arXiv:2303.05928v1 [math.RT] 10 Mar 2023

向量值 Heckman-奥普丹多项式：一种斯坦伯格变体

Maarten van Pruijssen

Abstract. 我们为有限反射群的抛物子群建立了雅可比多项式理论，该理论在整个群和平凡群这两种情形下，分别特化为 Heckman 与奥普丹研究过的情形。对于中间情形，我们结合 Steinberg、Heckman 和奥普丹的结果，得到了新的向量值正交多项式族实例，其性质与通常的雅可比多项式相似。尤为重要的是，我们证明，若将这些多项式适当地视为向量值多项式，那么它们作为微分算子的交换代数的共同特征函数，在相差一个比例因子的意义下是唯一确定的。我们给出了一个实例，其中向量值雅可比多项式可被识别为紧对称对上某种更高 K-型的球函数，该紧对称对的限制根系为 Dynkin 型 A_2。我们还说明了如何在多个变量中构造新的矩阵值正交多项式实例。

Contents

1. 引言 2 2. 不变 Laurent 多项式 4 3. 雅可比多项式 6 4. 正交性 9 5. 向量值雅可比多项式 11 6. 应用 I 15 7. 应用 II 20 参考文献 22

1. Introduction

设 $\mathfrak{a}$ 是一个带有内积 $(\cdot,\cdot)$ 的欧几里得空间， $R \subset \mathfrak{a}^*$ 是一个根系，其魏尔群为 W，且 $k = (k_\alpha)_{\alpha\in R}$ 是一个 W-不变的重数函数。记权格为 $P \subset \mathfrak{a}^*$，由余根 $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha,\alpha)$ 生成的余根格为 $Q^\vee \subset \mathfrak{a}^*$。群代数 $\mathbb{C}[P]$ 可与紧环面 $A = i\mathfrak{a}/(2\pi i Q^\vee)$ 上的劳朗多项式空间等同，并带有 W 的自然作用，定义如下。对于 $w \in W$、$\lambda \in P$ 和 $e^\lambda \in \mathbb{C}[P]$，有 $we^\lambda = e^{w\lambda}$。固定正根的一个子集 $R^+ \subset R$。令 $\Pi \subset R^+$ 为单根集， $S \subset W$ 为相应的简单反射集。取一个子集 $I \subset S$，并记由 I 中的简单反射生成的抛物子群为 W_I。本文研究 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 的调和分析，即 A 上的 W_I-不变劳朗多项式空间。

令 $R_I \subset R$ 表示与 W_I 对应的根集，并令 $R_I^+ = R_I \cap R^+$ 表示与所选 R_+相容的 W_I 的正根集。令 $P^+ \subset P$ 表示相对于 R^+的优势权集。 W_I 在 P 上的作用有唯一的基本域 $P_I^+ \subset P$，其中包含 P^+。令 $W^I = \{v \in W \mid v(R_I^+) \subset R_+\}$，它是 W/W_I 的代表元系，由每个陪集中最短的元素组成。利用下文的 Steinberg权，我们证明存在一个同构 $W^I \times P_+ \cong P_I^+$。空间 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$是一个有限生成自由 $\mathbb{C}[P]^W$-模，生成元 ϕ_v、$v \in W^I$可以明确给出。

空间 $\mathbb{C}[P]$ 带有通常的内积 $(\cdot,\cdot)_k$（参见 $[6, §2]$），我们将其限制到 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$。后一个空间具有以 P_I^+ 标记的自然向量空间基。同时， P_I^+ 继承了 Heckman 引入的 P 上的偏序（参见该文献的定义 2.4），据此我们可以定义雅可比多项式 $p_I(\lambda,k)\,\lambda \in P_I^+$，它们构成 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$的向量空间基。在极端情形 $W_\emptyset = \{e\}$和 $W_S = W$下，我们的雅可比多项式分别与该文献定义 2.6 中的非对称多项式 $E(\lambda,k)$（由 Heckman 引入）以及 W-不变雅可比多项式 $P(\lambda,k)$ $\lambda \in P_+$（见 $[3,$定义 1.3.1$]$）重合。我们证明，雅可比多项式也可以通过对非对称雅可比多项式 $E(\lambda,k)$施以 $\lambda \in P_I^+$ 对称化而得到。

记 $\mathrm{H}(R_+,k)$ 为 Lusztig 的分次 Hecke 代数，它作用于 $\mathbb{C}[P]$；记 $S'(\mathfrak{h}) \subset \mathrm{H}(R_+,k)$ 为由切列德尼克算子 D_ξ 生成的交换子代数，其中 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a}\otimes\mathbb{C}$。代数 $S'(\mathfrak{h})^{W_I}$ 中的 W_I-不变算子通过微分-反射算子作用于空间 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$。空间 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 可识别为不变向量值 Laurent 多项式空间，即 $\mathbb{C}[P]^{W_I} \cong (\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I])^W$。此时， $S'(\mathfrak{h})$ 中元素的相应作用由微分算子给出，其系数为矩阵值 Laurent 多项式。注意，若更一般地考虑一个反射子群，这些讨论便不再成立，因为上述观察依赖于 $\mathrm{H}(R_+,k)$ 中关于简单反射的关系。构造 W-不变向量值

多项式（由 W_I-不变多项式构造）这一想法，Steinberg 已在 [9, L.2.4] 中使用过。同时，考虑限制球函数时，也会自然出现 W-不变向量值 Laurent 多项式；见下文的第一个应用。

我们指出这一类雅可比多项式的两种应用。对于第一种应用，我们回顾一下，雅可比多项式 $p_S(\lambda, k)$ 可以与某个紧对称对的带状球函数对应起来；该紧对称对的限制根系类型为 R，而重数 k 则与限制根空间的维数相关。类型为 A_2 的根系 R 是以下紧对称对的限制根系

$$(\mathrm{SU}(3), \mathrm{SO}(3)), \quad (\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3), \mathrm{diag}(\mathrm{SU}(3)), \quad (\mathrm{SU}(6), \mathrm{Sp}(6)).$$

在每种情形下，与对称子群的定义表示相关的球函数，都可以与雅可比多项式 $p_{\{s\}}(\lambda, k)$ 对应起来，其中 $s \in W$ 是一个简单反射。我们的对应关系基于对 $S'(\mathfrak{h})^{<s>}$ 生成元的比较；这些生成元被视为作用于向量值劳朗多项式的微分算子，并与 Shimeno [8] 得到的微分算子进行比较。

第二种应用与多变量向量值和矩阵值正交多项式理论有关。只有在这段讨论中，我们才区分 $\mathbb{C}[P]$ 中的劳朗多项式与 $\mathbb{C}[P]^W$ 中真正的多项式（$\mathbb{C}[P]^W$ 是一个多项式环）；通常我们将 $\mathbb{C}[P]$ 中的元素称为多项式。

基于 Steinberg 的结果所得到的同构 $\mathbb{C}[P]^{W_I} \cong \mathbb{C}[P]^W \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$，将雅可比多项式诠释为向量值正交多项式族。正交多项式的标记方式表明，我们可以将它们组合起来，得到矩阵值正交多项式。由此，我们得到了一些新的向量值和矩阵值正交多项式族；这些多项式同时也是交换代数中的微分算子的共同特征函数，并且在相同意义下是唯一确定的（相差一个缩放因子）。在秩一情形下，这种诠释只是一个合理的形式处理，最终得到高斯超几何函数；但在更高秩情形下，这似乎并不是对雅可比多项式令人满意的描述。

在矩阵值正交多项式的研究中，历史上一个行之有效的思路是尝试寻找标量值正交多项式性质的类似物。例如，有一段时间以来，一个尚未解决的问题是：是否存在这样的矩阵值正交多项式族，使得某个二阶微分算子是对称的，并且这些多项式是其共同特征函数。

最早肯定地回答这一问题的例子，是利用紧李群上的球面函数构造出来的，参见 [4]。在 [7] 中，这些例子借助球面簇及其组合学得到了极大的推广。在这一框架下，存在多变量且阶数可以任意大的矩阵值正交多项式族。不过，这一

理论中的多项式参数是离散的，因为它们是根空间的维数。此外，微分算子的交换代数仍相当抽象，它是泛包络代数的一个子商。

本文理论所构造的新类向量值和矩阵值正交多项式具有以下优点：重数函数更加灵活，且微分算子的代数也得到了更好的理解。关于这些新雅可比多项式性质的许多有趣问题仍有待研究，例如它们的各种归一化，以及它们与紧李群表示论之间更密切的联系。

本文结构如下。第2节中，我们建立一组标准的 W_I-不变多项式基，部分依据 Steinberg 的观察。第3节中，我们考察不变多项式标签上的一个偏序，并应用施密特正交化过程构造一组新基；对于这组基，标签不可比较的多项式是否正交，事先并不明显。第4节中，我们利用微分-反射算子解决这一问题。为此，我们还需证明若干结果，其中的偏序是相对于抛物子群 W_I 来理解的。第5节中，我们将不变多项式构造成向量值 Laurent 多项式，并发现微分-反射算子的反射部分转化为微分算子的矩阵系数。本节还计算了一个并非极端情形的具体例子。第6节中，我们继续讨论该例子，说明这些向量值 Laurent 多项式可以与特定紧黎曼对称对 (U, K) 上、具有特定不可约 K-表示的球函数相对应。第7节中，我们给出一种构造向量值和矩阵值正交多项式的方法，这些多项式由微分算子的交换代数的共同特征函数（相差一个比例因子）确定。

2. Invariant Laurent polynomials

我们沿用第 1 节的记号。不变多项式 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 的空间自然构成一个模，其系数环为 $\mathbb{C}[P]$ 中 W不变式的环 $\mathbb{C}[P]^W$。根据 Steinberg $[9, \text{Thm.2.2}]$，这一模结构已得到完整刻画。对于 $\alpha \in \Pi$，令 $\varpi_\alpha \in P$ 为相应的基本权格，即 $(\varpi_\alpha, \beta^\vee) = \delta_{\alpha,\ \beta}$对于 $\alpha, \beta \in \Pi$。对于 $v \in W^I$，我们称

$$\lambda_v = \sum_{\alpha \in \Pi, v^{-1}\alpha < 0} \varpi_\alpha \in P^+$$

与 $v \in W^I$相关联的 Steinberg权。令 $W_{I,\ v^{-1}\lambda_v} = \{w \in W_I \mid wv^{-1}\lambda_v = v^{-1}\lambda_v\}$。给定 $\alpha \in R_I^+$，我们有 $(v^{-1}\lambda_v, \alpha^\vee) \geq 0$，这意味着 $W_{I,\ v^{-1}\lambda_v} \subset W_I$ 是一个抛物子群。对于每个 Steinberg权，我们定义多项式

$$\phi_v = \sum_{w \in W_I / W_{I, v^{-1}\lambda_v}} we^{v^{-1}\lambda_v} \in \mathbb{C}[P]^{W_I}.$$

定理 2.1（Steinberg）。不变 Laurent 多项式的空间 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 是一个自由的$\mathbb{C}[P]^W$-模，由元素 ϕ_v 生成，其中 $v \in W^I$。

对所有 $\alpha \in R_I^+\}$，令 $P_I^+ = \{\lambda \in P \mid (\lambda, \alpha) \geq 0$。那么，$P_I^+$ 是 Weyl群在 P 上作用的严格基本域，即 $W_I \cdot P_I^+ = P$，并且对于 $\lambda \in P_I^+$，我们有 $W_I \cdot \lambda \cap P_I^+ = \{\lambda\}$。此外，$P_I^+$ 是包含 P^+ 的唯一严格基本域。对于 $\lambda \in P$，我们用 λ_+ 表示 $W \cdot \lambda \cap P^+$ 中的唯一元素。

如果 $\alpha \in R_I^+$ 且 $(v, \sigma) \in W^I \times P^+$，那么 $(v^{-1}(\lambda_v + \sigma)\ \alpha) = (\lambda_v + \sigma, v\alpha) \geq 0$，因为$v\alpha \in R^+$。这定义了一个映射 $f_I \colon W^I \times P^+ \to P_I^+, f_I(v, \sigma) = v^{-1}(\lambda_v + \sigma)$。

命题 2.2。映射 f_I 是一个双射。

Proof. 我们先证明 $f_\emptyset$ 是一个双射。对于 $v \in W$，集合 $v^{-1}(\lambda_v + P^+)$ 两两不相交。事实上，假设 $v^{-1}(\lambda_v + \sigma) = u^{-1}(\lambda_u + \tau)$。那么 $\lambda_v + \sigma = \lambda_u + \tau$和$uv^{-1}$ 稳定这个元素。于是 $uv^{-1} \in W_{\lambda_v+\sigma} = W_{\lambda_u+\tau} \subset W_{\lambda_u}$。因此 uv^{-1} 属于由与 λ_u垂直的单根所对应的反射生成的群。这些单根正是被 u^{-1}变为负的单根。因此 $u^{-1} \in W^{\lambda_u}$，并且我们有 $\ell(u^{-1}) + \ell(uv^{-1}) = \ell(v^{-1})$。交换 u 和 v 的角色，还可得到 $\ell(v^{-1}) + \ell(vu^{-1}) = \ell(u^{-1})$，由此 $\ell(uv^{-1}) = 0$，进而 $u = v$ 和 $\sigma = \tau$。

对于 $\lambda \in P$，我们用 $\overline{v}(\lambda)$ 表示 W 中将 λ_+ 送到 λ 的最短元素。注意，$\overline{v}(\lambda) \in W^{\lambda_+}$。令 $v = \overline{v}(\lambda)^{-1}$。我们断言存在 $\sigma \in P^+$ 使得 $\lambda = v^{-1}(\lambda_v + \sigma)$。这等价于 $v\lambda - \lambda_v \in P^+$，进而等价于对于所有满足 $v^{-1}\alpha < 0$ 的 $\alpha \in \Pi$，都有 $(v\lambda, \alpha^\vee) > 0$。假设对于某个满足 $v^{-1}\alpha < 0$ 的 $\alpha \in \Pi$，有 $(v\lambda, \alpha^\vee) = 0$。这意味着 $s_\alpha \in W_{\lambda_+}$ 且 $\ell(\overline{v}(\lambda)s_\alpha) < \ell(\overline{v}(\lambda))$，进而意味着 $\overline{v}(\lambda)s_\alpha$ 是 $\overline{v}(\lambda)W_{\lambda_+}$ 的陪集代表元，其长度小于 $\overline{v}(\lambda)$ 的长度，这与 $\overline{v}(\lambda) \in W^{\lambda_+}$ 矛盾。

这表明 $f_\emptyset \colon W \times P^+ \to P$是一个双射。由于 $f_I = f_\emptyset|_{W^I \times P^+}$，映射 f_I是单射。

若 $\lambda \in P_I^+$，则对 $\overline{v}(\lambda) \in W^{\lambda_+}$，有 $\lambda = \overline{v}(\lambda)(\lambda_{\overline{v}(\lambda)^{-1}} + \sigma)$。我们需要证明 $\overline{v}(\lambda)^{-1} \in W^I$。注意，$\overline{v}(\lambda)^{-1}\alpha < 0$ 当且仅当 $(\lambda, \alpha) < 0$（由 [5, (2.7.2)(ii)]），因此对 $\alpha \in R_I^+$，有 $(\lambda, \alpha) \geq 0$，进而 $\overline{v}(\lambda)^{-1}\alpha > 0$。□

例 2.3。为说明 Steinberg 的结果，我们详细推导一下类型为 A_2 的根系的部分细节，其中 W 由简单反射 s_1、s_2生成。我们考察子集 $I = \emptyset$、$\{s_2\}$、S。

- 若 $I = \emptyset$，则 $W_\emptyset = \{e\}$、$W^\emptyset = W = S_3$ 和 P 可写成 P^+ 的六个副本的不交并。每个副本的形式为 $v^{-1}(\lambda_v + P^+)$，$v \in W$。
- 若 $I = \{s_2\}$，则 $W_I =< s_2 >$ 和 $W^I = \{e, s_1, s_2s_1\}$，且 $< s_2 >$ 在 P 上作用的基本域是互不相交集合 $v^{-1}(\lambda_v + P^+)$，$v \in W^I$ 的并集。
- 若 $I = S$，则 $W_S = W$，并且 $W^S = \{e\}$，W在 P 上的作用的基本域为 P^+。

v	λ_v	$v^{-1}\lambda_v$	$\emptyset$	$\{s_2\}$	S
e	0	0	$*$	$*$	$*$
s_1	ϖ_1	$-\varpi_1+\varpi_2$	$*$	$*$	
s_2	ϖ_2	$\varpi_1-\varpi_2$	$*$		
s_2s_1	ϖ_2	$-\varpi_1$	$*$	$*$	
s_1s_2	ϖ_1	$-\varpi_2$	$*$		
$s_1s_2s_1$	$\varpi_1+\varpi_2$	$-\varpi_1-\varpi_2$	$*$		

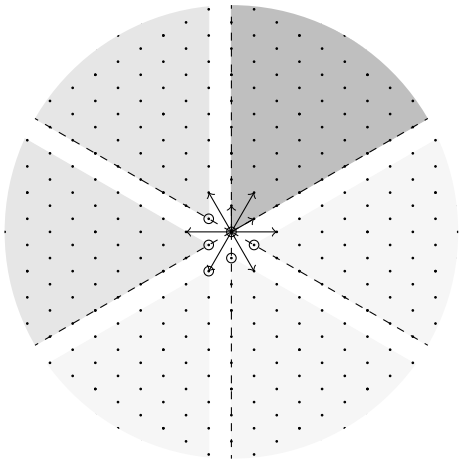


FIGURE 1. 对于 A_2，我们描绘了 $v^{-1}(\lambda_v+P^+)$在 $v\in W^I$时的集合。这些集合的并构成了 W_I 在 P上的作用的一个基本域。相关元素列于左侧，而 P^+ 的各个副本则以不同灰度表示，以指明它们在以下情形中分别属于哪个基本域（由浅至深）： $I=\emptyset$、$\{s_2\}$、S。最后三列中的 $*$ 表示哪些元素属于 W^I。

相关数据如图1所示。若 $I=\{s_2\}$，则 $\mathbb{C}[P]^W$-模 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$由多项式 $\phi_e=1$、$\phi_{s_1}=e^{-\varpi_1+\varpi_2}+e^{-\varpi_2}$ 和 $\phi_{s_2s_1}=e^{-\varpi_1}$生成。

定义2.4。对于$\lambda\in P_I^+$，我们将 $m_I(\lambda)$定义为$=\sum_{\mu\in W_I\cdot\lambda}e^\mu\in\mathbb{C}[P]^{W^I}$，即基本 W_I-不变多项式。

命题2.5。基本不变多项式 $m_I(\lambda)\,\lambda\in P_I^+$ 构成 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$的向量空间基。

PROOF. 基本不变多项式线性无关。为证明它们张成$\mathbb{C}[P]^{W_I}$，我们对给定多项式 $m\in\mathbb{C}[P]^{W_I}$中满足$\lambda\in P_I^+$ 且系数非零的项数 e^λ 使用归纳法。□

3. 雅可比多项式

按照 [6, §2]，我们在 $\mathbb{C}[P]$ 上赋予一个厄米内积 $(\cdot,\cdot)_k$，其定义如下:

$$(\phi,\psi)_k=\int_T\overline{\phi(t)}\psi(t)\delta_k(t)dt,\quad \phi,\psi\in\mathbb{C}[P] \tag{1}$$

其中 $\delta_k=\prod_{\alpha\in R}(e^{\alpha/2}-e^{-\alpha/2})^{k_\alpha}$，且 $k_\alpha\geq 0$。

为了得到一组正交劳朗多项式的基，我们在 P_I^+ 上采用如下偏序。回忆一下，根格 Q 的子集 Q^+ 由元素 $\sum_{\alpha\in\Pi}n_\alpha\alpha$、$n_\alpha\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 构成，它在 P 上诱导出一个偏序，

$$\lambda\preceq\mu\quad\text{if and only if}\quad\mu-\lambda\in Q^+.$$

令 λ_+ 为 $W\cdot\lambda\cap P^+$ 中的唯一元素。回忆一下， $\overline{v}(\lambda)\in W^{\lambda_+}$ 是满足 $\overline{v}(\lambda)\lambda_+=\lambda$ 的唯一元素。给定 λ、$\mu\in P$，我们称

$$\lambda\leq_\emptyset\mu\Longleftrightarrow\begin{cases}(1)\,\lambda_+\preceq\mu_+,\quad(2)\text{若 }\lambda_+=\mu_+\text{，则 }\overline{v}(\lambda)\leq_W\overline{v}(\mu)\text{ 在 }W\text{上的 Bruhat序 }\leq_W\\ \end{cases}$$

中。

$\leq_\emptyset$ 在 P_I^+ 上的偏序限制记为 $\leq_I$。注意， $\leq_S$ 对应于将 $\preceq$ 限制到 P^+。若我们写作 $\mu\leq_I\lambda$，则隐含地假设 μ 和 $\lambda\in P_I^+$ 均成立。特别地，对于 $\lambda\in P_I^+$，集合 $\{\mu\in P_I^+\mid\mu\leq_I\lambda\}$ 是有限的。

定义 3.1。令 $p_I(\lambda,k)\in\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 定义如下：

- $p_I(\lambda,k)=\sum_{\mu\leq_I\lambda}c_{\lambda,\mu}m_I(\mu)\ with\ c_{\lambda,\lambda}=1,$
- $(p_I(\lambda,k),m_I(\mu))_k=0\ for\ all\ \mu<_I\lambda.$

注 3.2。在极端情形 $I=\emptyset$ 和 $I=S$ 下，多项式 $p_I(\lambda,k)$ 已为人所知，并构成空间中 W_I-不变多项式的正交基。

- 若 $I=\emptyset$ 则 $p_\emptyset(\lambda,k)=E(\lambda,k)$，参见 $[6,$ 定义 2.6$]$。
- 若 $I=S$ 则 $p_S(\lambda,k)=P(\lambda,k)$，即 $[3,$定义 1.3.1$]$ 中的通常 W-不变雅可比多项式。

$E(\lambda,k)$ 的正交性见 $[6,$ 推论 2.11$]$，而 $P(\lambda,k)$ 的正交性则见 $[3,$ 推论 1.3.13$]$，这些结果均借助微分-反射算子建立。困难之处在于证明具有不可比较标记的多项式也两两正交。我们将在第4节建立关于 $p_I(\lambda,k)$ 的相应结果。

接下来，我们将 $p_I(\lambda,k)$ 写成 $E(\lambda,k)$ 的一个 W_I-对称化和，为此先引入一些记号和辅助结果。

若 $\lambda\in P_I^+$，则 λ 在 W_I 中的稳定子 $W_{I,\lambda}$ 是一个正根为 $R_{I,\lambda}^+=\{\alpha\in R_I^+\mid$ 的抛物子群，其中 $\lambda,\alpha=0\}$。此外，若 $\lambda\in P$，则存在唯一元素 $\lambda_{I,+}\in P_I^+\cap W_I\cdot\lambda$。在 W_I 中，使得 $w\lambda_{I,+}=\lambda$ 成立且长度最小的元素 w 记作 $\overline{v}_I(\lambda)$。

引理 3.3。对于 $\lambda\in P$，有 $\overline{v}(\lambda)^{-1}=\overline{v}(\lambda_{I,+})^{-1}\overline{v}_I(\lambda)^{-1}$。

Proof. 令 $\overline{v}(\lambda)^{-1}=w''w'\in W^IW_I$，并注意到 $(w'')^{-1}\lambda_+\in P_I^+$。由此可得 $(w'')^{-1}\lambda_+=w'\lambda=\lambda_{I,+}\in P_I^+$。同时， $\overline{v}(\lambda_{I,+})^{-1}\overline{v}_I(\lambda)^{-1}\in W^IW_I$ 是一个将 λ 映到 λ_+ 的元素，因此 $\ell(\overline{v}(\lambda_{I,+})^{-1}\overline{v}_I(\lambda)^{-1})=\ell(\overline{v}(\lambda_{I,+})^{-1})+\ell(\overline{v}_I(\lambda)^{-1})\geq\ell((w'')^{-1})+\ell((w')^{-1})$。若不等式严格成立，则 $\ell((w'')^{-1})<\ell(\overline{v}(\lambda_{I,+})^{-1})$ 或 $\ell((w')^{-1})<\ell(\overline{v}_I(\lambda)^{-1})$。这两个不等式都与元素 $\overline{v}(\lambda_{I,+})$ 和 $\overline{v}_I(\lambda)$ 的长度最小这一性质矛盾，因此有 $w''=\overline{v}(\lambda_{I,+})^{-1}$，且 $w'=\overline{v}_I(\lambda)^{-1}$。□

令 $P^-=-P^+$，类似地令 $P_I^-=-P_I^+$。对于 $\lambda\in P$，我们用 $v(\lambda)\in W$ 表示满足性质 $v(\lambda)\lambda=\lambda_-$ 的最短元素，即 $W\cdot\lambda\cap P^-$ 中的唯一元素。对于 $w\in W$，我们7

用 $R(w) = R^+ \cap w^{-1}R^-$ 表示，其中 $R^- = -R^+$。我们有

$$R(v(\lambda)) = \{\alpha \in R^+ \mid (\lambda, \alpha) > 0\}$$

根据 [5, (2.4.4)], ，这将在以下结果的证明中用到。

引理 3.4. 设 $\lambda \in P_I^+$。若 $\mu <_\emptyset \lambda$ 且 $w \in W_{I,\ \lambda}$，则 $w\mu <_\emptyset \lambda$。

Proof. 若 $\mu_+ \prec \lambda_+$，则 $w\mu <_\emptyset \lambda$ 对 $w \in W$成立，因此我们假设 $\mu_+ = \lambda_+$。设 $\alpha \in R_{I\ ,\ \lambda}^+$ 为一个单根。一旦得到 $s_\alpha\mu <_\emptyset \lambda$，便可对 $\ell(w)$ 作归纳法，从而得出结论。

若 $(\mu, \alpha^\vee) = 0$，则 $s_\alpha(\mu) = \mu$，结论成立。若 $(\mu, \alpha^\vee) \neq 0$，则 $v(s_\alpha\mu) = v(\mu)s_\alpha$(根据 [5, (2.4.14(i))])。

假设 $(\mu, \alpha^\vee) < 0$。则 $v(\mu)\alpha > 0$ (因为 $\alpha \notin R(v(\mu))$)，这意味着$\ell(v(\mu)s_\alpha) > \ell(v(\mu))$，进而有 $v(\mu) <_W v(\mu)s_\alpha = v(s_\alpha\mu)$。由此可得 $v(\lambda) <_W v(s_\alpha\mu)$，因此 $s_\alpha\mu <_\emptyset \lambda$。

假设 $(\mu, \alpha^\vee) > 0$。于是 $v(\mu)\alpha < 0$，由此 $\ell(v(\mu)s_\alpha) < \ell(v(\mu))$。同时，我们有 $(\lambda, \alpha) = 0$，所以 $\alpha \notin S(v(\lambda))$，由此 $v(\lambda)\alpha > 0$。因此，$\ell(v(\lambda)s_\alpha) > \ell(v(\lambda))$。提升性质 [1, 命题 2.27] 蕴含 $v(\lambda) \leq_W v(\mu)s_\alpha = v(s_\alpha\mu)$，从而得到 $s_\alpha\mu \leq_\emptyset \lambda$。若 $s_\alpha\mu = \lambda$，则 $\mu = \lambda$ 也成立，这与 $\mu <_\emptyset \lambda$ 矛盾。由此可得 $s_\alpha\mu <_\emptyset \lambda$。□

引理 3.5. 若 $w \in W_{I,\ \lambda}$ 且 $\lambda \in P_I^+$，则 $wE(\lambda, k) = E(\lambda, k)$。

Proof. 令 $E(\lambda, k) = e^\lambda + \sum_{\mu <_\emptyset \lambda} c_\mu e^\mu$，并利用引理 3.4 可知，$wE(\lambda, k) = e^\lambda + \sum_{\mu <_\emptyset \lambda} d_\mu e^\mu$ 具有与 $E(\lambda, k)$ 相同类型的展开。若 $\nu <_\emptyset \lambda$，则

$$(wE(\lambda, k), e^\nu)_k = (E(\lambda, k), e^{w^{-1}\nu})_k = 0,$$

因为 $w^{-1}\nu <_\emptyset \lambda$ （引理 3.4）以及 $E(\lambda, k)$ 的定义性质。我们得出 $wE(\lambda, k) = E(\lambda, k)$。□

引理 3.6。设 $\lambda \in P_I^+$ 和 $\mu \in P$ 满足 $\mu_+ = \lambda_+$。若 $\mu <_\emptyset \lambda$，则 $\mu_{I,+} <_\emptyset \lambda$。

Proof. 由引理 3.3 可得 $\overline{v}(\mu)^{-1} = \overline{v}(\mu_{I,+})^{-1}\overline{v}_I(\mu)^{-1} \in W^I W_I$，因此 $\overline{v}(\mu_{I,+})^{-1} \leq_W \overline{v}(\mu)^{-1}$，它是一个约化表达式的子词。由此可得 $\overline{v}(\mu_{I,+}) <_W \overline{v}(\lambda)$，从而$\mu_{I,+} <_\emptyset \lambda$。□

命题 3.7. 对于 $\lambda \in P_I^+$，有 $p_I(\lambda, k) = \sum_{w \in (W_I)_\lambda} wE(\lambda, k)$。

Proof. 和式 $\sum_{w \in (W_I)_\lambda} wE(\lambda, k)$ 中出现的项都是 $e^{w\mu}$ where$\mu <_\emptyset \lambda$ and $w \in W_I$ 的倍数。根据引理 3.6，具有此性质的权 $w\mu \in P_I^+$ 满足 $w\mu <_\emptyset \lambda$。由此可得，$\sum_{w \in (W_I)_\lambda} wE(\lambda, k) = m_I(\lambda) + \sum_{\mu <_I \lambda} c_{\lambda,\mu} m_I(\mu)$ 与 $p_I(\lambda)$ 具有相同类型的展开。

设 $\nu <_I \lambda$ 和 $w \in W_I$。若 $\nu_+ \prec \lambda_+$，则对所有 $w \in W$，有 $w\nu <_\emptyset \lambda$，且 $(E(\lambda, k)\ e^{w\nu})_k = 0$。若 $\lambda_+ = \nu_+$，则要么 $w\nu$ 和 λ 不可比较，此时 $(E(\lambda, k)\ e^{w\nu})_k = 0$,

要么 $w\nu$ 和 λ 可比较。在后一种情况下，设 $\overline{v}(\lambda) \leq_W \overline{v}(w\nu)$，或等价地，$\overline{v}(\lambda)^{-1} \leq_W \overline{v}(w\nu)^{-1}$。由引理 3.3可得 $\overline{v}(w\nu)^{-1} = \overline{v}(\nu)^{-1}\overline{v}_I(w\nu)^{-1}$。又由于映射 $W = W^I W_I \to W^I$: $w''w' \mapsto w''$ 是保序的（参见 [1, 命题 2.5.1]），因此有 $\overline{v}(\lambda)^{-1} \leq_W \overline{v}(\nu)^{-1}$，这与 $\nu <_\emptyset \lambda$ 矛盾。因此 $\overline{v}(\lambda) >_W \overline{v}(w\nu)$，进而 $\lambda >_\emptyset w\nu$。由此可知，在这种情况下也有 $(E(\lambda,k)\ e^{w\nu})_k = 0$，从而 $(E(\lambda,k)\ m_I(\nu))_k = 0$，进而 $(\sum_{w\in(W_I)_\lambda} wE(\lambda,k)\ m_I(\nu))_k = 0$。□

4. Orthogonality

在极端情形 $I = \emptyset$ 和 $I = S$ 下，已知雅可比多项式两两正交，分别参见 [6, 推论 2.11] 和 [3, 推论 1.3.13]。对于中间情形，我们采用相同的论证。令 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}$。

分次 Hecke 代数 $\mathrm{H}(R^+, k)$ 与 $S(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}[W]$ 作为向量空间同构，并按 [6, 推论 2.9]所述作用于 $\mathbb{C}[P]$。最重要的是，$\xi \in S(\mathfrak{h})$ 通过切列德尼克算子（loc. cit. 的定义 2.1）作用

$$D_\xi(k) = \partial_\xi + \sum_{\alpha>0} k_\alpha \alpha(\xi) \frac{1}{1-e^{-\alpha}}(1 - s_\alpha) - \rho(k)(\xi)$$

该算子是一个关于 $\mathbb{C}[P]$上的内积 $(\cdot,\cdot)_k$ 对称的微分-反射算子。切列德尼克算子 $D_\xi(k)$ 的特征函数为 $E(\lambda, k)$,

$$D_\xi(k)E(\lambda,k) = \widetilde{\lambda}(\xi)E(\lambda,k),$$

~其中 $\lambda = \lambda - v(\lambda)^{-1}\rho(k)$。注意，$\lambda = \lambda + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R_+} k_\alpha \epsilon(\lambda(\alpha^\vee))\alpha$，其中 $\epsilon(x) = x/|x|$ 若 $x \neq 0$，且 $\epsilon(0) = -1$。切列德尼克算子 $D_\xi(k)$ $\xi \in \mathfrak{h}$ 彼此交换，因此我们可以将多项式 $q \in S(\mathfrak{h})$代入这些切列德尼克算子，得到 $q(D(k)) \in \mathrm{H}(k)$。

引理 4.1. 若 $q \in S(\mathfrak{h})^{W_I}$，则 $q(D(k))$ 与 W_I 在 $\mathbb{C}[P]$上的作用相交换。

Proof. 这由 [6,命题 1.1(2)] 立即得出。 □

微分-反射算子 $q(D(k))$ 在 $q \in S(\mathfrak{h})^{W_I}$ 下保持 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 不变。$q(D(k))$ 在 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 上的限制记为 $D_{I,q}$。注意，每个 $D_{I,q}$ 关于 $(\cdot,\cdot)_k$ 都是对称的。雅可比多项式 $p_I(\lambda, k)$ 是微分-反射算子 $D_{I,q}$ 的特征函数，其中 $q \in S(\mathfrak{h})^{W_I}$,

$$D_{I,q}(p_I(\lambda,k)) = \sum_{w\in(W_I)^\lambda} D_{I,q}\,(wE(\lambda,k)) = \sum_{w\in(W_I)^\lambda} q(\widetilde{\lambda})wE(\lambda,k) = q(\widetilde{\lambda})p_I(\lambda,k).$$

~为证明多项式 $q \in S(\mathfrak{h})^{W_I}$ 能够分离 λ 中的点（其中 $\lambda \in P_I^+$），我们将用到以下结果。

引理 4.2。设 $\lambda \in P_I^+$、$w^{I,\,0\,\lambda} \in W_{I,\,\lambda}$ 是 W_I 中固定 λ 的最长元素，且 $w_0^I \in W_I$ 是最长元素。则 $\widetilde{\lambda} = w^{I,\,0\,\lambda}(\lambda - w_0^I v(w_0^I\lambda)^{-1}\rho(k))$。9

~注记 4.3。将引理 4.2 应用于 $I=\emptyset$，即可得到 λ 的定义。应用于 $I=S$~，则得到 $\lambda=w_0^\lambda(\lambda-w_0v(\lambda_-)\rho(k))=w_0^\lambda(\lambda+\rho(k))$，因为 $v(\lambda_-)=e$。后一种情形已由 Heckman 注意到，参见 [6, 命题 2.10]。

Proof. 我们需要证明 $v(\lambda)=v(w_0^I\lambda)w_0^Iw^{I,{}_0\lambda}$。按照引理 3.3 的证明思路，我们有 $v(w_0^I\lambda)\in W^I$ 以及 $v(\lambda)=w''w'\in W^IW_I$，其中 $w''=v(w_0^I\lambda)$，且 w' 是 W_I 中将 $\lambda\in P_I^+$ 映到 $-P_I^+$ 的最短元素，即 $w'=w_0^Iw^{I,{}_0\lambda}$。□

命题 2.2 中对 P_I^+ 的描述基于斯坦伯格权，这些权用于通过 P^+的平移覆盖 P_I^+。此外，我们也可以通过 P^-的平移覆盖 P和 P_I^-，

$$P=\bigcup_{w\in W}w^{-1}(\mu_w-P^-),\quad P_I^-=\bigcup_{w\in W^I}w^{-1}(\mu_w-P^-),\tag{2}$$

其中 $\mu_w=-\sum_{\alpha\in\Pi,\ w^{-1}\alpha<0}\varpi_\alpha$。证明与命题 2.2 的证明相同。因此，对于 $\lambda\in P_I^-$，我们有 $\lambda\in v(\lambda)^{-1}(\mu_{v(\lambda)}-P^-)$以及 $v(\lambda)\in W^I$。此外

$$\widetilde{\lambda}=\lambda-v(\lambda)^{-1}\rho(k)\in v(\lambda)^{-1}(\mu_{v(\lambda)}-P^-)\subset P_I^-,$$

~由此我们得出映射 $P_I^-\to P_I^-,\lambda\mapsto\lambda$ 是单射。然而，若 $\lambda\in P_I^+$~，那么 λ 不一定属于 P_I^+，并且先验上没有理由认为 $P_I^+\to P/W_I,\lambda\to[\lambda]$ 是单射。

命题 ~4.4。$S(\mathfrak{h})^{W_I}$ 中的多项式区分点 λ，其中 $\lambda\in P_I^+$.

Proof. 映射 $P_I^+\to P_I^+,\lambda\mapsto\lambda-w_0^Iv(w_0^I\lambda)^{-1}\rho(k)$ 是单射映射 $P_I^-\to P_I^-,\lambda\mapsto\lambda$ 的 w_0^I-共轭作用，因此也是单射。令 $\lambda\in P_I^+$，且令 $q\in S(\mathfrak{h})^{W_I}$。我们有

$$q(\widetilde{\lambda})=q(\lambda-w_0^Iv(w_0^I\lambda)^{-1}\rho(k))$$

根据引理 4.2。由于 $S(\mathfrak{h})^{W_I}$ 区分 P_I^+ 中的点，它当然也能区分其子集中的点。□

推论 4.5. 雅可比多项式两两正交。

Proof. 多项式 $p_I(\lambda)$ 是不变算子 $D_{I,q},q\in S(\mathfrak{h})^{W_I}$~的特征函数，其特征值为 $q(\lambda)$；并且对于每一对 $p_I(\lambda)\neq p_I(\lambda')$，其中 $\lambda,\lambda'\in P_I^+$，都存在一个多项式 $q\in S(\mathfrak{h})^{W_I}$，使得 $q(\lambda)\neq q(\lambda')$。□

注 4.6. 根据 P_I^- 的描述 (2)，我们可以得到 P_I^+ 的另一种描述，即

$$P_I^+=\bigcup_{w\in W^I}w_0^Iw^{-1}(\mu_w-P^-).$$

由此我们得到另一种 Steinberg权，进而得到$\mathbb{C}[P]^W$-模 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$的另一组生成元。例如，在类型 A_2中，例 2.3 中的生成元可以替换为 1、$e^{\varpi_1-\varpi_2}+e^{\varpi_2}$和 e^{ϖ_1}。

5. Vector-valued Jacobi polynomials

向量空间 $\mathbb{C}[W/W_I]$ 由函数 δ_{wW_I} 生成： $W/W_I \to \mathbb{C}$ （ W/W_I上 wW_I 的示性函数）。我们对基元素 δ_{uW_I} 排序，使得若 $\ell(u'') < \ell(v'')$，则 δ_{uW_I} 排在 δ_{vW_I}之前，其中 $u = u''u'$、$v = v''v' \in W^I W_I$。

$\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I]$ 取值于 $\mathbb{C}[W/W_I]$ 的劳朗多项式空间承载对角W作用 $w(\phi \otimes \delta_{uW_I}) = (w\phi) \otimes \delta_{wuW_I}$。此作用下的 W-不变子空间，

$$(\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I])^W,$$

是一个权格上的模，其作用由 $\chi(\sum \phi_u \otimes \delta_{uW_I}) = \sum(\chi\phi_u) \otimes \delta_{uW_I}$ 给出，其中 $\chi \in \mathbb{C}[P]^W$。

引理 5.1。映射

$$\Gamma : \mathbb{C}[P]^{W_I} \to (\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I])^W, \Gamma(\phi) = \sum_{u \in W^I} u(\phi \otimes \delta_{eW_I})$$

是 $\mathbb{C}[P]^W$-模同构。

Proof. 注意， $\Gamma(\phi)$ 是 W-不变的，因为求和可以遍历 $W = W^I W_I$。 $\Gamma(\phi)$ 的第一分量是 ϕ，因此 Γ 是单射。若 $\Phi = \sum \phi_u \otimes \delta_{uW_I} \in (\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W'])^W$，则 ϕ_e 是 W_I-不变的，故 $\Phi = \Gamma(\phi_e)$。由此可得， Γ 是向量空间同构，并且显然也是 $\mathbb{C}[P]^W$-模同构。□

空间 $\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I]$ 还赋有一个厄米内积，记作 $(\cdot,\cdot)_{I,k}$ 对于 $k_\alpha \geq 0$，定义为

$$(\Phi, \Psi)_{I,k} = \int_T \mathrm{tr}(\overline{\Phi(t)}\Psi(t))|\delta_k(t)|dt, \quad \Phi, \Psi \in \mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I],$$

其中 $\mathrm{tr}(\sum_{v \in W^I} \Phi_v \otimes \delta_{vW_I}) = \sum_{v \in W^I} \Phi_v$只是各分量之和。注意，$(\cdot,\cdot)_{I,k}$是 W-不变的。若 $\Phi, \Psi \in (\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I])^W$，则 $\Phi = \Gamma(\phi)$ 且 $\Psi = \Gamma(\psi)$，其中存在某些 $\phi, \psi \in \mathbb{C}[P]^{W_I}$ 以及

$$\mathrm{tr}(\overline{\Phi}\Psi)|\delta_k| = \sum_{v \in W^I} v\left(\overline{\phi}\psi\right)|\delta_k|$$

是 W-不变的，因为 $|\delta_k|$是 W-不变的，且 $\overline{\phi}\psi$是 W_I-不变的。因此 $(\Phi, \Psi)_{I,k} = |W^I|(\phi, \psi)_k$，由此可见 Γ保持正交性。令 $P_I(\lambda, k) = \Gamma(p_I(\lambda, k))$.

命题 5.2. 族 $\{P_I(\lambda, k) \mid \lambda \in P_I^+\}$ 是向量空间 $(\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I])^W$ 的正交基。

Proof. 这由推论 4.5 和引理 5.1 立即得出。 □

微分-反射算子 $D_{I,\ q}(q \in S(\mathfrak{h})^{W_I})$ 的作用通过推前 $\gamma = \Gamma_*$ 转移为对 $\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I]$ 的作用，

$$\gamma(D_{I,q}) = \sum_{u \in W^I} u \circ D_{I,q} \circ u^{-1} \otimes \delta_{uW_I}. \tag{3}$$

我们想证明， $\gamma(D_{I,\ q})$ 在 $(\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I])^W$ 上的限制，等于某个作用于 $\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I]$ 的微分算子在 W-不变量空间上的限制。注意， $\gamma(D_{I,\ q})$ 定义不良，因为它取决于 W/W_I 中陪集代表元的选取。然而，在 $(\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I])^W$ 上的限制是定义良好的。

后接 [3, C h.1], 令 $\mathcal{R}=\mathcal{R}(R)$ 为由 $\frac{1}{1-e^{-\alpha}}$、 $\alpha\in R_+$ 和

$$\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}=\mathcal{R}\otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}[W/W_I])\otimes S(\mathfrak{h})$$

在 $\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I]$ 上、系数取自代数 $\mathcal{R}\otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}[W/W_I])$ 的微分算子代数。记 π_I : $W\to \mathrm{GL}(\mathbb{C}[W/W_I])$ 为 W 在 $\mathbb{C}[W/W_I]$ 上的表示。 W 在 $\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}$ 上的作用，在简单张量上由 $w(f\otimes A\otimes\partial_q)=(wf)\otimes(\pi_I(w)A)\otimes\partial_{wq}$ 给出。定义

$$\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}^W=\{D\in\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}\mid w(D)=D \text{ for all } w\in W\},$$

作用于 $\mathbb{C}[W/W_I]$ 值劳朗多项式空间上的 W-不变微分算子代数。令

$$\mathbb{D}R_{I,\mathcal{R}}=\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}\otimes\mathbb{C}[W]$$

并对 D、 $E\in\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}$ 以及 v、 $w\in W$ 定义乘法

$$(D\otimes w)\cdot(E\otimes v)=(D\circ w(E))\otimes wv,$$

这赋予 $\mathbb{D}R_{I,\mathcal{R}}$ 结合代数的结构。元素 $D\otimes w\in\mathbb{D}R_{I,\mathcal{R}}$ 在 $\Phi\in\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I]$ 上的作用由 $D(w\Phi)$ 给出。对于形如 $P=\sum_{w\in W}P_w\otimes w$ 的元素 $P\in\mathbb{D}R_{I,\mathcal{R}}$，定义线性映射 β : $\mathbb{D}R_{I,\mathcal{R}}\to\mathbb{D}_{I,\mathcal{R}}$ 为 $\beta(P)=\sum_{w\in W}P_w$。最后，定义 $\mathbb{D}R_{I\,\mathcal{R}}^{1\otimes\mathbb{C}[W]}$,为 $1\otimes\mathbb{C}[W]$ 在 $\mathbb{D}R_{I,\mathcal{R}}$ 中的交换子。

引理 5.3. 限制映射 β : $\mathbb{D}R_I^{1\otimes\mathbb{C}[W]}{}_{,\ \mathcal{R}}\to\mathbb{D}_{I,\ \mathcal{R}}$ 是一个同态，其像包含于 $\mathbb{D}_{I,\ \mathcal{R}}^W$。

Proof. 关于 $I=S$ 的论述见 [3, 引理 1.2.1、引理 1.2.2]，一般情形则可由这些考虑作相应修改而得。□

同态 (3) 将 $S'(\mathfrak{h})^{W_I}$ 映入 $\mathbb{D}R_{I\,\mathcal{R}}^{1\otimes\mathbb{C}[W]}{}_{,}$。由此得到一个代数同态 $\beta\circ\gamma$: $S'(\mathfrak{h})^{W_I}\to\mathbb{D}_{I,\ \mathcal{R}}^W$。 $\beta\circ\gamma$ 的像是限制在 $(\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I])^W$ 上的微分算子代数，我们将其记为

$$\mathbb{D}(I,k)=\beta(\gamma(S'(\mathfrak{h})^{W_I})).$$

注意

$$\beta(\gamma(D_{I,q})))(\Gamma(\phi))=\gamma(D_{I,q}))\Gamma(\phi)=\Gamma(D_{I,q}(\phi))$$

对于 $\phi\in\mathbb{C}[P]^{W_I}$，由此可知 $\beta\circ\gamma$ 是单射。

引理 5.4。代数 $\mathbb{D}(I,k)$ 是作用在 $(\mathbb{C}[P]\otimes\mathbb{C}[W/W_I])^W$ 上的微分算子的交换代数。基元素 $P(\lambda,k)$ 唯一确定（相差一个缩放因子），它们是 $\mathbb{D}(I,k)$ 的共同特征函数。

例 5.5。考虑带有标准基 (e_1, e_2, e_3) 和标准内积的 $\mathbb{R}^3$。令 $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ 为 $(\mathbb{R}^3)^*$ 中与 $\mathbb{R}^3$ 的标准基对偶的基。$e_1+e_2+e_3$ 的正交补记为 $\mathfrak{a}$。令 $\Sigma = \{\pm(\epsilon_1-\epsilon_2)\ \pm(\epsilon_1-\epsilon_3)\ \pm(\epsilon_2-\epsilon_3)\}$ 为 A_2 型根系。根记为 $\alpha_{ij} = \epsilon_i - \epsilon_j$，反射记为 s_{ij}。注意，$W = S_3$ 是 $\{1,2,3\}$ 的置换群。固定抛物子群 $W' =< s_{23} >$。我们将 W-模 $\mathbb{C}[W/W']$ 与 $\mathbb{C}^3$ 等同，其中 W 通过置换标准基向量来作用。

设 $\xi_1 = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$ $\xi_2 = \frac{1}{3}(-1,2,-1)$ 和 $\xi_3 = \frac{1}{3}(-1,-1,2)$ 是 $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}$ 的元素。那么

$$S(\mathfrak{h})^{W'} = \mathbb{C}[\xi_1, \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3]$$

其中 ξ_1 和 $\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3$ 在代数上独立。我们的目标是计算作用于向量值 Laurent 多项式、分别对应于这两个生成元的微分算子。鉴于它们与第 6 节中的球函数之间的关系，考虑根系 $R = 2\Sigma$ 是方便的，其中 $R_+ = \{2\alpha_{12}, 2\alpha_{13}, 2\alpha_{23}\}$ 是正根集，$\Pi = \{2\alpha_{12}, 2\alpha_{23}\}$ 是单根集。因此 $\Sigma_+ = \frac{1}{2}R_+$。

我们接下来计算 $\beta(\gamma(\xi_1))$ 和 $\beta(\gamma(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3))$。设 $p_1 \in \mathbb{C}[2P]^{W'}$ 和 $p_2 = s_{12}p_1, p_3 = s_{13}p_1$。那么 $(p_1, p_2, p_3) \in (\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}^3)^W$，并且

$$D_{\xi_1}(k)(p_1) = \partial_{\xi_1}p_1 + 2k\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}(p_1-p_2) + \frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}(p_1-p_3)\right) - 2kp_1.$$

现在很容易得到 $s_{12}D_{\xi_1}(k)(p_1)$ $s_{13}D_{\xi_1}(k)(p_1)$ 的表达式，结果为

$$\beta(\gamma(\xi_1)) = \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{\xi_2} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{\xi_3} \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha_{12}}+e^{-\alpha_{12}}}{e^{\alpha_{12}}-e^{-\alpha_{12}}} + \frac{e^{\alpha_{13}}+e^{-\alpha_{13}}}{e^{\alpha_{13}}-e^{-\alpha_{13}}} & -\frac{2}{1-e^{-2\alpha_{12}}} & -\frac{2}{1-e^{-2\alpha_{13}}} \\ -\frac{2}{1-e^{2\alpha_{12}}} & -\frac{e^{\alpha_{12}}+e^{-\alpha_{12}}}{e^{\alpha_{12}}-e^{-\alpha_{12}}} + \frac{e^{\alpha_{23}}+e^{-\alpha_{23}}}{e^{\alpha_{23}}-e^{-\alpha_{23}}} & -\frac{2}{1-e^{-2\alpha_{23}}} \\ -\frac{2}{1-e^{2\alpha_{13}}} & -\frac{2}{1-e^{2\alpha_{23}}} & -\frac{e^{\alpha_{13}}+e^{-\alpha_{13}}}{e^{\alpha_{13}}-e^{-\alpha_{13}}} - \frac{1e^{\alpha_{23}}+e^{-\alpha_{23}}}{e^{\alpha_{23}}-e^{-\alpha_{23}}} \end{pmatrix}$$

其中我们用到了恒等式 $\frac{2}{1-e^{-2\alpha}} - 1 = \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$。为了计算 $\beta(\gamma(\xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 + \xi_2\xi_3))$，我们再引入一个记号。将 $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^*$ 与 $\xi \mapsto (\xi, \cdot)$ 识别后，我们用 $\lambda \mapsto \lambda'$ 表示此映射的逆映射。特别地，$\alpha'_{ij} = e_i - e_j$。经过繁琐的计算，沿着

[3,命题 1.2.3] 的推论是

$$\begin{aligned}D_{\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3} &= \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}+\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_3}+\partial_{\xi_2}\partial_{\xi_3}+\\ &-k\sum_{\alpha\in\Sigma_+}\left\{\frac{1+e^{-2\alpha}}{1-e^{-2\alpha}}\partial_{\alpha'}\right\}+2k\sum_{\alpha\in\Sigma_+}\left\{\frac{(\alpha,\alpha)e^{-2\alpha}}{(1-e^{-2\alpha})^2}\circ(1-r_\alpha)\right\}+\\ &-2k^2\sum_{\alpha,\beta\in\Sigma_+}(\alpha,\beta)\left\{\frac{1}{1-e^{-2\alpha}}(1-r_\alpha)\frac{1}{1-e^{-2\beta}}(1-r_\beta)\right\}+\\ &2k^2\sum_{\alpha,\beta\in\Sigma_+}\left\{\frac{(\alpha,\beta)}{1-e^{-2\alpha}}(1-r_\alpha)\right\}-\frac{1}{2}k^2\sum_{\alpha,\beta\in\Sigma_+}(\alpha,\beta).\end{aligned}$$

我们有 $-\frac{1}{2}k^2\sum_{\alpha,\ \beta\in\Sigma_+}(\alpha,\beta)\ =\ -\frac{1}{2}k^2(2\alpha_{13},2\alpha_{13})\ =\ -4k^2$。接下来我们证明，第三项与倒数第二项合起来作用在 $\mathbb{C}[P]^{W'}$ 上为零。为此，我们使用恒等式

$$\frac{1}{1-e^{-2\alpha}}(1-r_\alpha)\frac{1}{1-e^{-2\beta}}(1-r_\beta)=\frac{1}{1-e^{-2\alpha}}\left(\frac{1}{1-e^{-2\beta}}(1-r_\alpha)-\frac{1}{1-e^{-r_\alpha(2\beta)}}(r_\alpha-r_\alpha r_\beta)\right)$$

以及简单反射对 $p\in\mathbb{C}[P]^{W'}$ 的作用由下式给出

$$s_{12}s_{13}p=s_{13}p,\quad s_{13}s_{12}p=s_{12}p,\quad s_{23}r_{12}p=s_{13}p,\quad s_{23}s_{13}p=s_{12}p.$$

记 $\Delta_\alpha=$ $\frac{}{1-e^{-2\alpha}}(1-s_\alpha)$。表 1 汇总了各项 i 的限制 n

$$-2k^2\sum_{\alpha,\beta\in\Sigma_+}(\alpha,\beta)\left\{\frac{1}{1-e^{-2\alpha}}(1-r_\alpha)\frac{1}{1-e^{-2\beta}}(1-r_\beta)\right\}. \tag{4}$$

我们还有

α	β	$r_\alpha(\beta)$	$(\alpha,\beta)\Delta_\alpha\Delta_\beta$
α_{12}	α_{12}	$-\alpha_{12}$	$2\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}(1-s_{12})-\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}\frac{1}{1-e^{2\alpha_{12}}}(s_{12}-1)\right)$
α_{13}	α_{12}	$-\alpha_{23}$	$\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}(1-s_{12})-\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}\frac{1}{1-e^{2\alpha_{23}}}(s_{13}-s_{12})\right)$
α_{23}	α_{12}	α_{13}	$-\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{23}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}(1-s_{12})-\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{23}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}(1-s_{13})\right)$
α_{12}	α_{13}	α_{23}	$\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}(1-s_{13})-\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{23}}}(s_{12}-s_{13})\right)$
α_{13}	α_{13}	$-\alpha_{13}$	$2\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}(1-s_{13})-\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}\frac{1}{1-e^{2\alpha_{13}}}(s_{13}-1)\right)$
α_{23}	α_{13}	α_{12}	$\left(\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{23}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{13}}}(1-s_{13})-\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{23}}}\frac{1}{1-e^{-2\alpha_{12}}}(1-s_{12})\right)$

TABLE 1. 式 (4) 各项在 $\mathbb{C}[P]^W$上的限制

$$2k^2\sum_{\alpha,\beta\in\Sigma_+}\left\{\frac{(\alpha,\beta)}{1-e^{-2\alpha}}(1-r_\alpha)\right\}=2k^2\left\{\frac{2}{1-e^{-2\alpha_{12}}}(1-r_{\alpha_{12}})+\frac{4}{1-e^{-2\alpha_{13}}}(1-r_{\alpha_{13}})\right\} \tag{5}$$

限制到 $\mathbb{C}[P]^{W'}$ 后。为计算 (4) 和 (5) 的和，我们汇总 (5) 和表 1 中群元素 1、s_{12}、s_{13} 的系数。经过仔细核算，我们发现所有系数均为零。因此

$$\beta(\gamma(\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_3+\xi_2\xi_3)) = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2}+\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_3}+\partial_{\xi_2}\partial_{\xi_3}-k\sum_{\alpha\in\Sigma_+}\left\{\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}\partial_{\alpha'}\right\}-4k^2$$

$$+4k\begin{pmatrix} \frac{1}{e^{\alpha_{12}}-e^{-\alpha_{12}})^2}+\frac{1}{(e^{\alpha_{13}}-e^{-\alpha_{13}})^2} & -\frac{1}{(1-e^{-2\alpha_{12}})^2} & -\frac{1}{(1-e^{-2\alpha_{13}})^2} \\ -\frac{1}{(1-e^{2\alpha_{12}})^2} & \frac{1}{(e^{\alpha_{12}}-e^{-\alpha_{12}})^2}+\frac{1}{(e^{\alpha_{23}}-e^{-\alpha_{23}})^2} & -\frac{1}{(1-e^{-2\alpha_{23}})^2} \\ -\frac{1}{(1-e^{2\alpha_{13}})^2} & -\frac{1}{(1-e^{2\alpha_{23}})^2} & \frac{1}{(e^{\alpha_{13}}-e^{-\alpha_{13}})^2}+\frac{1}{(e^{\alpha_{23}}-e^{-\alpha_{23}})^2} \end{pmatrix}.$$

6. Application I

考　虑紧对称对 (U,K)，其等于以下三者之一　　e,

$$(\mathrm{SU}(3),\mathrm{SO}(3)),\quad (\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(3),\mathrm{diag}(\mathrm{SU}(3))),\quad (\mathrm{SU}(6),\mathrm{Sp}(6)).$$

每一对中的限制根系 Σ 均为 A_2 型，根空间的维数分别为 $m=1$、2、4。根据紧致对称空间的结构理论，$\Sigma\subset\mathfrak{a}^*$，其中 $i\mathfrak{a}=$ 是紧环面 $A\subset U$ 的 Lie(A)，且具有性质 $U=KAK$。我们将 $M=Z_K(A)$ 记为 A的中心化子。我们把 A 上的复值正则函数与 $\mathbb{C}[P_\Sigma]$等同。描述 U 和K 的不可约表示时，我们使用最高权定理。

设 $\pi_\mu^K\colon K\to \mathrm{GL}(V_\mu^K)$ 是最高权为 μ的不可约 K-表示。满足条件 $F(ku\ell)=\pi(k)F(u)\pi(\ell)$（对所有$k$、$\ell\in K$、$u\in U$）的正则函数空间 $F\colon U\to\mathrm{End}(V_\mu^K)$ 记为 E^μ。由变换性质可知，E^μ 中的每个函数都由其在 A 上的限制完全确定，因此通过限制到 A，我们得到一个同构 $E^\mu\to E_A^\mu$。注意

$$E_A^\mu\subset\left(\mathbb{C}[P_\Sigma]\otimes\mathrm{End}(V_\mu^K)\right)^{N_K(A)}=\left(\mathbb{C}[P_\Sigma]\otimes\mathrm{End}_M(V_\mu^K)\right)^{(M\cap A)\cdot W_\Sigma}.$$

例如，若 $\mu=0$，则 $E_A^0=\mathbb{C}[P_\Sigma]^{N_K(A)}=\mathbb{C}[2P_\Sigma]^{W_\Sigma}$。在这一特殊情形下，已知 π_0^K，即平凡的 K-表示，在每个不可约 U-表示中的重数至多为一。事实上，利用 Cartan-Helgason 定理，不可约 U-表示 π_λ^U 当且仅当 $\lambda\in 2P_\Sigma$ 占优时才包含一个 K-不变子空间。由此结合 Peter-Weyl 定理可知，$\mathbb{C}[2P_\Sigma]^{W_\Sigma}$ 可赋予一个正交基，其基元素（即限制带状球函数）由泛包络代数 $U(\mathfrak{u}_\mathbb{C})$（$\mathfrak{u}=\mathrm{Lie}(U)$ 的复化 $\mathfrak{u}_\mathbb{C}$）的交换子商的共同特征函数唯一确定（相差一个比例因子）。根据 Harish-Chandra 同构，该交换子商可识别为 $S(\mathfrak{a}_\mathbb{C})^{W_\Sigma}$，参见 [3,§5]。为用 Heckman-Opdam 多项式描述我们对称对的限制带状球函数，我们取 $R=2\Sigma$ 和 $k=\frac{m}{2}$ 作为根重数。我们使用

$k = 1/2$，1、2 用于指代对称对，并将相应的群记为 U_k、K_k、M_k、A_k。

对于我们考虑的每个对称对，我们研究 $\pi^K_{\mu_1}$ of K 的定义表示的球函数，其中 μ_1 是 K 的第一基本权。从 $\pi^K_{\mu_1}$ 到 U 的归纳法是无重数的，即对于 U 的每个优势权，我们有 $[\pi^U_\lambda|_K\colon \pi^K_{\mu_1}] \le 1$。事实上，对于 $k = 1$，2，三元组（U，K，μ_1）是无重数三元组，它们由 [7, §8] 意义下的无重数系统得到。对于 $k = 1/2$，情况并非如此，但下面的引理 6.1 保证了无重数性。对于包含 $\pi^K_{\mu_1}$ 的 π^U_λ，我们固定 K-等变线性映射 $j^{\mu_1}_\lambda\colon V^K_{\mu_1} \to V^U_\lambda$ 和 $p^\lambda_{\mu_1}\colon V^U_\lambda \to V^K_\mu$，使得 $p^\lambda_{\mu_1} j^{\mu_1}_\lambda$ 是恒等式。我们将与 λ 相关联的 μ_1 型球函数 $\Phi^{\mu_1}_\lambda \in E^{\mu_1}$ 定义为

$$\Phi^{\mu_1}_\lambda(u) = p^\lambda_{\mu_1}\pi^U_\lambda(u) j^{\mu_1}_\lambda.$$

对于 $k = 1$，2，已知 $E^{\mu_1}_A$ 是一个由三个球函数生成的自由有限生成 E^0_A-模，见 [7, Thm.8.12]。证明基于这样一个事实：集合 $P^+_U(\mu_1)$ 中满足 $[\pi^U_\lambda|_K\colon \pi^K_{\mu_1}] = 1$ 具有如下形式的优势 U-权 λ

$$P^+_U(\mu_1) \cong \{b_1, b_2, b_3\} + P^+_U(0)$$

其中 b_1、b_2、b_3 是 P^+_U 的元素。生成元则是分别与 b_1、b_2 和 b_3 对应的球函数。集合 $P^+_U(0)$ 是一个幺半群，其元素称为球权。基本权记作 ω_i，其中 i 取适当的值。

引理 6.1. 若 $k = \frac{1}{2}$，则 SU(3) 的优势权集合 λ（满足 $[\pi^{U_{1/2}}_\lambda|_K : \pi^K_{\mu_1}] \ge 1$）由下式给出

$$P^+_{U_{1/2}}(\mu_1) = \{\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2\} + 2P^+_{U_{1/2}},$$

其中 $2P^+_{U_{1/2}}$ 是球权的集合。此外，对于 $\lambda \in P^{U_{1/2}}_+(\mu_1)$，我们有 $[\pi^{U_{1/2}}_\lambda|_{K_{1/2}} : \pi^{K_{1/2}}_{\mu_1}] = 1$。

Proof. 这里，$M_{1/2}$ 由对角线上元素为 ± 1 且行列式为一的对角矩阵组成。通过与 [10, Thm.3.1] 证明类似的论证，我们可知 $[\pi^{U_{1/2}}_\lambda|_{K_{1/2}} : \pi^{K_{1/2}}_{\omega_1}]$ 有界于 $[\pi^{K_{1/2}}_{\mu_1}|_{M_{1/2}} : \pi^{M_{1/2}}_{\lambda_*}]$，而后者至多为一。此外，$\lambda \in P^+_{U_{1/2}}(\mu_1)$ 在 $M_{1/2}$ 上的限制是一个特征，并且它作为一个分量出现在 $V^{K_{1/2}}_{\mu_1}$ 中，可由 $\omega_1, \omega_2 - \omega_1, -\omega_2$ 描述；这里我们暂且将这些权解释为环面的特征。若两个权之差是 $2P_{U_{1/2}}$ 的一个权，则它们的限制相同。因此，$P^+_{U_{1/2}}(\omega_1) \subset \{\omega_1, \omega_1 + \omega_2, \omega_2\} + 2P^+_{U_{1/2}}$。为了证明等号成立，我们必须证明 $\pi^{U_{1/2}}_{\omega_1}, \pi^{U_{1/2}}_{\omega_1+\omega_2}, \pi^{U_{1/2}}_{\omega_2}$ 在限制后都包含 $\pi^K_{\mu_1}$。只有 $\omega_1 + \omega_2$ 需要证明。由于 $V^U_{\omega_1+\omega_2} \subset \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$，其中 SU(3) 的作用是共轭作用，我们注意到，反对称矩阵构成的三维空间在

SO(3) K =下不变，并且事实上同构于 $\mathbb{C}^3$，其同构由下式给出

$$(a,b,c)\mapsto\begin{pmatrix}0&-c&b\\c&0&-a\\-b&a&0\end{pmatrix}\tag{6}$$

作为一个 SO(3)模。 □

限制在 A 上的球函数取值于 $\mathrm{End}_M(V_{\mu_1}^K)$，它可以按如下方式与 $\mathbb{C}^3$相对应。在每种情形 $k=1/2$、1、2 中，我们固定 $V_{\mu_1}^K$ 的一个基，该基同时包含 M的三个不可约子模的基。$\Phi_{\mu_1}^{\lambda}(a)\in\mathrm{End}_M(V_{\mu_1}^K)$的三个块均为恒等式的倍数，我们将这些倍数映射到 $\mathbb{C}^3$ 中相应的条目，条目顺序如下方基的顺序所示。

- $V_{\mu_1}^{K_{1/2}}\cong\mathbb{C}^3$ 和标准基元素 e_1、e_2、e_3 在 $M_{1/2}$ 作用下分别按 ω_1、$\omega_1+\omega_2$、ω_2变换；暂且将它们视为群上的特征。群 $A_{1/2}$由对角矩阵 $\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3)\in\mathrm{SU}(3)$ 组成。

- $V_{\mu_1}^K=\mathbb{C}^3$ 而标准基 $\{e_1,e_2,e_3\}$ 是 $M_1\subset\mathrm{diag(SU(3))}$（即极大对角环面）的权基。群 A_1 是群 $A_{1/2}$ 在 SU(3) × SU(3) 中的反对角嵌入 $a\mapsto(a,a^{-1})$。

- $V_{\mu_1}^K=\mathbb{C}^6$ 以及 $M_2=$SU(2) ×SU(2) ×SU(2)。标准基 $\{e_1,\dots,e_6\}$ 包含子基 $\{e_1,e_4\}$、$\{e_2,e_5\}$、$\{e_3,e_6\}$，分别对应分解式 $\mathbb{C}^6=\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2$中的不可约 M_2-模。群 A_2 由对角矩阵 $\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3,t_1,t_2,t_3)$ 构成，其中 $\mathrm{diag}(t_1,t_2,t_3)\in A_{1/2}$。

群 A_k 都同构于 $A_{1/2}$，在此对应下，$M_k\cap A_k$ 同构于 $M_{1/2}$。$W_\Sigma\cong S_3$ 在 $\mathbb{C}^3$ 上的诱导作用由对标准基元素的置换给出。由此，我们将每个空间 $E_{A_k}^{\mu_1}$ 识别为 $\mathcal{E}_k$ 的一个子空间

$$\mathcal{E}=\left(\mathbb{C}[P_\Sigma]\otimes\mathbb{C}^3\right)^{(M_{1/2}\cdot W_\Sigma)},$$

其中，Σ 是 $(U_{1/2},K_{1/2})$ 的限制根系，P_Σ 是该根系的权格。限制球函数 $\Phi_\lambda^{\mu_1}\in E_{A_k}^{\mu_1}$ 定义了唯一的函数 $\Psi_\lambda^{\mu_1}(k)\in\mathcal{E}$。写作 $\mathcal{E}^0=\mathbb{C}[2P_\Sigma]^{W_\Sigma}$后，我们看到 $\mathcal{E}$、$\mathcal{E}_k$、$k=1/2$、1、2 都是 $\mathcal{E}_0$-模。

命题 6.2。$\mathcal{E}^0$-模 $\mathcal{E}_k$、$k=1/2$、1、2 相等，并且作为 $\mathcal{E}^0$-模，它由以下函数自由生成

$$\Psi_{\omega_1}^{\mu_1}=\begin{pmatrix}e^{\omega_1}\\e^{\omega_2-\omega_1}\\e^{-\omega_2}\end{pmatrix},\quad\Psi_{\omega_1+\omega_2}^{\mu_1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{\alpha_2}+e^{-\alpha_2}\\e^{\alpha_3}+e^{-\alpha_3}\\e^{\alpha_1}+e^{-\alpha_1}\end{pmatrix},\quad\Psi_{\omega_2}^{\mu_1}=\begin{pmatrix}e^{-\omega_1}\\e^{\omega_1-\omega_2}\\e^{\omega_2}\end{pmatrix}.$$

Proof. 空间 $E_{A_{1/2}}^{\mu_1}$ 由球函数$\Phi_b^{\mu_1}$作为 $E_{A_{1/2}}^0$ 上的模生成，其中 $b\in\{\omega_1,\omega_1+\omega_2,\omega_2\}$；这可由 [7, 定理 8.12]的证明得出。空间$E_{A_k}^{\mu_1}$ 在 $k=$1,2 的情形下，由球函数 $\Phi_b^{\mu_1}$作为 E_A^0 上的模自由生成

其中 $b \in \{(\omega_1, 0)、(\omega_2, \omega_1)、(0, \omega_1)\}$ 对应于 $k = 1$ 和 $b \in \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$，见 [7, 情况 B.11]。由于 $E^0_{A_k} = \mathbb{C}[2P_\Sigma]^{W_\Sigma}$ 对于 $k = 1/2$,1,2 相同，我们只需计算三种情形下权 b_1、b_2、b_3 对应的球函数。

对于 $k = 1$，球函数已在 [4, §8.1]中计算。若 $k = 1/2$，则可轻易计算出 $b = \omega_1$, ω_2对应的球函数 $\Phi^{\mu_1}_b$。对于 $b = \omega_1 + \omega_2$，使用由（6）给出的嵌入 $\mathbb{C}^3 \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^3)$。同样，对于 $k = 2$，计算 $\Phi^{\mu_1}_b$在$b = \omega_1, \omega_5$ 下的情形也很直接。对于 $b = \omega_3$，注意

$$\mathbb{C}^6 \to \bigwedge^3 \mathbb{C}^6, e_1 \mapsto e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 + e_1 \wedge e_3 \wedge e_6$$

诱导出一个 Sp(6)-等变嵌入。该向量与自身的矩阵系数限制在 A_2上时，由 $t_2 t_3^{-1} + t_3 t_2^{-1}$给出，它是 $\Phi^{\mu_1}_{\omega_3}$的第一项。其余各项由 W_Σ的作用确定。□

群上球函数的内积由对紧群 U 积分给出，并且可化为对 A积分，参见 [4, (2.6)]。如此一来，空间$E^{\mu_1}_A$上便定义了如下内积:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_A \Phi(a)^* \Psi(a) \delta_k(a) da$$

其中 δ_k 与 (1) 相同。我们为 $\mathcal{E}$ 赋予内积，使得同构 $E^{\mu_1}_{A,k} \to \mathcal{E}_k$ 在 $k = 1/2$ 下成为酉映射，1。对于 $k = 2$，该识别在相差一个因子 2 的意义下是酉的。

引理 6.3. 映射 $\mathcal{E} \to (\mathbb{C}[2P] \otimes \mathbb{C}^3)^{S_3}$ 由逐点乘法给出:

$$T = \begin{pmatrix} e^{\omega_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\omega_2 - \omega_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\omega_2} \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{C}[2P]^{S_3}$-模之间的酉同构。

Proof. 矩阵 T 是 S_3-不变的，并且吸收了 $M_{1/2}$-作用，即 $T\Phi \in (\mathbb{C}[P]^{M_{1/2}} \otimes \mathbb{C}^3)^{S_3}$。同时，$\mathbb{C}[P]^{M_{1/2}} = \mathbb{C}[2P]$，由此可得所述结论。□

注意，命题 6.2 中 $\mathcal{E}^0$-模 $\mathcal{E}_k$ 的生成元被映射为

$$\Phi^{\mu_1}_{\varpi_1} = \begin{pmatrix} e^{2\omega_1} \\ e^{2\omega_2 - 2\omega_1} \\ e^{-2\omega_2} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{\mu_1}_{\varpi_1 + \varpi_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{2\omega_1 - 2\omega_2} + e^{2\omega_2} \\ e^{-2\omega_1} + e^{2\omega_2} \\ e^{-2\omega_1} + e^{2\omega_1 - 2\omega_2} \end{pmatrix}, \quad \Phi^{\mu_1}_{\varpi_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

通过乘以 T，而它们又是 $\mathbb{C}[2P]^{S_3}$-模 $(\mathbb{C}[2P] \otimes \mathbb{C}^3)^{S_3}$的生成元，见注 4.6。

推论 6.4。 $\mathcal{E}^0$ 模 $\mathcal{E}$和 $\mathcal{E}_k, k = 1/2, 1, 2$ 全都相同。

球函数由 $U(\mathfrak{u}_{\mathbb{C}})$ 的交换子商的共同特征函数确定，该交换子商作为微分算子代数发挥作用。要从泛包络代数中的元素得到实际的微分算子，可以使用 Harish-Chandra 的径向部分映射，参见例如 [2]。上述文献所讨论的是非紧黎曼对称对，但所有计算都具有代数性质。Shimeno [8]已在非紧情形下，针对我们所考察的情形，计算了这一微分算子代数的生成元。紧情形下的解释给出了这些生成元

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} \partial_{\xi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{s_{\alpha_1}\xi_1} & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{s_{\alpha_3}\xi_1} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} \frac{e^{\alpha_1}+e^{-\alpha_1}}{e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1}} + \frac{e^{\alpha_3}+e^{-\alpha_3}}{e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3}} & -\frac{2}{e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1}} & -\frac{2}{e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3}} \\ \frac{2}{e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1}} & -\frac{e^{\alpha_1}+e^{-\alpha_1}}{e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1}} + \frac{e^{\alpha_3}+e^{-\alpha_3}}{e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3}} & -\frac{2}{e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2}} \\ \frac{2}{e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3}} & \frac{2}{e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2}} & -\frac{e^{\alpha_3}+e^{-\alpha_3}}{e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3}} - \frac{e^{\alpha_2}+e^{-\alpha_2}}{e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2}} \end{pmatrix} \tag{7}$$

and

$$\mathcal{D}_2 = \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_2} + \partial_{\xi_1}\partial_{\xi_3} + \partial_{\xi_2}\partial_{\xi_3} - \sum_{i<j} k\frac{1+e^{-2\alpha_{ij}}}{1-e^{-2\alpha_{ij}}}\partial_{e_i-e_j} + 2k \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{(e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1})^2} + \frac{2}{(e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3})^2} & -\frac{e^{\alpha_1}+e^{-\alpha_1}}{(e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1})^2} & -\frac{e^{\alpha_3}+e^{-\alpha_3}}{(e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3})^2} \\ -\frac{e^{\alpha_1}+e^{-\alpha_1}}{(e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1})^2} & \frac{2}{(e^{\alpha_1}-e^{-\alpha_1})^2} + \frac{2}{(e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3})^2} & -\frac{e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2}}{(e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2})^2} \\ -\frac{e^{\alpha_3}+e^{-\alpha_3}}{(e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3})^2} & -\frac{e^{\alpha_2}+e^{-\alpha_2}}{(e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2})^2} & \frac{2}{(e^{\alpha_3}-e^{-\alpha_3})^2} + \frac{2}{(e^{\alpha_2}-e^{-\alpha_2})^2} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

命题 6.5. 我们有

$$T \circ \beta(\gamma(\xi_1)) \circ T^{-1} = \mathcal{D}_1,$$

$$T \circ \beta(\gamma(\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3)) \circ T^{-1} = \mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1 - 4k^2 - \frac{1}{3}.$$

Proof. 微分算子 $\beta(\gamma(\xi_1))$ 和 $\beta(\gamma(\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_1\xi_3))$ 已在例 5.5 中计算得出。与 T 的共轭作用是一项繁琐的计算，除其他事项外，它基于以下恒等式

$$e^{\omega_1} \circ (\partial'_1\partial'_2 + \partial'_1\partial'_3 + \partial'_2\partial'_3) \circ e^{-\omega_1} = \partial'_1\partial'_2 + \partial'_1\partial'_3 + \partial'_2\partial'_3 + \frac{2}{3}\partial'_1 - \frac{1}{3}\partial'_2 - \frac{1}{3}\partial'_3 - \frac{1}{3}$$
$$= \partial'_1\partial'_2 + \partial'_1\partial'_3 + \partial'_2\partial'_3 + \partial'_1 - \frac{1}{3}, \tag{9}$$

and

$$-4\frac{e^{-\alpha}}{(1-e^{-2\alpha})^2} = -2\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{(e^{\alpha}-e^{-\alpha})^2} - \frac{2}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}$$

留给读者完成。 □

推论 6.6。本节中紧对称对 (U, K) 的类型 μ_1 球函数，除乘以引理 6.3 中的函数 T 并作缩放外，可与例 5.5 中的雅可比多项式对应。

Proof. 由正交函数族张成的空间可以加以识别，决定该族各个成员的交换代数也同样如此。□

球函数在单位元处归一化为恒等式。球函数的范数可以用其底层表示空间的维数来表示，而这些维数可由不可约 U模和 K模的外尔维数公式给出，参见 [4, §2.1]。这表明，本文中雅可比多项式的归一化具有有趣的 k依赖性。

注 6.7。Dynkin 类型分别为 E_6 和 F_4 的紧对称对（U， K）也具有 Dynkin 类型为 A_2的限制根系。K 的第一个基本表示是 52 维的，并且限制到 E_6后是无重数的，见 [7, §9，表 2（B10）]。然而，将此表示限制到 M（其李代数的 Dynkin 类型为 D_4）后，会分解为四个不可约 M模之和。因此，这种 K型的球函数不属于这些函数族的例子。可能存在一个不可约 K模，分解为三个不同的不可约 M模；我们不知道是否确实如此。

7. Application II

为了将 W-不变多项式描述为通常的多项式，我们遵循 [11]。A 上的 W-不变 Laurent 多项式构成多项式代数 $\mathbb{C}[P]^W = \mathbb{C}[\chi_1, \ldots, \chi_n]$，其中 $n =$ 的秩为 R。映射 $\chi\colon T \to \mathbb{C}^n\colon t \mapsto (\chi_1(t) \ldots, \chi_n(t))$ 的像记作 $\Omega = \chi(A)$，它是紧的，且包含在一个全实子空间 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ 中。对于 p， $q \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 有

$$\int_A \overline{p(\chi(t))} q(\chi(t)) \delta_k(t) dt = \int_\Omega \overline{p(x)} q(x) w_k(x) dx$$

对于某个特定的权函数 w_k， $w_k(\chi)$ 是 δ_k 与 χ 的雅可比行列式绝对值的乘积。后者的零点集通常包含于前者的零点集之中。

我们接下来也将空间 $\mathbb{C}[P]^{W_I}$ 描述为通常的多项式空间。回忆一下，我们在 W^I 上固定了一个全序；在该全序中，若 $\ell(u) \leq \ell(v)$，则 u 排在 v 之前。我们利用这一点来识别 $\mathbb{C}[W/W_I] = \mathbb{C}^{|W^I|}$。

由 $\sum_{v \in W^I} f_v \phi_v \mapsto (f_v, v \in W^I)$ 定义的同构 $\mathbb{C}[P]^{W_I} \to \mathbb{C}[P]^W \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$ 诱导出一个同构 $(\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}[W/W_I])^W \to \mathbb{C}[P]^W \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$，其形式为

$$\sum_{v \in W^I} f_v \Gamma(\phi_v) \mapsto (f_v, v \in W^I).$$

设 Φ_I 为一个矩阵，其列为 $\Gamma(\phi_v)$ $v \in W^I$。利用这一识别$\mathbb{C}[W/W_I] = \mathbb{C}^{|W^I|}$，可见相应的映射

$$(\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|})^W \to \mathbb{C}[P]^W \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$$

由与 Φ_I 的逆元逐点相乘给出。注意，

$$\det \Phi_I = \prod_{\alpha>0} (e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2})^{n_\alpha}$$

其中 n_α 是在左乘 s_α 作用下被互换的 W/W_I 中的数对个数，参见 [9,引理 2.9]。令 $\mathbb{M}_I = \mathbf{Mat}(\mathbb{C}, |W^I| \times |W^I|)$，其上有通常的厄米伴随，记作 $C \mapsto C^*$。

令 $\mathcal{W}_I \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{M}_I$ 由 $\mathcal{W}_I(\chi) = \Phi_0^* \Phi_0$ 定义。则 $\mathcal{W}_I w_k$ 是一个矩阵权，即对 $Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$，配对

$$\langle Q_1, Q_2 \rangle_{I,k} = \int_\Omega Q_1(x)^* \mathcal{W}_I(x) Q_2(x) w_k(x) dx \tag{10}$$

定义了一个内积。由构造可知，映射

$$\left((\mathbb{C}[P] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|})^W, (\cdot,\cdot)_{I,k} \right) \to \left(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{I,k} \right),$$

由与 Φ_I^{-1} 相乘给出，是一个酉同构。

利用上述同一化，我们将 $\mathcal{P}_I(\lambda, k) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$ 定义为

$$\mathcal{P}_I(\lambda, k)(\chi) = \Phi_I^{-1} P_I(\lambda, k).$$

族 $(\mathcal{P}_I(\lambda, k)\ \lambda \in P_I^+)$ 是 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$ 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{I,\ k}$ 的一组正交基。记 $\mathcal{D}(I, k) = \{\Phi_I^{-1} \circ D \circ \Phi_I \mid D \in \mathbb{D}(I, k)\}$。那么 $\mathcal{D}(I, k)$ 是作用于 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$ 上的微分算子代数。由构造可知，$\mathcal{P}_I(\lambda, k)\ \lambda \in P_I^+$ 是共同特征函数，而且确实彼此分离。由于 $\mathcal{D}(I, k)$ 作用于$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}^{|W^I|}$，我们看到其系数是 $\mathbb{M}_I[x_1, \dots, x_n]$ 值的。

令 $\mathcal{M}_I(\sigma) \in \mathbb{M}_I[x_1, \dots, x_n]$ 为列向量是 $\mathcal{P}_I(v^{-1}(\lambda_v + \sigma)\ k)\ v \in W^I$ 的 $\mathbb{M}_I$ 值多项式。于是 $(\mathcal{M}_I(\sigma, k)\ \sigma \in P^+)$ 是关于 (10) 的一族矩阵值正交多项式，此处 (10) 现解释为一个 $\mathbb{M}_I$ 值内积。这些多项式作为交换代数 $\mathcal{D}(I, k)$ 的共同特征函数，在右侧乘以 $\mathbb{M}$ 后仅相差一个比例因子，因此由此唯一确定；这里特征标取值于 $\mathbb{M}_I$ 中对角矩阵构成的子代数，而这些矩阵从右侧作用于多项式。

例 7.1. • 如果秩$(R) = 1$ 且 $I = S$，那么对于 $\mathcal{P}_I(\lambda, k)$，我们得到经典的单变量雅可比多项式。

- 若 $R = A_2$ 且 $I = \{s_2\}$，则我们得到 [4,§8.1] 中所述的多项式族。这仅对应几何情形，即 $k = 1$，但我们的理论允许改变参数 k。在这种情况下，已知矩阵权是不可分解的，也就是说，它不能约化为更小的块。

致谢 我谨感谢 Gert Heckman 和 Philip Schl¨osser 对本稿早期版本提出的宝贵意见。

References

[1] A. Bj¨orner 和 F. Brenti。《Coxeter群的组合学》，《数学研究生教材》第231卷。施普林格，纽约，2005年。[2] W. Casselman 和 D. Mili˘ci´c。容许表示的矩阵系数的渐近行为。《杜克数学杂志》，49(4):869–930，1982年。[3] G. Heckman 和 H. Schlichtkrull。《对称空间上的调和分析与特殊函数》，《数学展望丛书》第16卷。学术出版社，圣迭戈，加利福尼亚州，1994年。[4] E. Koelink、M. van Pruijssen 和 P. Rom´an。SU($n+1$) $\times$ SU($n+1$)不可约表示的矩阵元与多变量矩阵值正交多项式。《函数分析杂志》，278(7):108411，48页，2020年。[5] I. G. Macdonald。《仿射赫克代数与正交多项式》，《剑桥数学论丛》第157卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[6] E.M. 奥普丹。分次赫克代数某些表示的调和分析。《数学学报》，175(1):75–121，1995年。[7] G. Pezzini 和 M. van Pruijssen。关于球齐性空间的扩展权重幺半群及其在球函数中的应用。已获《表示论》接受发表，2020年。[8] N. Shimeno。具有 A_2 对称性的矩阵值交换微分算子。载于《齐性空间上的几何与调和分析及其应用》，《施普林格数学与统计学会议录》第207卷，第157–184页。施普林格，查姆，2017年。[9] R. Steinberg。关于Pittie的一个定理。《拓扑学》，14:173–177，1975年。[10] M. van Pruijssen。无重数诱导表示与正交多项式。《国际数学研究通报》，(7):2208–2239，2018年。[11] L. Vretare。对称空间上的初等球函数。《斯堪的纳维亚数学杂志》，39(2):343–358（1977），1976年。