的。

(ii) 在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$, $\sqrt{I+n+1}(R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2^{(2)}$ 的条件下，依分布收敛于一个中心正态分布。也就是说，我们有

$$\sqrt{I+n+1}(R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2^{(2)}|\mathcal{Q}_{I,n} \xrightarrow{d} \left\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_\infty^{(2)} \right\rangle |\mathcal{Q}_{I,\infty} \sim \mathcal{G}_2^{(2)}|\mathcal{Q}_{I,\infty}, \tag{4.9}$$

其中 $\mathcal{G}_2^{(2)}|\mathcal{Q}_{I,\infty} \sim \mathcal{N}(0,\ \Xi(\mathcal{Q}_{I,\infty}))|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 服从均值为零、方差为

$$\Xi(\mathcal{Q}_{I,\infty}) = \lim_{K\to\infty} \mathcal{Q}_{I,K-I}\mathbf{\Sigma}^{(2)}_{K,\prod f_j}\mathcal{Q}'_{I,K-I} = \lim_{K\to\infty} \mathcal{Q}_{I,K-I}(\mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j} - \mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K,\prod f_j})\mathcal{Q}'_{I,K-I}, \tag{4.10}$$

where $\mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j}$ *and* $\mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K,\prod f_j}$ *and* $\mathbf{\Sigma}^{(2)}_{K,\prod f_j}$ *are defined in Corollary C.2 in Steinmetz and Jentsch (2022).*

根据定理 4.4(ii)，与定理 4.1 中的 $\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 不同，极限分布$\mathcal{G}_2^{(2)}|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 服从高斯分布。结合定理 4.4(i)，在给定$\mathcal{Q}_{I,n}$的条件下，估计的不确定项 $\sqrt{I+n+1}(R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2$ 服从均值为 $\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_\infty^{(2)} \rangle$、方差为$\Xi(\mathcal{Q}_{I,\infty})$的高斯分布。

4.1.3. 准备金完整预测根的条件渐近。

通过结合定理 4.1和定理 4.4 中分别针对 $(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 以及 $(R_{I,n}-R_{I,n})_2$ 推导出的结果，还可以建立在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 条件下关于 $R_{I,n}-R_{I,n}$ 的联合渐近结果。

定理 *4.5*（给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 时关于 $R_{I,n}-R_{I,n}$ 的渐近性质）。假设定理 *4.1* 和定理 *4.4* 的条件成立。那么，给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$，$(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 与 $(R_{I,n}-R_{I,n})_2$ 随机独立，且 $R_{I,n}-R_{I,n}|\mathcal{Q}_{I,n}$ 依分布收敛于 $\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$。也就是说，我们有

$$R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n}|\mathcal{Q}_{I,n} = (R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_1 + (R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2|\mathcal{Q}_{I,n} \xrightarrow{d} \mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}. \tag{4.11}$$

根据定理 4.4，$(R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2$ 需要一个膨胀因子 $\sqrt{I+n+1}$，才能收敛到非退化极限分布。由于定理 4.1 中的 $(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 并非如此，过程不确定性项 $(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 渐近地主导准备金预测根 $R_{I,n}-R_{I,n}$。

因此，我们可以得出结论：准备金（的预测根）通常不具有渐近正态性，这使得在Mack模型中对准备金采用正态近似这一惯常做法受到质疑。此外，$\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 的形状确实取决于个体发展因子 $F_{i,j}|C_{i,j}$的真实（条件）分布族。

4.2. **Mack 自助法准备金预测根的条件自助法渐近性**。

鉴于式（4.1）中的分解$R_{I,n}-R_{I,n} = (R_{I,n}-R_{I,n})_1 + (R_{I,n}-R_{I,n})_2$，以及第 4.1 节汇总的$(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 和$(R_{I,n}-R_{I,n})_2$ 的条件极限分布，考察式（4.2）中相应的 Mack 自助法量$(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$和$(R^*_{I,n}-R_{I,n})_2$，并检验它们是否能正确模拟这些极限

$\widehat{}$ $\widehat{}$分布。虽然$(R_{I,\ n}-R_{I,\ n})_1$和$(R_{I,\ n}-R_{I,\ n})_2$是在给定$\mathcal{Q}_{I,\ n}$的条件下进行分析的，但自助法量$(R^*_{I,\ n}-R_{I,\ n})_1$和$(R^*_{I,\ n}-R_{I,\ n})_2$则必须在给定$\mathcal{Q}^*_{I,\ n}=\mathcal{Q}_{I,\ n}$，并且还给定$\mathcal{D}_{I,\ n}$的条件下考察。

4.2.1. 准备金预测的条件自助法渐近性：过程不确定性。

为推导自助法渐近性，我们必须对个体发展因子的（条件）分布参数族施加额外的光滑性条件，以确保发展因子和方差参数的相合估计也能保证对整个分布的相合估计。

假设 4.6（、的（条件）分布参数族$F_{i,\ j}$）。（条件）分布 $F_{i,\ j}|C_{i,\ j},\ i\in\mathbb{Z},\ i\leq I,\ j\in\mathbb{N}_0$ 属于参数分布族 **H**，满足：

（*i*）分布 $\mathcal{H}\in H$ 由其前两个（条件）矩唯一确定。也就是说，对所有 $i\in\mathbb{Z},\ i\leq I,\ j\in\mathbb{N}_0$ 以及所有 $c\in(0,\infty)$，$F_{i,j}|C_{i,j}=c$ 的条件分布由 $E(F_{i,j}|C_{i,j}=c)=f_j$ 和 $Var(F_{i,j}|C_{i,j}=c)=\frac{\sigma_j^2}{c}$ 根据（*2.14*）唯一确定。（*ii*）分布 $\mathcal{H}\in H$ 关于 f_j 和 σ_j^2连续。也就是说，对所有 $i\in\mathbb{Z},\ i\leq I, j\in\mathbb{N}_0$ 以及所有 $c\in(0,\infty)$，$F_{i,j}|C_{i,j}=c$ 的条件分布在（f_j，σ_j^2）的某个邻域内连续。

由于定理 4.1 推导出的极限分布通常是非高斯分布，并且取决于个体发展因子的（条件）分布（族），因此我们还要求自助法个体发展因子 $F^*_{i、\ j},\ i=-n,\ \ldots\ldots,\ I,\ j=I-i,\ \ldots\ldots,\ I+n-1$，即下三角中的因子，遵循与根据假设 4.6 生成的 $F_{i、\ j}$ 相同的真实（条件）分布参数族。

假设 4.7（、$_j$ 在下三角中的（条件）分布）。对于任意 $n\in\mathbb{N}_0$，第 *3.1* 节 *Mack*自助法的步骤 *5* 中 $F^*_{i、\ j}|C^*_{i、\ j},\mathcal{D}_{I、\ n},\mathcal{F}^*_{I、\ n},\ j=0,\ldots,I+n-1$ 和 $i=-n,\ldots,I-j-1$ 的（条件）分布，属于根据假设 *4.6* 用于生成 $F_{i、\ j}|C_{i、\ j}$ 的真实（条件）分布参数族 **H** 。也就是说，我们有

$$F^*_{i,j}|(C^*_{i,j}=x,\widehat{f}^*_{j,n}=y,\widehat{\sigma}^2_{j,n}=z)\overset{d}{=}F_{i,j}|(C_{i,j}=x,f_j=y,\sigma_j^2=z)\quad for\ all\quad(x,y,z)'\in(0,\infty).$$

结合定理 4.1 的设定，假设 4.6 和 4.7 可以用来证明以下结果。

$\widehat{}$定理 *4.8*（在 $\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 条件下，$(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$ 的自助法渐近性）。假设 *2.2*、*2.3*、*2.4*、*2.5*、*4.6* 和 *4.7* 成立。那么，当 $n\to\infty$ 时，在条件于$\widehat{}\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的情况下，$(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$ 依概率依分布收敛到 $\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$；根据定理 *4.1* 中描述的 *(4.6)*，该分布是 $(R_{I,\infty}-R_{I,\infty})_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 的（极限）分布

4.1。此外，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$，都有 $E^*((R^*_{I,\ n} - R_{I,\ n})_1 | \mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}) = 0$ 并且，对 $n \to \infty$，我们有

$$Var^*\left((R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1 | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}\right) \longrightarrow Var\left((R_{I,\infty} - \widehat{R}_{I,\infty})_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty}\right) \tag{4.12}$$

依概率，其中 $Var((R_{I,\infty} - R_{I,\infty})_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty}) = O_P(1)$ 如式(4.5)所示。因此，当$n \to \infty$时，我们有

$$d_2\left(\mathcal{L}\left((R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1 | \mathcal{Q}_{I,n}\right), \mathcal{L}^*\left((R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1 | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}\right)\right) \longrightarrow 0$$

依概率，其中 $\mathcal{L}^*(\cdot)$ 表示在给定$\mathcal{D}_{I,n}$条件下的自助法分布， d_2 是马洛斯度量，即对两个分布 G和 H定义为 $d_2(G,H) = inf(E||X-Y||^2)^{1\,2}$，其中下确界取遍所有边缘分布为 $X \sim G$ 和 $Y \sim H$的(X,Y) 的联合分布。

4.2.2. 准备金预测的条件自助法渐近性：估计不确定性。

鉴于式（4.7）中的分解 $(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2 = (R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})^{(1)}_2 + (R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})^{(2)}_2$，为推导相应的自助法渐近理论，进一步以相同方式对其自助法对应项 $(R^*_{I,n} - R_{I,n})_2$ 在给定$\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$的条件下作进一步分解，似乎很有启发性。也就是说，考虑到式（3.3）中$f^*_{j,n}$ 的具体定义，我们得到

$$\begin{aligned}
&(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2 \\
=&\sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{I+n-1} f^*_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n})\right) + \sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1} f^*_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \\
=&(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})^{(1)}_2 + (R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})^{(2)}_2,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

其中 $f^*_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) := \mu^{*(1)}_{j+1,n}(\mathcal{Q}_{I,n})/\mu^{*(2)}_{j\,n}(\mathcal{Q}_{I,n})$，其中 $\mu^{*(1)}_{j+1,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) := E^*(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}F^*_{i,j} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})$，且 $\mu^{*(2)}_{j\,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) := E^*(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})$。现在，对于 $\mu^{*(1)}_{j+1,n}(\mathcal{Q}_{I,n})$，我们得到

$$\mu^{*(1)}_{j+1,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) = \frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}E^*(F^*_{i,j} | C^*_{i,I-i} = C_{i,I-i}) = \frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}E^*(F^*_{i,j})$$

这里用到了以下事实：$C_{i,j}$ 关于 $\mathcal{D}_{I,n}$ 是可测的，并且 $F^*_{i,j}$ 在给定条件 $C^*_{i,I-i} = C_{i,I-i}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的情况下随机独立。这是因为 Mack 自助法采用基于 $C_{i,j}$ 的固定设计方法，而不是递归生成 $C^*_{i,j}$，以获得完整的自助法损失三角形 $\mathcal{D}^*_{I,n}$。总之，利用 $E^*(F^*_{i,j}) = f_{j,n}$，我们得到

$$f^*_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n}) = \frac{\widehat{f}_{j,n}\left(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}\right)}{\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}} = \widehat{f}_{j,n}$$

从而得到 $(R^*_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(2)}_2 = 0$，使得 $(R^*_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})_2 = (R^*_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(1)}_2$。因此，与被分解为两部分 $(R_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(1)}_2$ 和 $(R_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(2)}_2$ 的 $(R_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})_2$，相比，这种

$(R^*_{I,n} - R_{I,n})_2$ 不存在类似的分解。不过，对于 $n \to \infty$，接下来仍需检验 $(R^*_{I,n} - R_{I,n})_2$ 的极限性质。与定理 4.4(ii) 中条件极限结果的推导不同，后者依赖于发展因子估计量 f_j 的条件中心极限定理，如（Steinmetz 和 Jentsch 2022，附录 C）所述；$(R^*_{I,n} - R_{I,n})_2$ 极限性质的推导依赖于 Mack 自助法发展因子估计量 f^*_j 的无条件自助法中心极限定理，也就是说，不以 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 为条件。为此，要通过验证李雅普诺夫条件来证明 $f^*_{j,n}$ 的渐近正态性，我们必须对发展因子和方差参数的估计量施加额外的正则条件。

假设 4.9 (一致有界条件)。 假设发展因子估计量 $\widehat{f}_{j,\,n}$、 $j = 0$、. . .、 $I+n-1$ 以及方差参数估计量 $\widehat{\sigma}^2_{j,\,n}$、 $j = 0$、. . .、 $I+n-2$满足

$$\sup_{j=0,\ldots,I+n-1} \frac{\widehat{f}_{j,n}}{f_j} = O_P(1) \quad and \quad \sup_{j=0,\ldots,I+n-2} \frac{\sigma^2_j}{\widehat{\sigma}^2_{j,n}} = O_P(1)$$

对 $n \to \infty$成立。此外，对于 (2.15) 中定义的 $\kappa^{(4)}_j$，假设 $((\kappa^{(4)}_j/\sigma^4_j)\ j \in \mathbb{N}_0)$ 是一个有界序列。

由此可得到关于 Mack 自助法估计不确定性部分的以下渐近结果。

定理 *4.10*（给定 $\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\,n}$ 时，$(R^*_{I,n}-R_{I,n})_2$ 的自助法渐近性）。假设假设 *2.2*、*2.3*、*2.5*、*2.4*、*4.2* 和 *4.9* 成立。那么，当 $n \to \infty$ 时，在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\,n}$、 $\sqrt{I+n+1}$ 的条件下，$(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2$ 依分布收敛于 $\widetilde{\mathcal{G}}_2|\mathcal{Q}_{I,\infty}$，且该收敛以概率成立，其中 $\mathcal{G}_2|\mathcal{Q}_{I,\infty} \sim \mathcal{N}(0, \Xi(\mathcal{Q}_{I,\infty}))|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 是一个条件高斯分布，其条件均值为零，条件方差为

$$\widetilde{\Xi}(\mathcal{Q}_{I,\infty}) = \lim_{K\to\infty} \mathcal{Q}_{I,K-I} \mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j} \mathcal{Q}'_{I,K-I}, \tag{4.14}$$

其中 $\mathbf{\Sigma}_{K,\,\prod f_j} = \mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K\,,\,\prod f_j} + \mathbf{\Sigma}^{(2)}_{K\,,\,\prod f_j}$ 定义见 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）中的推论 *C.2*。

$$\widetilde{\Xi}(\mathcal{Q}_{I,\infty}) = \sum_{i_1,i_2=0}^{\infty} C_{I-i_1,i_1} C_{I-i_2,i_2} \sum_{j=\max(i_1,i_2)}^{\infty} \frac{\sigma^2_j}{\mu_j} \prod_{l=\max(i_1,i_2),l\neq j}^{\infty} f^2_l \prod_{m=\min(i_1,i_2)}^{\max(i_1,i_2)-1} f_m = O_P(1).$$

因此，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$d_2\left(\mathcal{L}\left(\sqrt{I+n+1}(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2|\mathcal{Q}_{I,n}\right), \mathcal{L}^*\left(\sqrt{I+n+1}(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}\right)\right) \not\to 0 \quad in\ prob.,$$

因为，在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下，$\sqrt{I+n+1}(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2$ 的极限正态分布，其（零）均值和方差 $\widetilde{\Xi}(\mathcal{Q}_{I,\infty})$ 与在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下 $\sqrt{I+n+1}(R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2$ 的极限正态分布不同；根据定理 *4.4*，后者的均值为 $\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, Y^{(2)}_\infty \rangle$，方差为 $\Xi(\mathcal{Q}_{I,\infty})$。

4.2.3. 准备金整体预测根的条件自助法渐近性 $e.$

与第 4.1.3 节中一样，结合定理 4.8 和 4.10 中分别关于 $(R^*_{I,\ n}-R_{I,\ n})_1$ 和 $(R^*_{I,\ n}-R_{I,\ n})_2$ 的结果，可以得到在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,\ n}=\mathcal{Q}_{I,\ n}$ 以及 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 的条件下，$R^*_{I,\ n}-R_{I,\ n}$ 的联合渐近性。

定理 ***4.11***（给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 时，$R^*_{I,n}-R_{I,n}$ 的自助法渐近性）。假设定理 ***4.8*** 和 ***4.10*** 的条件成立。则在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$的条件下，$(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$ 与 $(R^*_{I,n}-R_{I,n})_2$ 不相关，并且 $R^*_{I,n}-R_{I,n}|(\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n})$ 依分布收敛于 $\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$。也就是说，我们有

$$R^*_{I,n}-\widehat{R}_{I,n}|\left(\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n}\right)=(R^*_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_1+(R^*_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2|\left(\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$$

in probability.

如定理 4.4 中关于估计不确定性项 $(R_{I,n}-R_{I,n})_2$, 所示，其 Mack 自助法版本也需要膨胀因子 $\sqrt{I+n+1}$，才能确保收敛至非退化极限分布。由于定理 4.1 中的过程不确定性项 $(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 及其在定理 4.8 中的自助法版本并非如此，过程不确定性项将在渐近意义上主导预测根 $R_{I,n}-R_{I,n}$ 和 $R^*_{I,n}-R_{I,n}$。因此，尽管定理 4.10 中以 $\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 为条件时，$\sqrt{I+n+1}\,(R^*_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2$ 的自助法极限分布无法正确模拟定理 4.4 中以 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 为条件时，$\sqrt{I+n+1}\,(R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_2$ 的相应极限行为，整个自助法预测根 $R^*_{I,n}-R_{I,n}$ 仍能正确模拟预测根 $R_{I,n}-R_{I,n}$ 的极限分布。

因此，鉴于 Pan 和 Politis（2016）讨论的自助法预测方法的渐近有效性 和渐近相关性概念，在所述条件下，Mack 自助法可视为渐近有效，但不 具有渐近相关性。

注 4.12（关于 Mack 自助法的渐近结果）。

(i) 仔细检查 ***(4.1)*** 和 ***(4.2)*** 中的分解，会发现一些不一致之处：– 虽然将基于 f_j 的乘积的一项加到并从 $R_{I,n}-R_{I,n}$ 中减去，以得到 $(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 和 $(R_{I,n}-R_{I,n})_2$，，但在 $R^*_{I,n}-R_{I,n}$ 中加上并减去的，却是使用 $f^*_{j,n}$ 的乘积而非 $f_{j,n}$ 的乘积的一项；后者才是自然的选择。这样得到 $(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$ 和 $(R^*_{I,n}-R_{I,n})_2$。– 因此，虽然 $(R_{I,n}-R_{I,n})_1$ 依赖于 $F_{i,j}$ 的乘积，这些乘积以 f_j 的乘积为中心，但其 ***Mack*** 自助法版本 $(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$ 依赖于 $F^*_{i,j}$ 的乘积，这些乘积并非（自然地）以 $f_{j,n}$ 的乘积为中心，而是以 $f^*_{j,n}$ 的乘积为中心。– 此外，虽然 $(R_{I,n}-R_{I,n})_2$ 依赖于发展参数 f_j 的乘积与其估计量 $f_{j,n}$ 的乘积之间的差值，但其 ***Mack*** 自助法版本 $(R^*_{I,n}-R_{I,n})_2$ 依赖于自助法发展因子乘积之间的差值

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$估计量 $f^*_{j,\ n}$ 以及估计量 $f_{j,\ n}$。因此，$(R^*_{I,\ n} - R_{I,\ n})_2\widehat{\ }$的符号与$(R_{I,\ n} - R_{I,\ n})_2$相比发生了翻转。这可能会对有限样本产生负面影响，但由于极限条件分布是高斯分布，因而具有对称性，所以渐近而言这不会造成问题。

– 根据后一项观察，在(4.13) 中自助法估计不确定性项看似自然的分解里，$(R^*_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(1)}_2$ 和$(R^*_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(2)}_2$ 这两项与$(R_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(1)}_2$ 和$(R_{I,\ n} - \widehat{R}_{I,\ n})^{(2)}_2$ 相比也互换了位置。

(ii) 定理 *4.8* 中关于 *Mack*自助法过程不确定性部分的自助法相合性结论，在给定 $\mathcal{Q}_{I,\ n}$ 的条件下，要求在第 *3.1* 节的步骤 *5* 中，对 $F^*_{i,\ j}$也必须正确选择 $F_{i,\ j}$*'s* 的真实（条件）分布族。否则，渐近地只能正确模拟条件分布的一阶和二阶矩，而不一定能正确模拟整个分布。

(iii) 假设 *4.9* 中的一致有界条件是建立自助法中心极限定理所需的 *Lyapunov* 条件的必要条件，适用于 $f^*_{j,n}$（其光滑函数），因为 *Mack*自助法从根据 $\mathcal{D}_{I,n}$ 中所有列计算得到的残差中抽取自助法误差 $r^*_{i,j}$ 。

(iv) 定理 *4.10* 中，给定$\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 时，*Mack*自助法估计不确定性部分的自助法不一致性结果，是因为步骤 *4* 中的自助法方法没有考虑条件$\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 。因此，条件极限分布中出现的是方差-协方差矩阵 $\mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j}$ （它总是更大！），而不是定理 *4.4* 中得到的 $\mathbf{\Sigma}^{(2)}_{K,\prod f_j}$ 。此外，不存在类似于 $(R_{I,n} - R_{I,n})_2$ 在 (4.7) 中的分解的 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$$(R^*_{I,n} - R_{I,n})_2$ 分解。

(v) 自助法程序不仅需要模拟（条件）预测分布中渐近占主导地位的部分，以捕捉预测（即过程）不确定性（渐近有效性），还需要模拟渐近可忽略的部分，以捕捉模型参数估计带来的不确定性。这一要求与 *Pan* 和 *Politis*（*2016*）为时间序列预测提出的"渐近相关性"概念密切相关；*Beutner* 等（*2021*）也从略有不同的角度对此进行了讨论。

以上讨论促使我们在下一节引入 Mack型自助法的另一种定义，以消除上述问题。具体而言，该方法应尊重以 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 为条件，并应从对角线 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$开始，以向后的方式生成一个完整的自助法损失三角形 $\mathcal{D}^*_{I,n}$。关于函数型时间序列框架下的自助法预测推断，参见例如 Paparoditis 和 Shang（2021）。

5. 替代 Mack 型自助法方案

根据第 4 节的研究结果和讨论，原始 Mack 自助法方案无法正确模拟估计不确定性部分的条件分布。尽管渐近而言，过程不确定性部分占主导地位，但

通常仍然有必要构建一种 Mack 型自助法来解决这一问题，以提升有限样本性能。

为此，本节提出一种替代 Mack 型自助法，用以模拟准备金预测根的分布$\widehat{\ }_{,\ n} - R_{I,\ n}$并使用下文将定义的替代准备金自助法预测根$R_{I\ ,\ n}^{+} - \widehat{R}_{I\ ,\ n}^{+}$。为将其与第3节提出的原始 Mack 自助法区分开来，我们用“+”而非“$*$”标记所有相关的自助法量和操作。这种新方法与第3节中的原始 Mack 自助法方案有几处不同：

(i) 首先，给定损失三角形$\mathcal{D}_{I,\ n}$并以$\mathcal{Q}_{I\ ,\ n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,\ n}$为条件，其中$\mathcal{Q}_{I\ ,\ n}^{+} = \{C_{I-i,i}^{+} | i = 0, \ldots, I+n\}$，采用递归式反向自助法方法，生成完整的自助法上三角

$$\mathcal{D}_{I,n}^{+} = \left\{ C_{i,j}^{+} | i = -n, \ldots, I,\ j = 0, \ldots, I+n,\ -n \leq i+j \leq I \right\}.$$

(ii) 其次，利用$\mathcal{D}_{I,\ n}$计算得到的发展因子估计量$f_{j,\ n}$进行参数自助法，以构造自助法个体发展因子$F_{i\ ,\ j}^{+}$, $i = -n, \ldots, I$, $j = 0, \ldots, I+n-1$和 $i+j \geq I$，即用于下三角，这也使得能够构造$R_{I\ ,\ n}^{+}$。

(iii) 第三，在构造准备金的自助法预测根 $R_{I\ ,\ n}^{+} - \widehat{R}_{I\ ,\ n}^{+}$时，自助法准备金 $R_{I\ ,\ n}^{+}$ 并非以其最佳估计 $\widehat{R}_{I,\ n}$为中心，而是以适当的自助法版本 $\widehat{R}_{I\ ,\ n}^{+}$为中心。

与原始 Mack 自助法类似，替代 Mack 自助法用于$\widehat{\ }$估计给定$\mathcal{Q}_{I,\ n}$时 $R_{I,\ n} - R_{I,\ n}$ 的条件分布，方法是使用给定 $\mathcal{Q}_{I\ ,\ n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,\ n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\ n}$时 $R_{I\ ,\ n}^{+} - \widehat{R}_{I\ ,\ n}^{+}$ 的条件自助分布。

5.1. **替代 Mack 型自助算法**。

在已知上三角 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 的情况下，替代 Mack 型自助法算法定义如下：

步骤 1. 根据数据计算 $\widehat{f}_{j,\ n}$ 和 $\widehat{\sigma}_{j,\ n}^{2}$，从而估计发展因子 f_j 和方差参数 σ_j^2，其中 $j = 0, \ldots, I+n-1$ 的定义分别见 (2.8) 和 (2.11)。步骤 2. 为给定 $C_{i\ ,\ j+1}^{+}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 时向后个体发展因子 $G_{i\ ,\ j}^{+}$ 的（条件）自助分布选择一个参数族，使得 $G_{i\ ,\ j}^{+} > 0$ 几乎必然成立，且

$$E^{+}(G_{i,j}^{+} | C_{i,j+1}^{+}) = \widehat{f}_{j,n}^{-1}, \quad Var^{+}(G_{i,j}^{+} | C_{i,j+1}^{+}) = \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}^{2}}{C_{i,j+1}^{+}}, \quad j = 0, \ldots, I+n-1,\ i = -n, \ldots, I-j-1.$$

然后，给定 $\mathcal{Q}_{I\ ,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n}$，按照递推方式反向生成自助法损失三角形 $\mathcal{D}_{I\ ,n}^{+}$

$$C_{i,j}^{+} = C_{i,j+1}^{+} G_{i,j}^{+}, \quad j = 0, \ldots, I+n-1,\ i = -n, \ldots, I-j-1.$$

步骤 3。计算 $j=0,\ldots,I+n-1$ 的自助法发展因子估计量 $\widehat{f}^{+}_{j,n}$，其定义与式（2.8）中的 $\widehat{f}_{j,n}$ 相同，但使用自助法损失三角形 $\mathcal{D}^{+}_{I\,n,}$ 进行计算。也就是说，我们计算

$$\widehat{f}^{+}_{j,n}=\frac{\sum_{i=-n}^{I-j-1}C^{+}_{i,j+1}}{\sum_{i=-n}^{I-j-1}C^{+}_{i,j}}=\frac{\sum_{i=-n}^{I-j-1}C^{+}_{i,j+1}}{\sum_{i=-n}^{I-j-1}C^{+}_{i,j+1}G^{+}_{i,j}},\quad j=0,\ldots,I+n-1. \tag{5.1}$$

步骤 4. 为 $F^{+}_{i\,,\,j}$ 给定 $C^{+}_{i\,,\,j}$ 时的（条件）自助法分布选择一个参数族，并使得 $F^{+}_{i\,,\,j}>0$ 几乎必然成立，其中

$$E^{+}(F^{+}_{i,j}|C^{+}_{i,j})=\widehat{f}_{j,n},\quad Var^{+}(F^{+}_{i,j}|C^{+}_{i,j})=\frac{\widehat{\sigma}^{2}_{j,n}}{C^{+}_{i,j}},\quad i=-n,\ldots,I,\ j=I-i,\ldots,I+n-1.$$

然后，给定 $\mathcal{Q}^{+}_{I\,,\,n}=\mathcal{Q}_{I,\,n}$，利用递推生成自助法最终赔款 $C^{+}_{i\,,\,I+n}$ 以及准备金 $R^{+}_{i\,,\,I+n}=C^{+}_{i\,,\,I+n}-C^{+}_{i\,,\,I-i}$，其中 $i=-n,\ldots,I$

$$C^{+}_{i,j+1}=C^{+}_{i,j}F^{+}_{i,j},\quad j=I-i,\ldots,I+n-1. \tag{5.2}$$

步骤 5. 计算自助法总准备金 $R^{+}_{I\,,\,n}=\sum_{i=-n}^{I}R^{+}_{i\,,\,I+n}$，以及替代 Mack 自助法的准备金预测根

$$R^{+}_{I,n}-\widehat{R}^{+}_{I,n}=\sum_{i=0}^{I+n}C^{+}_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}F^{+}_{I-i,i}-\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}^{+}_{j,n}\right),$$

其中，中心化项 $\widehat{R}^{+}_{I\,,\,n}$ 是最佳估计 $\widehat{R}_{I,\,n}$ 的一个自助法版本，其定义如下：

$$\widehat{R}^{+}_{I,n}=\sum_{i=-n}^{I}C^{+}_{i,I-i}\prod_{j=I-i}^{I+n-1}\widehat{f}^{+}_{j,n}=\sum_{i=0}^{I+n}C^{+}_{I-i,i}\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}^{+}_{j,n}. \tag{5.3}$$

步骤 6. 将上述步骤 2 至 5 重复 B 次，其中 B 取较大值，从而得到 $(R^{+}_{I\,,\,n}-\widehat{R}^{+}_{I\,,\,n})^{(b)}$，$b=1,\ldots,B$ 个自助法预测根，并用 $q^{+}(\alpha)$ 表示其经验分布的 α 分位数。

步骤 7. 构造 $R_{I,n}$ 的（$1-\alpha$）等尾预测区间，形式如下

$$\left[\widehat{R}_{I,n}+q^{+}(\alpha/2),\widehat{R}_{I,n}+q^{+}(1-\alpha/2)\right].$$

注 5.1（关于替代 Mack 型自助法）。

(i) 与第 *3.1* 节中的 *Mack* 自助法相比，自助法准备金不再是双重自助法量，中心化基于最佳估计的自助法版本，而上三角损失表的自助法则从对角线开始向后进行。*(ii)* $G^{+}_{i\,,\,j}|C^{+}_{i\,,\,j+1}$ 的条件分布可以通过不同方式选取。例如，可以像第 *3.1* 节步骤 *2 - 4* 那样采用非参数方法，也可以使用第 *3.1* 节步骤 *5* 中采用的参数分布族。不过，关键是要充分模拟第一和第二后向条件矩，即 $E(C_{ij}|C_{i,\,j+1})$ 和 $Var(C_{i,\,j}|C_{i,\,j+1})$。

6. 替代 Mack 自助法的渐近理论

采用第 4 节中用于研究原始 Mack 自助法一致性性质的一般策略，备选的 Mack 准备金预测根 $R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+}$ 也可以分解为预测误差部分和估计误差部分。也就是说，通过加上再减去 $\sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i}^{+} \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}$，我们得到

$$R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+} = \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i}^{+} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F_{I-i,j}^{+} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} \right) + \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i}^{+} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}^{+} \right)$$

$$=: \left(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+} \right)_1 + \left(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+} \right)_2, \tag{6.1}$$

其中，$(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 和 $(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_2$ 分别是 $(R_{I,n} - \frown R_{I,n})_1$ 和 $(R_{I,n} - R_{I,n})_2$, 的替代 Mack 自助法版本。

6.1. 替代 Mack 自助法预测根的条件自助法渐近性。

与第 4.2 节中关于 Mack 自助法的情形一样，我们必须检验：给定 $\mathcal{Q}_{I,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$，式(4.2)中的替代 Mack 自助法量 $(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 和 $(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_2$ 是否正确地模拟了给定$\mathcal{Q}_{I,n}$时 $(R_{I,n} - R_{I,n})_1$ 和 $(R_{I,n} - R_{I,n})_2$的极限分布。

6.1.1. 准备金预测的条件自助法渐近性：过程不确定性。

替代 Mack 自助法的过程不确定性部分 $(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 与 $(R_{I,n}^{*} - \widehat{R}_{I,n})_1$ 不同，因为 $(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 中的 $F_{i,j}^{+}$ 使用 $\widehat{f}_{j,n}$，而不是 $\widehat{f}_{j,n}^{*}$；相应地，$\prod_{j=i}^{I+n-1} F_{I-i,j}^{+}$ 是以 $\prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}$ 为中心，而不是以 $\prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}^{*}$ 为中心。不过，通过采用非常相似的论证，我们也能得到替代 Mack 自助法的过程不确定性部分 $(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 的相同极限结果。

定理 *6.1*（在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$的条件下，$(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 的自助法渐近性）。假设假设 *2.2*、*2.3*、*2.4*、*2.5*、*4.6* 和 *4.7*（将 $F_{i,j}^{*}$替换为 $F_{i,j}^{+}$ ）成立。那么，当$n \to \infty$时，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下，$(R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1$ 依概率依分布收敛于 $\frown \mathcal{G}_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty}$，其为根据定理 *4.1* 中式（*4.6*）所述的 $(R_{I,\infty} - R_{I,\infty})_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty}$ 的（极限）分布。此外，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$，有 $E^{+}((R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1 | \mathcal{Q}_{I,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n}) = 0$，并且对 $n \to \infty$，我们有

$$Var^{+}\left((R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1 | \mathcal{Q}_{I,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \longrightarrow Var\left((R_{I,\infty} - \widehat{R}_{I,\infty})_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty} \right) \quad in\ prob., \tag{6.2}$$

其中 $Var((R_{I,\infty} - R_{I,\infty})_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty}) = O_P(1)$ 如(4.5)所示。因此，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$d_2\left(\mathcal{L}\left((R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1 | \mathcal{Q}_{I,n} \right), \mathcal{L}^{+}\left((R_{I,n}^{+} - \widehat{R}_{I,n}^{+})_1 | \mathcal{Q}_{I,n}^{+} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \right) \longrightarrow 0 \quad in\ prob..$$

6.1.2. 准备金预测的条件自助法渐近性：估计不确定性 y.

鉴于 (4.7) 中 $(R_{I,\ n}-\widehat{R}_{I,\ n})_2$ 的分解，在给定 $\mathcal{Q}_{I\ ,\ n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,\ n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 的条件下，其对应的替代 Mack 自助法 $(R_{I\ ,\ n}^{+}-\widehat{R}_{I\ ,\ n}^{+})_2$ 也可以进一步分解。也就是说，我们有

$$
\begin{aligned}
&(R_{I,n}^{+}-\widehat{R}_{I,n}^{+})_2\\
=&\sum_{i=0}^{I+n}C_{I-i,i}^{+}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}-\prod_{j=i}^{I+n-1}f_{j,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})\right)+\sum_{i=0}^{I+n}C_{I-i,i}^{+}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}f_{j,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})-\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}^{+}\right)\\
&(6.3)\\
=&(R_{I,n}^{+}-\widehat{R}_{I,n}^{+})_2^{(1)}+(R_{I,n}^{+}-\widehat{R}_{I,n}^{+})_2^{(2)},
\end{aligned}
$$

其中 $(R_{I\ ,n}^{+}-\widehat{R}_{I\ ,n}^{+})_2^{(1)}$ 关于 $\mathcal{Q}_{I\ ,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 以及 $f_{j\ ,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n}):=\mu_{j+1\ n}^{+(1)}$、$(\mathcal{Q}_{I,n})/\mu_{j\ n}^{+(2)}$、$(\mathcal{Q}_{I,n})$（其中 $\mu_{j+1\ n}^{+(1)}$）、$(\mathcal{Q}_{I,n}):=E^{+}(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1}\underline{C_i^{+}}_{,j+1}|\mathcal{Q}_{I\ ,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n})$ 以及 $\mu_{j\ n}^{+(2)}$、$(\mathcal{Q}_{I,n}):=E^{+}(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1}\underline{C_i^{+}}_{,j}|\mathcal{Q}_{I\ ,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n})$ 可测。

与定理 4.10 相比，假设 4.9 中的一致有界条件可以省去，但要推导 $(R_{I\ ,\ n}^{+}-\widehat{R}_{I\ n,\ })_2$ 的（条件）自助法渐近理论并得到相合性结果，还需对第 5.1 节步骤 3 中的反向个体发展因子 $G_{i\ ,\ j}^{+}$ 作出额外假设。具体而言，必须保证反向条件均值 $E(C_{i,\ j}|C_{i,\ j+1})$ 和反向条件方差 $Var(C_{i,\ j}|C_{i,\ j+1})$ 能由其对应的替代 Mack 自助法量 $E^{+}(C_{i\ ,\ j}^{+}|C_{i\ ,\ j+1}^{+})$ 和 $Var^{+}(C_{i\ ,\ j}^{+}|C_{i\ ,\ j+1}^{+})$ 一致地模拟，从而正确模拟 Steinmetz 和 Jentsch（2022，定理 C.1）中得到的相应极限分布。

假设 6.2（反向矩的一致估计）。对于 $n\to\infty$，假设在第 *5.1* 节步骤 *2* 中选择了反向个体发展因子 $G_{i\ ,\ j}^{+}$、$j=0、\ldots、I+n-1$ 以及 $i=-n、\ldots、I-j-1$ 在给定 $C_{i\ ,\ j+1}^{+}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 条件下的（条件）自助法分布，使得：

(i) 对每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，令 $\underline{f}_{K,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})=(f_{0,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})\,f_{1,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})\ldots,f_{K,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n}))'$，并定义 $\underline{\widehat{f}}_{K,n}=(\widehat{f}_{0,n},\widehat{f}_{1,n},\ldots,\widehat{f}_{K,n})'$。那么，在给定 $\mathcal{Q}_{I\ ,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下，有

$$
J_n^{1/2}\left(\underline{f}_{K,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})-\underline{\widehat{f}}_{K,n}\right)|\left(\mathcal{Q}_{I,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{f}}^{(1)}\right),
$$

其中，$J_n^{1/2}=diag\left(\sqrt{I+n-j},j=0,\ldots,K\right)$ 是一个由膨胀因子构成的对角 $(K+1)\times(K+1)$ 矩阵，而方差-协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{K\ ,f}^{(1)}$ 定义见 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）中的定理 *C.1*。

(ii) 对每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，令 $\underline{\widehat{f}}_{K,n}^{+}=(\widehat{f}_{0,n}^{+},\widehat{f}_{1,n}^{+},\ldots,\widehat{f}_{K,n}^{+})'$。那么，在给定 $\mathcal{Q}_{I\ ,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下，我们有

$$
J_n^{1/2}\left(\underline{\widehat{f}}_{K,n}^{+}-\underline{f}_{K,n}^{+}(\mathcal{Q}_{I,n})\right)|\left(\mathcal{Q}_{I,n}^{+}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{f}}^{(2)}\right)\quad in\ prob.
$$

其中，方差-协方差矩阵 $\boldsymbol{\Sigma}_{K\ ,\ f}^{(2)}$ 由 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）的定理 *C.1* 定义。

与定理 4.4(ii) 中条件极限结果的推导一致，该结果依赖于 Steinmetz 和 Jentsch（2022，附录 C）中给出的发展因子估计量 $f_{j,n}$ 的条件中心极限定理，假设 6.2 中的条件自助法中心极限定理允许我们陈述以下定理，该定理给出了替代 Mack 自助法估计不确定性项 $(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_{I\,n}^+,)_2$ 在给定 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 条件下的极限分布。具体而言，虽然 $(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)_2^{(1)}$ 关于 $\mathcal{D}_{I,n}$ 可测，但假设 6.2 允许我们确立 $\sqrt{I+n+1}(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)_2^{(2)}$ 在给定 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 条件下的渐近正态性。

定理6.3 ($(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)$ $_2$ 自助法渐近性，条件是 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_I$，$_n$ 和 $\mathcal{D}_I$，$_n)$。假设假设 *2.2*、*2.3*、*2.5*、*2.4*、*4.2* 和 *6.2* 成立。那么，当 $n \to \infty$ 时，以下结论成立：

(i) 条件是 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_I$，$_n$，$\sqrt{I+n+1}(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)_2^{(1)}$ 依分布收敛到非退化极限分布 $\mathcal{G}_2^{(1)}$ 。也就是说，我们有

$$\sqrt{I+n+1}(R_{I,n}^+ - \widehat{R}_{I,n}^+)_2^{(1)} | \left(\mathcal{Q}_{I,n}^+ = \mathcal{Q}_{I,n}\right) \xrightarrow{d} \left\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_\infty^{(1)} \right\rangle \sim \mathcal{G}_2^{(1)}, \tag{6.4}$$

其中，$\mathbf{Y}_\infty^{(1)} = (Y_{(1)\,i}, i \in \mathbb{N}_0)$ 表示一个协方差为下列形式的中心高斯过程

$$Cov(Y_{i_1}^{(1)}, Y_{i_2}^{(1)}) = \lim_{K\to\infty} \mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j}^{(1)}(i_1, i_2), \quad i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0,$$

其中，$\mathbf{\Sigma}_K^{(1)}$，$\prod f_j(i_1, i_2)$ 定义见 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）中的推论 *C.2*。这里，序列$\mathcal{Q}_I$，$_\infty$ 和 $\mathbf{Y}_\infty^{(1)}$ 相互独立。

(ii) 给定 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$，$\sqrt{I+n+1}(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_{I\,,n})_2^{(2)}$ 依概率收敛于分布 $\mathcal{G}_2|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 其中 $\mathcal{G}_2|\mathcal{Q}_{I,\infty} \sim \mathcal{N}(0, \Xi(\mathcal{Q}_{I,\infty}))|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 是定理 *4.4(ii)* 中得到的（条件）极限分布。

因此，当 $n \to \infty$ 时，我们有

$$d_K\left(\mathcal{L}\left((R_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_2 | \mathcal{Q}_{I,n}\right), \mathcal{L}^+\left((R_{I,n}^+ - \widehat{R}_{I,n}^+)_2 | \mathcal{Q}_{I,n}^+ = \mathcal{Q}_{I,n}\right)\right) \longrightarrow 0 \quad in\ prob..$$

6.1.3. 准备金整体预测根的条件自助法渐近性。

与第 4.1.3 节和第 4.2.3 节一样，结合定理 6.1 和定理 6.3 中关于 $(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_{I,n}^*)_1$ 和 $(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_{I,n}^*)_2$的结果，我们得到在给定 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_{I,n}$和 $\mathcal{D}_{I,n}$条件下，R_I^+ ，$_n - \widehat{R}_{I,n}$ 的联合渐近性。

定理 *6.4*（给定 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 时 R_I^+ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n$ 的自助法渐近性）。假设定理 *6.1* 和定理 *6.3* 的条件成立。那么，给定 $\mathcal{Q}_I^+$ ，$_n = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 时，$(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)_1$ 和 $(R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)$ $_2$ 随机独立，并且 R_I^+ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n$ 依概率依分布收敛于 $\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_I$，$_\infty$ 。也就是说，我们有

R_I^+ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n | \left(\mathcal{Q}_{I,n}^+ = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}\right) = (R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)_1 + (R_I^+$ ，$_n - \widehat{R}_I^+$ ，$_n)$
$_2 | \left(\mathcal{Q}_{I,n}^+ = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_I$，$_\infty$

以概率收敛。

根据定理 4.11 下方的讨论，并结合 Pan 和 Politis（2016）关于自助法预测推断的渐近有效性 和渐近相关性 概念，在所述条件下，替代 Mack 自助法可视为渐近有效且渐近相关。

注 6.5 （反向自助法与正向自助法）。 虽然在 *Pan* 和 *Politis*（*2016*）讨论的时间序列设置中，反向自助法似乎很自然，但他们也采用了一种更简单的正向自助法，以捕捉自助法预测中的估计不确定性。从渐近角度看，在他们的设置下，由于内在平稳性假设，这两种方法确实等价。然而，在本文考虑的 *Mack* 模型设置中，情况并非如此，*England* 和 *Verrall*（*2006*）的（固定设计）正向自助法无法正确捕捉估计不确定性部分的条件极限分布。

7. 模拟研究

本节通过对若干参数情景进行模拟，比较第3节中的原始 Mack 自助法与第 5 节中的替代 Mack 自助法，以展示第 4 节和第 6 节的理论发现。此外，我们还模拟了一种 Mack 型自助法，它在第 5.1 节的步骤 2 中采用正向 自助法方法，但除此之外与替代 Mack 自助法相同。

7.1. **模拟设置**。

我们采用 Steinmetz 和 Jentsch（2022）使用的模拟设置。也就是说，在第 2.1 节引入的渐近框架概念下，令 $I = 10$并选择$n \in \{0, 10, 20, 30, 40\}$，使有效事故年度数为 $I+n+1 \in \{11, 21, 31, 41, 51\}$。对于每个 n 以及下文指定的不同参数情景，我们生成 $M = 500$ 个损失三角形 $\mathcal{D}_{I\ n}^{(m)} = \{C_{i,j}^{(m)} | i = -n, \ldots, I,\ j = 0, \ldots, I-i\}$, $m = 1$, ..., 500 个，其对角线为 $\mathcal{Q}_{I\ n}^{(m)}$，生成方法是：从均匀分布中（独立地）抽取首列中的各项 $C_{\bullet\ 0}^{(m)}$，以及单独的发展因子 $F_{i,\ j}$ 给定 $C_{i,\ j}$，来自一个

（DGP1）条件伽马分布，（DGP2）条件对数正态分布，（DGP3）条件左尾截断正态分布（在 0.1 处截断）。

在所有情景中，发展因子和方差参数满足 $f_j > 1$ 和 $\sigma_j^2 > 0$，其中 f_j 和 σ_j^2 分别递减至 1 和 0。具体而言，我们使用指数递减序列 $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ 和 $(\sigma_j^2)_{j\in\mathbb{N}_0}$，其中 $f_j = 1 + e^{-1-0.2j}$ 和 $\sigma_j^2 = 509,\ 518 \cdot e^{-1-0.7j}$。我们区分设置 a) 和 b) 两种设置，在这两种情况下参数完全相同，但在设置 a) 中，（上方）损失三角形的第一列 $C_{\bullet,\ 0} = (C_{-n,\ 0},\ \ldots,\ C_{I,\ 0})'$ 服从 $[120 \times 10^6, 350 \times 10^6]$ 上的均匀分布，而在设置 b) 中则服从 $[120 \times 10^4, 350 \times 10^4]$ 上的均匀分布。两种设置的结果相似，因此我们这里只报告设置 a) 的结果，并在附录中报告设置 b) 的结果。

接下来，为评估所研究的所有自助法程序的表现，对于每条对角线 $\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)},, m = 1,\ldots,$ 500，我们希望知道在给定 $\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)}$ 的条件下， $R_I^{(m)},_n - \widehat{R}_{I\,n}^{(m)}$ 的精确分布。然而，尽管我们确切知道生成损失三角形 $\mathcal{D}_{I,n}$的随机机制，但模拟 $R_I^{(m)},_n - \widehat{R}_I^{(m)},_n|\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)}$ 并非易事。这是因为 $\widehat{R}_{I\,n}^{(m)}$ 需要从 $\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)}$ 开始反向生成损失三角形 $\mathcal{D}_{I,n}$ 。因此，作为一种替代方案，我们通过蒙特卡罗模拟，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下，模拟“真实”预测根 $R_I^{(m)},_n - \widehat{R}_{I\,n}^{(m)}$ 的分布，模拟次数为 $B = 10,000$；这是因为我们知道每个观测到的三角形 $\mathcal{D}_{I\,n}^{(m)}$ 中个体发展因子的真实底层参数分布族，以及针对每种设置 (DGP1)-(DGP3) 模拟 $R_{I\,n}^{(m)}$ 所用的真实参数，使得

$$F_{i,j}|C_{i,j} \sim \left(f_j, \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}\right) \quad \text{for } j = I-i,\ldots,I+n-1 \text{ and } i = -n,\ldots I. \tag{7.1}$$

接下来，对于上述每种设置 (DGP1)-(DGP3) 以及每个损失三角形 $\mathcal{D}_{I\,n}^{(m)},\ m = 1,$ ....., 500，我们分别采用三种不同的 Mack 型自助法，每种方法均进行 10,000 次自助法重复抽样，以估计准备金预测根的条件分布。也就是说，我们采用以下三种自助法方法:

(oMB) 原始 Mack 自助法（见第3节），(aMB) 替代 Mack 型自助法（见第 5 节），(i MB) 中间 Mack 型自助法（在第 5 节的步骤 2 中使用正向自助法）。

纳入第三种中间 Mack 型自助法，是为了区分第 5 节第 2 步提出的反向重抽样与第 5.1 节第 5 步采用的不同中心化方法分别对有限样本表现造成的影响。为此，我们引入一个新的中心化项 $\widehat{R}_{I\,n}^{++},$ 定义如下

$$\widehat{R}_{I,n}^{++} = \sum_{i=0}^{I+n} C_{I-i,i}^{+} \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}_{j,n}^{*}, \tag{7.2}$$

这与 (5.3) 中的 $\widehat{R}_I^{+}\ ,_n$ 不同，因为它依赖于 (3.3) 中的 $\widehat{f}_{j}^{*},_n$ ，但其基础是（参数生成的）

$$F_{i,j}^{*}|C_{i,j}^{*}, \mathcal{D}_{I,n} \sim \left(\widehat{f}_{j,n}, \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}^2}{C_{i,j}^{*}}\right), \tag{7.3}$$

而不是式 (5.1) 中定义的 $\widehat{f}_j^{+},_n$ 。这种中心化项的选择仍类似于式 (6.1) 中的分解，该分解具有式 (4.1) 的（符号）性质，而式 (4.2) 则不具备此性质。对于所有自助法，只要使用某个参数分布来生成上三角自助法损失三角形，我们就选择与生成下三角时相同的参数分布族（用于生成 $R_{I,n}^{*}$ 和 $R_{I\,n,}^{+}$）。然而，由于我们不知道 $F_{i,j}$ 的正确参数分布族，因此对于三种自助法方法，我们分别采用 (i)–(iii) 中的三种分布族，以进一步考察使用设定错误的参数分布族生成 $R_{I,n}^{*}$ 和 $R_I^{+}\ ,_n$ 的影响。

在附录 E 中，我们还提供了模拟结果，用于比较自助法预测根中第一部分（即过程不确定性）的分布 $(R^*_{I,n} - R_{I,n})_{\ 1}$ 和 $(R^+_{I\ ,n} - \widehat{R}^+_{I\,n,})_{\ 1}$ 在分别以 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 或 $\mathcal{Q}^+_{I\ ,n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 为条件时，与 $(R_{I,n} - R_{I,n})_{\ 1}$ 在以 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 为条件时的分布。注意，这个分布很容易模拟。正如预期的那样，鉴于定理4.8和6.1，我们发现这两种构造原则的表现没有差异。

7.2. **模拟结果**。

首先，我们考察所研究的三种 Mack 型自助法所得到的准备金自助法预测根的自助法方差。对于设置 a) 和 b)，我们发现，替代 Mack 型自助法的方差始终比另外两种方法所得的自助法方差小 1–5 个百分点，而后两者之间差异不大。这一结果与定理 4.10 的发现完全一致：定理 4.10 中的（条件）方差 $\sim\Xi(\mathcal{Q}_{I,\ \infty})$，由原始 Mack 自助法和中间型 Mack 自助法模拟，通常大于定理 4.4 中的方差 $\Xi(\mathcal{Q}_{I,\ \infty})$；根据定理6.3，替代 Mack 自助法正确地模拟了后者。

接下来，我们考察自助法预测根 $R^{*(m)}_{I\ ,\ n} - \widehat{R}^{(m)}_{I\,n\ ,}$，$R^{+(m)}_{I\ ,\ n} - \widehat{R}^{+(m)}_{I\,n}$，和 $R^{+(m)}_{I\ ,\ n} - \widehat{R}^{++(m)}_{I\,n}$，在分别以 $\mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}$ 或 $\mathcal{Q}^+_{I\ ,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 为条件时的整体分布，其中 $m = 1, \ldots, 500$。采用显著性水平为 $\alpha = 5\%$ 的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验来检验零假设

$$
\begin{aligned}
H_0^* &: \mathcal{L}\left(R^{*(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I,n} | (\mathcal{Q}^{*(m)}_{I,n} = \mathcal{Q}^{(m)}_{I,n}, \mathcal{D}^{(m)}_{I,n})\right) = \mathcal{L}\left(R^{(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I,n} | \mathcal{Q}^{(m)}_{I,n}\right), \\
H_0^+ &: \mathcal{L}\left(R^{+(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{+(m)}_{I,n} | (\mathcal{Q}^{+(m)}_{I,n} = \mathcal{Q}^{(m)}_{I,n}, \mathcal{D}^{(m)}_{I,n})\right) = \mathcal{L}\left(R^{(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I,n} | \mathcal{Q}^{(m)}_{I,n}\right), \\
H_0^{++} &: \mathcal{L}\left(R^{+(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{++(m)}_{I,n} | (\mathcal{Q}^{+(m)}_{I,n} = \mathcal{Q}^{(m)}_{I,n}, \mathcal{D}^{(m)}_{I,n})\right) = \mathcal{L}\left(R^{(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I,n} | \mathcal{Q}^{(m)}_{I,n}\right)
\end{aligned}
$$

对于 $m = 1, \ldots, 500$。三种自助法方法在不同 n 和不同分布族下，未能拒绝零假设的比例 汇总于表3。随着 n 增大，所有自助法的比例均有所上升；但与另外两种自助法相比，替代 Mack 型自助法始终高出 1–3 个百分点，而另外两种方法的结果总体上相当接近。

我们还计算了所有模拟中，自助法分布给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 或 $\mathcal{Q}^+_{I\ ,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$时的均值与其真实分布给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$时的均值之差的平方的平均值，以及 $\mathcal{D}_{I,n}$。因此，我们计算$b = 1, \ldots, 10,000$ 次模拟中每次模拟的均方误差，然后计算所有 $M = 500$ 次模拟的总体均方误差均值的平方根（RMMSE），即

$$
RMMSE_{oMB} = \sqrt{\frac{1}{500}\sum_{m=1}^{500}\frac{1}{10,000}\sum_{b=1}^{10,000}\left(R^{*(b)(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I,n} - \left(R^{(b)(m)}_{I,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I,n}\right)\right)^2}, \tag{7.4}
$$

其中 $R^{*(b)(m)}_{I\ ,n} - \widehat{R}^{(m)}_{I\,n}$ 表示第 b个排序后的 Mack 型自助法预测根，而$R^{(b)(m)}_{I\ ,\ n} - \widehat{R}^{(m)}_{I\,n}$ 是第 m次模拟中第 b个排序后的真实模拟预测根，用于

选定分布		伽马分布			对数正态分布			截断正态分布		
真实分布	n	oMB	替代 Mack 型自助法	iMB	oMB	替代 Mack 型自助法	iMB	oMB	替代 Mack 型自助法	iMB
伽马分布	0	0.21	0.22	0.21	0.30	0.33	0.29	0.29	0.28	0.21
	10	0.38	0.49	0.38	0.47	0.48	0.43	0.37	0.41	0.38
	20	0.47	0.56	0.47	0.51	0.56	0.51	0.54	0.53	0.49
	30	0.58	0.64	0.58	0.56	0.61	0.55	0.60	0.65	0.59
	40	0.66	0.70	0.66	0.61	0.66	0.60	0.72	0.76	0.70
对数正态分布	0	0.20	0.22	0.20	0.27	0.25	0.25	0.24	0.24	0.22
	10	0.37	0.38	0.37	0.38	0.40	0.37	0.37	0.41	0.36
	20	0.45	0.49	0.45	0.48	0.55	0.52	0.45	0.51	0.49
	30	0.51	0.55	0.51	0.57	0.60	0.55	0.51	0.56	0.54
	40	0.57	0.62	0.57	0.60	0.63	0.60	0.63	0.66	0.64
截断正态分布	0	0.13	0.16	0.13	0.30	0.33	0.29	0.24	0.27	0.20
	10	0.42	0.45	0.42	0.44	0.45	0.43	0.38	0.47	0.42
	20	0.54	0.58	0.54	0.53	0.55	0.52	0.58	0.62	0.59
	30	0.57	0.63	0.57	0.57	0.60	0.57	0.67	0.70	0.68
	40	0.60	0.66	0.60	0.57	0.62	0.59	0.75	0.78	0.76

表3. 在设置 a) 中，对于$F_{i,j}^*$的不同参数分布族、 $i+j \geq I$、 $I=10$ 以及不同的 n，在显著性水平为$\alpha = 5$%时，原始 Mack 自助法（oMB）、替代 Mack 自助法（aMB）和中间 Mack 型自助法（iMB）对零假设 H_0^*、 H_0^+和 H_0^{++}进行柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验时未能拒绝的百分比。

$m = 1$，……，500。同样，我们分别计算了替代 Mack 自助法和中间 Mack 自助法的 $RMMSE_{aMB}$ 和 $RMMSE_{iMB}$。

表 4 汇总了所有 $RMMSE$s 在三种自助法方法下得到的结果。随着 n 增大，在两种设置下，所有自助法方法的 $RMMSE$s 均有所下降；与中间 Mack 自助法和原始 Mack 自助法相比，替代 Mack 自助法在大多数情况下的 $RMMSE$ 最小。

8. 结论

本文采用 Steinmetz 和 Jentsch（2022）提出的随机与渐近框架，在 Mack模型中推导渐近理论，并进一步考察 Mack 自助法方案的一致性性质。为此，Steinmetz 和 Jentsch（2022）推导的（条件）渐近理论可作为评估 Mack 自助法近似的良好基准结果。通过将准备金预测根拆分为分别对应过程不确定性和估计不确定性的两个加性部分，我们的方法首次能够对 Mack 自助法的有效性进行严格考察。我们证明，如果 Mack 自助法中个体发展因子的参数分布族设定正确，那么渐近占主导地位的过程不确定性部分的（条件）分布

选定分布		伽马分布			对数正态分布			截断正态分布		
真实分布 n		oMB	aMB	iMB	oMB	aMB	iMB	oMB	aMB	iMB
伽马分布	0	99.720	99.706	99.600	99.244	99.202	99.967	98.210	98.156	98.822
	10	94.120	93.786	94.320	94.659	94.376	94.885	97.713	97.239	97.854
	20	92.800	92.438	92.760	93.024	92.738	93.048	95.153	94.935	95.296
	30	86.660	85.957	86.120	86.483	85.935	86.143	88.281	87.613	87.790
	40	81.910	81.667	81.510	84.329	81.215	83.828	84.832	83.421	84.990
对数正态分布	0	99.070	99.080	99.873	99.787	97.971	98.538	98.197	98.112	98.623
	10	93.790	93.587	94.040	94.558	94.389	94.720	97.669	97.389	97.867
	20	92.150	91.996	92.314	90.629	89.843	90.179	95.680	95.365	95.657
	30	86.390	85.607	85.805	87.071	84.159	85.457	88.669	87.945	88.147
	40	81.510	81.226	81.420	82.191	81.522	82.955	83.895	83.665	84.530
截断正态分布	0	96.770	93.993	94.836	97.694	97.519	98.403	93.974	93.450	94.670
	10	94.970	91.815	95.185	93.988	93.774	94.298	92.498	92.216	92.630
	20	90.740	89.767	90.745	91.329	90.016	90.045	89.120	88.406	89.117
	30	86.540	85.786	86.033	86.193	85.567	85.784	87.758	86.896	87.120
	40	82.650	82.277	83.865	81.090	81.374	82.839	83.343	82.455	82.840

表 4. 不同 Mack 型自助法、不同分布假设以及设置 a) 中不同 n 和 $I = 10$ 的总体均方误差均值的平方根 (RMMSE) ($\times 10^{-3}$)

就能被 Mack 自助法正确模拟；否则通常无法做到这一点。相比之下，自助法通常无法正确捕捉估计不确定性部分的相应（条件）分布。总而言之，由于过程不确定性部分在渐近意义下占主导地位，这证明 Mack 自助法对整个准备金预测根具有渐近有效性。然而，这也证明，Pan 和 Politis（2016）意义下的渐近相关性并不成立。

为解决这一问题，我们提出了一种更自然的替代 Mack 型自助法。该方法采用不同的中心化方式，并通过反向重抽样方法，旨在正确捕捉估计不确定性部分的（条件）分布。在适当的假设下，我们证明了新提出的替代 Mack 型自助法确实具有渐近有效性和适用性。

我们的研究结果通过模拟加以说明。模拟表明，在有限样本中，替代的 Mack 型自助法优于原始 Mack 自助法。中间 Mack 型自助法的结果表明，反向重抽样是这一改进的主要原因。

参考文献

Beutner, E., Heinemann, A., and Smeekes, S. (2021). 条件置信区间的合理性论证。《电子统计学杂志》, 15(1):2517 – 2565. Björkwall, S., Hössjer, O., and Ohlsson, E. (2009). 随机索赔准备金评估中逐年发展因子法的非参数与参数自助法技术。《斯堪的纳维亚精算学杂志》, 2009(4):306–331. Björkwall, S., Hössjer, O., and Ohlsson, E. (2010). 索赔准备金评估中分离法的自助法。《*ASTIN*公报：国际精算协会期刊》, 40(2):845–869. Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). 《时间序列：理论与方法》. 施普林格，纽约。 Bruce, N., Chen, C., Dunne, G., Hinder, I., McMurrough, T., Meyers, G., White, A., and Wright, T. (2008). 最佳估计与准备金评估的不确定性。精算师协会普通保险（GIRO）年会。网址：https://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/bhprizegibson.pdf. England, P. (2002). 《索赔准备金评估中预测误差的解析估计与自助法估计》的补遗。《保险：数学与经济学》, 31(3):461–466. England, P. and Verrall, R. (1999). 索赔准备金评估中预测误差的解析估计与自助法估计。《保险：数学与经济学》, 25(3):281–293. England, P. D. and Verrall, R. J. (2006). 普通保险未决负债的预测分布。《精算科学年刊》, 1(2):221. Gibson, L., Archer-Lock, P., Bruce, N., Collins, A., Dunne, G., Felisky, K., Hamil- ton, A., Jewell, M., Lo, J., Locke, J., Marshall, D., Nicholson, E., Thomas, L., Wilcox, S., Winer, J., and Wright, T. (2007). 最佳估计与准备金评估的不确定性。精算师协会普通保险（GIRO）年会。网址：https://www.actuaries.org.uk/system/files/documents/pdf/bhprizegibson.pdf. Hartl, T. (2010). 使用偏差残差对发展三角形的广义线性模型进行自助法处理。载于*CAS E–Forum*秋季刊. Mack, T. (1993). 链梯法准备金估计标准误的无分布假设计算。《*ASTIN*公报：国际精算协会期刊》, 23(2):213–225. Pan, L. and Politis, D. N. (2016). 线性、非线性和非参数自回归的自助法预测区间。《统计规划与推断杂志》, 177:1–27. Paparoditis, E. and Shang, H. L. (2021). 函数型时间序列的自助法预测带。《美国统计学会杂志》. Peremans, K., Segaert, P., Van Aelst, S., and Verdonck, T. (2017). 链梯法的稳健自助法程序。《斯堪的纳维亚精算学杂志》, 2017(10):870–897. Peters, G. W., Wüthrich, M. V., and Shevchenko, P. V. (2010). 链梯法：贝叶斯自助法与经典自助法。《保险：数学与经济学》, 47(1):36–51.

Pinheiro, P. J., Andrade e Silva, J. M. 和 de Lourdes Centeno, M.（2003）。理赔准备金评估中的自助法方法论。《风险与保险杂志》，70(4)：701–714。Renshaw, A. E. 和 Verrall, R. J.（1998）。链梯法背后的随机模型。《英国精算学杂志》，4(4)：903–923。
Steinmetz, J. 和 Jentsch, C.（2022）。Mack模型的渐近理论。《保险：数学与经济学》，107：223–268。Tee, L., Käärik, M. 和 Viin, R.（2017）。自助法在随机准备金评估方法比较中的应用。《风险》，5(1)：2。Verdonck, T. 和 Debruyne, M.（2011）。个体理赔对链梯估计的影响：分析与诊断工具。《保险：数学与经济学》，48(1)：85–98。

附录 A. 第 4 节的辅助结果

参数估计量的 Mack 自助法渐近理论。

以下定理是 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中（无条件的！）定理 3.1 的 Mack 自助法版本，并针对第 2.1 节的渐近框架作了调整。

定理 A.1 ($\widehat{f}^*_{j,\,n}$ 在给定 $\mathcal{D}_{I,\,n}$下的渐近正态性)。 假设 *2.2*，*2.3*、*2.5* 和 *4.9* 均成立，并令 $\widehat{f}^*_{j,\,n}$、 $j=0$、……、 $I+n-1$ 按照第 *3.1* 节的 *Mack* 自助法方案定义，如 *(3.5)* 所示。那么，当 $n\to\infty$ 时，以下结论成立：

(i) 对每个固定的 $j\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots\}$，有

$$\sqrt{I+n-j}\left(\widehat{f}^*_{j,n}-\widehat{f}_{j,n}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\frac{\sigma_j^2}{\mu_j}\right)\quad \textit{in probability,}$$

其中“$\xrightarrow{d}$”表示依分布收敛。

(ii) 对每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，令 $\widehat{\underline{f}}^*_{K,n}=(\widehat{f}^*_{0,n},\widehat{f}^*_{1,n},\ldots,\widehat{f}^*_{K,n})'$ 为 $\widehat{\underline{f}}_{K,n}=(\widehat{f}_{0,n},\widehat{f}_{1,n},\ldots,\widehat{f}_{K,n})'$的$(K+1)$-维 *Mack* 自助法版本。那么，我们有

$$J^{1/2}\left(\widehat{\underline{f}}^*_{K,n}-\widehat{\underline{f}}_{K,n}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{f}}\right)\quad \textit{in probability,}$$

where $J^{1/2}=diag\left(\sqrt{I+n+1-j},j=0,\ldots,K\right)$ *is a diagonal* $(K+1)\times(K+1)$ *matrix of inflation factors and* $\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{f}}=J_g(\underline{\mu}_K)\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{C}}J_g(\underline{\mu}_K)'=diag\left(\frac{\sigma_0^2}{\mu_0},\frac{\sigma_1^2}{\mu_1},\ldots,\frac{\sigma_K^2}{\mu_K}\right)$ *is a diagonal* $(K+1)\times(K+1)$ *covariance matrix, where*

$$\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{C}}=Cov(\underline{C}_{i,K})=\begin{pmatrix}\left(\prod_{k=\min(j_1,j_2)}^{\max(j_1,j_2)-1}f_k\right)\tau^2_{\min(j_1,j_2)}\\ j_1,j_2=0,\ldots,K+1\end{pmatrix}\tag{A.1}$$

是一个 $(K+1)\times(K+1)$ 矩阵，

$$J_g(\underline{x})=\begin{pmatrix}-\frac{x_1}{x_0^2}&\frac{1}{x_0}&0&\cdots&0\\0&-\frac{x_2}{x_1^2}&\frac{1}{x_1}&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0&-\frac{x_{K+1}}{x_K^2}&\frac{1}{x_K}\end{pmatrix}\tag{A.2}$$

是一个 $(K+1)\times(K+2)$ 矩阵，并且$\underline{\mu}_K=(\mu_0,\ldots,\mu_{K+1})'$如 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）中定理 *3.1* 的证明所推导。

由于上述定理 A.1 和 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的定理 3.1 所得到的无条件 极限分布相同，因此，对于任意但固定数量的估计量，Mack自助法在无条件意义下是一致的，即不以 $\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ 为条件。也就是说，对于每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，我们有

$$d_K\left(\mathcal{L}^*\left(J^{1/2}\left(\widehat{\underline{f}}^*_{K,n}-\underline{\widehat{f}}_{K,n}\right)\right),\mathcal{L}\left(J^{1/2}\left(\underline{\widehat{f}}_{K,n}-\underline{f}_K\right)\right)\right)=o_P(1),$$

其中 $\underline{f}_K=(f_0,\ f_1,\ \ldots\ldots,\ f_K)'$，$d_K$表示两个概率分布之间的柯尔莫哥洛夫距离。

以下直接推论是推论 3.2 的 Mack 自助法版本，该推论出自 Steinmetz 和 Jentsch（2022），并针对第 2.1 节的渐近框架进行了调整。

推论 A.2（在 $f_{j,\,n}^{*}$ 的条件下，$\mathcal{D}_{I,\,n}$ 的乘积的渐近正态性）。假设定理 *A.1* 的条件成立。那么，当 $n \to \infty$ 时，有：

(*i*) 对于每个固定的 $K \in \mathbb{N}_0$ 和 $i = 0, \ldots, K$，我们有

$$\sqrt{I+n+1}\left(\prod_{j=i}^{K} \widehat{f}_{j,n}^{*} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}_{j,n}\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \sum_{j=i}^{K} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \prod_{l=i, l\neq j}^{K} f_l^2\right) \quad \textit{in probability.}$$

(*ii*) 对于每个固定的 $K \in \mathbb{N}_0$，我们也有联合收敛，即

$$\sqrt{I}\begin{pmatrix} \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}_{j,n}^{*} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}_{j,n} \\ i = 0, \ldots, K \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \boldsymbol{\Sigma}_{K, \prod f_j}\right) \quad \textit{in probability,}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_{K,\,\prod f_j} = J_h\left(\underline{f}_K\right) \boldsymbol{\Sigma}_{K,\,\underline{f}} J_h\left(\underline{f}_K\right)' = \left(\boldsymbol{\Sigma}_{K,\,\prod f_j}\left(i_1, i_2\right)\right)_{i_1,\,i_2=0,\,\ldots,\,K}$ 是一个 $(K+1) \times (K+1)$ 协方差矩阵，其元素为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{K,\prod f_j}(i_1, i_2) = \sum_{j=\max(i_1,i_2)}^{K} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \prod_{l=\max(i_1,i_2), l\neq j}^{K} f_l^2 \prod_{m=\min(i_1,i_2)}^{\max(i_1,i_2)-1} f_m,$$

对于 $i_1, i_2 = 0, \ldots, K$。这里，$\boldsymbol{\Sigma}_{K,\,\underline{f}}$ 在定理 *A.1(ii)* 中定义，且

$$J_h(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \prod_{l=0,l\neq 0}^{K} x_l & \prod_{l=0,l\neq 1}^{K} x_l & \cdots & \prod_{l=0,l\neq K}^{K} x_l \\ 0 & \prod_{l=1,l\neq 1}^{K} x_l & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \prod_{l=K,l\neq K}^{K} x_l \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

如 *Steinmetz* 和 *Jentsch*（*2022*）中推论 *3.2* 的证明所推导。

A.1. **定理 A.1 的证明**。根据 Mack自助法估计量 $f_{j,n}^{*},\ j = 0, \ldots, I+n-1$ 按照 (3.5) 的构造，对于每个固定的 $K \in \mathbb{N}_0$，$K+1$ 估计量 $f_{0,n}^{*}, f_{1,n}^{*}, \ldots, f_{K,n}^{*}$ 在给定 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下相互独立。因此，实际上只需证明部分 (*i*)。对于任意固定的 j，根据 (2.10) 和 (3.5)，利用 $C_{i,j+1} = C_{i,j} F_{i,j}$，我们立即得到

$$\begin{aligned} \sqrt{I+n-j}\left(\widehat{f}_{j,n}^{*} - \widehat{f}_{j,n}\right) &= \sqrt{I+n-j}\left(\frac{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j} F_{i,j}^{*}}{\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}} - \frac{\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}}{\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}} \widehat{f}_{j,n}\right) \\ &= \sum_{i=-n}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}\left(F_{i,j}^{*} - \widehat{f}_{j,n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{I+n-j}} \sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}} \\ &=: \sum_{i=-n}^{I-j-1} Z_{i,n}. \end{aligned}$$

注意到，对于所有 j，$(Z_{i,\,n},\ i = -n, \ldots, I-j-1,\ n \in \mathbb{N}_0)$ 构成一个随机变量三角阵，并且在给定 $\mathcal{D}_{I,\,n}$ 的条件下相互独立，因此我们可以利用（条件）Lyapunov

中心极限定理证明渐近正态性。首先，对于自助法均值，利用所有 $\sim C_{i,\,j}$'s 以及 $f_{j,\,n}$ 关于 $\mathcal{D}_{I,\,n}$ 在 $Z_{i,\,n}$ 中的可测性，我们得到

$$E^*\left(Z^*_{i,n}\right) = E^*\left(\frac{C_{i,j}\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{I+n-j}}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}}\right) = \frac{C_{i,j}}{\frac{1}{\sqrt{I+n-j}}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}}\left(E^*\left(F^*_{i,j}\right) - \widehat{f}_{j,n}\right).$$

此外，根据 Mack 自助法的构造，对于任意固定的 j和 $i=-n,\ldots\ldots,\ I-j-1$，存在 $E^*(r^*_{i,\,j})=0$，使得

$$E^*(F^*_{i,j}) = E^*\left(\widehat{f}_{j,n} + \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}} r^*_{i,j}\right) = \widehat{f}_{j,n} + \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}} E^*\left(r^*_{i,j}\right) = \widehat{f}_{j,n}$$

从而得到 $E^*(Z^*_{i,\,n}) = 0$。其次，对于自助法方差，我们得到

$$Var^*\left(Z^*_{i,n}\right) = \frac{C^2_{i,j}}{\left(\frac{1}{\sqrt{I+n-j}}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}\right)^2} Var^*\left(F^*_{i,j}\right)$$

并且，根据 Mack 自助法的特定构造，从而得到 $E^*(r^*_{ij}) = 0$ 和 $E^*(r^{*2}_{ij}) = 1$，可得

$$\begin{aligned} Var^*(F^*_{i,j}) &= E^*\left(\left(\widehat{f}_{j,n} + \frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}} r^*_{i,j}\right)^2\right) - \widehat{f}^2_{j,n} \\ &= \widehat{f}^2_{j,n} + 2\widehat{f}_{j,n}\frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}} E^*(r^*_{i,j}) + \left(\frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}}\right)^2 E^*(r^{*2}_{i,j}) - \widehat{f}^2_{j,n} \\ &= \frac{\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{C_{i,j}} \end{aligned}$$

使得

$$Var^*\left(Z^*_{i,n}\right) = \frac{C_{i,j}\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{\left(\frac{1}{\sqrt{I+n-j}}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}\right)^2}$$

总之，

$$\begin{aligned} Var^*\left(\sum_{i=-n}^{I-j-1} Z^*_{i,n}\right) &= \sum_{i=-n}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{\left(\frac{1}{\sqrt{I+n-j}}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1}{I+n-j}\sum_{i=-n}^{I-j-1} C_{i,j}\right)\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{\left(\frac{1}{I+n-j}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}\right)^2} \\ &= \frac{\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{\frac{1}{I+n-j}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}}. \end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，利用假设 2.5，我们得到 $\widehat{\sigma}^2_{j,\,n} \to \sigma^2_j$ 根据 Steinmetz 和 Jentsch（2022）的定理 3.5，以及

$$\frac{1}{I+n-j}\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j} \xrightarrow{p} \mu_j$$

根据弱大数定律，并注意到对所有 j，根据假设 2.1(iii)，$(C_{k,\,j},\ k\in\mathbb{Z},\ \ k\le I-j-1)$ 独立同分布，其（有限）均值为 μ_j，方差为 τ^2_j，分别依据 (2.19) 和 (2.20)。

最后，还需证明李雅普诺夫条件以完成证明。选择 $\delta = 2$ 作为李雅普诺夫条件，对于任意 j，只需证明

$$\sum_{i=-n}^{I-K-1} E^*\left(\left(\frac{C_{i,j}\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{I+n-K}}\sum_{k=-n}^{I-K-1} C_{k,j}}\right)^4\right) \xrightarrow{p} 0.$$

由于所有 $C_{i,j}$ 都关于 $\mathcal{D}_{I,n}$ 可测，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=-n}^{I-K-1} E^*\left(\left(\frac{C_{i,j}\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)}{\frac{1}{\sqrt{I+n-K}}\sum_{k=-n}^{I-K-1} C_{k,j}}\right)^4\right) \\
&= \frac{1}{\left(\frac{1}{I+n-K}\sum_{k=-n}^{I-K-1} C_{k,j}\right)^4}\frac{1}{(I+n-K)^2}\sum_{i=-n}^{I-K-1} C_{i,j}^4 E^*\left(\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)^4\right).
\end{aligned}$$

此外，由于 $\frac{1}{I+n-K}\sum_{k=-n}^{I-K-1} C_{k,j} = O_P(1)$，只需证明

$$\frac{1}{I+n-K}\sum_{i=-n}^{I-K-1} C_{i,j}^4 E^*\left(\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)^4\right) = O_P(1).$$

为此，我们接下来必须计算 $E^*((F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n})^4)$。将 $F^*_{i,j}$ 代入后，我们得到

$$E^*\left(\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)^4\right) = E^*\left(\left(\frac{\widehat{\sigma}_{j,n}}{\sqrt{C_{i,j}}} r^*_{i,j}\right)^4\right) = \frac{\widehat{\sigma}^4_{j,n}}{C^2_{i,j}} E^*\left(r^{*4}_{i,j}\right)$$

从而得到

$$\frac{1}{I+n-K}\sum_{i=-n}^{I-K-1} C_{i,j}^4 E^*\left(\left(F^*_{i,j} - \widehat{f}_{j,n}\right)^4\right) = \frac{\widehat{\sigma}^4_{j,n}}{I+n-K}\sum_{i=-n}^{I-K-1} C^2_{i,j} E^*\left(r^{*4}_{i,j}\right).$$

此外，由于 $\widehat{\sigma}^4_{j,I+n-K}\sum_{i=-n}^{I-K-1} C^2_{i,j} = O_P(1)$，还需证明 $E^*\left(r^{*4}_{i,j}\right) = O_P(1)$ 也成立。根据构造，我们有[2]

$$E^*\left(r^{*4}_{i,j}\right) = \frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{s=0}^{I+n-2}\sum_{t=-n}^{I-s-1} \widetilde{r}^4_{t,s}.$$

在下文中，为方便起见，假设 $\widetilde{r}_{t,s} = \widehat{r}_{t,s}$。然而，关于 $\widetilde{r}_{t,s}$ 的论证，包括重新中心化（和重新缩放），本质上相同，只是繁琐且冗长。在这种情况下，将 $\widetilde{r}_{t,s}$ 代入后，我们得到

$$\begin{aligned}
E^*\left(r^{*4}_{i,j}\right) &= \frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{s=0}^{I+n-2}\sum_{t=-n}^{I-s-1}\left(\frac{\sqrt{C_{t,s}}(F_{t,s} - \widehat{f}_{s,n})}{\widehat{\sigma}_{s,n}}\right)^4 \\
&= \frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{s=0}^{I+n-2}\sum_{t=-n}^{I-s-1}\frac{C^2_{t,s}}{\widehat{\sigma}^4_{s,n}}\left(F^4_{t,s} - 4F^3_{t,s}\widehat{f}_{s,n} + 6F^2_{t,s}\widehat{f}^2_{s,n} - 4F_{t,s}\widehat{f}^3_{s,n} + \widehat{f}^4_{s,n}\right)
\end{aligned}$$

根据假设 4.9，对于 $n \to \infty$，我们有

$$\sup_{j=0,\ldots,I+n-1}\frac{\widehat{f}_{j,n}}{f_j} = O_P(1) \quad \text{and} \quad \sup_{j=0,\ldots,I+n-2}\frac{\sigma^2_j}{\widehat{\sigma}^2_{j,n}} = O_P(1).$$

[2]请注意，我们隐含地假设仅 $\widehat{\sigma}^2_{I+n-1,\,n}$ 被估计为零；参见第 3.1 节。

因此，我们可以将 $E^*(r_{i,j}^{*4})$ 的上界表示为

$$
\begin{aligned}
&O_P(1)\left(\frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{s=0}^{I+n-2}\sum_{t=-n}^{I-s-1}\frac{C_{t,s}^2}{\sigma_s^4}\left(F_{t,s}^4-4F_{t,s}^3f_s+6F_{t,s}^2f_s^2-4F_{t,s}f_s^3+f_s^4\right)\right)\\
=&O_P(1)\left(\frac{2}{(I+n+1)(I+n)-2}\sum_{s=0}^{I+n-2}\sum_{t=-n}^{I-s-1}\frac{C_{t,s}^2}{\sigma_s^4}\left(F_{t,s}-f_s\right)^4\right).
\end{aligned}
$$

最后，最右侧等式中方括号内的项是由非负项组成的和，它也是 $O_P(1)$，因为其期望有界；这是因为根据假设 4.9，假定在 (2.21) 中定义的 $\kappa_j^{(4)}$'s 构成一个有界序列（$(\kappa_j^{(4)}/\sigma_j^4)_{j\in\mathbb{N}_0}$）。□

A.2. **推论 A.2 的证明**。该证明由德尔塔方法和定理 A.1 推出，与 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中推论 3.2 的证明完全类似。□

附录 B. 第 4 节的证明

B.1. **定理 4.8 的证明**。由于定理 4.1 中的（条件） L_2-收敛结果意味着 (4.6) 中的（条件）依分布收敛，对于 $n\to\infty$，尚需证明

$$
(R_{I,n}^*-\widehat{R}_{I,n})_1|\left(\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n}\right)\xrightarrow{d}\mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty} \tag{B.1}
$$

与 $E^*((R_{I,n}^*-R_{I,n})_1|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n})\to 0$ 和

$$
Var^*\left((R_{I,n}^*-\widehat{R}_{I,n})_1|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)\to Var\left((R_{I,\infty}-\widehat{R}_{I,\infty})_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}\right) \tag{B.2}
$$

分别依概率收敛。

然而，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$的条件下，$(R_{I,n}^*-R_{I,n})_1$ 的渐近理论并不简单，因为它由若干和与乘积构成，而这些和与乘积渐近地包含无穷多个加数和因子。因此，我们通过截断这些和与乘积来分解 $(R_{I,n}^*-R_{I,n})_1$，以便应用 Brockwell 和 Davis（1991）中的命题 6.3.9。为此，令 $K\in\mathbb{N}_0$ 为固定值，并假设 $I,n\in\mathbb{N}_0$ 足够大，使得 $K<I+n-1$。于是，我们有

$$
\begin{aligned}
(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n})_1 =& \sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{j,n} \right) \\
=& \sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \right) \\
&+ \sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} F^*_{I-i,l} - 1 \right) - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{l,n} - 1 \right) \right) \\
&+ \sum_{i=K+1}^{I+n} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{j,n} \right) \\
=:& A^*_{1,K,I,n} + A^*_{2,K,I,n} + A^*_{3,K,I,n}.
\end{aligned}
$$

因此，要推导出所声称的条件极限分布，只需证明：a) 对所有 $K \in \mathbb{N}_0$, $A^*_{1,K,I,n}|$, $(\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}) \xrightarrow{d} \mathcal{G}_{1,K}|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 依概率收敛于 $n \to \infty$，其中某个（条件）分布为 $\mathcal{G}_{1,K}|\mathcal{Q}_{I,\infty}$; b) $\mathcal{G}_{1,K}|\mathcal{Q}_{I,\infty} \xrightarrow{d} \mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 当 $K \to \infty$时；以及 c) 对所有$\epsilon > 0$，有

$$
\lim_{K\to\infty} \text{上极限}_{n\to\infty} P^* \left(|A^*_{2,K,I,n}| > \epsilon | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{K\to\infty} \text{上极限}_{n\to\infty} P^* \left(|A^*_{3,K,I,n}| > \epsilon | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) = 0. \tag{B.3}
$$

我们先证明 a) 部分。根据假设 4.6，用于生成 $F_{i,j}|C_{i,j}$和 $F^*_{i,j}|C^*_{i,j}$的（条件）分布参数族分别关于 $C_{i,j}$, f_j, σ^2_j和 $C^*_{i,j}$, $\widehat{f}^*_{j,n}$, $\widehat{\sigma}^2_{j,n}$连续。因此，由于 $\widehat{f}_{j,n} - f_j = O_P((I+n-1)^{-1/2})$、$\widehat{f}^*_{j,n} - \widehat{f}_{j,n} = O_{P^*}((I+n-1)^{-1/2})$ 和 $\widehat{\sigma}^2_{j,n} - \sigma^2_j = O_P((I+n-1)^{-1/2})$ 对所有固定的 $j \in \mathbb{N}_0$均成立，我们可以得出，对于所有固定的 $K \in \mathbb{N}_0$ 且当 $n \to \infty$ 时，

$$
\sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \right) | (\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}) \xrightarrow{d} \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{K} F_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{K} f_j \right) | \mathcal{Q}_{I,\infty} \tag{B.4}
$$

以概率收敛，这证明了 $A^*_{1,K,I,n}|(\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}) \xrightarrow{d} \mathcal{G}_{1,K}|\mathcal{Q}_{I,\infty}$。对于 b) 部分，同样令 $K \to \infty$，我们立即得到

$$
\sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{K} F_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{K} f_j \right) | \mathcal{Q}_{I,\infty} \xrightarrow{d} \sum_{i=0}^{\infty} C_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{\infty} F_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{\infty} f_j \right) | \mathcal{Q}_{I,\infty} \sim \mathcal{G}_1 | \mathcal{Q}_{I,\infty}, \tag{B.5}
$$

这证明了 $\mathcal{G}_{1,K}|\mathcal{Q}_{I,\infty} \xrightarrow{d} \mathcal{G}_1|\mathcal{Q}_{I,\infty}$。在证明 c) 部分之前，我们也来考察 $A^*_{1,K,I,n}$ 的均值和方差（以 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 为条件）。对于均值，利用可测性

$C_{I-i,\ i}$ 关于 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ 的可测性以及迭代期望定律，我们有

$$\begin{aligned}
&E^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) \\
&= E^*(E^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n})|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) \\
&= \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} E^* \left(E^* \left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
E^* \left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) &= E^* \left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \\
&= \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} = 0 \qquad \text{(B.6)}
\end{aligned}$$

采用与证明 $E(\prod_{j=i}^{K} F_{I-i,j}) = \prod_{j=i}^{K} f_j$ 时类似的论证。同样，利用全方差定律和 (B.6)，我们得到方差

$$\begin{aligned}
Var^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) =& E^* \left(Var^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n})|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \\
&+ Var^* \left(E^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n})|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \\
=& E^* \left(\sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \sum_{j=i}^{K} \left(\prod_{k=i}^{j-1} \widehat{f}^*_{k,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{j,n} \left(\prod_{l=j+1}^{K} \widehat{f}^{*2}_{l,n} \right) | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \\
=& \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \sum_{j=i}^{K} \widehat{\sigma}^2_{j,n} E^* \left(\left(\prod_{k=i}^{j-1} \widehat{f}^*_{k,n} \right) \left(\prod_{l=j+1}^{K} \widehat{f}^{*2}_{l,n} \right) \right) \qquad \text{(B.7)}
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$由于 $f^*_{k,n}$' 相互独立于条件 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$，并且由于

$$Var^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n}) = \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \sum_{j=i}^{K} \left(\prod_{k=i}^{j-1} \widehat{f}^*_{k,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{j,n} \left(\prod_{l=j+1}^{K} \widehat{f}^{*2}_{l,n} \right)$$

通过与 (Steinmetz 和 Jentsch 2022, 定理 4.3) 的证明中所用的类似论证，并利用 $C_{I-i,i}$ 和 $\widehat{\sigma}^2_{j,n}$ 相对于 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的可测性得到。现在，使用与 (Steinmetz 和 Jentsch 2022, 定理 4.7) 中类似的论证，并利用以下事实：

$\widehat{f}^{*}_{k,n}$ 是　在给定 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下随机独立，对于 (B.7) 中的期望，我们得到

$$\begin{aligned}
E^*\left(\left(\prod_{k=i}^{j-1}\widehat{f}^{*}_{k,n}\right)\left(\prod_{l=j+1}^{K}\widehat{f}^{*2}_{l,n}\right)\right) &= \left(\prod_{k=i}^{j-1}E^*\left(\widehat{f}^{*}_{k,n}\right)\right)\left(\prod_{l=j+1}^{K}E^*\left(\widehat{f}^{*2}_{l,n}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{k=i}^{j-1}\widehat{f}_{k,n}\right)\left(\prod_{l=j+1}^{K}\left(\frac{\widehat{\sigma}^2_{l,n}}{\sum_{k=-n}^{I-l-1}C_{k,l}}+\widehat{f}^2_{l,n}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{k=i}^{j-1}\widehat{f}_{k,n}\right)\left(\prod_{l=j+1}^{K}\widehat{f}^2_{l,n}\right)+O_P\left(\frac{1}{I+n}\right)
\end{aligned}$$

由于，对所有 $c\in\{0,\dots,K\}$，我们有

$$E^*\left(\widehat{f}^{*2}_{c,n}|\mathcal{B}_{I,n}(c)\right)=\frac{\widehat{\sigma}^2_{c,n}}{\sum_{k=-n}^{I-c-1}C_{k,c}}+\widehat{f}^2_{c,n}, \tag{B.8}$$

其中 $\mathcal{B}_{I,\ n}(k)=\{C_{i,j}|i=-n,\dots,I,\ j=0,\dots,k,\ i+j\le I+n\}$ 表示 $\mathcal{D}_{I,\ n}$中直到第 k 列的所有元素，并且由于 $\widehat{\sigma}^2_{l,\ n}\to\sigma^2_l$对所有 $l\in\{0,\dots,K\}$ 均依概率收敛于，且

$$\frac{1}{\sum_{k=-n}^{I-l-1}C_{k,l}}\le\frac{1}{(I+n-l)\epsilon^l}\le\frac{1}{(I+n-K)\epsilon^K}=O\left(\frac{1}{I+n}\right)$$

由于 K 是固定的。这得到

(B.9)

$$\begin{aligned}
Var^*(A^*_{1,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}) &= \sum_{i=0}^{K}C_{I-i,i}\sum_{j=i}^{K}\left(\prod_{k=i}^{j-1}\widehat{f}_{k,n}\right)\widehat{\sigma}^2_{j,n}\left(\prod_{l=j+1}^{K}\widehat{f}^2_{l,n}\right)+O_P\left(\frac{1}{I+n}\right)\\
&\xrightarrow{p}\sum_{i=0}^{K}C_{I-i,i}\sum_{j=i}^{K}\left(\prod_{k=i}^{j-1}f_k\right)\sigma^2_j\left(\prod_{l=j+1}^{K}f^2_l\right) \qquad \text{(B.10)}
\end{aligned}$$

由于对所有固定的 K，$n\to\infty$，因为 $\widehat{f}_{j,\ n}-f_j=O_P((I+n-1)^{-1/2})$ 且 $\widehat{\sigma}^2_{j,\ n}-\sigma^2_j=O_P((I+n-1)^{-1/2})$ 对所有 $j\in\mathbb{N}_0$ 均成立。最后，令 $K\to\infty$，得到

$$\sum_{i=0}^{K}C_{I-i,i}\sum_{j=i}^{K}\left(\prod_{k=i}^{j-1}f_k\right)\sigma^2_j\left(\prod_{l=j+1}^{K}f^2_l\right)\longrightarrow\sum_{i=0}^{\infty}C_{I-i,i}\sum_{j=i}^{\infty}\left(\prod_{k=i}^{j-1}f_k\right)\sigma^2_j\left(\prod_{l=j+1}^{\infty}f^2_l\right), \tag{B.11}$$

其等于 $Var((R_{I,\infty}-R_{I,\infty})1|\mathcal{Q}_{I,\infty})$。因此，要完成证明，只需证明 c) 部分。我们先证明 $A^*_{2,K,I,n}$ 的 c) 部分。按照上文类似的论证，对于均值，我们有 $E^*(A^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n})=0$，这是由于 $E^*(A^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{F}^*_{I,n})=0$; 对于方差，我们有 $Var^*(A^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n})=E^*((A^*_{2,K,I,n})^2|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n})=E^*(E^*((A^*_{2,K,I,n})^2|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{F}^*_{I,n})|\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n})$。对于内层期望，利用事故年度之间的随机独立性，从而得到 $A^*_{2,K,I,n}$ 的随机独立加项

（在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$, $\mathcal{D}_{I,n}$ 和 $\mathcal{F}^*_{I,n}$ 的条件下），我们得到

$$
\begin{aligned}
&E^*((A^*_{2,K,I,n})^2|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n}) \\
&= \sum_{i=0}^{K} C^2_{I-i,i} E^* \left(\left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} F^*_{I-i,l} - 1 \right) - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{l,n} - 1 \right) \right)^2 \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{K} C^2_{I-i,i} \left[E^* \left(\left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} F^*_{I-i,l} - 1 \right) \right)^2 \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) - \left(\prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{l,n} - 1 \right) \right)^2 \right].
\end{aligned}
$$

对于该 项对应于最后一个右端表达式中方括号内第一项的项，我们得到 t

$$
\sum_{i=0}^{K} C^2_{I-i,i} E^* \left(\left(\prod_{j=i}^{K} F^*_{I-i,j} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} F^*_{I-i,l} - 1 \right) \right)^2 \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right)
$$

(B.12)

$$
= \sum_{i=0}^{K} C^2_{I-i,i} E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^{*2}_{I-i,j} - 2 \left(\prod_{j=i}^{K} F^{*2}_{I-i,j} \right) \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} F^*_{I-i,l} \right) + \prod_{j=i}^{K} F^{*2}_{I-i,j} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right).
$$

利用期望的线性性，对于 (B.12) 最后一个右端表达式中的第一个期望，由于 $F^*_{i,\,j} = \frac{C^*_i}{C^*_i}{}^{j+1}_{,}$ $_j$ 和 $C^*_{I-i,\,i} = C_{I-i,\,i}$，我们得到

$$
\begin{aligned}
&E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^{*2}_{I-i,j} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \\
&= E^* \left(\left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^{*2}_{I-i,j} \right) E^* \left(F^{*2}_{I-i,I+n-1} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, C^*_{I-i,i}, \ldots, C^*_{I-i,I+n-1}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \\
&= E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^{*2}_{I-i,j} \left(\frac{\widehat{\sigma}^2_{I+n-1,n}}{C^*_{I-i,I+n-1}} + \widehat{f}^{*2}_{I+n-1,n} \right) | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \\
&= E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^{*2}_{I-i,j} \frac{1}{C^*_{I-i,I+n-1}} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{I+n-1,n} + E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^{*2}_{I-i,j} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \widehat{f}^{*2}_{I+n-1,n} \\
&= E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^*_{I-i,j} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \frac{\widehat{\sigma}^2_{I+n-1,n}}{C_{I-i,i}} + E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^{*2}_{I-i,j} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \widehat{f}^{2*}_{I+n-1,n} \\
&= \frac{\prod_{j=i}^{I+n-2} \widehat{f}^*_{j,n} \widehat{\sigma}^2_{I+n-1,n}}{C_{I-i,i}} + E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-2} F^{*2}_{I-i,j} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) \widehat{f}^{*2}_{I+n-1,n}.
\end{aligned}
$$

通过递归代入，我们得到

$$
E^* \left(\prod_{j=i}^{I+n-1} F^{*2}_{I-i,j} \middle| \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n} \right) = \frac{1}{C_{I-i,i}} \sum_{k=i}^{I+n-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}^*_{j,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \widehat{f}^{*2}_{h,n} \right) + \prod_{j=i}^{I+n-1} \widehat{f}^{*2}_{j,n}.
$$

类似地，对于（B.12）中的第二个期望，我们得到

$$
\begin{aligned}
&E^*\left(-2\left(\prod_{j=i}^{K}F_{I-i,j}^{*2}\right)\left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1}F_{I-i,l}^{*}\right)\Big|\mathcal{Q}_{I,n}^{*}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{F}_{I,n}^{*}\right)\\
&=-2\left(\frac{1}{C_{I-i,i}}\sum_{k=i}^{K}\left(\prod_{j=i}^{k-1}\widehat{f}_{j,n}^{*}\right)\widehat{\sigma}_{k,n}^{2}\left(\prod_{h=k+1}^{K}\widehat{f}_{h,n}^{*2}\right)+\prod_{j=i}^{K}\widehat{f}_{j,n}^{*2}\right)\left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{l,n}^{*}\right)
\end{aligned}
$$

而对于第三个期望，我们有

$$
E^*\left(\prod_{j=i}^{K}F_{I-i,j}^{*2}\Big|\mathcal{Q}_{I,n}^{*}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{F}_{I,n}^{*}\right)=\frac{1}{C_{I-i,i}}\sum_{k=i}^{K}\left(\prod_{j=i}^{k-1}\widehat{f}_{j,n}^{*}\right)\widehat{\sigma}_{k,n}^{2}\left(\prod_{h=k+1}^{K}\widehat{f}_{h,n}^{*2}\right)+\prod_{j=i}^{K}\widehat{f}_{j,n}^{*2}.
$$

总而言之，对于所有 $K<I+n-1$，可得

$$
\begin{aligned}
&E^*((A_{2,K,I,n}^{*})^2|\mathcal{Q}_{I,n}^{*}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{F}_{I,n}^{*})\\
&=\sum_{i=0}^{K}C_{I-i,i}\left[\sum_{k=i}^{I+n-1}\left(\prod_{j=i}^{k-1}\widehat{f}_{j,n}^{*}\right)\widehat{\sigma}_{k,n}^{2}\left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{h,n}^{*2}\right)-2\left(\sum_{k=i}^{K}\left(\prod_{j=i}^{k-1}\widehat{f}_{j,n}^{*}\right)\widehat{\sigma}_{k,n}^{2}\left(\prod_{h=k+1}^{K}\widehat{f}_{h,n}^{*2}\right)\right)\left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{l,n}^{*}\right)\right.\\
&\quad\left.+\sum_{k=i}^{K}\left(\prod_{j=i}^{k-1}\widehat{f}_{j,n}^{*}\right)\widehat{\sigma}_{k,n}^{2}\left(\prod_{h=k+1}^{K}\widehat{f}_{h,n}^{*2}\right)\right].
\end{aligned}
$$

^代入，并利用以下事实：给定 $\mathcal{D}_{I,\,n}$ 和 $\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}$ 时，$f^*_{j,\,n}$'彼此随机独立，可得

$$
\begin{aligned}
&Var^*(A^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) \\
&= \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \Bigg[\sum_{k=i}^{I+n-1} \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{j=i}^{k-1} E^* \left(\widehat{f}^*_{j,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \right) \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} E^* \left(\widehat{f}^{*2}_{h,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \right) \\
&\quad - 2 \sum_{k=i}^{K} \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{j=i}^{k-1} E^* \left(\widehat{f}^*_{j,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \right) \left(\prod_{h=k+1}^{K} E^* \left(\widehat{f}^{*2}_{h,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \right) \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} E^* \left(\widehat{f}^*_{l,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) \right) \\
&\qquad + \sum_{k=i}^{K} \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{j=i}^{k-1} E^* \left(\widehat{f}^*_{j,n} \right) \right) \left(\prod_{h=k+1}^{K} E^* \left(\widehat{f}^{*2}_{h,n} \right) \right) \Bigg] \\
&= \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \Bigg[\sum_{k=i}^{I+n-1} \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \\
&\qquad - 2 \sum_{k=i}^{K} \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n} \right) \\
&\qquad + \sum_{k=i}^{K} \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \Bigg] \\
&= \sum_{i=0}^{K} C_{I-i,i} \Bigg[\sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \\
&\qquad \times \left(\left(\prod_{h=K+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) - \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n} \right) \right) \\
&\qquad + \sum_{k=K+1}^{I+n-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \\
&\qquad + \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \left(1 - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n} \right) \Bigg]
\end{aligned}
$$

^ ^ ^通过重新排列各项并利用 $E^*(f^*_{j,\,n}|\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}) = E^*(f^*_{j,\,n}) = f_{j,\,n}$ 以及

$$
E^* \left(\widehat{f}^{*2}_{j,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right) = E^* \left(\widehat{f}^{*2}_{j,n} \right) = \widehat{f}^2_{j,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{j,n}}{\sum_{p=-n}^{I-j-1} C_{p,j}}
$$

对所有 j。接下来，要证明对于 $K \to \infty$，并且随后对 $n \to \infty$，$Var^*(A^*_{2,\,K,\,I,\,n}|\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}) \geq 0$ 依概率收敛于零，只需证明其无条件期望有界，

$K \to \infty$，且其界在 $n \to \infty$ 时趋于零。于是得到

$$
\begin{aligned}
& E\left(Var^*(A^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})\right) \\
=& \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right)\right)\right. \\
& \qquad \left. \times \left(\prod_{h=K+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right) - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n}\right)\right] \\
& + \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=K+1}^{I+n-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right)\right)\right] \\
& + \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right)\right) \left(1 - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n}\right)\right] \\
=& \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right)\right)\right. \\
& \qquad \left. \times \left(\prod_{h=K+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right) - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n}\right)\right] \\
& + \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=K+1}^{I+n-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right)\right)\right] \\
& + \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}}\right)\right) \left(1 - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n}\right)\right].
\end{aligned}
$$

现在，我们分别考虑最右侧的三个项。利用 $\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h} \geq (I+n-h)\epsilon^h \geq \epsilon^h$，第一项可以界定为

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\epsilon^h}\right)\right) \left(\prod_{h=K+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\epsilon^h}\right) - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n}\right)\right] \\
=& \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\epsilon^h}\right)\right)\right] \\
& - \sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}^2_{k,n} \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}^2_{h,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{h,n}}{\epsilon^h}\right)\right) \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n}\right)\right].
\end{aligned}
$$

接下来，利用迭代期望定律和

$$
E\left[\widehat{f}^2_{c,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{c,n}}{\epsilon^c} | \mathcal{B}_{I,n}(c)\right] = \frac{\sigma^2_c}{\sum_{k=-n}^{I-c-1} C_{k,c}} + f^2_c + \frac{\sigma^2_c}{\epsilon^c} \leq f^2_c + \frac{2\sigma^2_c}{\epsilon^c}
$$

对于所有 $c \in \{0, \dots, I+n-1\}$，其中 $\mathcal{B}_{I,n}(k) = \{C_{i,j} | i = -n, \dots, I, j = 0, \dots, k, i+j \le I\}$，上式右侧的第一项变为

$$\sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}_{k,n}^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}_{h,n}^2 + \frac{\widehat{\sigma}_{h,n}^2}{\epsilon^h}\right)\right)\right] \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l}\right)\right)$$

同理，对于第二项，我们得到

$$-\sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}_{k,n}^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}_{h,n}^2 + \frac{\widehat{\sigma}_{h,n}^2}{\epsilon^h}\right)\right)\right] \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} f_l\right).$$

将这些项合并后，得到

$$\sum_{i=0}^{K} E\left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n}\right) \widehat{\sigma}_{k,n}^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}_{h,n}^2 + \frac{\widehat{\sigma}_{h,n}^2}{\epsilon^h}\right)\right)\right] \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l}\right) - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} f_l\right),$$

利用与上述类似的论证，可将其界定为

$$\left[\sum_{i=0}^{K} \mu_i \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} f_j\right) \sigma_k^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(f_h^2 + \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h}\right)\right)\right] \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l}\right) - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} f_l\right).$$

现在，令 $n \to \infty$，我们得到以下上界

$$\mu_\infty^2 \left(\prod_{h=0}^{\infty} \left(f_h^2 + \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h}\right)\right) \sum_{i=0}^{K} \sum_{k=i}^{K} \sigma_k^2 \left(\prod_{l=K+1}^{\infty} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l}\right) - \prod_{l=K+1}^{\infty} f_l\right) < \infty,$$

当且仅当 $\prod_{j=0}^{\infty} x_j < \infty$ if and only if $\sum_{j=0}^{\infty}(x_j - 1) < \infty$ for $x_j \ge 1$ for all j 时，该值有限；并且由于我们有

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^{\infty} \left(f_h^2 + \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h} - 1\right) &= \sum_{h=0}^{\infty}(f_h^2 - 1) + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h} = \sum_{h=0}^{\infty}(f_h - 1)(f_h + 1) + 2\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\sigma_h^2}{\epsilon^h} \\ &\le \sup_{h \in \mathbb{N}}(f_h + 1) \sum_{h=0}^{\infty}(f_h - 1) + 2\sum_{h=0}^{\infty} \frac{\sigma_h^2}{\epsilon^h} < \infty\end{aligned}$$

根据假设 2.4 和 4.2。现在，再令 $K \to \infty$，项 $\sum_{i=0}^{K} \sum_{k=i}^{K} \sigma_k^2$ 也仍然有界，这是因为

$$\sum_{i=0}^{K} \sum_{k=i}^{K} \sigma_k^2 = \sum_{j=0}^{K} \sigma_j^2 \sum_{i=0}^{j} = \sum_{j=0}^{K}(j+1)\sigma_j^2 \le \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\sigma_j^2 < \infty.$$

最后，由于当 $l \to \infty$ 时，$f_l \to 1$ 和 $\sigma_l^2/\epsilon^l \to 0$，我们得到 $\prod_{l=K+1}^{\infty}(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l}) \to 1$，并且当 $K \to \infty$ 时，$\prod_{l=K+1}^{\infty} f_l \to 1$，从而

$$\prod_{l=K+1}^{\infty} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l}\right) - \prod_{l=K+1}^{\infty} f_l \to 0.$$

同样，采用相同的论证，上述 $E(Var^*(A_{2,K,I,n}^* | \mathcal{Q}_{I,n}^* = \mathcal{Q}_{I,n}))$表示式中的第二项可由以下式子界定

$$\sum_{i=0}^{K} \mu_i \sum_{k=K+1}^{I+n-1} \left(\prod_{j=i}^{k-1} f_j\right) \sigma_k^2 \left(\prod_{h=k+1}^{I+n-1} \left(f_h^2 + \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h}\right)\right),$$

对于 $n \to \infty$，该式可由以下式子界定

$$\mu_\infty^2 \left(\prod_{h=0}^{\infty} \left(f_h^2 + \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h} \right) \right) \sum_{i=0}^{K} \sum_{k=K+1}^{\infty} \sigma_k^2 \leq \mu_\infty^2 \left(\prod_{h=0}^{\infty} \left(f_h^2 + \frac{2\sigma_h^2}{\epsilon^h} \right) \right) \sum_{k=K+1}^{\infty} (k+1)\sigma_k^2 < \infty,$$

对于 $K \to \infty$，该值趋于零。

Fin同样，对于 $E(Var^*(A^*_{2,\ K,\ I,\ n} | \mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}))$ 表示式中的第三项，我们得 et

$$\sum_{i=0}^{K} E \left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \widehat{\sigma}_{k,n}^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}_{h,n}^2 + \frac{\widehat{\sigma}_{h,n}^2}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \left(1 - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n} \right) \right]$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{K} E \left[C_{I-i,i} \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \widehat{f}_{j,n} \right) \widehat{\sigma}_{k,n}^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(\widehat{f}_{h,n}^2 + \frac{\widehat{\sigma}_{h,n}^2}{\sum_{p=-n}^{I-h-1} C_{p,h}} \right) \right) \right] \right) \left(1 - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} f_l \right)$$

然而，对于 $n \to \infty$，第二个因子 $1 - \prod_{l=K+1}^{I+n-1} f_l$ 可由 $1 - \prod_{l=K+1}^{\infty} f_l$ 所界定；由于当 $K \to \infty$ 时 $\prod_{l=K+1}^{\infty} f_l \to 1$，它收敛于 0；而上面的第一个因子可由

$$\sum_{i=0}^{K} \mu_i \sum_{k=i}^{K} \left(\prod_{j=i}^{k-1} f_j \right) \sigma_k^2 \left(\prod_{h=k+1}^{K} \left(f_h^2 + \frac{\sigma_h^2}{\epsilon^h} \right) \right),$$

对于 $n \to \infty$，它还可进一步由以下表达式界定

$$\mu_\infty^2 \left(\prod_{h=0}^{\infty} \left(f_h^2 + \frac{\widehat{\sigma}_h^2}{\epsilon^h} \right) \right) \sum_{j=0}^{K} (j+1)\sigma_j^2,$$

对于 $K \to \infty$，有 $\sum_{j=0}^{K} (j+1)\sigma_j^2 \to \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)\sigma_j^2 < \infty$，因此该项有界。这就完成了 c) 中关于项 $A^*_{2,\ K,\ I,\ n}$ 的第一部分。接下来考察 $A^*_{3,\ K,\ I,\ n}$，以证明 c) 的第二部分；由迭代期望定律，我们有 $E^*(A^*_{3,\ K,\ I,\ n} | \mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n})$。通过对 $A^*_{2,\ K,\ I,\ n}$ 进行类似计算，我们得到

$$E^*((A^*_{3,K,I,n})^2 | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n}) = \sum_{i=K+1}^{I+n} C_{I-i,i} \sum_{j=i}^{I+n-1} \left(\prod_{h=i}^{j-1} \widehat{f}^*_{h,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{j,n} \left(\prod_{l=j+1}^{I+n-1} \widehat{f}^{*2}_{l,n} \right)$$

and

$$Var^*(A^*_{3,K,I,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) = E^* \left(E^*((A^*_{3,K,I,n})^2 | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{F}^*_{I,n}) | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n} \right)$$

$$= \sum_{i=K+1}^{I+n} C_{I-i,i} \sum_{j=i}^{I+n-1} \left(\prod_{h=i}^{j-1} \widehat{f}_{h,n} \right) \widehat{\sigma}^2_{j,n} \left(\prod_{l=j+1}^{I+n-1} \left(\widehat{f}^2_{l,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{l,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j+1} C_{k,l}} \right) \right).$$

因此，为了证明 $Var^*(A^*_{3,\ K,\ I,\ n}) \geq 0$ 依概率趋于零，我们证明 $E(Var^*(A^*_{3,\ K,\ I,\ n} | \mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}))$ 有界于 $n \to \infty$，且其界随 $K \to \infty$ 趋于零。通过代入，并使用上文针对 $A^*_{2,\ K,\ I,\ n}$ 的类似论证，可得

$$E(Var^*(A^*_{3,K,I,n} | \mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})) \leq \sum_{i=K+1}^{I+n} \mu_i \sum_{j=i}^{I+n-1} \left(\prod_{h=i}^{j-1} f_h \right) \sigma_j^2 \left(\prod_{l=j+1}^{I+n-1} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l} \right) \right)$$

$$\leq \mu_\infty^2 \left(\prod_{l=0}^{\infty} \left(f_l^2 + \frac{2\sigma_l^2}{\epsilon^l} \right) \right) \sum_{i=K+1}^{I+n} \sum_{j=i}^{I+n-1} \sigma_j^2,$$

由于以下原因，它在 $n \to \infty$ 下有界

$$\sum_{i=K+1}^{I+n} \sum_{j=i}^{I+n-1} \sigma_j^2 \leq \sum_{j=K+1}^{I+n-1} (j+1)\sigma_j^2 \to \sum_{j=K+1}^{\infty} (j+1)\sigma_j^2 < \infty$$

并且当 $K \to \infty$ 时，这个界趋于零。 □

B.2. 定理 4.10 的证明。 与定理 4.8 中关于 $(R^*_{I,\,n} - R_{I,\,n})_1$ 条件极限$\widehat{}$行为的证明，以及 Steinmetz 和 Jentsch（2022）$\widehat{}$ $\widehat{}$中关于 $(R_{I,\,n} - R_{I,\,n})_2$，（无条件！）极限行为的定理 4.7 证明类似，我们通过截断求和与乘积来分解 $(R^*_{I,\,n} - R_{I,\,n})_2$，以便应用 Brockwell 和 Davis（1991）中的命题 6.3.9。为此，固定 $K \in \mathbb{N}_0$，并假设 I, $n \in \mathbb{N}_0$ 足够大，使得$K < I + n - 1$。然后，将 $(R^*_{I,\,n} - \widehat{R}_{I,\,n})_2$ 用 $\sqrt{I+n+1}$ 扩充后，我们得到

$$\begin{aligned}
&\sqrt{I+n+1}\left(R^*_{I,n} - \widehat{R}_{I,n}\right)_2 \\
=&\sqrt{I+n+1}\sum_{i=0}^{I+n} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}\right) \\
=&\sqrt{I+n+1}\sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{K}\widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{K}\widehat{f}_{j,n}\right) \\
&+\sqrt{I+n+1}\sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{K}\widehat{f}^*_{j,n}\left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{l,n} - 1\right) - \prod_{j=i}^{K}\widehat{f}_{j,n}\left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{l,n} - 1\right)\right) \\
&+\sqrt{I+n+1}\sum_{i=K+1}^{I+n} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}\right) \\
=:&B^*_{1,K,I,n} + B^*_{2,K,I,n} + B^*_{3,K,I,n},
\end{aligned}$$

因此，要推导出所述条件极限分布，只需证明：a) 对所有 $K \in \mathbb{N}_0$, $B^*_{1,\,K,\,I,\,n}|(\mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n},\ \mathcal{D}_{I,\,n}) \xrightarrow{d} \widetilde{\mathcal{G}}_{2,\,K}|\mathcal{Q}_{I,\,\infty}$ 依概率收敛于 $n \to \infty$，其中某个（条件）分布为 $\widetilde{\mathcal{G}}_{2,\,K}|\mathcal{Q}_{I,\,\infty}$; b) $\widetilde{\mathcal{G}}_{2,\,K}|\mathcal{Q}_{I,\,\infty} \xrightarrow{d} \mathcal{G}_2|\mathcal{Q}_{I,\,\infty}$ 当 $K \to \infty$ 时；以及 c) 对所有$\epsilon > 0$，我们有

$\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^*\left(|B^*_{2,\,K,\,I,\,n}| > \epsilon | \mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}\right) = 0$ 以及 $\lim_{K\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P^*\left(|A^*_{3,\,K,\,I,\,n}| > \epsilon | \mathcal{Q}^*_{I,\,n} = \mathcal{Q}_{I,\,n}\right) = 0$.我们先证明 a) 部分。也就是说，对每个固定的 $K \in \mathbb{N}_0$，我们考虑

$$B^*_{1,K,I,n} = \sqrt{I+n+1}\sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{K}\widehat{f}^*_{j,n} - \prod_{j=i}^{K}\widehat{f}_{j,n}\right), \tag{B.13}$$

其中

$$\widehat{f}_{j,n} = \frac{\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j+1}}{\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}} \quad \text{and} \quad \widehat{f}^*_{j,n} = \frac{\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j} F^*_{k,j}}{\sum_{k=-n}^{I-j-1} C_{k,j}}.$$

与 Steinmetz 和 Jentsch（2022）定理 4.7 的证明中所有 $f_{j,n}$' 都确实受到以 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 为条件的影响不同，这里，在以 $\mathcal{D}_{I,n}$ 为条件时，所有 $f^*_{j,n}$' 都是

独立 于条件 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$。因此，对于 $n \to \infty$，定理 A.1 和推论 A.2 中推导出的（无条件！）渐近自助法理论意味着

$$B^*_{1,K,I,n}|(\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}) \xrightarrow{d} \langle \mathcal{Q}_{I,K-I}, \mathbf{Y}_K \rangle \,|\mathcal{Q}_{I,\infty}$$

依概率收敛，其中 $\mathcal{Q}_{I,\ K-I} = \{C_{I-i,i}|i = 0, \ldots, I+(K-I)\ = K\}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^{K+1}$ 中的欧几里得内积，而 $\mathbf{Y}_K = (Y_i,\ i = 0, \ldots\ldots,\ K)$ 是一个 $(K+1)$ 维多元正态分布随机变量，$\mathbf{Y}_K \sim \mathcal{N}\left(0, \mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j}\right)$ 的 $\mathbf{\Sigma}_{K,\ \prod f_j}$ 在推论 A.2 中定义。

此外，令 $K \to \infty$，可得 $\langle \mathcal{Q}_{I,K-I}, \mathbf{Y}_K \rangle \,|\mathcal{Q}_{I,\ \infty} \xrightarrow{d} \langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_\infty \rangle \,|\mathcal{Q}_{I,\ \infty}$，其中 $\mathcal{Q}_{I,\ \infty} = \{C_{I-i,i}|i \in \mathbb{N}_0\}$，且 $\mathbf{Y}_\infty = (Y_i,\ \ i \in \mathbb{N}_0)$ 表示一个协方差为

$$Cov(Y_{i_1}, Y_{i_2}) = \lim_{K\to\infty} \mathbf{\Sigma}_{K,\prod f_j}(i_1, i_2) = \sum_{j=\max(i_1,i_2)}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \prod_{l=\max(i_1,i_2), l\neq j}^{\infty} f_l^2 \prod_{m=\min(i_1,i_2)}^{\max(i_1,i_2)-1} f_m \tag{B.14}$$

对于 $i_1, i_2 \in \mathbb{N}_0$。此外，由于 $\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 和 $\mathbf{Y}_\infty$ 在给定 $\mathcal{Q}_{I,\infty}$ 的条件下随机独立，$\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_\infty \rangle$ 的方差计算结果为

$$\begin{aligned}
&Var\left(\langle \mathcal{Q}_{I,\infty}, \mathbf{Y}_\infty \rangle \,|\mathcal{Q}_{I,\infty}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} Var(C_{I-i,i}Y_i|\mathcal{Q}_{I,\infty}) + \sum_{\substack{i_1,i_2=0 \\ i_1\neq i_2}}^{\infty} Cov(C_{I-i_1,i_1}Y_{i_1}, C_{I-i_2,i_2}Y_{i_2}|\mathcal{Q}_{I,\infty}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} C_{I-i,i}^2 Var(Y_i) + \sum_{\substack{i_1,i_2=0 \\ i_1\neq i_2}}^{\infty} C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}Cov(Y_{i_1}, Y_{i_2}) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} C_{I-i,i}^2 \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \prod_{\substack{l=i \\ l\neq j}}^{\infty} f_l^2 + \sum_{\substack{i_1,i_2=0 \\ i_1\neq i_2}}^{\infty} C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2} \sum_{j=\max(i_1,i_2)}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \prod_{\substack{l=\max(i_1,i_2) \\ l\neq j}}^{\infty} f_l^2 \prod_{m=\min(i_1,i_2)}^{\max(i_1,i_2)-1} f_m \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j f_j^2} \left(\sum_{i=0}^{j} C_{I-i,i}^2 \prod_{k=i}^{\infty} f_k^2 \right) + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \left(\sum_{i_1=1}^{j} C_{I-i_1,i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} C_{I-i_2,i_2} \prod_{l=i_2}^{i_1-1} f_l \right) \prod_{k=j}^{\infty} f_k^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j f_j^2} \left(\frac{j+1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} C_{I-i,i}^2 \prod_{k=i}^{\infty} f_k^2 \right) + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} \left(\frac{j}{j} \sum_{i_1=1}^{j} C_{I-i_1,i_1} \frac{i_1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} C_{I-i_2,i_2} \prod_{l=i_2}^{i_1-1} f_l \right) \prod_{k=j}^{\infty} f_k^2 \\
&\leq \mu_\infty^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j f_j^2} (j+1) \left(\frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^{j} C_{I-i,i}^2 \right) + 2\mu_\infty^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{\mu_j} (j+1)^2 \left(\frac{1}{j} \sum_{i_1=1}^{j} C_{I-i_1,i_1} \frac{1}{i_1} \sum_{i_2=0}^{i_1-1} C_{I-i_2,i_2} \right) \\
&= O_P(1)
\end{aligned}$$

根据假设2.4，得出 $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^2\sigma_j^2 < \infty$。

我们接着证明 $B^*_{2,K,I,n}$ 的 c) 部分。按照上文类似的论证，我们需要考虑

$$\begin{aligned}
&B^*_{2,K,I,n}|(\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}) \\
=&\sqrt{I+n+1} \sum_{i=0}^{K} C^*_{I-i,i} \left(\prod_{j=i}^{K} \widehat{f}^*_{j,n} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}^*_{l,n} - 1 \right) - \prod_{j=i}^{K} \widehat{f}_{j,n} \left(\prod_{l=K+1}^{I+n-1} \widehat{f}_{l,n} - 1 \right) \right) |(\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}).
\end{aligned}$$

^ ^利用 $f^*_{j,n}$ 在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}, \mathcal{D}_{I,n}$ 时的无偏性，其中 $f_{j,n}$，即

$$E^*(\widehat{f}^*_{j,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) = E^*(\widehat{f}^*_{j,n}) = \widehat{f}_{j,n}$$

^对所有 j，并且在给定 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$的条件下，$f^*_{j,n}$彼此独立，因此我们有$E^*(B^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}) = 0$，这是由构造得到的。因此，接下来需要证明，对于 $n \to \infty$， $Var^*(B^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})$ 在概率意义下有界，且其界在之后的 $K \to \infty$ 下趋于零。现在，为了计算自助法方差 $Var^*(B^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})$，对任意固定的 $K \in \mathbb{N}_0$ 以及足够大的$n \in \mathbb{N}_0$，使得 $K < I + n - 1$，我们得到

$$\begin{aligned}
&Var^*(B^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})\\
&= (I+n+1)\sum_{i_1,i_2=0}^{K} C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n} - \prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,n}, \prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n} - \prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^*_{j_2,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}\right)\\
&= (I+n+1)\sum_{i_1,i_2=0}^{K} C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n} - \prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,n}, \prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n} - \prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^*_{j_2,n}\right)\\
&\le 2(I+n+1)\sum_{i_2=0}^{K}\sum_{i_1=0}^{i_2} C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n} - \prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,n}, \prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n} - \prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^*_{j_2,n}\right),
\end{aligned}$$

usi ^即，给定 $\mathcal{D}_{I,n}$，$f^*_{j,n}$在条件 $\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n}$下彼此独立 .

为了计算最右侧的协方差，对于 $i_1 \le i_2$，我们首先考虑混合矩

$$\begin{aligned}
&E^*\left(\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n} - \prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n} - \prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^*_{j_2,n}\right)\right)\\
&= E^*\left(\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^{*2}_{j_2,n}\right)\right) - 2E^*\left(\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^{*2}_{j_2,n}\right)\left(\prod_{j_3=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_3,n}\right)\right)\\
&\quad + E^*\left(\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^{*2}_{j_2,n}\right)\right)\\
&= \left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\\
&\quad - 2\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_3=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_3,n}\right)\\
&\quad + \left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n} + \frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right),
\end{aligned}$$

因为对于 $j \neq k$ 和 $j,k \in \{0,\ldots,I+n-1\}$，在给定 $\mathcal{D}_{I,n}$ 的条件下，$f^*_{j,n}$ 和 $f^*_{k,n}$ 相互独立。同理，我们有

$$E^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}-\prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)=\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1}-\prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}_{j_1}$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}-\prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,n},\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n}-\prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^*_{j_2,n}\right)\\
&=\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)-\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^2_{j_2,n}\right)\\
&\quad-2\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)-\prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^2_{j_2,n}\right)\left(\prod_{j_3=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_3,n}\right)\\
&\quad+\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)-\prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^2_{j_2,n}\right)\\
&=\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left[\sum_{j_3=i_2}^{I+n-1}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\right.\\
&\quad-2\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_4,n}\right)\\
&\quad\left.+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

通过重新整理上面最后一个等式右端括号中的各项，可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{j_3=K+1}^{I+n-1}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\\
&+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\left(1-\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_4,n}\right)\\
&+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left[\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)-\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right]\\
&\quad\times\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_4,n}\right)\\
&+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\widehat{f}^2_{j_4,n}\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)\left(1-\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_4,n}\right).
\end{aligned}$$

现在，按照 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中定理 4.7 证明的相同步骤，我们可以计算上述内容的无条件期望。利用 $C_{i,\,j}>\epsilon^j$, $E(\widehat{f}_{c,\,n}|\mathcal{B}_{I,\,n}(c))=f_c$,

$E(\widehat{\sigma}^2_{c,\ n}|\mathcal{B}_{I,\ n}(c)) = \sigma_c^2$ 以及

$$E\left(\widehat{f}^2_{c,n}|\mathcal{B}_{I,n}(c)\right) = \frac{\sigma_c^2}{\sum_{k=-n}^{I-c-1} C_{k,c}} + f_c^2 \leq \frac{\sigma_c^2}{(I+n-c)\epsilon^c} + f_c^2 \leq \frac{\sigma_c^2}{\epsilon^c} + f_c^2 \tag{B.15}$$

对于所有 $c \in \{0,\dots,I+n-1\}$，其中 $\mathcal{B}_{I,\ n}(k)$
$= \{C_{i,j}|i=-n,\dots,I,\ j=0,\dots,k,\ i+j \leq I+n\}$，我们可以通过证明其无条件期望对 $n\to\infty$ 有界，且该界在 $K\to\infty$ 时趋于零，来论证 $Var^*(B^*_{2,\ K,\ I,\ n}|\mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}) \geq 0$ 在 $n\to\infty$ 和 $K\to\infty$ 之后依概率趋于零。

利用这一点，$E(Cov^*(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,\ n} - \prod_{j_1=i_1}^{K}\widehat{f}^*_{j_1,\ n},\ \prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,\ n} - \prod_{j_2=i_2}^{K}\widehat{f}^*_{j_2,\ n}))$ 可以由以下内容界定

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1} f_{j_1}\right)\Bigg\{\sum_{j_3=K+1}^{I+n-1}\frac{\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\\
&\quad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2,n}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1} f_{j_4}-1\right)\\
&\quad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\\
&\qquad\times\left[\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2,n}}{\epsilon^{j_2}}\right)\left(\prod_{j_2=K+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)-1\right)\right]\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1} f_{j_4}\right)\\
&\quad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1} f_{j_4}-1\right)\Bigg\},
\end{aligned}$$

我们也可以从上方界定 $E(Var^*(B^*_{2,\ K,\ I,\ n}|\mathcal{Q}^*_{I,\ n} = \mathcal{Q}_{I,\ n}))$。具体而言，将所有结果汇总后，我们得到

$$
\begin{aligned}
&E(Var^*(B^*_{2,K,I,n}|\mathcal{Q}^*_{I,n} = \mathcal{Q}_{I,n})) \\
&\leq 2\sum_{i_2=0}^{K}\sum_{i_1=0}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1} f_{j_1}\right) \\
&\quad\times\left\{\sum_{j_3=K+1}^{I+n-1}\frac{(I+n+1)\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\right. \\
&\qquad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{(I+n+1)\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2,n}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}f_{j_4}-1\right) \\
&\qquad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{(I+n+1)\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right) \\
&\qquad\quad\times\left[\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2,n}}{\epsilon^{j_2}}\right)\left(\prod_{j_2=K+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)-1\right)\right]\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}f_{j_4}\right) \\
&\qquad\left.+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{(I+n+1)\sigma^2_{j_3}}{(I+n-j_3)\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}f_{j_4}-1\right)\right\}
\end{aligned}
$$

且最后一个等式右侧的首项变为

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i_2=0}^{K}\sum_{i_1=0}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1} f_{j_1}\right) \\
&\quad\times\left\{\sum_{j_3=K+1}^{I+n-1}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\right. \\
&\qquad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2,n}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}f_{j_4}-1\right) \\
&\qquad+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left[\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2,n}}{\epsilon^{j_2}}\right)\left(\prod_{j_2=K+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)-1\right)\right]\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}f_{j_4}\right) \\
&\qquad\left.+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=i_2}^{j_3-1}\left(f^2_{j_4}+\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\left(\prod_{j_2=j_3+1}^{K}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_4=K+1}^{I+n-1}f_{j_4}-1\right)\right\},
\end{aligned}
$$

它还可以进一步由以下内容界定

$$
\begin{aligned}
&2\mu_\infty\left(\prod_{j_4=0}^{\infty}\left(f^2_{j_4}+\frac{2\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\right)\right)\sum_{i_2=0}^{K}\sum_{i_1=0}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\left\{\sum_{j_3=K+1}^{\infty}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=K+1}^{\infty}f_{j_4}-1\right)\right. \\
&\qquad\left.+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left[\left(\prod_{j_2=K+1}^{\infty}\left(f^2_{j_2}+\frac{2\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)-1\right)\right]\left(\prod_{j_4=K+1}^{\infty}f_{j_4}\right)+\sum_{j_3=i_2}^{K}\frac{\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\left(\prod_{j_4=K+1}^{\infty}f_{j_4}-1\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

现在，分别考虑括号中的四项。对于第一项，我们可以认为，由于以下原因，它渐近趋于零

$$\sum_{i_2=0}^{K}\sum_{i_1=0}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\sum_{j_3=K+1}^{\infty}\frac{\sigma_{j_3}^2}{\epsilon^{j_3}}\leq\left(\frac{1}{K+1}\sum_{i_2=0}^{K}\mu_{i_2}\right)\left(\frac{1}{i_2+1}\sum_{i_1=0}^{i_2}\mu_{i_1}\right)\sum_{j_3=K+1}^{\infty}(j_3+1)^2\frac{\sigma_{j_3}^2}{\epsilon^{j_3}}\to 0$$

对于 $K\to\infty$，因为序列 $(\frac{1}{j+1}\sum_{i=0}^{j}\mu_{i,j}\in\mathbb{N}_0)$ 正在收敛，因此也有界；又由假设 4.2 可知 $\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^2\frac{\sigma_j^2}{\epsilon^j}<\infty$。类似地，利用 $\prod_{j=K+1}^{\infty}f_j\to 1$ 以及 $\prod_{j=K+1}^{\infty}(f_j^2+\frac{2\sigma_j^2}{\epsilon^j})\to 1$ （对于 $K\to\infty$），我们也可以证明另外三项渐近地趋于零。这就完成了 $B_{2,K,I,n}^*$ 的 c) 部分的第一部分。

类似地，为了证明 $B_{3,K,I,n}^*$ 的 c) 部分，我们需要考虑

$$B_{3,K,I,n}^*|(\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n})=\sqrt{I+n+1}\sum_{i=K+1}^{I+n}C_{I-i,i}^*\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}^*-\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}\right)|(\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n}).$$

按照上文处理 $B_{2,K,I,n}^*$ 时所用的相同论证，我们得到 $E^*(B_{3,K,I,n}^*|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n})=0$，并且对于任意固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，以及足够大的 $n\in\mathbb{N}_0$，只要满足 $K<I+n-1$，都有

$$\begin{aligned}
&Var^*(B_{3,K,I,n}^*|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n})\\
=&(I+n+1)\sum_{i_1,i_2=K+1}^{I+n-1}C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1,n}^*,\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}^*|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)\\
\leq&2(I+n+1)\sum_{i_2=K+1}^{I+n-1}\sum_{i_1=K+1}^{i_2}C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1,n}^*,\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}^*\right).
\end{aligned}$$

要计算最后一个等式右侧的协方差，对于 $i_1\leq i_2$，我们考虑混合矩

$$E^*\left(\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}^*\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}^{*2}\right)\right),$$

这恰好是针对 $B^*_{2,\ K,\ I,\ n}$ 计算的协方差的混合矩的第一项。通过采用类似的计算来求得 $E^*(\widehat{f}^{*2}_{c,\ n})$（对于 $B^*_{2,\ K,\ I,\ n}$），我们得到

$$
\begin{aligned}
&Cov^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n},\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n}\right)\\
&=\left[E^*\left(\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^{*2}_{j_2,n}\right)\right)-E^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)E^*\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}^*_{j_2,n}\right)\right]\\
&=\left[\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}E^*\left(\widehat{f}^*_{j_1,n}\right)\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}E^*\left(\widehat{f}^{*2}_{j_2,n}\right)\right)-\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}\right)\right]\\
&=\left[\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)\right)-\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}\right)\right]\\
&=\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left[\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_2,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_2,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_2-1}C_{k,j_2}}\right)-\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}\right]\\
&=\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_4,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_4-1}C_{k,j_4}}\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{j_4-1}\widehat{f}^2_{j_2,n}\right)\left(\prod_{j_3=j_4+1}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_3,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\sum_{k=-n}^{I-j_3-1}C_{k,j_3}}\right)\right)\\
&\leq\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{(I+n+1)\widehat{\sigma}^2_{j_4,n}}{(I+n-j_4)\epsilon^{j_4}}\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}\widehat{f}_{j_1,n}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{j_4-1}\widehat{f}^2_{j_2,n}\right)\left(\prod_{j_3=j_4+1}^{I+n-1}\left(\widehat{f}^2_{j_3,n}+\frac{\widehat{\sigma}^2_{j_3,n}}{\epsilon^{j_3}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

注意到所有涉及的加项和因子均为非负，取最后一个右端表达式的期望，并利用迭代期望定律以及 $C_{i,\ j}<\epsilon^j$, $E(\widehat{f}_{c,\ n}|\mathcal{B}_{I,\ n}(c))=f_c$,$E(\widehat{\sigma}^2_{c,\ n}|\mathcal{B}_{I,\ n}(c))=\sigma^2_c$ 以及 (B.15)，可得

$$
\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{\sigma^2_{j_4}}{(I+n-j_4)\epsilon^{j_4}}\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}f_{j_1}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{j_4-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_3=j_4+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_3}+\frac{2\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\right)\right)
$$

使得 $E(Var^*(B^*_{3,\ K,\ I,\ n}|\mathcal{Q}^*_{I,\ n}=\mathcal{Q}_{I,\ n}))$ 的首项变为

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{i_2=K+1}^{I+n-1}\sum_{i_1=K+1}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\left(\prod_{j_1=i_1}^{i_2-1}f_{j_1}\right)\left(\prod_{j_2=i_2}^{j_4-1}\left(f^2_{j_2}+\frac{\sigma^2_{j_2}}{\epsilon^{j_2}}\right)\right)\left(\prod_{j_3=j_4+1}^{I+n-1}\left(f^2_{j_3}+\frac{2\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\right)\right)\\
\leq&2\mu_\infty\left(\prod_{j_3=0}^{\infty}\left(f^2_{j_3}+\frac{2\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\right)\right)\sum_{i_2=K+1}^{I+n-1}\sum_{i_1=K+1}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}\\
\leq&2\mu_\infty\left(\prod_{j_3=0}^{\infty}\left(f^2_{j_3}+\frac{2\sigma^2_{j_3}}{\epsilon^{j_3}}\right)\right)\sum_{i_2=K+1}^{I+n-1}\sum_{i_1=K+1}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{\sigma^2_{j_4}}{\epsilon^{j_4}}.
\end{aligned}
$$

对于最右侧的三重求和，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{i_2=K+1}^{I+n-1}\sum_{i_1=K+1}^{i_2}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\sum_{j_4=i_2}^{I+n-1}\frac{\sigma_{j_4}^2}{\epsilon^{j_4}} &= \sum_{i_2=1}^{I+n-K-1}\sum_{i_1=K+1}^{i_2+K}\mu_{i_1}\mu_{i_2+K}\sum_{j_4=i_2+K}^{I+n-1}\frac{\sigma_{j_4}^2}{\epsilon^{j_4}}\\ &= \sum_{i_2=1}^{I+n-K-1} i_2\left(\frac{1}{i_2}\sum_{i_1=K+1}^{i_2+K}\mu_{i_1}\right)\mu_{i_2+K}\sum_{j_4=i_2+K}^{I+n-1}\frac{\sigma_{j_4}^2}{\epsilon^{j_4}}\\ &\leq const.\sum_{i_2=1}^{I+n-K-1} i_2\mu_{i_2+K}\sum_{j_4=i_2+K}^{I+n-1}\frac{\sigma_{j_4}^2}{\epsilon^{j_4}}\\ &= const.\sum_{j=1+K}^{I+n-1}\frac{\sigma_j^2}{\epsilon^j}\sum_{l=1}^{j-K} l\mu_{l+K}.\end{aligned}$$

此外，序列 $(\mu_i, i\in\mathbb{N}_0)$ 在确定性意义上具有与 $(C_{I-i,i}, i\in\mathbb{N}_0)$ 相同的性质，因此 $\sum_{l=1}^{j-K} l\mu_{l+K}\leq const.l^2$。因此，我们有

$$\sum_{j=1+K}^{I+n-1}\frac{\sigma_j^2}{\epsilon^j}\sum_{l=1}^{j-K} l\mu_{l+K}\leq const.\sum_{j=1+K}^{\infty} j^2\frac{\sigma_j^2}{\epsilon^j}\to 0$$

根据假设 4.2，$K\to\infty$。 □

B.3. 定理 4.11 的证明。证明类似于 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中定理 4.12 和推论 4.13 的证明。$(R_{I,n}^*-R_{I,n})_1$ 与 $(R_{I,n}^*-R_{I,n})_2$ 在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,n}$ 条件下不相关这一结论，可由下式推出

$$\begin{aligned}&Cov^*\left((R_{I,n}^*-\widehat{R}_{I,n}^*)_1,\sqrt{I+n+1}(R_{I,n}^*-\widehat{R}_{I,n}^*)_2|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)\\ =&Cov^*\left(\sum_{i=0}^{I+n}C_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}F_{I-i,j}^*-\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}^*\right),\sqrt{I+n+1}\sum_{i=0}^{I+n}C_{I-i,i}\left(\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}^*-\prod_{j=i}^{I+n-1}\widehat{f}_{j,n}\right)|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)\\ =&\sqrt{I+n+1}\sum_{i_1,i_2=0}^{I+n}E^*\left(C_{I-i_1,i_1}\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}F_{I-i_1,j_1}^*-\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1,n}^*\right)C_{I-i_2,i_2}\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2}^*-\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}\right)|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)\\ =&0\end{aligned}$$

因为对于所有 $i_1,i_2=0,\ldots,I+n$，我们有

$$E^*\left(C_{I-i_1,i_1}C_{I-i_2,i_2}\left(\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}^*-\prod_{j_2=i_2}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_2,n}\right)E^*\left(\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}F_{I-i_1,j_1}^*-\prod_{j_1=i_1}^{I+n-1}\widehat{f}_{j_1,n}^*\middle|\mathcal{F}_{I,n}^*,\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)|\mathcal{Q}_{I,n}^*=\mathcal{Q}_{I,n}\right)$$
$$=0,$$

因为最右侧的条件期望中的内层条件期望为零。 □

附录 C. 第 6 节的证明

C.1. **定理 6.1 的证明**。沿用定理 4.8 中的证明技巧，并利用$\widehat{f}_{j,\ n}-f_j=O_P((I+n-1)^{-1/2})$、$\widehat{f}^*_{j,\ n}-\widehat{f}_{j,\ n}=O_{P^*}((I+n-1)^{-1/2})$ 以及 $\widehat{\sigma}^2_{j,\ n}-\sigma^2_j=O_P((I+n-1)^{-1/2})$，可得到替代 Mack 自助法的过程不确定性部分 $(R^+_{I\ ,\ n}-\widehat{R}^+_{I\,n,\ })_1$ 也具有相同的极限结果。□

C.2. **定理 6.3 的证明**。沿用定理 4.10 中的证明技巧，并利用假设 6.2 的极限性质，我们得到所述的渐近结果。□

C.3. **定理 6.4 的证明**。根据定理 6.1 和定理 6.3 得出的结果，论证与定理 4.11 证明中的论证完全类似。□

附录D. Steinmetz 和 Jentsch（2022）的中心极限定理的条件版本

为求完整起见，下面的定理 D.1 和推论 D.2 总结了 Steinmetz 和 Jentsch（2022）中定理 C.1(ii,iv) 和推论 C.2(ii,iv) 的结果。

定理 D.1（f_j 在给定$\mathcal{Q}_{I、n}$的条件下的渐近正态性；Stein- metz 和 Jentsch（2022）中的定理 C.1(ii,iv)）。假设假设 *2.2*、*2.3*、*2.4*、*4.2* 和 *4.3* 成立。那么，当 $n\to\infty$时，以下结论成立：

(*i*) 对于每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，令 $\underline{f}_K=(f_{0、}\ f_{1、}\ \ldots、\ f_K)'$并定义

$$\underline{f}_{K,n}(\mathcal{Q}_{I,n})=(f_{0,n}(\mathcal{Q}_{I,n}),f_{1,n}(\mathcal{Q}_{I,n}),\ldots,f_{K,n}(\mathcal{Q}_{I,n}))'.$$

那么，无条件地，我们有

$$J_n^{1/2}\left(\underline{f}_{K,n}(\mathcal{Q}_{I,n})-\underline{f}_K\right)\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{f}}\right),$$

其中，$J_n^{1/2}=diag\left(\sqrt{\underline{I+n+1-}j},j=0,\ldots,K\right)$ 是一个由膨胀因子构成的对角（$K+1$）×（$K+1$）矩阵，而方差-协方差矩阵

$$\mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{f}}=J_g\left(\underline{\mu}_K\right)\mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{C}}J_g\left(\underline{\mu}_K\right)',$$

其中 $\mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K\ ,C}$ 在 (D.1) 中定义，且具有以下项

$$\begin{aligned}&\mathbf{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{f}}(j_1,j_2)\\&=\frac{f_{j_1}f_{j_2}E\left(E(C_{i,j_1}|C_{i,\infty})E(E(C_{i,j_2}|C_{i,\infty}))\right)+E\left(E(C_{i,j_1+1}|C_{i,\infty})E(E(C_{i,j_2+1}|C_{i,\infty}))\right)}{\mu_{j_1}\mu_{j_2}}\\&+\frac{-f_{j_2}E\left(E(C_{i,j_1+1}|C_{i,\infty})E(C_{i,j_2}|C_{i,\infty})\right)-f_{j_1}E\left(E(C_{i,j_1}|C_{i,\infty})E(C_{i,j_2+1}|C_{i,\infty})\right)}{\mu_{j_1}\mu_{j_2}}\end{aligned}$$

for $j_1,j_2=0,\ldots,K$.

(ii) 对每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，令 $\widehat{\underline{f}}_{K,n}=(f_{0,n},f_{1,n},\ldots,f_{K,n})'$。那么，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下，我们有

$$J_n^{1/2}\left(\widehat{\underline{f}}_{K,n}-\underline{f}_{K,n}(\mathcal{Q}_{I,n})\right)|\mathcal{Q}_{I,n}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\underline{f}}\right),$$

其中，方差-协方差矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\underline{f}}=J_g\left(\underline{\mu}_K\right)\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\underline{C}}J_g\left(\underline{\mu}_K\right)',$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\,C}$ 在(D.2)中定义，其元素为 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\,f}(j,j)=\sigma^2_{f_j,\,2}=\frac{\sigma_j^2}{\mu_j}-\sigma^2_{f_j,\,1}$ 对于 $j=0,\ldots,K$，以及 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\,f}(j_1,j_2)=-\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\,f}(j_1,j_2)$ 对于 $j_1,j_2=0,\ldots,K$，$j_1\neq j_2$。

我们得到

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{f}}=J_g\left(\underline{\mu}_K\right)\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{C}}J_g\left(\underline{\mu}_K\right)' \tag{D.1}$$

and

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\underline{C}}=E(Var(\underline{C}_{i,K}|C_{i,\infty})), \tag{D.2}$$

其中 $C_{i,\,\infty}=C_{i,\,0}\prod_{k=0}^{\infty}F_{i,\,k}$。注意，由于全方差定律，我们有

$$\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{C}}=\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{C}}+\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\underline{C}}\quad\text{and}\quad\boldsymbol{\Sigma}_{K,\underline{f}}=\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\underline{f}}+\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\underline{f}}, \tag{D.3}$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}_{K,\,f}=diag\left(\frac{\sigma_0^2}{\mu_0},\frac{\sigma_1^2}{\mu_1},\ldots,\frac{\sigma_K^2}{\mu_K}\right)$。

推论 D.2（在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下，$f_{j,n}$ 的乘积的渐近正态性；Steinmetz 和 Jentsch（2022）中的推论 C.2(ii,iv)）。假设定理 *D.1* 的条件成立。那么，当 $n\to\infty$时，有：

(i) 对每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，无条件地，我们也有联合收敛，即

$$\sqrt{I+n+1}\begin{pmatrix}\prod_{j=i}^K f_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n})-\prod_{j=i}^K f_{j,n}\\ i=0,\ldots,K\end{pmatrix}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\prod f_j}\right)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\prod f_j}=J_h(\underline{f}_K)\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,f}J_h(\underline{f}_K)'$ 其中 $J_h(\cdot)$ 如 (A.3) 中所定义。

(ii) 对每个固定的 $K\in\mathbb{N}_0$，在给定 $\mathcal{Q}_{I,n}$ 的条件下，我们也有联合收敛，即 $s,$

$$\sqrt{I+n+1}\begin{pmatrix}\prod_{j=i}^K \widehat{f}_{j,n}-\prod_{j=i}^K f_{j,n}(\mathcal{Q}_{I,n})\\ i=0,\ldots,K\end{pmatrix}|\mathcal{Q}_{I,n}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\prod f_j}\right)$$

其中 $\boldsymbol{\Sigma}^{(2)}_{K,\prod f_j}=\boldsymbol{\Sigma}_{K,\prod f_j}-\boldsymbol{\Sigma}^{(1)}_{K,\prod f_j}$，其中 $\boldsymbol{\Sigma}_{K,\prod f_j}$ 在 *Stein- metz* 和 *Jentsch (2022)* 的推论 *3.2(ii)* 中定义。

附录 E. 其他模拟结果

注意，替代 Mack 自助法准备金预测根和中间 Mack 自助法准备金预测根的第一部分相同。因此，以下结论适用于这两种方法。

此外，对于不同的分布假设，在设置 a) 和 b) 中，我们均采用显著性水平为 $\alpha=5\%$ 的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验来检验：给定 $\mathcal{Q}_I^{(m)*}{}_{,n}=\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)}$，且 $\mathcal{D}_{I\,n}^{(m)}$，$m=1,\ldots,500$ 时，$(\widehat{R}^{*}_{I,\,n}-\widehat{R}^{*}_{I,\,n})_1^{(m)}$ 服从均值为零、方差如 4.5 所示的正态分布。

对于设置 a)，若使用伽马分布生成自助法下三角，则在 $M=500$ 个样本中，约有 92% 未能拒绝高斯分布这一原假设；若使用对数正态分布，约有 87% 未能拒绝；若使用截断正态分布，则约有 95% 未能拒绝。对于所有 $n\in\{0,10,20,30,40\}$，情况基本相同。相比之下，对于设置 b)，若使用伽马分布或对数正态分布，检验总是拒绝原假设；若使用截断正态分布，则在 $M=500$ 个样本中仅约有 28% 拒绝原假设。对于所有 $n\in\{0,10,20,30,40\}$，结果都相当相似。

这些发现可以用伽马分布和对数正态分布的一个性质来解释。随着该参数设定中的 $C_{i,j}^{*}\hat{\sigma}_{j\,n}^{2}$，增大，这两种分布的偏度和超额峰度往往都会“消失”。因此，由于设置 a) 中第一列各项的取值范围为 $[120\times10^6,350\times10^6]$，而设置 b) 中为 $[120\times10^4,350\times10^4]$，与设置 a) 相比，我们在设置 b) 中观察到更大的偏度和超额峰度。具体而言，这表明过程不确定性项（渐近占主导地位）的分布 $\widehat{\ }\,(R^{*}_{I,n}-R_{I,n})_{\ 1}|\,(\mathcal{Q}^{*}_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n})$ 和 $(R^{+}_{I\ ,n}-\widehat{R}^{+}_{I\ ,n})_{\ 1}|\,(\mathcal{Q}^{+}_{I\ ,n}=\mathcal{Q}_{I,n},\mathcal{D}_{I,n})$ 通常确实取决于个体发展因子的分布（族），即使事故年度的（有效）数量很大时也是如此 $I+n+1$。

作为总结，我们在图 1 和图 2 中展示了设置 a) 和 b) 下 $I=10$和 $n=10$ 的偏度与峰度箱线图，以及任意选取的密度图；这些结果由原始 Mack 自助法在 (i)、(ii)、(iii) 中三种不同的分布假设下生成。替代 Mack 自助法的结果没有变化。

接下来，我们分别将 $(R^{*}_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_1^{(m)}|(\mathcal{Q}_I^{(m)*}{}_{,n}=\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)},,\mathcal{D}_{I\,n}^{(m)},)$ 和 $(R^{+}_{I\ ,n}-\widehat{R}^{+}_{I\ ,n})_1^{(m)}|(\mathcal{Q}_I^{(m)*}{}_{,n}=\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)},,\mathcal{D}_{I\,n}^{(m)},)$ 的自助法分布与蒙特卡罗模拟得到的分布 $(R_{I,n}-\widehat{R}_{I,n})_1^{(m)}|\mathcal{Q}_{I\,n}^{(m)},$进行比较，其中 $m=1,\ldots,500$。我们采用显著性水平为 $\alpha=5\%$ 的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验。

表 5 和表 6 分别汇总了设置 a) 和 b) 下原始 Mack 自助法与替代 Mack 自助法的结果。原始 Mack 自助法与替代 Mack 自助法的结果并无差异。

总体而言，随着 n 增加，未能拒绝原假设的比例也会增加。如果选择真实的底层分布，相比选择错误的分布，我们会更频繁地未能拒绝原假设。对于设置 b)，与设置 b) 相比，选择真实的底层分布更为重要。如果个体发展因子的底层分布呈偏态，那么

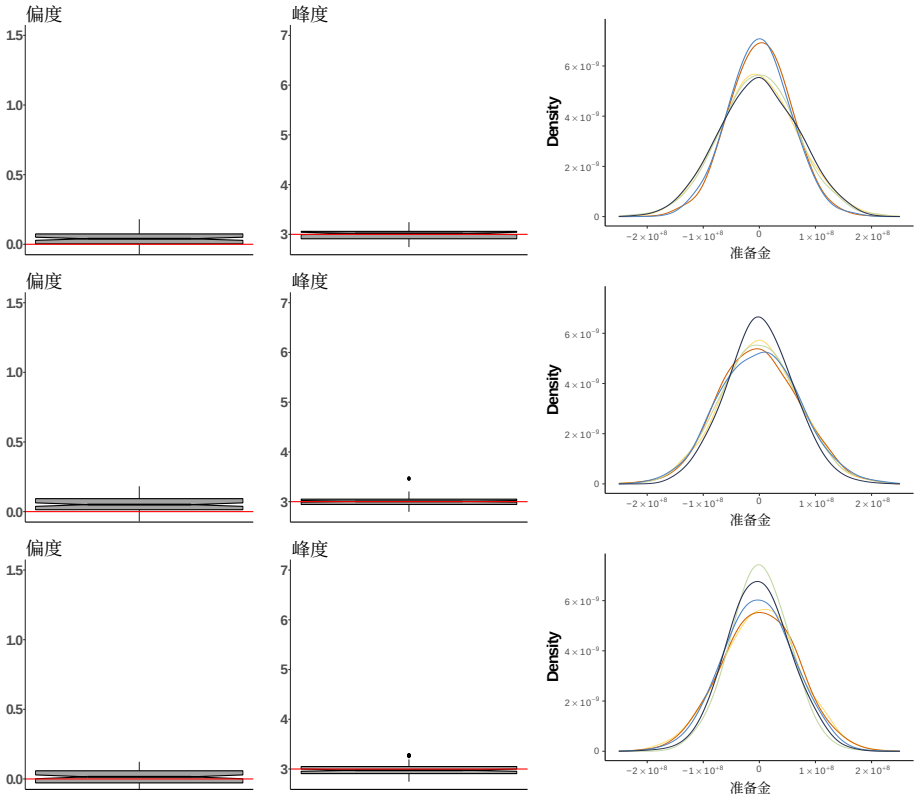


图 1. 针对模拟得到的 Mack 型自助法条件分布$\widehat{}$of $(R^*_{I,n}-R_{I,n})_1$ given $\mathcal{Q}^*_{I,n}=\mathcal{Q}_{I,n}$ and $\mathcal{D}_{I,n}$ for $n=10$ and $I=10$for 设置 a) 绘制的偏度和峰度箱线图，以及任意选取的五幅密度图，其中 $F^*_{i,j}$ 服从（条件）伽马分布（上）、对数正态分布（中）和截断正态分布（下）。

下三角中 $F^*_{i,j}$和 $F^+_{i,j}$ 所采用的选定分布也应呈偏态。例如，如果我们为 $F^*_{i,j}$ 选择伽马分布，而非将对数正态分布作为 $F^*_{i,j}$ 的真实分布族，那么未能拒绝原假设的比例会高于选择截断正态分布时的比例。例如，对于 $n=40$，假设采用伽马分布， $M=500$ 中有 69% 未能拒绝原假设；而采用截断正态分布时，这一比例为 31%（参见表 6）。此外，如果真实的底层分布是截断正态分布，而我们选择伽马分布，那么 $M=500$ 中有 50% 未能拒绝原假设；如果假设采用对数正态分布，则为 39%；如果选择真实的底层分布，则对于 $n=40$ ，这一比例为 84%（参见表 6）。

对于设置 a)，选择错误分布所产生的影响不如设置 b) 那么大。我们可以用伽马分布和对数正态分布的性质来解释这一点。在此参数设定下，随着 $c^*_{i,j}\hat{\sigma}^2_{j,n}$ 增大，两者的偏度和超额峰度都趋于“消失”。

此处的表7和表8包含根据第7节中表3和表4得出的模拟结果，但适用于设置 b)。

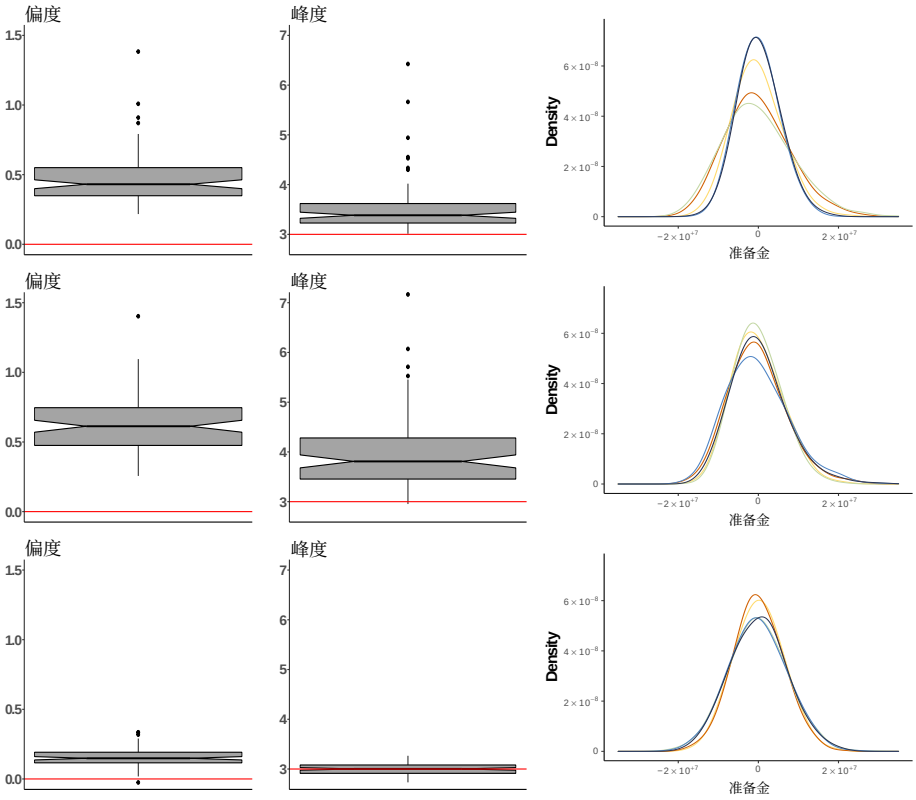


图 2. 模拟的 Mack 型自助法条件分布$\widehat{\ }$的偏度和峰度箱线图，以及任意选取的五个密度图；条件为 $(R^*_{I,\ n}-R_{I,\ n})_1$ ，给定 $\mathcal{Q}^*_{I,\ n}=\mathcal{Q}_{I,\ n}$ 和 $\mathcal{D}_{I,\ n}$ ；设置 b) 中， $n=10$ 和 $I=10$对应的情形，其中 $F^*_{i,\ j}$ 服从（条件）伽马分布（上）、对数正态分布（中）和截断正态分布（下）。

选定分布			伽马分布		对数正态分布		截断正态分布	
真实分布	n	oMB		aMB	oMB	aMB	oMB	aMB
伽马分布		0	0.57	0.55	0.45	0.50	0.49	0.51
		10	0.66	0.69	0.65	0.70	0.58	0.71
		20	0.73	0.72	0.72	0.79	0.68	0.80
		30	0.75	0.73	0.75	0.83	0.72	0.81
		40	0.80	0.76	0.79	0.87	0.79	0.83
对数正态分布		0	0.44	0.47	0.57	0.56	0.45	0.47
		10	0.60	0.61	0.69	0.68	0.60	0.62
		20	0.69	0.73	0.78	0.77	0.70	0.64
		30	0.70	0.77	0.83	0.80	0.78	0.70
		40	0.81	0.80	0.89	0.85	0.80	0.73
截断正态分布		0	0.46	0.49	0.45	0.52	0.50	0.48
		10	0.62	0.63	0.71	0.67	0.59	0.57
		20	0.67	0.68	0.78	0.75	0.71	0.71
		30	0.72	0.71	0.80	0.80	0.75	0.73
		40	0.76	0.73	0.82	0.82	0.84	0.85

表 5. 过程不确定性：对于原始 Mack 自助法（oMB）和替代 Mack 型自助法（aMB），在设置 a) 中针对 $F^*_{i,\,j}$ 的不同参数分布族、 $i+j \geq I$、 $I=10$ 以及不同的 n，对零假设 H_0^*、 H_0^+ 和 H_0^{++} 分别进行水平为 $\alpha=5\%$ 的 Kolmogorov-Smirnov 检验时，未能拒绝的百分比。

选定分布		伽马分布		对数正态分布		截断正态分布	
真实分布 n oMB			aMB	oMB	aMB	oMB	aMB
伽马分布	0	0.52	0.48	0.40	0.35	0.34	0.34
	10	0.66	0.63	0.44	0.53	0.49	0.47
	20	0.77	0.72	0.66	0.66	0.58	0.51
	30	0.80	0.76	0.70	0.68	0.60	0.53
	40	0.83	0.80	0.71	0.75	0.61	0.57
对数正态分布	0	0.32	0.33	0.44	0.41	0.18	0.18
	10	0.50	0.54	0.55	0.50	0.21	0.22
	20	0.60	0.55	0.65	0.63	0.23	0.25
	30	0.61	0.60	0.68	0.72	0.29	0.28
	40	0.69	0.67	0.78	0.75	0.31	0.30
截断正态分布	0	0.30	0.33	0.21	0.26	0.49	0.51
	10	0.40	0.45	0.29	0.33	0.64	0.60
	20	0.43	0.49	0.39	0.35	0.78	0.78
	30	0.45	0.54	0.40	0.38	0.80	0.85
	40	0.50	0.59	0.42	0.45	0.84	0.87

表 6. 过程不确定性：对于原始 Mack 自助法（oMB）和替代 Mack 型自助法（aMB），在设置 b) 中针对 $F_{i,\,j}^{*}$ 的不同参数分布族、 $i+j\geq I$、 $I=10$ 以及不同的 n，对零假设 H_0^{*}、 H_0^{+} 和 H_0^{++} 分别进行水平为 $\alpha=5\%$ 的 Kolmogorov-Smirnov 检验时，未能拒绝的百分比。

选定分布		伽马分布			对数正态分布			截断正态分布		
真实分布	n	oMB	替代 Mack	型自助法 iMB	oMB	替代 Mack	型自助法 iMB	oMB	替代 Mack	型自助法 iMB
伽马分布	0	0.10	0.11	0.09	0.11	0.14	0.12	0.09	0.10	0.10
	10	0.19	0.21	0.18	0.23	0.25	0.23	0.16	0.17	0.17
	20	0.28	0.35	0.32	0.36	0.40	0.37	0.21	0.22	0.22
	30	0.38	0.42	0.40	0.40	0.44	0.39	0.28	0.28	0.28
	40	0.52	0.56	0.51	0.51	0.53	0.50	0.41	0.41	0.41
对数正态分布	0	0.07	0.10	0.08	0.09	0.10	0.08	0.07	0.08	0.08
	10	0.16	0.19	0.17	0.20	0.22	0.20	0.16	0.15	0.15
	20	0.31	0.33	0.30	0.22	0.26	0.23	0.22	0.22	0.22
	30	0.34	0.38	0.33	0.30	0.33	0.30	0.27	0.27	0.27
	40	0.39	0.42	0.39	0.45	0.47	0.44	0.29	0.28	0.28
截断正态分布	0	0.09	0.11	0.08	0.15	0.17	0.16	0.24	0.23	0.23
	10	0.16	0.18	0.15	0.21	0.24	0.20	0.34	0.34	0.34
	20	0.28	0.30	0.27	0.26	0.30	0.27	0.41	0.42	0.42
	30	0.36	0.39	0.35	0.31	0.35	0.32	0.56	0.55	0.55
	40	0.43	0.45	0.42	0.36	0.39	0.36	0.61	0.62	0.60

表 7. 在设置 b) 中，对于 $i+j \geq I$、$I=10$ 和不同的 n，在不同的 $F_{i,j}^{*}$ 参数分布族下，原始 Mack 自助法 (oMB)、替代 Mack 自助法 (aMB) 和中间 Mack 型自助法 (iMB) 对零假设 H_0^*、H_0^+ 和 H_0^{++} 进行显著性水平为 $\alpha=5\%$ 的柯尔莫哥洛夫–斯米尔诺夫检验时，拒绝失败的百分比。

选定分布		伽马分布			对数正态分布			截断正态分布		
真实分布 n oMB		oMB	替代 Mack 型自助法	中间 Mack 型自助法	oMB	替代 Mack 型自助法	中间 Mack 型自助法	oMB	替代 Mack 型自助法	中间 Mack 型自助法
伽马分布	0	9.881	9.874	9.961	9.925	9.850	9.919	9.841	9.822	9.849
	10	9.644	9.582	9.680	9.722	9.650	9.742	9.414	9.328	9.442
	20	9.479	9.317	9.476	9.459	9.362	9.477	9.254	9.118	9.265
	30	8.799	8.623	8.754	8.757	8.598	8.692	9.194	8.871	8.648
	40	8.452	8.449	8.544	8.513	8.431	8.534	8.706	8.556	8.589
对数正态分布	0	9.990	9.914	9.982	9.983	9.893	9.961	9.868	9.857	9.827
	10	9.831	9.752	9.803	9.652	9.635	9.682	9.626	9.537	9.636
	20	9.457	9.399	9.468	9.342	9.243	9.354	9.339	9.292	9.355
	30	8.959	8.933	8.998	8.771	8.764	8.775	8.712	8.654	8.658
	40	8.656	8.584	8.643	8.348	8.325	8.346	8.249	8.184	8.199
截断正态分布	0	9.830	9.789	9.843	9.894	9.876	9.997	9.881	9.874	9.910
	10	9.520	9.513	9.524	9.676	9.583	9.517	9.543	9.474	9.575
	20	9.167	9.156	9.234	9.234	9.227	9.234	9.344	9.323	9.345
	30	8.745	8.692	8.698	8.672	8.660	8.687	8.683	8.630	9.143
	40	8.388	8.356	8.498	8.414	8.376	8.497	8.388	8.321	8.367

表 8. 设置 b) 下，不同 Mack 型自助法、不同分布假设以及不同 n 和 $I=10$ 的总体均方误差均值的平方根（RMMSE）（$\times 10^{-3}$）