arXiv:2303.05931v1 [math.AC] 10 Mar 2023

交换环的素理想和图的度量维数 *

M. Adlifard[a]、Sh. Niknejad[b]、R. Nikandish[c†]

[b] *Department of Mathematics, Roudbar Branch, Islamic Azad University, Roudbar, Iran*[b] *Department of Mathematics, Gachsaran Branch, Islamic Azad University,Gachsaran, Iran*[c] *Department of Mathematics, Jundi-Shapur University of Technology*, 邮政信箱 64615-334, Dezful, 伊朗
m.adlifard@iauroudbar.ac.ir Sh.niknejad@gmail.com
r.nikandish@ipm.ir

摘要

交换含幺环 R 的素理想和图，记为 $PIS(R)$，是一个无向简单图，其顶点是 R 的非平凡理想；当且仅当两个不同顶点之和是 R 的素理想时，它们之间存在一条边。本文讨论了 $PIS(R)$ 的度量维数，并给出了 $PIS(R)$ 中该参数的一些公式。

1 引言

在图中求度量维数，是离散结构中 NP 困难的识别问题的一个例子。这一问题有诸多应用，不仅涉及机器人学，还涉及化学、图像处理、组合优化等领域。Slater [16] 于1975年、Harary [16] 于1976年分别独立开启了对这一概念的研究，此后，许多图论学家计算了若干类图的这一概念，例如见 [2, 7, 8]。广泛的应用和计算的复杂性，使得人们对刻画与代数结构相关的图的不变量产生了极大关注,

* *Key Words*：度量维数，分辨集，素理想和图，交换环。
2010 *Mathematics Subject Classification*：13A15；13B99；05C99；05C25。
† 通讯作者

关于这一方向的一些例子可见 [3, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 15]。本文属于这一研究主题，旨在研究交换环的素理想和图的度量维数。

本文中，所有环均假设为含幺交换环。 R 的所有理想、极大理想和雅各布森根的集合分别记为 $A(R)$、$\mathrm{Max}(R)$ 和 $J(R)$。对于环 R 的子集 T，记作 $T^* = T\setminus\{0\}$。此外，$A(T)$ 表示包含于 T 中的 R 的理想集合。若环 R 中只有 0 是幂零元，则称其为约化环。关于交换环的一些其他定义可见 [1]。

图论术语采用 [17] 中的标准用法。本文中，所有图 $G = (V, E)$ 均为简单连通图。通常，符号 $\mathrm{diam}(G)$ 表示 G 的直径。两个不同顶点 x 和 y 之间的距离记为 $d(x, y)$。此外，阶为 n 的完全图记为 K_n。对于 $V(G)$ 中的顶点 x，x 的开邻域记为 $N(x)$。设 $G = (V, E)$ 是一个连通图，$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 是 V 的一个有序子集，且 $v \in V(G) \setminus S$。向量 $D(v|S) = (d(v, v_1)\ d(v, v_2)\ \ldots, d(v, v_k))$ 称为关于 S 的 v 的表示。若 G 中不同顶点关于 S 有不同的表示，则称集合 $S \subseteq V$ 为 G 的分辨集。基数最小的分辨集称为 G 的度量基，而度量基的基数称为 G 的度量维数。G 的度量维数记为 $dim_M(G)$。

设 R 是一个含幺交换环。R 的素理想和图记为 $PIS(R)$，它是一个图，其顶点为 R 的非零真理想；两个不同的顶点 I 和 J 邻接，当且仅当 $I + J$ 是 R 的素理想。该图最初由文献 [14] 引入并研究，作者还探讨了许多有趣的结果。例如，他们研究了 $PIS(R)$ 的连通性、直径、围长、团数和支配数。本文研究 $PIS(R)$ 的度量维数，并给出 $PIS(R)$ 的若干度量维数公式。

2 约化环的素理想和图的度量维数

本节给出与约化环 R 相关联的素理想和图的度量维数精确值，并以 R 的极大理想个数表示。首先，我们需要陈述以下结果。

假设 R 是一个环。根据定理 2.6], $PIS（R）$不连通当且仅当

R is 它是两个域的直积。因此，本文不考虑这种情况 .

引理 2.1 若 R 是一个环，则以下陈述等价。

(1) $dim_M(PIS(R))$ 是有限的。

(2) R 只有有限多个理想。

证明。(1) $\Rightarrow$(2) 假设 $dim_M(PIS(R))$ 是有限的，且对于某个非负整数 n，$W = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ 是 $PIS(R)$ 的一个度量基。设 $I \in V(PIS(R)) \setminus W$。 $D(I|W)$ 的所有可能方式共有 $(4+1)^n$ 种，因为 $diam(PIS(R)) \leq 4$（见[14, 定理 2.6]）。因此， $|V(PIS(R))| \leq 5^n + n$，从而 R 只有有限多个理想。

(2) $\Rightarrow$(1) 显然。 □

为计算 $dim_M(PIS(R))$，只需考虑阿廷环 R（事实上，只有有限多个理想的环），由引理 2.1 可知。此外，根据 [1, 定理 8.7]，每个只有有限多个理想的约化环都是有限多个域的直积。利用这些事实，我们证明本节的主要结果。

定理 2.1 假设 R是一个约化环，且 $dim_M(PIS(R))$ 是有限的。那么以下结论成立：

(1) 若 $|\mathrm{Max}(R)| = 3$，则 $dim_M(PIS(R)) = 2$。

(2) 若 $|\mathrm{Max}(R)| = n \geq 4$，则 $dim_M(PIS(R)) = n$。

证明。(1) 若 $n = 3$，则 $R \cong F_1 \times F_2 \times F_3$，其中对每个 $1 \leq i \leq 3$， F_i 都是一个域。令 $W = \{(0) \times F_2 \times F_3, F_1 \times (0) \times F_3\}$。由图 1，

$D((0) \times F_2 \times (0)|W) =$(1, 2),$D(F_1 \times (0) \times (0)|W) =$(2, 1),$D((0) \times (0) \times F_3|W) =$(1, 1),$D(F_1 \times F_2 \times (0)|W) =$ (2, 2).

因此，对于每个 $I, J \in V(PIS(R))\setminus W$， $D(I|W) \neq D(J|W)$。因此， $dim_M(PIS(R)) =$2。

(2) 假设 $n \geq 4$。由引理 2.1 可知 $R \cong F_1 \times \cdots \times F_n$，其中对于每个 $1 \leq i \leq n$， F_i 都是一个域。我们证明 $dim_M(PIS(R)) = n$。事实上，我们有以下断言：

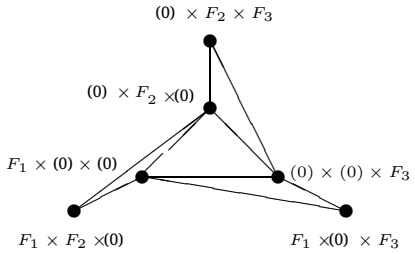


图 1: $PIS(F_1 \times F_2 \times F_3)$

断言1. $dim_M(PIS(R)) \geq n$。

由引理 2.1，我们可以假设 $dim_M(PIS(R)) = k$，其中 k是一个正整数。由于 R是主理想环，根据 $[14, 定理\ 2.6]$，$diam(PIS(R)) \in \{1, 2\}$，因此对于 $D(I|W)$，若 $I \in V(PIS(R)) \setminus W$，则有 2^k种可能的方式。这意味着$|V(PIS(R))| - k \leq 2^k$。显然，$|V(PIS(R))| = 2^n - 2$，因此 $2^n - 2 - k \leq 2^k$。于是 $2^n \leq 2^k + 2 + k$。现在，$n \geq 4$意味着 $k \geq n$。因此，$dim_M(PIS(R)) \geq n$。

断言2. $dim_M(PIS(R)) \leq n$。

对于每个 $1 \leq i \leq n$，令 $\mathfrak{m}_i = (I_1, I_2, \ldots, I_n) \in A(R)^*$，使得 $I_i = 0$且 $I_j = F_j$；对于每个满足 $i \neq j$的 $1 \leq j \leq n$，令 $W = \{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$（显然，$W = \mathrm{Max}(R)$）。我们证明 W是 $PIS(R)$的一个分辨集。设 $I, J \in V(PIS(R)) \setminus W$且 $I \neq J$。我们需要证明 $D(I|W) \neq D(J|W)$。令 $I = (I_1, I_2, \ldots, I_n)$和 $J = (J_1, J_2, \ldots, J_n)$。由于 $I \neq J$，存在 $1 \leq i \leq n$，使得 $I_i = 0$ 且 $J_i = F_i$，或 $I_i = F_i$ 且$J_i = 0$。不失一般性，假设 $I_1 = 0$ 且 $J_1 = F_1$。不难验证，$d(I, \mathfrak{m}_1) = 1$且 $d(J, \mathfrak{m}_1) = 2$。这显然表明 $D(I|W) \neq D(J|W)$，证毕。

现在，命题 1、2 表明，若 $n \geq 4$，则 $dim_M(PIS(R)) = n$。 □

3 非约化环的素理想和图的度量维数

本节将研究 $dim_M(PIS(R))$，其中 R 是非约化的情况。

我们首先给出以下引理，它为 $dim_M(PIS(R))$ 提供了一个上界，

其中 R 是有限多个带有一个非平凡理想的环的直积。

引理 3.1 假设 $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$ 以及每个 R_i 都是具有唯一的非平凡理想 $\mathfrak{m}_i$的环, 其中 $1 \leq i \leq n$。那么 $dim_M(PIS(R)) \leq 2n$。

证明。假设

$A = \{(0, R_2, \ldots, R_n), (R_1, 0, R_3, \ldots, R_n), \ldots, (R_1, \ldots, R_{n-1}, 0)\}$,

$B = \{(\mathfrak{m}_1, R_2, \ldots, R_n), (R_1, \mathfrak{m}_2, R_3, \ldots, R_n) \ldots, (R_1, \ldots, R_{n-1}, \mathfrak{m}_n)\}$ （实际上 $B = \mathrm{Max}(R)$）并且

$W = A \cup B$。

已证明 W是 $PIS(R)$中的一个分辨集。令 $I = (I_1, \ldots, I_n)$ $J = (J_1, \ldots, J_n) \in A(R_i)^* \setminus W$。只需证明 $D(I|W) \neq D(J|W)$。

我们需要考虑以下几种情况:

情形1. $I \subseteq J(R)$. 若 $J \subseteq J(R)$也成立, 则不失一般性, 可假设 $I_1 = 0$ and $J_1 = \mathfrak{m}_1$, 因为 $I \neq J$。我们有 $D(I|W) = (2, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 1, \underbrace{\cdots 1}_{n},)$ and $D(J|W) = (1, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 1, \underbrace{\cdots 1}_{n},)$。因此, $D(I|W) \neq D(J|W)$。若 $J \nsubseteq J(R)$, 则不失一般性, 可假设 $J_n = R_n$。于是 $D(I|W) = (\underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 1, \underbrace{\cdots 1}_{n},)$ and $D(J|W) = (\underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 2, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 2)$。因此, $D(I|W) \neq D(J|W)$。

情形 2。 $I \nsubseteq J(R)$ 和 $J \nsubseteq J(R)$。在这种情况下, $I_i = R_i$和 $J_j = R_j$, 其中某些$1 \leq i, j \leq n$。若对每个 $1 \leq i \leq n$, $I_i = R_i$ 当且仅当 $J_i = R_i$, 则由于 $I \neq J$, 存在某些 $1 \leq i \leq n$, $\{I_i, J_i\} \subseteq \{0, \mathfrak{m}_i\}$。不失一般性, 我们可以假设 $I_1 = 0$ 和 $J_1 = \mathfrak{m}_1$。现在, 我们有 $D(I|W) = (2, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, \underbrace{x_1 \cdots x_n}_{n}, ,) \neq (1, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, \underbrace{x_1 \cdots x_n}_{n}, ,) = D(J|W)$, 使得 $x_i \in \{1, 2\}$, 且存在 $1 \leq i \leq n$, 使得x_i满足 $x_i = 2$。

若对于某个 $1 \leq i \leq n$, $I_i = R_i$ 且 $J_i \neq R_i$, 则 $\{J_i\} \subseteq \{0, \mathfrak{m}_i\}$。不失一般性, 设 $I_1 = R_1$ 且 $J_1 = 0$ 或 $J_1 = \mathfrak{m}_1$。因此 $D(I|W) = (2, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 2, \underbrace{x_2 \cdots x_n}_{n-1}, ,)$, 但若 $J_1 = 0$且$D(J|W) = (1, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 1, \underbrace{x_2 \cdots x_{n-1}}_{n-1}, ,)$, 则 $D(J|W) = (2, \underbrace{_, \cdots, _}_{n-1}, 1, \underbrace{x_2 \cdots x_{n-1}}_{n-1}, ,)$。上述论证表明$D(I|W) \neq D(J|W)$。最后, 我们注意到, 情形 $I \nsubseteq J(R)$ 和 $J \subseteq J(R)$ 与情形1中的

$J \nsubseteq J(R)$ 和 $I \subseteq J(R)$ 类似。因此， W是 $PIS(R)$ 的分辨集。这意味着 $dim_M(PIS(R)) \leq |W| = 2n$。□

下面的例子表明，引理 3.1 中的上界 $2n$ 是紧的。

例 3.1

(1) 令 $n = 2$ 为引理 3.1 中的情形，且 $W = \{(R_1, 0)、(0, R_2)、(R_1, \mathfrak{m}_2)\}$。则 $D((\mathfrak{m}_1, R_2)|W) = (2, 1, 2)$， $D((0, \mathfrak{m}_2)|W) = (1, 2, 1)$， $D((\mathfrak{m}_1, 0)|W) = (2, 1, 1)$， $D((\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)|W) = (1, 1, 1)$，因此 W 是 $PIS(R)$ 的一个分辨集。这意味着 $dim_M(PIS(R) \leq 3$。另一方面，由于 $diam(PIS(R)) = 2$ 且 $|V(PIS(R))| = 7$，我们得出 $dim_M(PIS(R) \geq 3$。因此 $dim_M(PIS(R)) = 3$。

(2) 设 $n = 3$ 满足引理 3.1。根据引理 3.1， $dim_M(PIS(R)) \leq 6$。但我们证明了 $dim_M(PIS(R)) = 5$。由于 $|V(PIS(R)))| = 25$ 且 $diam(PIS(R)) = 2$，我们推得 $dim_M(PIS(R)) \geq 5$。为完成证明，令

$W = \{(0, R_2, R_3), (R_1, 0, R_3), (R_1, R_2, 0), (R_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3), (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, R_3)\}.$

于是我们有

$D((\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3)|W) = (1, 1, 1, 2, 2),$

$D((\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, 0)|W) = (1, 1, 2, 2, 2),$

$D((\mathfrak{m}_1, 0, \mathfrak{m}_3)|W) = (1, 2, 1, 2, 2),$

$D((0, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3)|W) = (2, 1, 1, 2, 2),$

$D((\mathfrak{m}_1, 0, 0)|W) = (1, 2, 2, 2, 2),$

$D((0, \mathfrak{m}_2, 0)|W) = (2, 1, 2, 2, 2),$

$D((0, 0, \mathfrak{m}_3)|W) = (2, 2, 1, 2, 2),$

$D((R_1, 0, 0)|W) = (2, 2, 2, 2, 1),$

$D((0, R_2, 0)|W) = (2, 2, 2, 1, 1),$

$D((0, 0, R_3)|W) = (2, 2, 2, 1, 2),$

$D((\mathfrak{m}_1, R_2, R_3)|W) = (1, 2, 2, 2, 1),$

$D((R_1, \mathfrak{m}_2, R_3)|W) = (2, 1, 2, 1, 1),$

$D((R_1, R_2, \mathfrak{m}_3)|W) = (2, 2, 1, 1, 2),$

$D((\mathfrak{m}_1, R_2, \mathfrak{m}_3)|W) = (1, 2, 1, 1, 1),$

$D((R_1, \mathfrak{m}_2, 0)|W) = (2, 1, 2, 2, 1),$

$D((R_1, 0, \mathfrak{m}_3)|W) = (2, 2, 1, 2, 1)$,

$D((\mathfrak{m}_1, R_2, 0)|W) = (1, 2, 2, 1, 1)$,

$D((0, R_2, \mathfrak{m}_3)|W) = (2, 2, 1, 1, 1)$,

$D((0, \mathfrak{m}_2, R_3)|W) = (2, 1, 2, 1, 2)$,

$D((\mathfrak{m}_1, 0, R_3)|W) = (1, 2, 2, 1, 2)$.

不难看出，对所有 $I, J \in A(R)^* \setminus W$， $D(I|W) \neq D(J|W)$。因此， W是 $PIS(R)$ 中的一个分辨集，所以 $dim_M(PIS(R)) = 5$。

引理 3.1 使我们能够给出 $dim_M(PIS(R))$ 的确切值，其中 R 是有限个恰有一个非平凡理想的环的直积。

定理 3.1 假设 $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$，且每个 R_i 都是具有唯一的非平凡理想 $\mathfrak{m}_i$ 的环，其中 $1 \leq i \leq n$。则以下结论成立：

(1) 若 $n = 1$，则 $dim_M(PIS(R)) = 0$。(2) 若 $n = 2$ 或 $n = 3$，则 $dim_M(PIS(R)) = 2n - 1$。(3) 若 $n \geq 4$，则 $dim_M(PIS(R)) = 2n$。

证明。(1) 若 $n = 1$，则结论显然。

(2) 若 $n = 2$ 或 $n = 3$，则结论由例 3.1 得出。(3) 令 $n \geq 4$,$A = \{(0, R_2, \ldots, R_n), (R_1, 0, R_3, \ldots, R_n) \ldots, (R_1, \ldots, R_{n-1}, 0)\}$,$B = \{(\mathfrak{m}_1, R_2, \ldots, R_n), (R_1, \mathfrak{m}_2, R_3, \ldots, R_n) \ldots, (R_1, \ldots, R_{n-1}, \mathfrak{m}_n)\}$ 和 $C = A(R_i)^* \setminus A \cup B$。

我们断言， $A \cup B \subseteq W$，其中 W 是 $PIS(R)$ 的一个分辨集。首先，我们证明 $A \subseteq W$（事实上，我们将证明，包含于 $J(R) \setminus W$ 的所有理想，只能由包含于 A 的（某些）顶点分辨）。设 $|A(J(R)) \cap W| = t$，且 $I \in A(J(R)) \cap W$。由于 $|A(J(R))| = 2^n - 1$，并且对每个 $K \in B$ 都有 $d(I, K) = 1$，对每个满足 $I \neq K$ 的 $K \in C$ 都有 $d(I, K) = 2$，我们必有 $2^n - 1 - t \leq 2^{|S|}$，其中 $S \subseteq A$ 是 $A(J(R) \setminus W)$ 的一个分辨集。若 $S \neq A$，则由 $|S| \leq n - 1$ 可推得 $2^n - 1 - t \leq 2^{n-1}$，这与 $n \geq 4$ 矛盾。因此 $A \subseteq W$。接下来，我们证明 $B \subseteq W$。设 $T = \{(I_1, \ldots, I_n) \mid I_i \in \{0, R_i\}\}$。由于对每个 $I \in T$ 都有 $d(I, J) = 2$，且 $J \in A$，为了分辨 $T \setminus W$ 中的元素，我们必须将 $A(R) \setminus A$ 中的一些元素加入 W。由于 $|T| = 2^n - 2$，我们至少必须将 n 个 $A(R) \setminus A$ 中的元素加入 W（事实上，我们至少必须加入 t 个元素，直到 $|T \setminus A| \leq 2^t$）。这就证明了该断言，因此 $dim_M(PIS(R)) = |W| \geq 2n$。现在，由引理 3.1 可得所需结论。□

下面的注记在定理 3.2 的证明中起着关键作用。

REMARK 3.1 对于连通图 G，若 $V_1, V_2, \ldots, V_k$ 是 $V(G)$ 的一个划分，且对每个 $1 \leq i \leq k$，$x, y \in V_i$ 蕴含 $N(x) = N(y)$。则 $dim_M(G) \geq |V(G)| - k$。

定理 3.2 设 $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$，其中 $(R_i, \mathfrak{m}_i)$ 是一个阿廷局部主理想环，且对每个 $1 \leq i \leq n$，$|A(R_i)^*| \geq 2$。则以下结论成立：

(1) 若 $n \neq 1$ 或 $n = 1$，且 $|A(R_i)^*| \geq 3$，则 $dim_M(PIS(R)) = |A(R)^*| - 3^n + 1$。
(2) 若 $n = 1$ 且 $|A(R_i)^*| = 2$，则 $dim_M(PIS(R)) = 1$。

证明。假设 $I = (I_1, \ldots, I_n)$ 和 $J = (J_1, \ldots, J_n)$ 是 $PIS(R)$ 的顶点。定义 $\sim$ 在 $V(PIS(R))$ 上的关系如下：对于每个 $1 \leq i \leq n$，若以下条件成立，则有 $X \sim Y$。

(1)“$I_i = \mathfrak{m}_i$ 当且仅当 $J_i = \mathfrak{m}_i$”。

(2)“$I_i \subseteq \mathfrak{m}_i$ 与 $I_i \neq \mathfrak{m}_i$ 当且仅当 $J_i \subseteq \mathfrak{m}_i$ 与 $J_i \neq \mathfrak{m}_i$。

(3)“$I_i = R_i$ 当且仅当 $J_i = R_i$”。

显然，$\sim$ 是 $V(PIS(R))$ 上的一个等价关系。I 的等价类记为 $[I]$。设 X 和 Y 是 I 的等价类中的两个元素。根据关系 $\sim$ 的定义以及 X 与 Y 的邻接条件，可以验证 $N(X) = N(Y)$。现在，注释 3.1 以及“等价类的数量为 $3^n - 1$”这一事实表明，$dim_M(PIS(R)) \geq |A(R)^*| - (3^n - 1) = |A(R)^*| - 3^n + 1$。

为完成证明，现证明 $dim_M(PIS(R)) \leq |A(R)^*| - 3^n + 1$。设 $(K_1, \ldots, K_n) \in V(PIS(R))$ 是一个固定顶点，使得对于每个 $1 \leq i \leq n$, $0 \neq K_i \subset \mathfrak{m}_i$ 以及

$$A = \{(I_1, \ldots, I_n) \in V(PIS(R)) |\ I_i \in \{0, R_i, \mathfrak{m}_i\} \text{ for every } 1 \leq i \leq n\} \cup \{(K_1, \ldots, K_n)\}.$$

我们断言，$W = A(R)^* \setminus A$ 是 $PIS(R)$的分辨集。设 I、$J \in A$ 和 $I \neq J$。只需证明 $D(I|W) \neq D(J|W)$。考虑以下集合：

$$V_1 = \{(I_1, \ldots, I_n) \in V(PIS(R)) |\ I_i \in \{0, R_i\} \text{ for every } 1 \leq i \leq n\},$$

$$V_2 = \{(I_1, \ldots, I_n) \in V(PIS(R)) |\ I_i \in \{0, \mathfrak{m}_i\} \text{ for every } 1 \leq i \leq n\},$$

$$V_3 = A \setminus \{V_1 \cup V_2\},$$

$$T_1 = \{(K_1, R_2 \ldots, R_n), (R_1, K_2, R_2 \ldots, R_n), \ldots, (R_1, \ldots, R_{n-1}, K_n)\},$$

$T_2 = \{(I_1, \ldots, I_n) \in V(PIS(R))|\ I_i = K_i, I_j = \mathfrak{m}_j$，其中 $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$，且对每个 $k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i, j\}$、$I_k = R_k\}$ 和

$T_3 = W \setminus \{T_1 \cup T_2\}$.

将 W 中的元素排列如下：

$$W = \{\underbrace{w_1, \ldots, w_{|T_1|}}_{\in T_1}, \underbrace{w_{|T_1|+1}, \ldots, w_{|T_1|+|T_2|}}_{\in T_2}, \underbrace{w_{|T_1|+|T_2|+1}, \ldots, w_{|W|}}_{\in T_3}\}.$$

若 $I \in V_1$，则

$$D(I|W) = (\underbrace{2, \ldots, 2}_{|T_1|}, \underbrace{y_1, \ldots, y_{|T_2|}}_{|T_2|}, \underbrace{z_1, \ldots, z_{|T_3|}}_{|T_3|}),$$

使得 $y_i \in \{1, 2\}$ 且 $y_i \neq y_j$，其中 $1 \leq i$、$j \leq |T_2|$ 满足 $i \neq j$。

若 $I \in V_2$，则

$$D(I|W) = (\underbrace{x_1, \ldots, x_{|T_1|}}_{|T_1|}, \underbrace{2, \ldots, 2}_{|T_2|}, \underbrace{z_1, \ldots, z_{|T_3|}}_{|T_3|}),$$

使得 $x_i \in \{1, 2\}$ 且 $x_i \neq x_j$，其中 $1 \leq i$、$j \leq |T_1|$ 满足 $i \neq j$。

最后，若 $I \in V_3$，则

$$D(I|W) = (\underbrace{x_1, \ldots, x_{|T_1|}}_{|T_1|}, \underbrace{y_1, \ldots, y_{|T_2|}}_{|T_2|}, \underbrace{z_1, \ldots, z_{|T_3|}}_{|T_3|}),$$

使得 $x_i = y_j = 1$，其中 $1 \leq i \leq |T_1|$ 和 $1 \leq j \leq |T_2|$。

上述向量表明，若 $I \in V_i$ 和 $J \in V_j$，则对每个$1 \leq i$、$j \leq 3$（满足 $i \neq j$），有 $D(I|W) \neq D(J|W)$。接下来，我们证明，若 I、$J \in V_i$，则对每个$1 \leq i \leq 3$，有 $D(I|W) \neq D(J|W)$。需考虑以下几种情况：

情形1。 $I, J \in V_1$。由于 $I \neq J$，不失一般性，可假设$I_i = 0$ 和 $J_i = R_i$，其中 $1 \leq i \leq n$。此外，$J_i = R_i$ 意味着零元素必须出现在 J的分量中。令 $J_k = 0$（J_k 是 J 的第 k个分量），其中 $k \neq i$。考虑满足 $y_i = K_i$和 $y_k = \mathfrak{m}_k$的 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_2$。此外，$y$的其他分量为 R_j's、$j \neq i$、k。现在，$d(I, y) = 2$且 $d(J, y) = 1$，因此$D(I|W) \neq D(J|W)$。

情形2。 $I, J \in V_2$。由于 $I \neq J$，不失一般性，我们可以假设 $I_i = 0$和 $J_i = \mathfrak{m}_i$，其中 $1 \leq i \leq n$。考虑满足 $x_i = K_i$的 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in T_1$。此外， x 的其他分量为 R_j's、 $j \neq i$。由于 $d(I, x) = 2 \neq 1 = d(J, x)$，$D(I|W) \neq D(J|W)$。

情形3。 $I, J \in V_3$。可能出现以下子情形:

子情形1。 $I_i = \mathfrak{m}_i$ 和 $J_i = 0$，其中某个 $1 \leq i \leq n$。由于 $I_i = \mathfrak{m}_i$，存在某个 $1 \leq j \leq n$，满足 $i \neq j$, $I_j = R_j$。令 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_3$，使得 $y_i = K_i$和 $y_j = K_j$。此外， y的其他分量是 R_k的 $k \neq i, j$。现在， $d(I, y) = 1$且 $d(J, y) = 2$，因此$D(I|W) \neq D(J|W)$。

子情形2。 $I_i = \mathfrak{m}_i$ 和 $J_i = R_i$，其中某个 $1 \leq i \leq n$。由于 $J_i = R_i$，存在某个 $1 \leq j \leq n$，满足 $i \neq j$, $J_j = \mathfrak{m}_j$。若 $I_j = \mathfrak{m}_j$，则令 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_2$，使得 $y_i = K_i$和 $y_j = \mathfrak{m}_j$。此外， y的其他分量是 R_k的 $k \neq i, j$。现在， $d(I, y) = 2$且 $d(J, y) = 1$，因此 $D(I|W) \neq D(J|W)$。若 $I_j = R_j$，则令 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_1$，使得 $y_j = K_j$，且 y 的其他分量是 R_i的 $i \neq j$。现在， $d(I, y) = 2$ 且$d(J, y) = 1$，因此 $D(I|W) \neq D(J|W)$。

子情形 3. $I_i = \mathfrak{m}_i$ 当且仅当 $J_i = \mathfrak{m}_i$，对每个 $1 \leq i \leq n$均成立。因此，存在 $1 \leq j \leq n$ 使得 $I_j = R_j$ 且 $J_j = 0$。注意，存在 $k \neq i, j$ J 使得 $J_k = R_k$与。令 $y = (y_1, \ldots, y_n) \in T_3$使得 $y_i = K_i$, $y_j = 0$且 y的其他分量等于 R_k的， $k \neq i, j$。现在， $d(I, y) = 1$且 $d(J, y) = 2$，因此$D(I|W) \neq D(J|W)$。□

以下推论是定理 3.2 的直接推论。

推论 3.1 设 $R \cong R_1 \times \cdots \times R_n$，其中 R_i是一个阿廷局部环，且对每个 $1 \leq i \leq n$, $|A(R_i)^*| = 2$。那么 $dim_M(PIS(R)) = 4^n - 3^n - 1$。

推论 3.2 设 $R \cong S_1 \times S_2 \times S_3$, n, m, k 是非负整数，满足 $n, m, k \notin \{1, 2, 3\}$, $S_1 \cong R_1 \times \cdots \times R_n$, $S_2 \cong R'_1 \times \cdots \times R'_m$ 和 $S_3 \cong F_1 \times \cdots \times F_k$，其中 $(R_i, \mathfrak{m}_i)$ 是阿廷局部主理想环，使得对于每个 $1 \leq i \leq n$, $|A(R_i)^*| \geq 2$; $(R'_i, \mathfrak{m}'_i)$ 是阿廷局部环，使得 $|A(R'_i)^*| = 1$，对于每个 $1 \leq i \leq m$，且 F_i 是域，对于每个 $1 \leq i \leq k$。那么 $dim_M(PIS(R)) = |A(R)^*| - 3^{n+m}2^k + 2m + k + 2$。

证明。假设

$A = \{(I_1, \ldots, I_{n+m+k}) \in V(PIS(R)) \mid I_i \in \{0, R_i, \mathfrak{m}_i, R'_j, \mathfrak{m}'_j, F_t\}$对每个 $1 \leq i \leq n$, $n+1 \leq j \leq n+m$, $n+m+1 \leq t \leq n+m+k\}$,

$B = \{(R_1, \ldots, R_n, 0, R'_2, \ldots, R'_m, F_1, \ldots, F_k), (R_1, \ldots, R_n, R'_1, 0, R'_3, \ldots, R'_m, F_1, \ldots, F_k), \ldots, (R_1, \ldots, R_n, R'_1, R'_2, \ldots, R'_{m-1}, 0, F_1, \ldots, F_k)\}$,$C = \{(R_1, \ldots, R_n, \mathfrak{m}'_1, R'_2, \ldots, R'_m, F_1, \ldots, F_k), (R_1, \ldots, R_n, R'_1, \mathfrak{m}'_2, R'_3, \ldots, R'_m, F_1, \ldots, F_k), \ldots, (R_1, \ldots, R_n, R'_1, R'_2, \ldots, R'_{m-1}, \mathfrak{m}'_m, F_1, \ldots, F_k)\}$,$V_1 = A(R)^* \setminus A$,$V_2 = B \cup C$ 和$V_3 = \{(R_1, \ldots, R_n, R'_1, \ldots, R'_m, 0, F_2, \ldots, F_k), (R_1, \ldots, R_n, R'_1, \ldots, R'_m, F_1, 0, F_2, \ldots, F_k), \ldots, (R_1, \ldots, R_n, R'_1, \ldots, R'_m, F_1, \ldots, F_{k-1}, 0)\}$.

将 W 中的元素按如下方式排列:

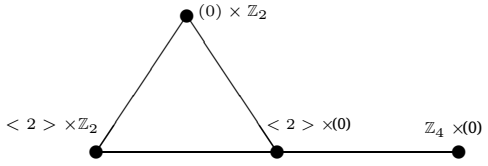
$$W = \{\underbrace{w_1, \ldots, w_{|V_1|}}_{\in V_1} \underbrace{w_{|V_1|+1}, \ldots, w_{|V_1|+|V_2|}}_{\in V_2} \underbrace{w_{|V_1|+|V_2|+1}, \ldots, w_{|V_1|+|V_2|+|V_3|}}_{\in V_3}\}.$$

根据定理 3.1、3.2 和 2.1 的类似证明， W 是 $PIS(R)$ 的度量基，因此 $dim_M(PIS(R)) = |W| = |V_1| + |V_2| + |V_3| = |A(R)^*| - 3^{n+m}2^k + 2m + k + 2$。□

我们以以下例子结束本文，该例子表明推论 3.2 中需要条件 $n, m, k \notin \{1, 2, 3\}$ 。

例 3.2

(1) 设 $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$。由下图可知， $dim_M(PIS(R)) = 2$。但是 $n = 0$



$PIS(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2)$

并且 $m = k = 1$ 不满足推论 3.2。

(2) 令 $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 和 $W = \{(0, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2), (\mathbb{Z}_4, 0, \mathbb{Z}_2), (\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2, 0)\}$。那么 $D((\mathfrak{m}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2)|W) = (1, 2, 2)$, $D((\mathfrak{m}_1, 0, \mathbb{Z}_2)|W) = (1, 1, 2)$,

$D((\mathfrak{m}_1, \mathbb{Z}_2, 0)|W) = (1, 2, 1)$，$D((\mathfrak{m}_1, 0, 0)|W) = (1, 1, 1)$，$D((0, 0, \mathbb{Z}_2)|W) = (2, 1, 2)$，$D((0, \mathbb{Z}_2, 0)|W) = (2, 2, 1)$，$D((\mathbb{Z}_4, 0, 0)|W) = (2, 1, 1)$。那么 $dim_M(PIS(R)) = 3$。但是 $n = 0$、 $m = 1$和 $k = 2$不满足推论 3.2 中的条件。

参考文献

[1] M. F. Atiyah, I.G. Macdonald，《交换代数导论》，Addison-Wesley 出版公司（1969年）。[2] G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oellermann，图的可分辨性与图的度量维数，《离散应用数学》105（2000年）99-113。[3] D. Dolˇzan，有限交换环全图的度量维数，《加拿大数学通报》59（2016年）748-759。[4] D. Dolˇzan，有限交换环湮灭理想图的度量维数，《澳大利亚数学会通报》103（2021年）362–368。[5] Sh. Ebrahimi, R. Nikandish, A. Tehranian, H. Rasouli，与交换环相关的湮灭子图补图的度量维数，《应用代数、工程、通信与计算》（2021年）https://doi.org/10.1007/s00200-021-00533-4。[6] F. Harary, R. A. Melter，关于图的度量维数，《阿拉伯组合学》2（1976年）191–195。[7] Z. Jiang, N. Polyanskii，图的笛卡尔幂的度量维数，J. Comb. theory Ser. A. 165（2019年）1–14。[8] S. Khuller, B Raghavachari, A. Rosenfeld，图中的标志点，《离散应用数学》70（3）（1996年）217–229。[9] X. Ma, L. Li，有限群约化幂图的度量维数，《台湾数学杂志》26(1)（2022年）1–15。[10]R. Nikandish, M. J. Nikmehr, M. Bakhtyiari，交换环余零因子图的度量维数与强度量维数，《地中海数学杂志》18，112（2021年）。https://doi.org/10.1007/s00009-021-01772-y。[11] S. Pirzada, M. Aijaz, S. P. Redmond，交换环零因子图的上维数与基，《AKCE国际图论与组合学杂志》（2020年）168–173。

[12] S. Pirzada, M. Imran Bhat，计算环的压缩零因子图的度量维数，Acta Univ. Sap. Mathematica，10，2（2018年）298–318。[13] S. Pirzada, R. Raja，关于零因子图的度量维数，Comm. Algebra，45:4（2017年）：1399–1408。[14] M. Saha, A. Das, E. Yetkin Celikel, C. Abdioˇglu，交换环的素理想和图，J. Algebra Appl.（2023年）2350121（14页），数字对象唯一标识符：10.1142/S0219498823501219。[15] R. Shahriyari, R. Nikandish, A. Tehranian, and H. Rasouli，计算交换环余极大理想图的强度量维数，J. Algebra Appl.（2024年）2450048（13页），数字对象唯一标识符：10.1142/S0219498824500488。[16] P. J. Slater，树的叶，Congr. Numer. 14（1975年）549–559。[17] D. B. West，图论导论，第2版，PrenticeHall，上萨德尔河（2001年）。