arXiv:2303.05940v1 [math.AP] 10 Mar 2023

分数阶 Sobolev 空间入门

Giovanni Leoni

Department of Mathematical Sciences, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA, 15213 电子邮箱：giovanni@andrew.cmu.edu 网址：http://www.math.cmu.edu/people/fac/leoni.html

2020年数学主题分类。主要分类：46E35；次要分类：26A24、26A27、26A30、26A33、26A45、26A46、26A48、26B30。关键词和短语：分数阶 Sobolev 空间。Sobolev 空间。嵌入。插值不等式。迹理论

NSF.

谨以此书献给 Irene，献上友谊，并缅怀所有大流行病的受害者

目录

序言 xi 第一部分 一维分数阶 Sobolev 空间 第1章 一维分数阶 Sobolev 空间 3 §1.1 一些有用的不等式和恒等式 4 §1.2 分数阶 Sobolev 空间 12 §1.3 延拓 22 §1.4 一些等价半范数 27 §1.5 稠密性 33 §1.6 空间 $W^{s,p}_0(I)$ 38 §1.7 Hardy 不等式 41 §1.8 空间 $W^{s,p}_{00}(I)$ 46 §1.9 注释 48 第2章 嵌入与插值 49 §2.1 嵌入：端点情形 50 §2.2 嵌入：一般情形 64 §2.3 插值不等式 74 §2.4 注释 86 第3章 小波简介 87 §3.1 加权 ℓ^p空间 88 §3.2 L^p 89中的小波 §3.3 L^1 92中的小波

§3.4 $W^{1,1}$ 中的小波 93 §3.5 $W^{s,p}$ 96中的小波 §3.6 回到插值不等式 101 §3.7 注释 107 第4章 重排 109 §4.1 极化 109 §4.2 $W^{s,p}(\mathbb{R})$中的极化 124 §4.3 对称递减重排 127 §4.4 $W^{s,p}(\mathbb{R})$中的对称递减重排 142 §4.5 注释 144 第5章 一维高阶分数阶 Sobolev 空间 145 §5.1 高阶分数阶 Sobolev 空间 145 §5.2 延拓 151 §5.3 稠密性 158 §5.4 一些等价半范数 159 §5.5 Hardy 不等式 165 §5.6 截断 168 §5.7 嵌入 170 §5.8 插值不等式 174 §5.9 注释 181 第二部分 分数阶 Sobolev 空间 第6章 分数阶 Sobolev 空间 185 §6.1 定义与主要性质 185 §6.2 切片 201 §6.3 一些等价半范数 214 §6.4 光滑函数的稠密性 222 §6.5 空间 $W^{s,p}_0$ 及其对偶空间 228 §6.6 Hardy 不等式 234 §6.7 空间 $W^{s,p}_{00}$ 244 §6.8 $W^{s,p}$ 251中的稠密性 §6.9 注释 255 第7章 嵌入与插值 257 §7.1 Campanato 空间 258

§7.2. 嵌入：次临界情形 261 §7.3. 嵌入：临界情形 264 §7.4. 嵌入：超临界情形 275 §7.5. 嵌入：一般情形 277 §7.6. $W^{s,p}$ 的极限，当 $s \to 1^-$ 296§7.7. 插值不等式 300 §7.8. 注记 308 第 8 章. 更多性质 309 §8.1. 延拓：Lipschitz 域 309 §8.2. 延拓：一般情形 313 §8.3. 导数 329 §8.4. 嵌入与插值不等式 331 §8.5. 注记 335 第 9 章. 迹理论 337 §9.1. 加权 Sobolev 空间的迹 337 §9.2. $W^{s,p}$ 349中的迹算子 §9.3. 半空间 355 §9.4. 特殊 Lipschitz 域 361 §9.5. 有界 Lipschitz 域 366 §9.6. 无界 Lipschitz 域 372 §9.7. 注记 384 第 10 章 . 对称化 387 §10.1. 极化 387 §10.2. $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ 中的极化 391 §10.3. 球对称重排 394 §10.4. $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$中的球对称重排 402 §10.5. 注记 405 第 11 章. 高阶分数阶 Sobolev 空间 407 §11.1. 定义 407 §11.2. 一些等价半范数 415 §11.3. 切片 422 §11.4. 嵌入 426 §11.5. 插值不等式 436 §11.6. 叠加 448

§11.7. 延拓 451 §11.8. 迹理论 454 §11.9. 注记 479 第 12 章. 一些等价半范数 481 §12.1. 插值半范数 481 §12.2. Littlewood–Paley 半范数 490 §12.3. 注记 518 第 3 部分. 应用 第 13 章. 泊松问题的内部正则性 521 §13.1. Cacciopoli 不等式 521 §13.2. H^2正则性 525 §13.3. $W^{2,p}$ 正则性 532 §13.4. $W^{s,p}$ 正则性 541 §13.5. 注记 545 第 14 章. 分数阶拉普拉斯算子 547 §14.1. 定义与主要性质 547 §14.2. Riesz 势 556 §14.3. 弱解的存在性 561 §14.4. 一个延拓结果 567 §14.5. 注记 575 参考文献 577 索引 585

序言

什么是分数阶 Sobolev 空间？它们为何重要？陶哲轩在他的博客中对这些问题给出了一个精彩的回答：考虑一个简单函数 u，其形式为 $u = h\chi_E$，其中 $E \subseteq \mathbb{R}^N$ 是一个勒贝格可测集，h 是一个正的常数，那么 L^p 范数 u 可表示为数值 $h(\mathcal{L}^N(E))^{1/p}$，其中 $\mathcal{L}^N(E)$是集合 E的体积。因此，你测量的是函数 u 的高度 h 及其宽度。Sobolev 空间还衡量函数的正则性，以及它振荡的快慢（ u的频率尺度）。

函数 u属于 Sobolev 空间 $W^{1,\,p}(\mathbb{R}^N)$，当且仅当 u属于$L^p(\mathbb{R}^N)$，且其（弱）梯度 ∇u属于 $L^p(\mathbb{R}^N;\,\mathbb{R}^N)$。当 $p = 2$时，可以用傅里叶变换给出一个等价的定义。事实上，你可以验证，u属于 $W^{1,\,2}(\mathbb{R}^N)$，当且仅当其傅里叶变换 $\hat{u}$ 和 $\|\xi\|\hat{u}$ 属于 $L^2(\mathbb{R}^N)$，其中

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla u(x)\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} (2\pi\|\xi\|)^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

为了定义分数阶 Sobolev 空间 $W^{s,2}(\mathbb{R}^N)$，将 $\|\xi\|$ 替换为 $\|\xi\|^s$，其中 $0 < s < 1$。直观地说，这意味着你不再拥有完整的导数，而只有一部分导数。经过一些计算，可以得到以下关系

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{\|x-y\|^{N+s2}} dx = C\int_{\mathbb{R}^N} \|\xi\|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

其中 $C = C(N, s) > 0$。接着，将此定义推广到 $p \neq 2$ 的情形。若函数 $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ 满足以下条件，则称其属于分数阶 Sobolev 空间$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{\|x - y\|^{N+sp}} dx < \infty. \tag{0.1}$$

这一切都相当简洁优美，但仍未回答你为什么应该关注它。事实证明，分数阶 Sobolev 空间在变分法、偏微分方程和调和分析中发挥着核心作用。让我试着解释一下。

1957 年，Gagliardo [Gag57] 证明，当 $1 < p < \infty$时，分数阶 Sobolev 空间 $W^{1-1/p,\,p}(\mathbb{R}^{N-1})$ 是 Sobolev 空间$W^{1,\,p}(\mathbb{R}^N_+)$ 的迹空间，其中 $\mathbb{R}^N_+$开半空间为 $\{x = (x_1, \dots, x_N) : \ x_N > 0\}$。Aronszajn [Aro55]、、Prodi [Pro56]、和 Slobodeckiĭ [Slo58]曾研究过 $p = 2$ 的情形。对于正则函数，迹就是该函数在边界上的限制。这一结果意义重大，因为如果你想证明具有非齐次边界条件的偏微分方程存在弱解，就需要考虑分数阶 Sobolev 空间。重要的例子包括 Poisson 方程或热方程的非齐次 Dirichlet 问题或 Neumann 问题。

如果你想在边界上具有相同非齐次迹的一类函数中寻找某个泛函的极小化子或鞍点，也会遇到同样的情况。这个问题是变分法的核心。

除了用于证明存在性，分数阶 Sobolev 空间在研究偏微分方程解的正则性时也至关重要。设想你已经证明某个微分函数满足微分方程 $u' = f(u)$，其中 f是一个光滑函数。然而，右端 $f(u)$ 是可微函数（根据链式法则），于是你便得知 u' 本身也是可微的。你因此多得到了一阶导数。进而， $f(u)$ 是二阶可微的，并且利用该方程， u' 也变得二阶可微。只要函数 f 足够光滑，你就可以这样继续下去。这个过程称为自举方法。现在，如果你把右端 $f(u)$ 换成更复杂的函数，或者不再考虑常微分方程，而是偏微分方程，那么你可能无法多得到完整的一阶导数。但在某些情况下，你或许能得到分数阶导数。因此，这又引出了分数阶 Sobolev 空间。

举例来说， $\mathbb{R}^3$ 中的 Navier– Stokes 方程解的存在性与光滑性是克雷数学研究所千禧年难题之一。虽然我们距离找到解仍很遥远，但分数阶 Sobolev 空间在 Navier–Stokes 方程理论中发挥了重要作用[BCD11，第 5], [CDGG06，定理 3.5], [LR02，第 5], [Soh01]。

最后，分数阶 Sobolev 空间和 Besov 空间在调和分析与奇异积分中无处不在。事实上，可以利用 Littlewood–Paley 分解来刻画这些空间。从某种意义上说，Besov 情形 $B^{s,p}_q$是分数阶 Sobolev 空间的进阶版本，因为它们多了一个参数 q。当 $0 < s < 1$和 $p = q$,$B^{s,p}_p(\mathbb{R}^N) = W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$。因此，分数阶 Sobolev 空间是 Besov 空间的一个子类。

现在我们来到了一个棘手的问题：为什么我们还需要一本关于分数阶 Sobolev 空间的新书？刻画 Besov 空间和分数阶 Sobolev 空间的方法有好几种。除了式（0.1）给出的内在刻画外，还可以利用抽象插值理论，将 $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ 表示为 $L^p(\mathbb{R}^N)$ 与 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 之间的中间空间。这种方法的优点在于，抽象插值理论能够让你从关于 $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ 的相应定理推出若干定理（例如嵌入定理）。此外，还有 Littlewood–Paley 分解，它蕴含着傅里叶分析的全部威力（例如傅里叶乘子）。顶尖专家能够在不同刻画方式之间游刃有余地切换，从而得到最优雅的证明。从某种意义上说，这确实很棒。我想不出还有哪个领域能让如此不同的学科汇聚一堂。

但与此同时，如果你是一名高年级本科生或刚入学的研究生，阅读俄罗斯文献 [BIN79] 或 Triebel 的专著 [Tri95], [Tri10], [Tri92], [Tri06] 可能会颇具挑战。我写这本书，是为了给高年级本科生（第一部分）和研究生（第二部分）温和地介绍分数阶 Sobolev 空间。从某种意义上说，我的书就像《霍比特人》，而 [BIN79], [Tri95], [Tri10], [Tri92], [Tri06]则是《魔戒》。

除第 12 章外，本书中的所有证明都依赖内在半范数 (0.1)。由于“内在”方法无需借助调和分析，因此更容易应用于我们研究边值问题时遇到的情形。据我所知，迄今为止还没有人将这些内在方法汇集起来。

至于为什么现在写这本书？2007 年，Caffarelli 和 Silvestre 发表了他们的论文 [CS07]，，研究了分数阶拉普拉斯算子的解的性质。他们的文章在 Google Scholar 上有两千多次引用，在数学界激起了涟漪。数学家将椭圆型偏微分方程理论中的若干结果（如粘性解理论、临界点理论等）以及变分法中的若干结果推广到了非局部算子。

我应该明确说明，这本书并非关于分数阶拉普拉斯算子的。我专门用一章讨论它，因为如果考察分数阶半范数 (0.1) 的欧拉–拉格朗日方程，确实会得到分数阶拉普拉斯算子。但我的讨论仅止于此。

随着人们对分数阶拉普拉斯算子兴趣日益浓厚，近期文献中也出现了关于分数阶 Sobolev 空间经典结果的新证明。

大流行病来袭时（2020年3月），我突然发现自己被困在家中，身边还有两只猫（Gauss 和 Hilbert）。在数月的封锁期间，它们让我保持理智，但我却无法专心研究。试想一下，两只猫为了谁能睡在你的腿上而争吵（几个小时！），你又如何集中注意力呢？于是，我转而沉迷于网购（唉）和上网闲逛。没过多久，我偶然读到了 Nguyen、Diaz 和 Nguyen 的论文 [NDN20], ，他们只用极大函数就给出了一个经典的分数阶 Sobolev 空间嵌入定理的新证明。为我的书籍 [Leo09], 第一版撰写 Besov 空间章节时，我曾花了几个月时间在文献中寻找恰恰是这类证明的内容。大多数情况下，我对最终结果并不满意。到了第二版 [Leo17], ，我彻底重写了这一章。我最终还是采用了抽象插值和 Littlewood–Paley理论。但我仍然对此不满意。

因此，当我找到论文 [NDN20], 时，便决定将那个嵌入定理打出来，并发布在我书籍的美国数学学会网站上。我会在那里放上勘误以及自己认为有趣的相关结果。

论文 [NDN20] 让我又读到了另一篇文章 [BN20], ，我也决定把它打出来。之后，我发现了 Mironescu 的精彩综述论文 [Mir18]。于是，便有了我们现在看到的这本几百页的书。

参考文献：这里的经验法则很简单：我只引用自己读过的论文和书籍。我认为，错误引用一篇论文比不引用它更糟。因此，如果一篇有意义且相关的文章没有列入参考文献，那是因为我忘了把它加进去，或者我并不知道它的存在。大多数作者写书是因为他们是某个特定领域的专家，而我写书是因为我想学习一个特定主题。我并不自称精通分数阶 Sobolev 空间。

重要提示：在本书中，表达式

$$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \quad \text{means } \mathcal{A} \leq C\mathcal{B} \tag{0.2}$$

对于某个常数 $C > 0$，它取决于结果陈述中量化的参数（通常是 N、p 和 s），但不取决于

函数及其积分域。此外，

$$\mathcal{A} \approx \mathcal{B} \quad \text{means } \mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \text{ and } \mathcal{B} \preceq \mathcal{A}. \tag{0.3}$$

当需要强调常数 C 对某些参数的显式依赖关系时，我会在 $\preceq$上添加下标。例如，$\preceq_{p,\ s}$ 表示$\leq C$，其中 $C = C(p, s) > 0$。最后，当常数 $C > 0$ 依赖于积分域 $I \subseteq \mathbb{R}$ 或 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$时，我分别写作 $\preceq_I$ 或 $\preceq_\Omega$。

附录、勘误、评论和习题网页：我为这本书写了一些附录 [Leo**22**], [Leo22b], [Leo22c], ，但由于篇幅限制（600 页！），我将它们发布在美国数学学会这本书的网页上。

此外，这么长的一本书难免会有错别字和错误，而作者又有些粗心大意。我将非常感谢那些写信至 giovanni@andrew.cmu.edu 告知所发现错误的读者。美国数学学会为本书开设了一个网页，网址是

http://www.ams.org/bookpages/gsm-229/

可在此找到更新、勘误及其他资料。

致谢：我深深感激 Ian Tice；每当我在证明中遇到难题时，他总是我求助的对象。可惜对他来说，我遇到难题的次数实在太多了！我还要感谢 Kerrek Stinson 阅读本书的部分内容，并提出许多宝贵的勘误。Maria Giovanna Mora 和 Massimiliano Morini 校读了一些较为精细的证明。谢谢！我与几位本科生合作完成了本书的部分内容：Andrew Chen、Jiewen Hu、Khunpob Sereesuchart、Braden Yates 和 Grant Yu。希望他们和我一样乐在其中！我要感谢 Xavier Ros-Oton 和匿名审稿人提供的反馈，以及 Filippo Cagnetti 和 Tomasz Tkocz 与我进行的有益交流。

在准备本书期间，我得到了 AMS 出版社的 Ina Mette、制作编辑 Jennifer Wright Sharp，以及所有与我有过接触的 AMS 员工的持续帮助和技术支持，对此我深表感激。

本研究部分由美国国家科学基金会通过 DMS-1714098 和 2108784 号资助项目提供支持。

此外，我还要衷心感谢卡内基梅隆大学馆际互借部门的所有工作人员，他们迅速帮我找到了所需的文章。书籍封底的照片由 Kevin Lorenzi 拍摄。

Giovanni Leoni

参考文献

[Aro55] N. Aronszajn, *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral*, 偏微分方程会议，堪萨斯大学，1954年夏（1955），77–93.[BCD11] H. Bahouri, J. Y. Chemin, 和 R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations* 343, , 数学科学基础原理，第 卷。施普林格，海德堡，2011。MR2768550[BIN79] O. V. Besov, V. P. Il'in, 和 S. M. Nikol'ski ˘ *Integral representations of functions and* ı, , *imbedding theorems. Vol. II* V. H. Winston & Sons，华盛顿特区；Halsted Press[约翰·威立父子公司], 纽约-多伦多（安大略省）-伦敦，1979。MR521808[BN20] E. Bru ´ *On the Sobolev space of functions with derivative of logarithmic order* **9** 2020 1, 836 849 3995732 e 和 Q. H. Nguyen, , Adv. Nonlinear Anal. ( ), no. – . MR[CDGG06] J. Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, 和 E. Grenier, *Mathematical geophysics*, 牛津数学及其应用讲座丛书，第32卷，克拉伦登出版社，牛津大学出版社，牛津，2006。MR2228849[CS07] L. A. Caffarelli 和 L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian* **32** 2007 7 9, 1245 1260 2354493 , Comm. Partial Differential Equations ( ), no. , – . MR[Gag57] E. Gagliardo, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* **27** 1957 284 305 102739 , Rend. Sem. Mat. Univ. Padova ( ), – . MR[Leo09] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, 数学研究生教材，第105卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009。MR2527916[Leo17] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*, 第二版，数学研究生教材，第181卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2017。MR3726909[Leo22a] G. Leoni, *A first course in fractional Sobolev spaces. Appendix A: Functional analysis* (2022). http://www.ams.org/bookpages/gsm-229/[Leo22b] G. Leoni, *A first course in fractional Sobolev spaces. Appendix B: Measure and integration* 2022 http://www.ams.org/bookpages/gsm-229/ ( ). .[Leo22c] G. Leoni, *A first course in fractional Sobolev spaces. Appendix C: Sobolev spaces* (2022). http://www.ams.org/bookpages/gsm-229/.[LR02] P. G. Lemari´e-Rieusset, *Recent developments in the Navier-Stokes problem*, Chapman & Hall/CRC 数学研究札记，第431卷，Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2002。MR1938147[Mir18] P. Mironescu, *The role of the Hardy type inequalities in the theory of function spaces*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 63 (2018), no. 4, 447–525. MR3892576

[NDN20] A. D. Nguyen, J. I. D
´ *Fractional Sobolev inequalities revisited:* ıaz, 和 *the maximal function approach* **31** Q. H. Nguyen, , Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. (2020), no. 1, 225–236. MR4082937[Pro56] G. Prodi, *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 26 (1956), 36–60. MR84540[Slo58] L. N. Slobodecki
˘ *S. L. Sobolev's spaces of fractional order and their application to* ı, , Dokl. *boundary problems for partial differential equations* Akad. Nauk SSSR (N.S.) 118 (1958), 243–246. MR0106325[Soh01] H. Sohr, *The Navier-Stokes equations. An elementary functional analytic approach*, Modern Birkh¨ auser Classics, Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2001。2001年原版于2013年重印。MR3013225[Tri06] H. Triebel, *Theory of function spaces. III*, Monographs in Mathematics, 第100卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2006。MR2250142[Tri10] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Modern Birkh¨auser Classics，Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2010。MR3024598[Tri92] H. Triebel, *Theory of function spaces. II*, Monographs in Mathematics，第84卷，Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，1992。MR1163193[Tri 95] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, 第二版，Johann Ambrosius Barth，海德堡，1995。MR1328645[1]

[1]这并非完整的参考文献，仅包含序言中引用的文章和书籍