arXiv:2303.05932v1 [math.RT] 10 Mar 2023

紧致连通李群的权

RADHA KESSAR、GUNTER MALLE 和 JASON SEMERARO

Abstract. 设 ℓ 是一个素数。若 G 是紧致连通李群，或是特征不同于 ℓ 的连通约化代数群，且 ℓ 是 G 的好素数，那么我们证明，G 的 ℓ-融合系统的权数等于其魏尔群的不可约特征数。证明依赖于对紧李群中 ℓ-顽固子群的分类。

1. Introduction

本文证明以下恒等式，该恒等式最初由 [15] 猜想：

定理 1. 设 G 是一个紧致连通李群。设 ℓ 是 G 的一个好素数， S 是 G 的一个 Sylow ℓ-子群， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S$(G) 是相应的饱和融合系统， W 是 G 的魏尔群。那么，

$$\mathbf{w}(\mathcal{F}) = |\mathrm{Irr}(W)|.$$

这里，w($\mathcal{F}$) 表示附属于 G 的 ℓ-融合系统的权数目（精确定义见第2节），而 Irr(W) 表示 W 的普通不可约特征标集合。我们将在本引言后文回顾好素数的定义。对于不整除 $|W|$ 的素数，所述恒等式相当容易验证；但对于其他素数，这似乎完全令人费解。

我们对这一结果感兴趣，源于有限群表示论中的 Alperin 权猜想（AWC）。该猜想将特征为 ℓ 的域上有限群代数的一个块的单模数目，与较小“局部”群的单射模数目联系起来。事实上，通过一些深奥的表示论可以证明，对于定义特征不同于 ℓ 的李型有限群的群代数的主块，在满足一些额外条件时，AWC 等价于上述类型的一个等式（见 [10, 命题 4.1]）。在 [10, 定理 1],中，我们证明了李型有限群满足这一等式（在相关条件下），并惊讶地发现，这一结论在比有限群更广泛的情形下仍然成立；特别是，对于某些有限 ℓ-群上的奇异融合系统，这些系统源自连通 ℓ-紧群的同伦不动点空间。我们认为，定理 1 中底层的 ℓ-群是无限群，这为 AWC 提供了更多佐证，也进一步表明它并不局限于有限群的范畴。我们还指出

日期：2023年3月13日。2010年数学主题分类：20C20、55R35、57T10。关键词与短语：融合系统、紧李群、Alperin 权猜想。我们感谢 Bob Oliver 的启发性讨论。第二作者衷心感谢德国研究联合会的资助——项目编号 286237555——TRR 195。

定理 1 推出了连通约化代数群在特征不同于 ℓ 时其融合系统的 ℓ-权的类似恒等式：

定理 2。设 ℓ 和 p 是不同的素数。假设 G 是定义在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的连通约化代数群，且 ℓ 对 G 是好的；令 S 为 G 的 Sylow ℓ- 子群，$\mathcal{F} = \mathcal{F}_S$(G) 为相应的饱和融合系统，$W$ 为 G 的魏尔群。那么，

$$\mathbf{w}(\mathcal{F}) = |\mathrm{Irr}(W)|.$$

定理 1 的证明通过从离散情形转到连续情形来进行；在连续情形中，紧李群的 ℓ-顽固子群（按 Jackowski–McClure–Oliver [8] 的定义）取代了融合系统中的中心根子群。由此可直接将问题约化到底层紧群为单群的情形，此时我们可以利用已知的 ℓ-顽固子群分类 [13], [9], [16]。经典群的证明涉及计数论证，类似于 [10, 定理 1] 中所用的论证；该论证源自 Alperin–Fong [1] 的工作。

回顾一下，对于根系 Φ，如果某个闭子系 $\Psi \subset \Phi$ 使 $\mathbb{Z}\Phi/\mathbb{Z}\Psi$ 存在 ℓ-挠，则素数 ℓ 是坏素数（例如参见 [12, 定义 B.24]）。因此，若它对某个不可分解分项是坏素数，那么它对 Φ 也是坏素数。不可分解根系的坏素数如下：类型 A_n没有坏素数；类型 B_n的坏素数为 $\ell = 2$；类型 D_n和 $\ell = 2$的坏素数为 C_n；类型 G_2、F_4、E_6、E_7和 $\ell = 2$的坏素数为 3；类型 E_8的坏素数为 3、5（参见 [12, 表 14.1]）。特别地，所有素数 $\ell \geq 7$ 对所有类型都是好素数（即非坏素数）。在命题 4.1 中，我们证明定理 1 的结论对于紧辛群在坏素数 $\ell = 2$处不成立；在命题 4.5 中，我们证明对于 G $= F_4$在坏素数 $\ell = 3$处也不成立。不过，在这两种情况下，我们仍有 w($\mathcal{F}$) $\leq$ |Irr(W)|，正如 [15]中的猜想。在例 4.3 中，我们观察到，对于处于坏特征下的有限约化群，可能有 w($\mathcal{F}$) $>$ |Irr(W)|。

回顾一下，根据 Friedlander 的结果（参见 [4, 定理 3.1] 和第 2.3 节），非描述特征下有限李型群的 ℓ-完备化分类空间（因此也包括其 ℓ融合系统），可以通过对相应紧李群的 ℓ-完备化分类空间施加适当的不稳定亚当斯运算并取同伦不动点来恢复。若能在定理 1 和 2 中展示的权方程与 [10, 定理 1],中所示的方程之间建立直接联系，将会很有意义；但目前我们尚未发现这种联系，无论是通过不稳定亚当斯运算，还是通过代数群上的弗罗贝尼乌斯态射。尤其是，我们尚不清楚如何从无限情形推导出有限情形中的方程，反之亦然。请注意，我们的结果表明，紧群的权数目不依赖于同源类型；例如，同源群 SL_3(4) 和 PGL_3(4) 分别有五个和三个 3-权。另一方面，我们认为，定理 1 的适用范围可以扩展到涵盖 ℓ-紧群的融合系统，定义见 [5, 第 10] 节。

本文结构如下。第2节回顾相关背景知识。第 3 节给出定理 1 和定理 2 的证明，第4节则介绍我们对坏素数所做的计算。

2. Preliminaries

本节回顾由 Broto、Levi 和 Oliver 在 [5] 中建立的紧李群饱和融合系统理论的若干方面。对于群 G 的子群 Q、R，$\mathrm{Hom}_G(Q,R)$ 由从 Q 到 R 、由 G 中元素的共轭所诱导的群同态组成；$\mathrm{Aut}_G(Q) := \mathrm{Hom}_G(Q,R) \cong N_G(Q)/C_G(Q)$ 是 Q 的 G-自同构群；$\mathrm{Out}_G(Q) = \mathrm{Aut}_G(Q)/\mathrm{Inn}(Q) \cong N_G(Q)/QC_G(Q)$ 是相应的外自同构群。对于 $H \leq G$，记 $\mathcal{F}_H(G)$ 为一个范畴，其对象是 H 的子群；从 Q 到 R 的 $\mathcal{F}$-态射是 $\mathrm{Hom}_G(Q,R)$ 中的元素，其中 Q、$R \leq H$，态射的复合采用通常的映射复合。设 ℓ 为一个素数。

2.1. 离散 ℓ-环面群上的融合系统。离散 ℓ-环面群是一个群P，其正规子群为 P°，满足 P° 同构于若干个$\mathbb{Z}/\ell^\infty$ 的有限直积，且 P/P° 是有限 ℓ群。特别地，任意有限 ℓ群都是离散 ℓ-环面群。这里， P° 被刻画为 P 中的无限可除元素所成的子集，同时也是 P的有限指数最小子群。特别地， P°是 P的特征子群。它称为 P 的单位连通分支；若 $P = P^\circ$，则称 P 连通。

设 S 是离散 ℓ-环面群，且 $\mathcal{F}$ 是 S 上的饱和融合系统，其定义见 [5,第 2] 节。按照 [15], ， $\mathcal{F}$ 的权数定义为

$$\mathbf{w}(\mathcal{F}) := \sum_Q z(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q)),$$

其中， Q 遍历 S中 $\mathcal{F}$-共轭类的代表元，这些代表元对应于 $\mathcal{F}$-中心化、 $\mathcal{F}$-根基子群；$\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{F}}(Q)/\mathrm{Inn}(Q)$ 是 Q的 $\mathcal{F}$-外自同构群，而 $z(\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q))$ 是 $\mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(Q)$ 中 ℓ 缺陷为零的普通不可约特征标的数目。注意，根据 [5, 推论 3.5、定义 2.2]， S 只有有限多个 $\mathcal{F}$-中心化、 $\mathcal{F}$-根基子群的共轭类；此外，任意 $\mathcal{F}$-中心化、 $\mathcal{F}$-根基子群的 $\mathcal{F}$-外自同构群均为有限群。因此，$\mathbf{w}(\mathcal{F})$ 定义良好。另请注意，若 G 是有限群， S 是 G 的 Sylow ℓ子群，且 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(G)$ 是相应的饱和融合系统，则 $\mathbf{w}(\mathcal{F})$ 是与 kG的主块相关联的 Alperin 权的数目，其中 k 是特征为 ℓ 的代数闭域（见 [11,定理 8.14.4]）。

按照 [5, 第 8], 节的说法，如果存在一个离散ℓ-环面子群 $S \leq G$，使得 G 的所有离散 ℓ-环面子群在共轭意义下都包含于其中，那么我们就称群 G “有 Sylow ℓ-子群”。这样的子群（若存在）称为 G的 Sylow ℓ-子群。注意， G的 Sylowℓ-子群构成单个 G-共轭类。 G 的一个 ℓ-中心子群是一个离散ℓ-环面子群 $P \leq G$，满足 $C_G(P)$有一个 Sylow ℓ-子群，且该子群为 $Z(P)$（并且唯一）。等价地，如果 $C_G(P)/Z(P)$不含任何阶为 ℓ的元素，那么离散 ℓ-环面 $P \leq G$ 在 G 中是 ℓ-中心的。

2.2. 紧李群的融合系统。设 G 为一个紧李群。以下定义和结果取自 [5, 第 9]节。

- ℓ-环面群是指其单位连通分支为环面且其分支群为 ℓ-群的紧李群。若 P 是¯G 的一个离散 ℓ-环面子群，则 P 在 G 中的闭包 P 是一个 ℓ-环面群。

• 对于任意 ℓ-环面群 P，Syl$_\ell$(P) 表示 P 的所有离散 ℓ-环面子群 P的集合，其中满足 P$^\circ$.P = P，且 P$^\circ$ 是 P 的单位连通分支，P 包含 P 的所有 ℓ-幂阶挠元。Syl$_\ell$(P) 的元素构成单个 P-共轭类。

• 我们将 Syl$_\ell$(G) 记为 G 的所有 ℓ-环面子群 S 的集合，其中 S$^\circ$ 的单位连通分支是 G 的一个极大环面，且 S/S$^\circ$ 是 $N_{\mathbf{G}}$(S$^\circ$)/S$^\circ$ 的一个 Sylow ℓ 子群；Syl$_\ell$(G) 是 G 的所有离散 ℓ-环面子群 P 的集合，满足 $P \in$ Syl$_\ell$(G) 且 $P \in$ Syl$_\ell$(P)。Syl$_\ell$(G) 中任意两个元素均 G-共轭，且 G 的每个 ℓ-环面子群都包含于 Syl$_\ell$(G) 的某个元素中。Syl$_\ell$(G) 中任意两个元素均 G-共轭，且 G 的每个离散 ℓ-环面子群都包含于 Syl$_\ell$(G) 的某个元素中（见 [5, 命题 9.3]）。特别地，Syl$_\ell$(G) 的元素是 G 的 Sylow ℓ 子群。

若 $S \leq$G 是一个 Sylow ℓ-子群，则由 [5, 引理 9.5], $\mathcal{F} := \mathcal{F}_S$(G) 是定义在 S 上的饱和融合系统。

• G 的一个 ℓ-顽固子群是 G 的一个 ℓ-环面子群 P，满足 $N_{\mathbf{G}}$(P)/P 是一个有限群，且满足 $O_\ell(N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}) = 1$。
• G 的一个 ℓ-环面子群 P $\leq$ 称为 ℓ-中心的，若 Z(P)$\in$ Syl$_\ell$($C_{\mathbf{G}}$(P))。
•紧李群 G 的离散 ℓ-环面子群 P 若满足 $P \in$ Syl$_\ell$(P)，则称其在 G 中是紧嵌入的。

以下这个众所周知的结果是定理 1 证明的第一步（另见 [3,第 4] 节）。

引理 2.1. 设 G 是一个紧李群，其 Sylow ℓ-子群为 S，并且 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S$(G).
(a) 对于 G 的任意 ℓ-顽固子群 P，有 $C_{\mathbf{G}^\circ}$(P) $\leq Z$(P)；若 G/G$^\circ$ 是一个 ℓ-群，则 $C_{\mathbf{G}}$(P) $\leq Z$(P)，因此 Out$_{\mathbf{G}}$(P) $\cong N_{\mathbf{G}}$(P)/P。(b) 假设 $P \leq S$ 是 $\mathcal{F}$-中心且 $\mathcal{F}$-根基的。那么 P := P 是 G 的一个 ℓ-顽固子群，并且 Out$_{\mathcal{F}}(P) \cong$Out$_{\mathbf{G}}$(P)。(c) 映射 $P \mapsto P$ 诱导出一个单射，将 S 的 $\mathcal{F}$-中心、$\mathcal{F}$-根基子群的 $\mathcal{F}$-共轭类集合映到 G 的 ℓ-顽固子群的 G-共轭类集合。(d) 若 G/G$^\circ$ 是一个 ℓ-群或 ℓ'-群，则 (c) 中的映射是一个双射。(e) 假设 G/G$^\circ$ 是一个 ℓ-群。令 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{F}$ 的轨道范畴，令 $\mathcal{F}^{cr}$ 为其对象是 S的 $\mathcal{F}$-中心、 $\mathcal{F}$-根基子群的满子范畴。令 $\mathcal{R}_\ell$(G) 为 G 的轨道范畴中对象为 G 的 ℓ-环面子群的满子范畴。存在一个范畴等价 $\mathcal{F}^{cr} \simeq \mathcal{R}_\ell$(G)：对于 S 的 $\mathcal{F}$-中心、 $\mathcal{F}$-根基子群 P, Q，它将 P映为 G/P，并将由 G $g \in$中的共轭作用诱导的从 P到 Q 的 $\mathcal{F}^{cr}$-态射映为从 G/P 到 G/Q 、由 $x\bar{P} \to xg^{-1}\bar{Q}$, $x \in$ G 定义的 $\mathcal{R}_\ell$(G)-态射。

证明。(a) 是 [13] 中的引理 7。设 $P \leq S$ 为 $\mathcal{F}$-中心且根基的。由 [5, 引理 3.2 和推论 3.5], $P = P^\bullet$，其中 $P^\bullet$ 按 [5] 第 3 节中的定义，因此由 [5, 引理 9.9], P 紧密嵌入于 G 中。由 [5] 的引理 9.4 及其证明可得 Out$_{\mathcal{F}}(P)$ =Out$_{\mathbf{G}}(P) \cong$Out$_{\mathbf{G}}$(P)。由于 P 是 $\mathcal{F}$- 中心的，由 [5, 引理 8.4], P 在 G 中是 ℓ- 中心的，因此由 [5, 引理 9.6(a),(b),], P 在 G 中是 ℓ- 中心的， $N_{\mathbf{G}}$(P)/P 有限，且 P$C_{\mathbf{G}}$(P)/P $\cong C_{\mathbf{G}}$(P)/Z(P) 的阶有限且与 ℓ 互素。另一方面，由于 Out$_{\mathcal{F}}(P) \cong$ Out$_{\mathbf{G}}$(P) $\cong N_{\mathbf{G}}$(P)/P$C_{\mathbf{G}}$(P)，且 P 是 $\mathcal{F}$-根基的， $O_\ell(N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}C_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})) = 1$,

因此 $O_\ell(N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}) \leq \mathrm{P}C_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}$。由于后者是一个 ℓ'-群， $O_\ell(N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}) = 1$，这表明 P 是 ℓ-顽固的。这就证明了 (b)。

¯赋值 $P \mapsto \mathrm{P} := P$ 在 G 中紧密嵌入的 G 的离散ℓ-环面子群的 G-共轭类集合与 G 的 ℓ-环面子群的 G-共轭类集合之间诱导出一个映射。根据 [5, 命题 9.3], ，此映射是一个双射，其逆映射将 G 的一个 ℓ-环面子群 P 的 G-共轭类映射到 P的 G-共轭类，其中$P \in \mathrm{Syl}_\ell(\mathrm{P})$。现在，由 (b) 以及根据 $\mathcal{F}$的定义， P、 $P' \leq S$是 $\mathcal{F}$-共轭的当且仅当 P和 P'是 G-共轭的这一事实，可得 (c)。

¯现在设 $P \leq \mathrm{G}$ 是一个紧密嵌入的子群，且 $\mathrm{P} := P \leq \mathrm{G}$ 是ℓ-顽固的。由上文可知，为证明 (d)，只需证明：若 $\mathrm{G}/\mathrm{G}^\circ$ 是一个 ℓ-群或 ℓ'-群，则P 是 $\mathcal{F}$-中心的且 $\mathcal{F}$-根基的。为此，注意到如上所述，由于 P 紧密嵌入于 G，根据 [5,引理 9.4]，有 $\mathrm{Out}_{\mathbf{G}}(P) \cong \mathrm{Out}_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})$。先设 $\mathrm{G}/\mathrm{G}^\circ$ 是一个 ℓ- 群。由 (a)， $C_{\mathbf{G}}(\mathrm{P}) = Z(\mathrm{P})$，因此 $\mathrm{Out}_{\mathbf{G}}(P) = \mathrm{Out}_{\mathcal{F}}(\mathrm{P}) \cong N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}$，并且由假设， $O_\ell(N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}) = 1$。这说明 P 是 $\mathcal{F}$-根基的。此外，由于 $C_{\mathbf{G}}(\mathrm{P}) \leq Z(\mathrm{P})$，P 在 G 中是 ℓ-中心的。因此，根据 [5,引理 9.6]， P在 G 中是 ℓ-中心的，进而根据 [5, 引理 8.4]， P是 $\mathcal{F}$-中心的。现在设 $\mathrm{G}/\mathrm{G}^\circ$ 是一个 ℓ'-群。我们断言 $\mathrm{P} \leq \mathrm{G}^\circ$。事实上，我们有 $\mathrm{P} = \mathrm{P}^\circ.P$且 $\mathrm{P}^\circ \leq \mathrm{G}^\circ$。另一方面， P 中的每个元素的有限阶都是 ℓ的幂，而 $\mathrm{G}/\mathrm{G}^\circ$ 是一个 ℓ'-群，因此 $P \leq \mathrm{G}^\circ$。这就证明了该断言。由于 G° 是 G 的正规子群，P 在 G°中是 ℓ-顽固的，因此再次根据 [13, 引理 7]，有 $C_{\mathbf{G}^\circ}(\mathrm{P}) = Z(\mathrm{P})$，从而$C_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/Z(\mathrm{P}) = C_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/C_{\mathbf{G}^\circ}(\mathrm{P}) \leq \mathrm{G}/\mathrm{G}^\circ$是一个有限的 ℓ'-群。这说明 $Z(\mathrm{P})$ 包含 ℓ-阶的所有挠元素，从而 P 在 G 中是 ℓ-中心的。现在，与前一种情况同理，可知 P 是 $\mathcal{F}$-中心的。(d) 的证明至此完成。

现在假设 $P, Q \leq S$是 $\mathcal{F}$-中心化且 $\mathcal{F}$-根基的。如上所述， P和 Q紧密嵌入于 G 中。根据 [5, 引理 9.4(c)]，，存在一个双射

$$\mathrm{Inn}(Q)\backslash\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(P, Q) \longrightarrow \mathrm{Inn}(\mathbf{Q})\backslash\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$$

由典范映射诱导，该映射将 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(P, Q)$ 映到 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$。一方面，$\mathrm{Hom}_{\bar{\mathcal{F}}^{cr}}(P, Q)$ 可识别为 $\mathrm{Inn}(Q)\backslash\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(P, Q)$。另一方面，由 (a)， $C_{\mathbf{G}}(P) \leq Z(P)$，由此可得 $\mathrm{Inn}(\mathrm{Q})\backslash\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ 可识别为 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{R}_\ell(\mathbf{G})}(\mathrm{G}/\mathrm{P}, \mathrm{G}/\mathrm{Q})$。现在由 (d) 可得 (e)。□

作为前一引理的直接推论，我们得到：

引理 2.2. 设 G 是一个紧致连通李群， ℓ 是一个素数， $S \in \mathrm{Syl}_\ell(\mathrm{G})$ 是 G 的一个 Sylow ℓ-子群， $\mathcal{F} = \mathcal{F}_S(\mathrm{G})$。那么

$$\mathbf{w}(\mathcal{F}) = \sum_{\mathbf{P}} z(N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})/\mathbf{P})$$

其中，P 遍历 G 中 ℓ-顽固子群的 G-共轭类代表元集合，而$z(N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P})$ 是 $N_{\mathbf{G}}(\mathrm{P})/\mathrm{P}$ 的零 ℓ-亏格不可约特征的个数。

2.3. 连通约化代数群的融合系统。设 p、 ℓ 是不同的素数，且 G 是定义在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上的连通约化代数群。由于 G 在 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上有一个有限维忠实表示，因此 G 是一个特征为 p 的线性挠群（按照 ℓ 第 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 节中的定义），

因此，根据 $[5,\ \text{定理 } 8.10]$，，G 有一个 Sylow ℓ-子群 S，且 $\mathcal{F}_S$(G) 是一个饱和融合系统。此外，G 是定义在 $\mathbb{Z}$ 上的连通分裂约化代数群概形 $\mathbb{G}$ 的 $\overline{\mathbb{F}}_p$-点群。根据 Friedlander–Mislin 的定理 $[6,\ \text{定理 } 1.4]$，，存在一个 ℓ-完备化分类空间的同伦等价

$$B\mathbb{G}(\mathbb{C})^\wedge_\ell \simeq (B\mathbf{G})^\wedge_\ell.$$

此外，根据 Cartan–Chevalley–Iwasawa–Malcev–Mostow 定理（参见 $[7,$第 XV 章，定理 3.1$]$），$\mathbb{G}(\mathbb{C})$ 有一个极大紧子群 K，并且存在一个同伦等价$B\mathbb{G}(\mathbb{C}) \simeq BK$。因此，

$$BK^\wedge_\ell \simeq B\mathbb{G}(\mathbb{C})^\wedge_\ell \simeq (B\mathbf{G})^\wedge_\ell$$

并且由此，根据 $[5,$ 定理 7.4、8.10 和 9.10$]$，我们得到如下结论 g.

命题 2.3. 使用上述记号，存在一个同构 $S' \cong S$，将 K 的 Sylow ℓ-子群 S' 映至 G 的 Sylow ℓ-子群 S，并诱导出相应融合系统的同构$\mathcal{F}_{S'}(K) \cong \mathcal{F}_S$(G)。

3. Proofs of Theorem 1 and Theorem 2.

我们回顾一下 $[10]$第 7 节中的一些记号。用 $\mathcal{C}$ 表示由严格正整数的有限序列$\mathfrak{c} = (c_1, \dots, c_t)$（包括空序列 ()）构成的集合。对于 $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$，记作 $|\mathfrak{c}| := c_1 + \cdots + c_t$，并令 $G_\mathfrak{c} := \mathrm{GL}_{c_1}(\ell) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_t}(\ell)$。用 $\mathcal{A}(\mathfrak{c})$ 表示 $G_\mathfrak{c} = \mathrm{GL}_{c_1}(\ell) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{c_t}(\ell)$ 的不可约特征集合，其中的特征形式为 $\chi_1 \cdots \chi_t$，且每个 χ_j 都是 $\mathrm{SL}_{c_j}(\ell)$ 的一个 Steinberg 特征在 $\mathrm{GL}_{c_j}(\ell)$ 上的延拓。注意，$|\mathcal{A}(\mathfrak{c})| = (\ell-1)^t$。

我们回顾 Oliver $[13]$ 对经典群中 ℓ-顽固子群的描述。正如 Oliver 已指出的，这类似于文献 $[1]$ 中有限一般线性群和对称群的 ℓ-根基子群的 Alperin–Fong 型分类。

命题 3.1. 设 G 是紧致连通李群 U(n)、Sp(n)、SO($2n+1$) 或 SO($2n$)，$n \geq 1$。设 ℓ 为一个素数，除非 G $=$ U(n)，否则假定它为奇数。若 G $\neq$U(n)，令 $\mathcal{X}$ 表示满足下列条件的函数集合

$$f : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N}$$

使得 $\sum_{(\gamma,\mathfrak{c})} \ell^{|\gamma|+|\mathfrak{c}|} f(\gamma, \mathfrak{c}) = n$。若G $=$U(n)，令 $\mathcal{X}$ 表示上述函数集合 f 中还满足性质 $f(0, ()) \neq 2$、若 $\ell = 2$ 则为 4，且若$\ell = 3$ 则 $f(0, ()) \neq 3$ 的函数所构成的子集。G 中 ℓ-顽固子群的 G-共轭类集合与满足下列条件的 $\mathcal{X}$ 之间存在双射：设 P $\leq$ G 是一个 ℓ-顽固子群，其共轭类对应于 $f \in \mathcal{X}$。

（a）如果 G $=$ U(n)，那么

$$N_\mathbf{G}(\mathbf{P})/\mathbf{P} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_\mathfrak{c}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})}.$$

(b) 如果 G $=$ Sp(n) 或 G $=$ SO($2n+1$)，那么

$$N_\mathbf{G}(\mathbf{P})/\mathbf{P} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_\mathfrak{c}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})}.$$

(c) 如果 $\mathbf{G} = \mathrm{SO}(2n)$，那么 $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})/\mathbf{P}$ 与以下子群同构

$$\prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})}$$

由 C_2 分量中非平凡项数量为偶数的那些元素组成。

证明。对于 $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$ 和非负整数 γ，令 $\mathbf{R}_{\gamma,\,\mathfrak{c}}$ 表示在 [13, 定义 2] 中定义的 $\mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$ 的不可约子群 $\Gamma^U_{\ell^\gamma} \wr E_{\ell^{\mathfrak{c}_1}} \wr \cdots \wr E_{\ell^{\mathfrak{c}_t}}$。我们通过标准嵌入 $\mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \leq \mathrm{Sp}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$（相应地，$\mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \leq \mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$），将 $\mathbf{R}_{\gamma,\,\mathfrak{c}}$ 视为 $\mathrm{Sp}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$（相应地，$\mathrm{SO}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$）的子群。根据 [13, 定理 6],

$$N_{\mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}} \cong \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}},$$
$$N_{\mathrm{Sp}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}} \cong C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}},$$

and

$$N_{\mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}} \cong C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}.$$

此外，从 [13, 定理 6] 的证明可以验证，$\mathrm{Sp}^{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}$ 在 $N_{\mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\,\mathfrak{c}})$ 中的完全原像包含于 $\mathrm{SO}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$，并且 C_2 因子的生成元提升为 $\mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$ 中行列式为 -1 的元素，具体而言，是一个阶为 2、以 -1 为特征值且其重数为 $\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}$ 的元素。

若 $\mathbf{R}$ 是由 m 个 $\mathbf{R}_{\gamma,\,\mathfrak{c}}$ 经由以下方式对角嵌入得到的直积

$$\mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \times \cdots \times \mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \leq \mathrm{U}(m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}),$$

then

$$N_{\mathrm{U}(m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R})/\mathbf{R} \cong (N_{\mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_m \cong (\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_m$$

其中 $\mathfrak{S}_m$ 对因子进行通常的置换。类似地，将 $\mathbf{R}$ 视为经由 $\mathrm{Sp}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^m \leq \mathrm{Sp}(m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$ 对角嵌入的子群，则

$$N_{\mathrm{Sp}(m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R})/\mathbf{R} \cong N_{\mathrm{Sp}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}} \wr \mathfrak{S}_m \cong (C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_m$$

并将 $\mathbf{R}$ 视为经由 $\mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^m \leq \mathrm{O}(2m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$ 对角嵌入的子群，则 en

$$N_{\mathrm{O}(2m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R})/\mathbf{R} \cong N_{\mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}} \wr \mathfrak{S}_m \cong (C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_m.$$

注意，由于正交情形下 $\mathbf{R}_{\gamma,\,\mathfrak{c}}$ 的底层空间是偶数维的，$\mathfrak{S}_m$ 中的元素可提升为 $\mathrm{O}(2m\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})$ 中行列式为 1 的元素。

假设 $\mathbf{G} = \mathrm{U}(n)$。那么 (a) 可由 [13, 定理 6 和 8]（另见 [13] 的定义 2 最后一部分）推出，其中 $\mathcal{X}$ 与 ℓ-顽固子群的 $\mathbf{G}$-共轭类之间的双射将 $f \in \mathcal{X}$ 送到

$$\mathbf{P} = \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}}^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{U}(f(\gamma,\mathfrak{c})\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \leq \mathrm{U}(n),$$

其中，最后一个包含关系是通过 $\mathrm{U}(n)$ 所对应向量空间的分解得到的，并且

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})/\mathbf{P} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} N_{\mathrm{U}(f(\gamma,\mathfrak{c})\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})}(\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}}^{f(\gamma,\mathfrak{c})})/\mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}}^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})},$$

证明 (a)。对于 $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}(n)$ 的情形，证明完全类似。

ˆ 假设 G = SO($2n$)，并令 G ˆ = O($2n$)。由于 G 是 G ˆ 的指数为 2 的连通分支，且 ℓ 为奇数，因此 G 的 ℓ-顽固子群集合与 G ˆ 的相同。根据 [13, 定理 6 和 8]，ℓ-顽固子群的 G-共轭类与 $\mathcal{X}$ 一一对应，方式与上述相同，其中

$$\mathbf{P} = \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}}^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{O}(2f(\gamma,\mathfrak{c})\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \leq \mathrm{O}(2n)$$

and

$$N_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{P})/\mathbf{P} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{O}(2f(\gamma,\mathfrak{c})\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|}) \leq \mathrm{O}(2n).$$

根据上述描述可知，$N_{\mathbf{G}}$(P) 是 (c) 的陈述中所述的 $N_{\hat{\mathbf{G}}}$(P) 的指数为 2 的子群，特别是，P 的 G-共轭类与 P 的 G-共轭类相同。这就证明了 (c)。

ˆ ˆ 最后，假设 G = SO($2n+1$)，并令 G ˆ = O($2n+1$)。由于 G ˆ = G×$\{\pm I\}$且 ℓ 为奇数，G 中 ℓ-顽固子群的 G-共轭类与 G 中 ℓ-顽固子群的 G-共轭类相同。根据 [13, 定理 6 和 8]，，G 中 ℓ-顽固子群的 G-共轭类与$\mathcal{X}$ 一一对应，方式与上文相同，其中

$$\mathbf{P} = \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathbf{R}_{\gamma,\mathfrak{c}}^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{U}(\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathrm{O}(2\ell^{\gamma+|\mathfrak{c}|})^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \leq \mathrm{O}(2n) \times \mathrm{O}(1) \leq \mathrm{O}(2n+1)$$

and

$$N_{\hat{\mathbf{G}}}(\mathbf{P})/\mathbf{P} \cong \Big(\prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (C_2 \times \mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})}\Big) \times \mathrm{O}(1) \leq \mathrm{O}(2n) \times \mathrm{O}(1) \leq \mathrm{O}(2n+1).$$

这里注意，O(1) ≅ C_2。典范满射$N_{\hat{\mathbf{G}}}$(P)/P → $N_{\hat{\mathbf{G}}}$(P)/(P × O(1)) 在限制到 $N_{\mathbf{G}}$(P)/P 后是一个同构，这就证明了 (b)。□

定理 3.2. 设 G 是紧致连通李群 U(n)、Sp(n) 或 SO(n)，$n \geq 1$。设 ℓ 为素数，除非 G = U(n)，否则假设其为奇数；$S \in \mathrm{Syl}_\ell(\mathbf{G})$ 是 G 的一个 Sylow ℓ-子群，$\mathcal{F} = \mathcal{F}_S$(G) 是相应的融合系统，而 W 是 G 的魏尔群。那么，

$$\mathbf{w}(\mathcal{F}) = |\mathrm{Irr}(W)|.$$

证明。由引理 2.2 可得

$$\mathbf{w}(\mathcal{F}) = \sum_{\mathbf{P}} z(N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})/\mathbf{P})$$

其中，P 遍历 G 中 ℓ-顽固子群的 G-共轭类的代表元，而 $z(N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})/\mathbf{P})$ 是 $N_{\mathbf{G}}$(P)/P 中零 ℓ-亏缺的不可约特征的个数。

首先假设 G = U(n)。令 $\mathcal{X}$ 如命题 3.1 中所述，令 $f \in \mathcal{X}$，并令 P 为 G 的一个对应于 f 的 ℓ-顽固子群。$\mathrm{GL}_c(\ell)$ 或 $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell)$ 中零 ℓ-亏损的特征只有 Steinberg 特征，而 $\mathrm{Sp}_{2\gamma}(\ell)$ 有唯一的 Steinberg 特征，我们

将其记作 χ_γ。因此，由命题 3.1(i) 和 [10, 命题 9.3], ，P 所贡献的权与下列集合双射

$$\mathcal{W}_f := \Big\{ w : \bigcup_{(\gamma,\mathfrak{c})} \{\chi_\gamma\} \times \mathcal{A}(\mathfrak{c}) \to \{\ell\text{-cores}\} \quad \text{with} \sum_{\varphi \in \{\chi_\gamma\}\times\mathcal{A}(\mathfrak{c})} |w(\varphi)| = f(\gamma,\mathfrak{c}) \Big\}.$$

令 f 遍历 $\mathcal{X}$，并将 $\{\chi_\gamma\} \times \mathcal{A}(\mathfrak{c})$ 与 $\mathcal{A}(\mathfrak{c})$ 等同，我们看到 $\mathcal{F}$ 的权集与赋值集合 $\mathcal{W}$ 之间存在双射

$$w : \mathbb{N} \times \bigcup_{\mathfrak{c}\in\mathcal{C}} \mathcal{A}(\mathfrak{c}) \to \{\ell\text{-cores}\}$$

使得

$$\sum_{\mathfrak{c}} \sum_{(\gamma,\varphi)\in\mathbb{N}\times\mathcal{A}(\mathfrak{c})} \ell^{\gamma+|c|} |w(\gamma,\varphi)| = n.$$

这里请注意，命题 3.1(a) 中对 $\mathcal{X}$ 的限制并不起作用。由 [10,引理 7.15], （取 $e = r = 1$ ）以及 [10] 第 7 节末尾定理 4.2 的证明中的论证可知， $G(1, 1, n) \cong \mathfrak{S}_n$的 $\mathcal{F}$-权的数量等于 U(n) 的魏尔群的普通不可约特征标的数量。

接下来设 G $=$ Sp(n) 或 SO($2n + 1$)。令 $\mathcal{X}$ 如命题 3.1 中所述，令$f \in \mathcal{X}$，并令 P 为与 f对应的 G 的一个 ℓ-顽固子群。由于 ℓ 为奇数， C_2 的所有不可约特征标均为 ℓ-缺陷 0，由命题 3.1(b) 及[10, 命题 9.3] 可知，P 所贡献的权与集合之间存在双射

$$\tilde{\mathcal{W}}_f := \Big\{ w : \bigcup_{(\gamma,\mathfrak{c})} \{\chi_\gamma\} \times C_2 \times \mathcal{A}(\mathfrak{c}) \to \{\ell\text{-cores}\} \quad \text{with} \sum_{\varphi \in \{\chi_\gamma\}\times C_2\times\mathcal{A}(\mathfrak{c})} |w(\varphi)| = f(\gamma,\mathfrak{c}) \Big\}.$$

令 f 遍历 $\mathcal{X}$，并将 $\{\chi_\gamma\} \times C_2 \times \mathcal{A}(\mathfrak{c})$ 与 $C_2 \times \mathcal{A}(\mathfrak{c})$ 等同起来，可得˜ $\mathcal{F}$-权的集合与以下赋值的集合 $\mathcal{W}$ 之间存在双射

$$w : \mathbb{N} \times C_2 \times \bigcup_{\mathfrak{c}\in\mathcal{C}} \mathcal{A}(\mathfrak{c}) \to \{\ell\text{-cores}\}$$

满足

$$\sum_{\mathfrak{c}} \sum_{(\gamma,x,\varphi)\in\mathbb{N}\times C_2\times\mathcal{A}(\mathfrak{c})} \ell^{\gamma+|c|} |w(\gamma,x,\varphi)| = n.$$

与前一种情形一样，将 [10, 引理 7.15]应用于 $e = 2$、 $r = 1$ ，并以 $\mathcal{W}$ 代替˜$\mathcal{W}$ ，再根据 [10] 定理 4.2 的证明中的论证，可得 $\mathcal{F}$-权的数量等于$G(2, 1, n) \cong W(C_n) = W($ B_n) 的普通不可约特征标的数量。

˜现在假设 G $=$ SO($2n$)，并令 $f, \mathcal{W}_f$ 如上所定义。令 C_2 通过 $y.w(\gamma, x, \varphi) := w(\gamma,$ $y + x, \varphi)$ 作用于˜ ˜$\mathcal{W}_f$，其中 $y \in C_2$, $w \in \mathcal{W}_f$且 $(\gamma, x, \varphi) \in \mathbb{N} \times C_2 \times \mathcal{A}$。由命题 3.1(c) 以及将 $N_{\mathrm{O}(2n)}$(P)/P 替代 G 、将 $N_{\mathrm{SO}(2n)}$(P)/P 替代 M应用的 [10, 命题 9.3], 可知，P 贡献的权由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-轨道˜$\mathcal{W}_f$ 标记，每个轨道贡献的权数等于轨道中一点的稳定子的阶数。同样，让 f遍历 $\mathcal{X}$的所有元素，可得 $\mathcal{F}$-权由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-轨道 $\mathcal{W}$ 标记，每个轨道贡献的权数等于轨道中一点的稳定子˜的阶数，其中 C_2 如上所述作用于 $\mathcal{W}_f$ ，即通过˜$y.w(\gamma, x, \varphi) := w(\gamma, y + x, \varphi)$ 作用，其中 $y \in C_2$, $w \in \mathcal{W}_f$且 $(\gamma,$ $x, \varphi) \in \mathbb{N} \times C_2 \times \mathcal{A}$。与前面一样,

˜由将 $e = 2, r = 2$ 以及 $\mathcal{W}$ 替代 $\mathcal{W}$ 应用的 [10, 引理 7.15]，并根据 [10] 中定理 4.2 证明的论证，可得 $\mathcal{F}$-权的数量等于 $G(2, 2, n) \cong W(D_n)$ 的普通不可约特征标数量。□

定理 1 的证明。我们再次使用引理 2.2。根据 [8, 引理 1.5(ii)], , G 的任意 ℓ-顽固子群都包含 Z(G)，而包含 Z(G) 的子群 P ≤G 是 ℓ-顽固的¯ ¯，当且仅当 P := P/Z(G) 是 G := G/Z(G) 的一个 ℓ-顽固子群。对于任意包含 Z(G) 的¯ ¯ ¯P ≤ G, $N_{\mathbf{G}}$(P)/P ≅ $N_{\bar{\mathbf{G}}}$(P)/P，且 G 和 G 的魏尔群同构。因此，我们可以假设 Z(G) = 1，从而 G 是若干单紧李群的直积。根据 [8, 引理 1.5(i)], , 紧致连通李群直积的 ℓ-顽固子群，正是各因子中 ℓ-顽固子群的直积；并且按直因子分解与共轭、正规化子和魏尔群相容，因此我们可以假设 G 是单群。

首先假设 G 是经典型，因此 $\ell \geq 3$。再次应用上述论证，我们可以假设 G 是群 U(n)、Sp(n)、SO($2n + 1$) 或 SO($2n$) 之一，由定理 3.2 可得结论。现在假设 G 是例外群。先假设 G 的魏尔群是一个 ℓ'-群。那么 G 的每个 ℓ-环面子群都包含在 G 的某个极大环面中；根据引理 2.1(a)，G 的 ℓ-顽固子群只有极大环面，结论显然成立。因此剩下的情形只有 G = E_6 with$\ell = 5$、G = E_7 with $\ell = 5$、7 和 G = E_8 with $\ell = 7$。下一条命题将处理这些情形。请注意，在所有这些情形中，W 的 Sylow ℓ-子群都是循环群。□

命题 3.3. 设 G = E_n for $n \in \{6, 7, 8\}$，且 ℓ 是一个整除|W(G)|的好素数。那么 w($\mathcal{F}_\ell$(G)) = |Irr(W)|，其中 $\mathcal{F}_\ell$(G) 表示 G 的 ℓ-融合系统。

证明. 融合系统 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\ell$(G) 已在 [14, 定理 B(c)] 中计算，其结构见 [14, 表 5.1]。除 $\{S\}$ 和 $\{T\}$ 外，还有一个类别 $\mathcal{B} = E^{\mathcal{F}}$ 的$\mathcal{F}$-中心根基子群，其满足 $E \cong \ell_+^{1+2}$。现在 Out$_{\mathcal{F}}$(T) = W(G)，而 [15, 定理 4.5]表明，这确定了其余 $P \in \mathcal{F}^{cr}$对应的 Out$_{\mathcal{F}}$(P)。由此可得，Out$_{\mathcal{F}}$(P) 和 $z = z$(Out$_{\mathcal{F}}$(P)) 如下表所示：

(n, ℓ)	S	z	T	z	E	z | |不可约表示(W(G))|
(6, 5)	$C_4 \times C_2$	**8**	W	**15**	SL$_2$(5).2	**2** | 25
(7, 5)	$C_4 \times C_2 \times \mathfrak{S}_3$	**24**	W	**30**	SL$_2$(5).2 $\times \mathfrak{S}_3$	**6** | 60
(7, 7)	$C_6 \times C_2$	**12**	W	**46**	SL$_2$(7).2	**2** | 60
(8, 7)	$C_6 \times (C_2)^2$	**24**	W	**84**	SL$_2$(7).2 $\times C_2$	**4** | 112

等式由此成立。□

定理 2 的证明。这可由命题 2.3 和定理 1 直接得出 . □

4. Bad primes

命题 4.1。设 G = Sp(n)，其中 $n \geq 2$ 和 $\ell = 2$。那么 w($\mathcal{F}$) < |Irr(W)|.

¯证明。对于 $\gamma \in \mathbb{N}$ 和 $\mathfrak{c} \in \mathcal{F}$，令 S$_{\gamma,\ \mathfrak{c}}$（分别令 S$_{\gamma,\ \mathfrak{c}}$）表示 [13, 定义 2] 中定义的 Sp($2^{\gamma+|\mathfrak{c}|}$) 的不可约子群$\Gamma_{2^\gamma}^{\mathrm{Sp}} \wr E_{2^{c_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{c_t}}$（分别为 $\bar{\Gamma}_{2^\gamma}^{\mathrm{Sp}} \wr E_{2^{c_1}} \wr \cdots \wr E_{2^{c_t}}$）。

根据 [13, 定理 6 和 8], , G 的 2-顽固子群的 G-共轭类与函数有序对 (f, f') 的集合之间存在双射，其中

$$f : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N} \quad \text{and} \quad f' : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N}$$

满足

$$\sum_{(\gamma,\mathfrak{c})} 2^{\gamma+|\mathfrak{c}|} f(\gamma, \mathfrak{c}) + \sum_{(\gamma',\mathfrak{c}')} 2^{\gamma'+|\mathfrak{c}'|} f'(\gamma', \mathfrak{c}') = n$$

且 $f'((0, ())) \neq 2, 4$。若 $\mathbf{P} \leq \mathbf{G}$ 是对应于 (f, f') 的 2-顽固子群，则

$$\mathbf{P} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} \mathbf{S}_{\gamma,\mathfrak{c}}^{f(\gamma,\mathfrak{c})} \times \prod_{(\gamma',\mathfrak{c}')} \bar{\mathbf{S}}_{\gamma',\mathfrak{c}'}^{f(\gamma',\mathfrak{c}')}$$

and

$$N_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})/\mathbf{P} \cong \prod_{(\gamma,\mathfrak{c})} (\mathrm{GO}^-_{2\gamma+2}(2) \times G_{\mathfrak{c}}) \wr \mathfrak{S}_{f(\gamma,\mathfrak{c})} \times \prod_{(\gamma',\mathfrak{c}')} (\mathrm{Sp}_{2\gamma'}(2) \times G_{\mathfrak{c}'}) \wr \mathfrak{S}_{f'(\gamma',\mathfrak{c}')}.$$

现在，$\mathrm{GO}_2^-(2) \cong \mathfrak{S}_3$ 有唯一一个 2-亏缺为 0 的不可约特征，而当 $\gamma \geq 1$ 时，$\mathrm{GO}^-_{2\gamma+2}(2)$ 没有 2-亏缺为 0 的不可约特征，因此，基子群 $\mathrm{GO}^-_{2\gamma+2}(2) \times G_{\mathfrak{c}}$ 在 $\gamma = 0$ 时有唯一一个 2-亏缺为 0 的不可约特征，在 $\gamma \geq 1$ 时则没有。对于所有 $\gamma' \geq 0$，基子群 $\mathrm{Sp}_{2\gamma'}(2) \times G_{\mathfrak{c}'}$ 都有唯一一个 2-亏缺为 0 的不可约特征。此外，当 m 是三角数时，对称群 $\mathfrak{S}_m$ 有一个 2-亏缺为 0 的块，否则没有。由此及 [5, 引理 8.4], 可知，当 $\gamma = 0$ 且 f 和 f' 的值（包括 0）都是三角数时，$\mathbf{P}$ 的权贡献为 1，否则为 0。因此， $\mathcal{F}$-权的数量等于函数对 (f, f') 的数量

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{N} \quad \text{and} \quad f' : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N}$$

使得

$$\sum_{\mathfrak{c}} 2^{|\mathfrak{c}|} f(\mathfrak{c}) + \sum_{(\gamma',\mathfrak{c}')} 2^{\gamma'+|\mathfrak{c}'|} f'(\gamma', \mathfrak{c}') = n$$

并且 f 和 f' 的所有取值都是三角数。另一方面，利用奇数 ℓ 情形的分析，并注意到当 $\ell = 2$时， $\mathcal{A}(\mathfrak{c})$ 是单元素集，且 2-核的集合与三角数的集合之间存在双射，我们得到 n 的双分拆数，即 $|\mathrm{Irr}(W)|$，等于满足下列条件的函数对 (f, f') 的数量

$$f : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N} \quad \text{and} \quad f' : \mathbb{N} \times \mathcal{C} \to \mathbb{N}$$

使得

$$\sum_{(\gamma,\mathfrak{c})} 2^{|\gamma|+|\mathfrak{c}|} f(\gamma, \mathfrak{c}) + \sum_{(\gamma',\mathfrak{c}')} 2^{\gamma'+|\mathfrak{c}'|} f'(\gamma', \mathfrak{c}') = n$$

并且 f 和 f' 的所有取值都是三角数。因此，对于所有 $n \geq 2$，权的数量都严格小于 $|\mathrm{Irr}(W)|$。□

例 4.2. 对于 $n = 2$，我们得到 $\mathrm{Sp}(2)$ 的 4 个权，即对应于 $((1); (0, ()))$ 的 $f = 1$、对应于 $((); (0, ()))$ 的 $f = f' = 1$、 $((); (1, ()))$ 以及对应于 $f = 0, f' = 1$ 的 $((); (0, (1)))$，因此由定理 2 的证明可得， $4 = \mathrm{w}(\mathcal{F}) < |\mathrm{Irr}(W(\mathbf{G}))| = 5$，其中 $\mathbf{G}$ 是 $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上类型为 C_2 的单代数群，而 $\mathcal{F}$ 是其 2-融合系统。然而请注意，如果 $\mathcal{F}$ 是 $\mathrm{CSp}_4(q)$ 的 2-融合系统，且 $\nu_2(q-1) > 2$，则有五个 $\mathcal{F}$-中心化根基

子群，每个子群各贡献一个权（因此 $\mathsf{w}(\mathcal{F}) = 5$），但其中两个子群在 $\mathrm{CSp}_4(q^2)$ 中融合。

例 4.3。设 G 是定义在奇特征域上的辛型或奇数维正交型连通约化群，且 $F : G \to G$ 是一个 Frobenius 映射。那么，G^F 的主 2-块的 2-权数目 $\mathsf{w}(\mathcal{F})$ 等于 G^F 的幺正共轭类数（一般情形见 [2, 命题 (2A)]）。现在，Springer 对应定义了一个从 $\mathrm{Irr}(W)$ 到 G^F 的幺正共轭类集合的单射，因此我们得出 $\mathsf{w}(\mathcal{F}) \geq |\mathrm{Irr}(W)|$。事实上，由于 Springer 对应通常不是满射，当秩足够大时，我们有 $\mathsf{w}(\mathcal{F}) > |\mathrm{Irr}(W)|$。例如，对于类型 B_4 或类型 C_6 的 G，我们有 $\mathsf{w}(\mathcal{F}) = |\mathrm{Irr}(W)| + 1$。

命题 4.4. 假设 $G = G_2$。那么，对于所有素数 ℓ，$\mathsf{w}(\mathcal{F}) = |\mathrm{Irr}(W)| = 6$。

证明. 若 $\ell > 3$，则由定理 3.2 可得结论。G 的 2-顽固子群和 3-顽固子群已在 [9, 引理 3.2] 中确定。2-顽固子群 P 有六个类，其中 $N(P)/P$ 分别同构于 1、$\mathfrak{S}_3$（其中三个类）、$\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ 和 $\mathrm{GL}_3(2)$。每一类都贡献一个权。3-顽固子群 P 有两个类，其中 $N(P)/P$ 分别同构于 $C_2 \times C_2$ 和 $\mathrm{GL}_2(3)$。前者贡献 4 个权，后者贡献 2 个权。□

命题 4.5. 假设 $G = F_4$。那么，对于 $\ell = 3$，$\mathsf{w}(\mathcal{F}) = 22 < |\mathrm{Irr}(W)| = 25$。

证明。G 的 3-顽固子群已在 [16, 命题 3.6] 中确定：共有七个共轭类，其对应的自同构群分别为 D_8、$(C_2 \times \mathrm{Sp}_2(3)).2$（两次）、$\mathrm{Sp}_2(3) \wr 2$、$\mathrm{GL}_2(3)$、$\mathrm{SL}_3(3)$ 和 $W(F_4)$。这些子群对应的权数分别为 5、4（两次）、2、2、1、4，总计 22。□

References

[1] J. Alperin, P. Fong, 《对称群与一般线性群的权》。《代数杂志》131 (1990)，2–22。[2] J. An, M. Conder, 关于有限经典群的 2-权数目、幺正共轭类及不可约 Brauer 2-特征标。Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995)，2297–2304。[3] E. Belmont, N. Castellana, J. Grbić, K. Lesh, M. Strumila, 紧李群中离散 p-环面子群链的正规化子。Topology Appl. 316 (2022)，论文编号 108101[4] C. Broto, J. Møller, B. Oliver, 李型有限群融合系统之间的等价。J. Amer. Math. Soc. 25 (2012)，1–20。[5] C. Broto, R. Levi, B. Oliver, 紧李群与 p-紧群的 p-局部同伦理论的离散模型。Geom. Topol. 11 (2007)，315–427。[6] E. M. Friedlander, G. Mislin, 复李群分类空间及相关离散群的上同调。Comment. Math. Helv. 59 (1984)，347–361。[7] G. Hochschild, 《李群的结构》。Holden-Day Inc.，旧金山，1965。[8] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver, 经由 G-作用对 BG 自映射的同伦分类。I。Ann. of Math. (2) 134 (1992)，183–226。[9] S. Jackowski, J. McClure, B. Oliver, 重探分类空间之间的映射。《切赫百年纪念文集》，Contemp. Math. 181，Amer. Math. Soc.，1995，263–285。[10] R. Kessar, G. Malle, J. Semeraro, ℓ-紧群与 spetses 的权猜想。预印本。arXiv:2003.07213，2020。[11] M. Linckelmann, 《有限群代数的块论》。第2卷。London Math. Soc. Students Texts，91，剑桥大学出版社，剑桥，2018。

[12] G. Malle, D. Testerman, 《线性代数群与李型有限群》。剑桥高等数学研究丛书，133，剑桥大学出版社，剑桥，2011。[13] B. Oliver, p，经典紧致李群的僵固子群。J. Pure Appl. Algebra 92 (1994)，55–78。[14] B. Oliver, A. Ruiz，阿贝尔子群指数为 p 的 p-群上的约化融合系统：III。《爱丁堡皇家学会会刊》150 (2019)，1–53。[15] J. Semeraro, ℓ-局部紧群的权。预印本。arXiv:2208.12762，2022。[16] A. Viruel，BF4 的模3同伦唯一性。《京都大学数学杂志》41 (2001)，769–793。

Department of Mathematics, University of Manchester, United Kingdom电子邮箱: radha.kessar@manchester.ac.uk

FB Mathematik, TU Kaiserslautern, Postfach 3049, 67653 Kaiserslautern, Germany.电子邮箱: malle@mathematik.uni-kl.de

Heilbronn Institute for Mathematical Research, Department of Mathematics, Uni-versity of Leicester, United Kingdom电子邮箱：jpgs1@leicester.ac.uk