arXiv:2303.05941v1 [gr-qc] 10 Mar 2023

可真等距嵌入闵可夫斯基时空的洛伦兹流形

E. Minguzzi*

摘要

我刻画了可真等距嵌入闵可夫斯基时空的洛伦兹流形（即闵可夫斯基时空中同时为闭合子集的洛伦兹子流形）。此外，我证明了可正规共形嵌入闵可夫斯基时空的洛伦兹流形恰好就是全局双曲时空。最后，利用这一嵌入，我得到了距离公式的无穷小版本。

1 引言

在本文中，我们研究如何刻画闵可夫斯基时空中拓扑闭合的连通洛伦兹子流形，或刻画其共形结构这一问题。

首先介绍一些术语和记号会很方便。我们对洛伦兹号差的约定为 $(-,+,\cdots,+)$。时空 是维数为 n 的连通、定向时间的洛伦兹流形（满足第二可数公理且为豪斯多夫空间）。时空 (M,g) 上的向量 v 若满足 $g(v,v)\leq 0$ 且 $v\neq 0$，则称为因果的或非类空；若严格不等式成立，则称为类时。对于 v 因果向量，我们也可以写作 $\|v\|_g:=\sqrt{-g(v,v)}$。$N+1$ 维闵可夫斯基时空记为 $\mathbb{L}^{N+1}$，其度量为 $\eta^{(N+1)}$。

回顾一下，若 C^1 函数 $f\colon M\to\mathbb{R}$ 具有过去指向的类时梯度，或者等价地，若 $\mathrm{d}f$ 在未来指向因果向量上为正，则称其为时间函数；若对每个未来指向因果向量 v 都满足 $\mathrm{d}f(v)\geq\sqrt{-g(v,v)}$，则称其为陡峭（若不等式严格成立，则称为严格陡峭），或者等价地，[18, 定理1。23], 若 f 是时间函数且 $\|\nabla^g f\|_g\geq 1$，则称其为 h-陡峭；此时,一对每个未来指向因果向量 v，都有 $\mathrm{d}f(v)\geq\sqrt{h(v,v)}$，其中 h 是一个黎曼度量。

若在拓宽锥的同时仍能保持因果性条件（即不存在闭合因果曲线），则称时空是稳定因果的；等价地，若因果性这一性质在度量 [13]的 C^0 拓扑下是稳定的，也称该时空为稳定因果时空。时空存在时间函数，当且仅当它是稳定因果的 [4–6, 9, 11, 17]。

*Dipartimento di Matematica e Informatica “U. Dini”，佛罗伦萨大学，Via S. Marta 3, I-50139 Firenze，意大利。电子邮件：ettore.minguzzi@unifi.it。`

若因果性和洛伦兹距离的有限性在度量 [17]的 C^0 拓扑下均稳定，则称时空是稳定的。

显然，嵌入闵可夫斯基时空的连通洛伦兹流形继承了闵可夫斯基时空的时间定向。因此，不失一般性，我们可以将研究范围限定为时空嵌入闵可夫斯基时空的问题。

关于刻画可等距嵌入闵可夫斯基时空的时空 (M, g)（对某个 N而言）的问题，近年来已得到彻底解决（关于一般伪黎曼流形中的类似嵌入问题，见 [10]）。

回顾一下，嵌入是一个映射 ϕ: $M \to \mathbb{L}^{N+1}$，它是到其像上的同胚，且 ϕ_* 是单射。若 $g = \phi^* \eta^{(N+1)}$，则称其为等距映射；若对某个函数 $\Omega : M \to \mathbb{R}$，有 $g = \Omega^2 \phi^* \eta^{(N+1)}$，则称其为共形等距映射。

根据 Whitney 的一个结果，每个 C^1 流形都存在唯一的光滑相容结构（ Whitney [26,27]）[14, 定理 2.9] 因此，在这类结果中，由于通常默认 M 是 C^{k+1}（否则 C^k 度量便无从谈起）， M 的正则性往往不会被提及，因为它可以提升至 C^∞。

定理1.1. 设(M, g) 是一个 n维时空(M, g)，其中 g 是C^k, $k \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2\} \cup \{\infty\}$, 并设 $s := k$ 对 $k \geq 3$成立； $s := 1$ 对 $k = 0$成立。以下性质等价:

(a) 存在一个 C^s 到闵可夫斯基时空中的等距嵌入 $\mathbb{L}^{N+1}$，其中$N \geq 1$为某个值,

(b) (M, g) 存在一个 C^s 陡函数; *(c)* ($M, g)$ 是稳定的。

在这种情况下， N可取为 $N(n, k)$，即相应黎曼问题的最优值。

性质(b)的刻画由 M¨uller 和 Sanchez 在 [23, 定理1.1]中针对$k \geq 3$证明，而性质(c)由作者在 [17, 定理3.10, 4.13]中证明。在(b)中， C^s 可替换为 C^1。本定理刻画的时空也正是距离公式成立的时空 [17, 定理4.6]。整体双曲时空存在陡函数，因此可等距嵌入闵可夫斯基时空 [16, 23] [17, 定理3.12], ; 但稳定时空的范围大得多。例如，具有有限且连续的洛伦兹距离的可辨识时空是稳定的 [17, 推论4.1]。

注记 1.2. 定理的最后一个结论以及情形 $k = 0$ 都需要作些说明。纳什关于黎曼流形等距嵌入的经典结果 [24, 25] [15, Cor. 30,] [12] 为（情形 $k = 0$ 以纳什和库珀命名）:

定理 1.3。设 Σ 是一个带有 C^k 度量 h, $k \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2\} \cup \{\infty\}$ 的 C^∞ n 维非紧流形，并且 $s := k$ 对于 $k \geq 3$； $s := 1$ 对于 $k = 0$。存在一个等距嵌入 $\varphi : \Sigma \to E^N$，其中 $N > 0$ 为某个值。

N 的最优值记为 $N(k,n)$；对于 Σ 非紧的情形，已知其满足 $N(k,n) \leq \frac{1}{2}(n+1)(n(3n+11)+4)$，但下文不会用到这个界的具体值。

正如我们稍后还将更详细地回顾的，洛伦兹型情形的证明[23] 阐明，在洛伦兹情形下，嵌入可以取为以下形式：$\phi = (\sqrt{2}t, \varphi)$，其中 φ 是相关黎曼度量h 在 M 上的纳什嵌入，而 t 是定理 1.1(b)中的光滑函数。因此，洛伦兹型嵌入具有与纳什嵌入相同的正则性，且环境流形可以选为 $\mathbb{L}^{N(n,k)+1}$。

$k=0$ 情形未包含在 [23]的分析中。在 [17] 中，我们证明了具有 C^0 度量的稳定时空存在光滑陡函数，因此可以使用纳什-库伊珀定理，在 $\mathbb{L}^{N(n,0)+1}$中找到 C^1 嵌入。

共形嵌入问题也已得到解决。以下结果在 [23, 推论 1.4], 中得到证明；关于 $k=0$ 情形，参见 [17, 定理 2.62] 。

定理1.4. 设(M,g) 是一个 n维时空，其中 g 是 C^k、 $k \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\}\cup\{\infty\}$，并设 $s := k$ 对 $k \geq 3$成立； $s := 1$ 对 $k = 0$成立。以下性质等价

(a) 存在一个将其共形嵌入到闵可夫斯基时空中的 C^s ，其中 $\mathbb{L}^{N+1}$ 对某个$N \geq 1$ 成立，

(b) (M,g) 存在一个 C^s 时间函数；*(c)* (M,g) 是稳定因果的。

在此情形下， N可取为 $N(n,k)$，这也是黎曼等距嵌入问题的最优值。

证明中要说明，对度量 [17, 进行适当的共形缩放后，时空会变得稳定（定理2.62]）。再一次，(b)中的 C^s 可以替换为 C^1。

注 1.5. 设 $[g]$表示 g的共形类。对于哪些时空(M,g)，每个 $\tilde{g} \in [g]$对应的$(M,\tilde{g})$都可等距嵌入闵可夫斯基时空? 容易证明，任何可等距嵌入时空都是稳定因果的，且洛伦兹距离 [23]有限。已知，若时空是稳定因果的，并且共形类中的每个元素的洛伦兹距离都有限，则该时空是整体双曲的（定理4.30]）。反过来，给定一个整体双曲时空，共形类中的每个元素都是整体双曲的（因为因果结构与共形因子无关），因而可等距嵌入（因为整体双曲时空存在陡峭时间函数 [16, 23]）。因此，问题的答案是：整体双曲时空 [23]。

本文将考虑闵可夫斯基时空中真等距/共形嵌入的类似问题。我们回顾一下，若连续映射对紧集的逆像也是紧集，则称该映射为真映射。对于嵌入，这一条件等价于像在拓扑意义上的

闭性 [12]（即没有边界点）；这一事实在下文中将不再特别说明。因此，我们也将称之为闭合 嵌入。换言之，我们将研究闵可夫斯基时空中闭洛伦兹子流形的刻画，以及能够以类似方式嵌入闵可夫斯基时空的共形结构。

弦理论家目前使用嵌入时空这一概念，不过他们称之为膜 [20]。无边界的嵌入时空似乎是非常自然的对象。在边界点附近，子流形可能会剧烈振荡，这也是为什么带边界的闵可夫斯基洛伦兹子流形会被归入稳定时空这一大类。施加无边界条件后，预期会得到优美得多的时空。

最优美的时空之中，有一类是整体双曲时空。然而，M¨uller 已证明，存在一些简单的整体双曲时空，它们无法真等距嵌入闵可夫斯基时空 [22,例 1]。因此，必定存在某种比整体双曲时空更严格的时空类别。

不过，我们仍面临一个问题：能否通过内禀性质来刻画那些可真等距嵌入闵可夫斯基时空的时空？本文将证明这是可以做到的，从而指出一种新的时空类别，它可能在物理学中发挥重要作用。

1.1 欧几里得空间中的真嵌入

我们先考虑黎曼情形。在 [12, 第 11–12] 页，Gromov 和 Rokhlin 指出，如果黎曼流形是完备的，那么纳什等距嵌入可以取为真嵌入。M¨uller [21]给出了这一结果清晰而简洁的证明。下面我们重新表述该结果，并着重说明后续将用到的论证。

定理 1.6. 设(S,h)是一个黎曼流形，其具有 $h\in C^k$, $k\in\mathbb{N}\backslash\{1,2\}\cup\{\infty\}$，并且设 $s:=k$ 对于 $k\geq 3$； $s:=1$ 对于 $k=0$。对于某个 N，它可以真等距嵌入到 E^N 中，当且仅当存在一个 C^1 真函数 $r\colon S\to(0,+\infty)$，使得[1] $\|\nabla^h r\|_h<1$。在最后一句中， C^1 可以替换为光滑。

我们回顾一下，若一个函数将任意紧集的逆像映为紧集，则称其为真函数。注意，它可能在某一点处为 $\nabla^h r=0$ 。

证明。 对于最后一个结论，根据 [14, 定理 2.6] $C^\infty(S,\ \mathbb{R})$ 在赋予惠特尼强拓扑 [14, p 后，在 $C^1(S,\ \mathbb{R})$ 中稠密。 35], 因此，我们可以找到 $r'\in C^\infty(S,\ \mathbb{R})$, 使其在 S 上以任意精度逼近 r，直至一阶导数；进而使得 $|r'-r|<1$ 且 $\|\nabla^h r\|_h<1$，前一个不等式意味着 r' 也是真函数。

$\Rightarrow$。设 $\{e_i\}$ 是 E^N 的正交归一基，设 $\{X^i\}$ 是与 E^N关联的笛卡尔坐标。流形 S 可视为一个黎曼

[1]这里 $\|\nabla^h r\|_h:=h^{-1}(\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}r)$，因此该表达式对于一个 C^0 度量 h是有意义的。

子流形，其诱导度量为 h。设

$$R=\sqrt{1+\vec{X}\cdot\vec{X}},$$

并令 $r=R|_S$，使得 r 是 C^s，因此 C^1。注意，

$$\nabla^E R=\sum_i \frac{X^i}{R}e_i,$$

因此 $\|\nabla^E R\|_E=\sqrt{\frac{\vec{X}^2}{1+\vec{X}^2}}<1$，于是对每个 $v\in TE^N$、$v\neq\vec{0}$，由柯西-施瓦茨不等式可得

$$|\partial_v R|=|\nabla^E R\cdot_E v|<\|v\|_E.$$

对每个 $v\in TS$、$v\neq\vec{0}$，由此可得 $|\partial_v r|<\|v\|_h$。若 $\nabla^h r\neq 0$，则令 $v=\nabla^h r$，

$$|h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)|=|\mathrm{d}r(v)|<\|\nabla^h r\|_h=\sqrt{h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)},$$

因此 $\|\nabla^h r\|_h=\sqrt{h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)}<1$。此外，$r$ 是真映射，因为对于 $a>0$，$r^{-1}([0,a])=R^{-1}([0,a])\cap S$。该集合是闭合的，因为 R 连续且 S 是闭合的。此外，它包含于球 $B_E(0,a)$ 中，因此是紧致的。

$h=h$。我们可以假设 r 是光滑的。我们要证明它是黎曼度量。在满足 $\mathrm{d}r=0$ 的点处，这一点显然成立，因此我们只需关注满足 $\mathrm{d}r\neq 0$ 的点。在 r 的水平集的切空间上，它是一个正定二次型。因此，为了证明它是黎曼度量，我们只需证明 $\tilde{h}(\nabla^h r,\nabla^h r)>0$，因为

$$\tilde{h}(\nabla^h r,\cdot)=h(\nabla^h r,\cdot)-h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)\,\mathrm{d}r=\big(1-h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)\big)\,\mathrm{d}r$$

这样对角项便为零。现在

$$\tilde{h}(\nabla^h r,\nabla^h r)=\big(1-h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)\big)h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r),$$

它是正的，因为 $0<h^{-1}(\mathrm{d}r,\mathrm{d}r)=\|\nabla^h r\|_h^2<1$。因此，根据纳什定理，对于某个 $N>0$，存在一个 C^s 等距嵌入 $\tilde{\varphi}$: $S\to E^{N-1}$，使得 $\tilde{\varphi}^*\delta^{(N-1)}=\tilde{h}$，其中 $\delta^{(N-1)}$ 是 E^{N-1} 中的欧几里得度量。因此φ: $S\to E^N$, $\varphi=(\tilde{\varphi},\ r)$

$$\varphi^*\delta^{(N)}=\tilde{h}+\mathrm{d}r\otimes\mathrm{d}r=h.$$

嵌入不能有边界点，否则坐标 X^N 在其邻域内将有界，这意味着我们可以找到 $p_n\in S$、$p_n\to\infty$，使得 $r(p_n)$ 有界，这与 r 的真正规性矛盾。

□

定理 1.7. 设(S,h) 是一个带有 $h\in C^k$, $k\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$的黎曼流形。黎曼流形$(S,h)$ 存在一个 C^1（等价地，C^∞）真函数r: $S\to[0,+\infty)$，使得 $\|\nabla^h r\|_h<1$ 当且仅当它是完备的。

在证明中，完备指的是海涅–博雷尔性质：有界闭子集是紧的。尽管如此，度量理论中的所有标准霍普夫–里诺等价，对于 C^0 度量也依然成立。事实上，在这种情况下，我们可以应用适用于局部紧致长度空间的霍普夫–里诺–科恩–沃森定理。具有连续度量的黎曼空间就属于这一类型 [8]。

证明。 $\Rightarrow$。设 σ: $[0,1] \to S$是一条连接 p与 q的正则曲线 C^1。我们有

$$|r(q) - r(p)| = |\int_0^1 \mathrm{d}r(\dot{\sigma})\mathrm{d}t| \leq \int_0^1 |\nabla^h r \cdot_h \dot{\sigma}|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \|\dot{\sigma}\|_h \mathrm{d}t = \ell_h(\sigma)$$

因此，对 σ 取下确界可得 $|r(q) - r(p)| \leq d^h(p, q)$。我们得出闭球是紧的，因为 d 是连续的，且 r 是真映射，因此 (M, S) 是完备的。

$\Leftarrow$。设 $o \in S$，并令 $f := d(o, \cdot)$。根据三角不等式，$|f(q) - f(p)| \leq d(p, q)$，因此 f 是1-利普希茨的。根据 [1]，我们可以找到一个光滑2-利普希茨函数 g（因此 $\|\nabla^h g\|_h \leq 2$），使得 $|g - f| \leq 1$。于是函数 $r = g/4$ 是光滑的真映射，且满足 $\|\nabla^h r\|_h \leq 1/2 < 1$。

□

我们得到定理 [21]，其中补充了正则性的细节。

推论1.8. 设(S, h) 是一个黎曼流形，满足 $h \in C^k$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2\}\cup\{\infty\}$，并且对于 $k \geq 3$，有 $s := k$；对于 $k = 0$，有 $s := 1$。它可以真等距嵌入欧几里得空间 E^N，其中某个 N 当且仅当它是完备的。

证明表明， N可以取为 $N(n, k) + 1$，其中 $N(n, k)$是非闭等距嵌入的最优值。

注 1.9. 完备黎曼流形可能允许嵌入欧几里得空间的非闭等距嵌入。例如， $\mathbb{R}$可以非闭等距嵌入 $\mathbb{R}^2$：考虑一条螺旋趋近于 $\mathbb{R}^2$ 的原点或其单位圆的曲线。为了选取一个闭嵌入，诀窍是将一个真函数选作嵌入的一个坐标。

1.2 闵可夫斯基时空中的真嵌入

如果我们在上一条注记的例子中加入一个时间坐标，就会看到，1+1 闵可夫斯基时空虽然是一个性质良好的时空，却允许嵌入到 2+1闵可夫斯基时空中的非闭等距嵌入。为了证明一个时空（M， g）允许嵌入到闵可夫斯基时空中的闭等距嵌入，我们至少需要在 M上取两个函数：一个函数 t 在类时方向上趋于无穷，另一个函数 r 在类空方向上趋于无穷。因此，我们需要如下构造一个黎曼度量

$$g + \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}r^2.$$

如果我们不关心嵌入的真正规性，就只需尝试利用柯西时间函数 t 按如下方式构造一个黎曼度量

$$g + \mathrm{d}t^2$$

将其与 $\nabla t = g^{-1}(\mathrm{d}t, \cdot)$ 进行两次缩并，得到

$$g^{-1}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}t) + g^{-1}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}t)^2 = g^{-1}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}t)[1 + g^{-1}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}t)].$$

因此，由于它必须为正，我们得到 $-g^{-1}(\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}t) > 1$，这就是严格陡峭条件。接着可以看到，在 $\ker \mathrm{d}t$ 上，度量也为正，而对角项因仅在左侧与 ∇t 收缩而消失，得到

$$[1 + g^{-1}(\mathrm{d}t, \mathrm{d}t)]\,\mathrm{d}t$$

它在 $\ker \mathrm{d}t$ 上为零。本质上，这就是 M¨uller 和 S´anchez 在 [23] 中采用的策略。遗憾的是，仅使用一个函数无法强制嵌入为闭合嵌入，如上述将闵可夫斯基时空嵌入闵可夫斯基时空的例子所示。

我们将需要以下结果。

引理 1.10。 设 g 为一个洛伦兹双线性形式，并设 u 和 v 为向量，使得 $g(u, u)\ g(v, v) \geq 0$。若不等式

$$[1 + g(u, v)]^2 \leq g(u, u)\, g(v, v) \tag{1}$$

成立，则 u 和 v 是因果的，且具有相同的时间定向。若不等式为严格不等式，则它们是类时的。

证明。 u 和 v 都不能为零，否则将得到 $1 \leq 0$，因此它们是因果的。由反向柯西-施瓦茨不等式 $g(u,\ u)\, g(v,\ v) \leq g(u,\ v)^2$（这与相对时间定向无关）以及式 (1)，可得 $g(u,\ v) \leq -1/2 < 0$，因此 u 和 v 具有相同的时间定向。显然，若不等式为严格不等式，则它们都不可能是类光的，否则将得到 $0 \leq [1 + g(u, v)]^2 < 0$。 □

引理 1.11。 设 g 为洛伦兹双线性形式，且 α 和 β 为因果协向量。双线性型

$$h = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha + g,$$

是正定的，当且仅当

$$[1 + g^{-1}(\alpha, \beta)]^2 < g^{-1}(\alpha, \alpha)\, g^{-1}(\beta, \beta). \tag{2}$$

此外，在这种情况下，α 和 β 是类时的，且具有相同的时间定向。

证明。 最后一个结论直接由引理 1.10 的对偶得到，因此我们只需证明 h 的正定性与式 (2) 等价。

首先，我们推导一些对证明两个方向都适用的结果。设 $\alpha, \beta \neq 0$ 且它们不成比例。令 $\alpha^\sharp = g^{-1}(\alpha, \cdot),\ \ \beta^\sharp = g^{-1}(\beta, \cdot)$，则一般向量可写为

$$v = k + a\alpha^\sharp + b\beta^\sharp \tag{3}$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $k\in\ker\alpha\cap\ker\beta$。事实上，数对 (a,b) 由以下方程唯一确定

$$\alpha(v)=ag^{-1}(\alpha,\alpha)+bg^{-1}(\alpha,\beta),$$
$$\beta(v)=ag^{-1}(\alpha,\beta)+bg^{-1}(\beta,\beta),$$

其中行列式为 $g^{-1}(\alpha,\alpha)g^{-1}(\beta,\beta)-g^{-1}(\alpha,\beta)^2$，根据反向柯西-施瓦茨不等式，该值为负。

令 $x=g^{-1}(\alpha,\alpha)$、$y=g^{-1}(\alpha,\beta)$、$z=g^{-1}(\beta,\beta)$

$$h(v,v)=g(k,k)+a^2(2xy+x)+b^2(2zy+z)+2ab(xz+y^2+y)\qquad(4)$$

其中 $g(k,k)\geq 0$，因为 k 与向量 $\alpha^\sharp\pm\beta^\sharp$ 正交，所以是类空向量（注意，$\alpha^\sharp$ 和 $\beta^\sharp$ 是因果的且不成比例，因此它们的和或差是类时向量）。式（4）中关于（a,b）的二次型的行列式为

$$xz(2y+1)^2-(xz+y^2+y)^2=(y^2-xz)[xz-(1+y)^2].\qquad(5)$$

$\Rightarrow$。假设 h 是正定的。显然 $\alpha\neq 0$ 和 $\beta\neq 0$，否则 h 将是洛伦兹型的。

假设 α 和 β 成比例，此时可找到一个因果的 1-形式 τ，使得 $\alpha=s\tau$、$\beta=\pm s^{-1}\tau$，其中 $s>0$，且符号任意，因此 $\alpha\otimes\beta=\pm\tau\otimes\tau$。接着，用 $\tau^\sharp$ 与二次型 $h=\pm 2\tau\otimes\tau+g$ 缩并，得到

$$h(\tau^\sharp,\tau^\sharp)=g^{-1}(\tau,\tau)[\pm 2g^{-1}(\tau,\tau)+1]\qquad(6)$$

当 τ 是类光的时，该式不为正，因此 α，β 和 τ 都是类时的。此外，在此条件下，只有满足条件

$$1\pm 2g^{-1}(\tau,\tau)<0$$

时，才是正定的。现在，在负号情形下，该条件无法满足，因此 α 和 β 具有相同的时间定向，于是我们恰好得到式 (2) 给出的条件。

考虑 α 和 β 不成比例的情形。由式 (4) 令 $k=0$ 和 $b=0$，可得 $x\neq 0$，从而得到 $x<0$（因为 $x\leq 0$）以及 $2y+1<0$，这给出了 h 正定的一个必要条件。类似地，另一个必要条件为 $z<0$，因此 α 和 β 是类时的。在此条件下，$h(v,v)$ 在 $k=0$ 上的正性意味着二次型 (4) 在 (a,b) 上为正，因而其行列式也为正。该条件为

$$0<(y^2-xz)[xz-(1+y)^2].\qquad(7)$$

右侧的前一个因子根据反向柯西－施瓦茨不等式为正（由于 y 是平方项，此不等式不受 α 和 β 相对时间定向的影响，且仅当二者成比例时等号成立），因此剩下 $xz-(1+y)^2>0$，这就是式 (2)。

$\Leftarrow$。假设式 (2) 成立。根据引理 1.10，余向量 α 和β 是类时的，且具有相同的时间定向，因此沿用前面的记号， $x<0, z<0$。

若 α与 β成比例，则对于某个类时 1-形式 τ和实数 $s>0$，有 $\alpha=s\tau$，$\beta=s^{-1}\tau$，于是式 (2) 可写为 $1+2g^{-1}(\tau,\ \tau)<0$。由于 τ是类时的，且 $h(\tau^\sharp,\ \tau^\sharp)=g^{-1}(\tau,\ \tau)[2g^{-1}(\tau,\ \tau)+1]>0$，又因为 $h(\tau^\sharp,\ \cdot)=[2g^{-1}(\tau,\ \tau)+1]\tau$，并且 $h|_{\ker\tau}=g|_{\ker\tau}$，可知 h是正定的。

假设 α 与 β 不成比例。由反向柯西-施瓦茨不等式和式 (2) 可得 $(1+y)^2<xz<y^2$，这意味着 $1+2y<0$，因此式 (4) 中关于 $(a,\ b)$ 的二次型是正定的。由于一般向量 v 可写成式 (3) 的形式，式 (4) 中的双线性型 h 是正定的，至此证明完毕。 □

我们现在可以陈述对闵可夫斯基时空中闭合洛伦兹型子流形的刻画。我们还将陈述这些时空满足的一些性质。

定理 1.12. 设(M,g) 是一个 n维时空(M,g)，其中 g 是C^k, $k\in\mathbb{N}\backslash\{1,2\}\cup\{\infty\}$, 并设 $s:=k$ 对于 $k\geq 3$； $s:=1$ 对于 $k=0$。下列性质等价

(a) 存在一个 C^s 到闵可夫斯基时空中的真等距嵌入 $\mathbb{L}^{N+1}$，其中 $N\geq 1$取某个值,

(b) 存在两个 C^s （等价地， C^1；又等价地， C^∞）时间函数 t_-,t_+： $M\to\mathbb{R}$, 使得

$$|1+g(\nabla t_-,\nabla t_+)|<\|\nabla t_-\|_g\,\|\nabla t_+\|_g, \tag{8}$$

and for every $a,b\in\mathbb{R}$, $t_-^{-1}([a,+\infty))\cap t_+^{-1}((-\infty,b])$ *is compact.*

(c) 在 M 上存在一个 C^{k+1} （等价地，光滑）函数 t： $M\to\mathbb{R}$，使得

$$\tilde{h}:=g+2\mathrm{d}t^2 \tag{9}$$

是 M上的完备黎曼度量。

在此情况下， N可取为 $N(n,k)+1$，其中 $N(n,k)$是黎曼等距嵌入问题的最优值。

此外，若这些等价条件成立，则$(t_++t_-)/\sqrt{2}$是时间型的、陡峭的且为柯西的，并且 $\sqrt{2}t$ 是时间型的、严格陡峭的、 $\tilde{h}$-陡峭的且为柯西的； t的水平集 $S_a=t^{-1}(a)$ 配备由 g 诱导的度量 γ^a 后，构成完备的黎曼流形。

最后，可以找到函数 t_-,t_+ 和光滑函数 t，使它们满足如下关系 $t=(t_-+t_+)/2$，其中 t_- 和 t_+ 均为柯西函数，且满足 $t_-<t_+$；并且定义 $f=(t_--t_+)/2$后，函数 $t\times f\colon M\to\mathbb{R}^2$为真函数。此外，还可以选择这些函数，使其满足以下性质：

(i) 对于某个 $a, b \in \mathbb{R}$，每条包含在 $t^{-1}([a,b])$ 中的曲线，若逃逸出每个紧集，则其关于 $g + \mathrm{d}t^2$的长度为无穷大。*(ii)* 对于每个 C^0 函数 $\mu\colon M \to \mathbb{R}$，若存在常数 $\epsilon > 0$，使得$\mu > \epsilon$，则每条 $\tilde{g}$-类空曲线（满足 $\tilde{g} = -\mu \mathrm{d}t^2 + g$）若逃逸出每个紧集，便是完备的（这是一种稳定一致类空完备条件）。*(iii)* 使用上一点的记号：若 μ 有上界，则 t 在$(M, \tilde{g})$中仍为柯西函数。

证明。 考虑光滑函数 $F\colon \mathbb{R}^N \to [1/2, +\infty)$, $F = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \vec{X} \cdot \vec{X}}$。函数 ~~$F$是真~~ 且 $\|\nabla^E F\|_E < 1/2$，因此它是 1/2-利普希茨的。

将 $\mathbb{R}^N$ 的坐标视为 $\mathbb{L}^{N+1}$ 的最后 N 个坐标，并以显然的方式将 F 扩展到 $\mathbb{L}^{N+1}$，我们有

$$H := \eta^{(N+1)} + 2(\mathrm{d}X^0)^2 - 2(\mathrm{d}F)^2 = \delta^{(N+1)} - 2(\mathrm{d}F)^2$$

是正定的。事实上，在 $\mathrm{d}F = 0$ 的那些点处，这一点显然成立；而如果 $\mathrm{d}F \neq 0$，则在 $\ker \mathrm{d}F$ 中它是正定的。在$\nabla^E F$中取值一次，得到 $(1 - 2\|\nabla^E F\|_E^2)\mathrm{d}F$，它在 $\ker \mathrm{d}F$ 上为零；取值两次，则得到 $\|\nabla^E F\|_E^2(1 - 2\|\nabla^E F\|_E^2) \geq \frac{1}{2}\|\nabla^E F\|_E^2 > 0$，这证明了 H 是正定的（注意，不等式 $\|\nabla^E F\|_E \leq 1/2$ 没有歧义，因为无论我们是在 E^N 还是 E^{N+1} 中讨论都一样，因为 F 不依赖于 X^0）。

设 $V \in T\mathbb{L}^{N+1}$，由于 $\|\nabla^E F\|_E \leq 1/2$，我们有 $\|V\|_E^2 = \|V\|_H^2 + 2(\partial_V F)^2 \leq \|V\|_H^2 + \frac{1}{2}\|V\|_E^2$，因此 $\|V\|_E \leq \sqrt{2}\|V\|_H$，这意味着 $d^E \leq \sqrt{2} d^H$。又由于半径为 r 的 H 的闭球包含在半径为 $\sqrt{2}r$ 的 $\delta^{(N+1)}$ 的紧球中，根据霍普夫–里诺定理，度量 H 完备。

我们假设 (*a*) 并探讨其推论。假设存在一个 C^s真等距嵌入 $\phi\colon M \to \mathbb{L}^{N+1}$, $g = \phi^* \eta^{(N+1)}$。令 $h := \phi^* H$，由于$d^H \circ (\phi \times \phi) \leq d^h$，我们得出 h 是一个 C^{s-1} 完备黎曼度量。

我们引入函数 C^s $t := X^0 \circ \phi$ 和 $f := F \circ \phi$。我们有

$$h = g + 2\mathrm{d}t^2 - 2\mathrm{d}f^2. \tag{10}$$

(i) 的证明。考虑退化度量

$$\check{H} := \eta^{(N+1)} + (\mathrm{d}X^0)^2 = \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{d}X^i)^2.$$

每条 C^1 不可延拓曲线 $\sigma\colon I \to M$包含在 $t^{-1}([a,b])$中，其中某个 $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$，且逃离每个紧集的曲线，按照$\phi^* \check{H} = g + \mathrm{d}t^2$计算，其长度必须为无穷大。事实上，可以用 $\mathbb{R}^{N+1}$中的直线对这条曲线进行插值（因此它不一定包含在 M中），且不会增加$\check{H}$ 的长度；随后，其在切片 $X^0 = 0$ 上的投影长度为无穷大，因为在该切片上，$\check{}$从 H 诱导的度量与欧几里得度量一致。最后，投影是不扩张的。

(ii) 的证明。设 $\mu : M \to \mathbb{R}$ 为连续函数，且存在常数 $\epsilon > 0$, $\mu > \epsilon$，并设 $\tilde{g} := -\mu \mathrm{d}t^2 + g$，从而在 M上得到一个洛伦兹度量，其光锥比 g更宽。

考虑一条 $\tilde{g}$类空曲线 $s \mapsto \gamma(s)$，因此在切向量上取两次值（为简便起见，我们省略 γ'） $-\mu \mathrm{d}t^2 + g \geq 0$，进而沿其对 k 积分: $= \frac{\mu}{2+\mu} \in (0,1)$， $\mu = \frac{2k}{1-k}$ ——

$$g = kg + (1-k)g \geq kg + (1-k)\mu \mathrm{d}t^2 = k(g + 2\mathrm{d}t^2) \geq kh \geq \frac{\epsilon}{2+\epsilon} h,$$

其中 h 是完备的。这意味着，如果 γ 逃出每一个紧集

$$\int \sqrt{g(\gamma', \gamma')}\, \mathrm{d}s \geq \sqrt{\frac{\epsilon}{2+\epsilon}} \int \sqrt{h(\gamma', \gamma')}\, \mathrm{d}s = +\infty.$$

$(a) \Rightarrow (b)$ 的证明。我们有

$$h = g + 2\mathrm{d}t^2 - 2\mathrm{d}f^2 = g + \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha, \quad \alpha = \mathrm{d}(t-f), \quad \beta = \mathrm{d}(t+f). \tag{11}$$

函数 $X_\pm = X^0 \pm F$在 $\mathbb{L}^{N+1}$中具有时间性，因为梯度是 $-\partial_0 \pm \nabla^E F$，且 F 的利普希茨常数小于 1。因此， C^s 复合函数

$$t_\pm = t \pm f = (X^0 \pm F) \circ \phi = X_\pm \circ \phi$$

在 M 上具有时间性（事实上，$\mathrm{d}X_+$ 在未来闵可夫斯基因果锥上为正，因而在其与 $\phi_*(TM)$ 的交集上也为正，这一事实体现了 t_+的时间性），因此 $t = (t_- + t_+)/2$ 具有时间性，且 $\mathrm{d}t_\pm$ 是类时 1-形式。由引理 1.11 可得方程 (8)。

对于 a， $b \in \mathbb{R}$，考虑闭集

$$B = t_-^{-1}([a, +\infty)) \cap t_+^{-1}((-\infty, b])$$

在其上 $2f|_B = (t_+ - t_-)|_B \leq b - a$。由于 f 为正，因此它在 B 上有界。因此，$t = t_- + f$ 在 B 上有下界；又由于它也可以写成 $t = t_+ - f$，所以它在 B 上也有上界。由于 $\vec{X} \cdot \vec{X} = 4F^2 - 1$， B 包含在 ϕ 的一个紧圆柱体的原像中，而这由 ϕ 的真正规性可知，意味着 B 在 M 的拓扑下是紧的。

证明 t 是陡峭的（关于可以选择嵌入使得 t 光滑的证明将在后文给出）。注意，对于 $\mathbb{L}^{N+1}$上的任意未来因果向量 V， $\mathrm{d}X^0(V) \geq \sqrt{-\eta^{N+1}(V, V)}$，因此限制到 $\phi_*(M)$ 中的向量后，对于每个未来 g-因果向量 v，我们得到 $\mathrm{d}t(v) \geq \|v\|_g$，这意味着满足陡峭性条件 $\|\nabla^g t\|_g \geq 1$；取 $v = -\nabla^g t$ 即可看出，另见 [18, 定理1.23]。

证明 t 是柯西的。由于 $\phi(M)$ 是 $\mathbb{L}^{n+1}$的闭合子集， M 上未来（过去）不可延拓的因果曲线在 $\mathbb{L}^{n+1}$中也同样是未来（分别为过去）不可延拓的。因此，对每个 $a \in \mathbb{R}$， $\phi^{-1}((X^0)^{-1}(a) \cap \phi(M)) = t^{-1}(a)$是一个柯西超曲面，因此 t 是柯西的。

证明 t_- 和 t_+ 是柯西的。设 $V \in T\mathbb{L}^{N+1}$、 $V = \beta\partial_0 + \alpha_i\partial_i$ 是未来指向类时的因果曲线，即 $\beta > 0$、 $\|\vec{\alpha}\|_E \leq \beta$，那么

$$\mathrm{d}X_+(V) = \beta + \langle \nabla^E F, \vec{\alpha}\rangle \geq \beta - |\langle \nabla^E F, \alpha\rangle_E| \geq \beta - \frac{1}{2}\|\vec{\alpha}\|_E \geq \beta/2.$$

每条不可延拓因果曲线 $\sigma\colon I \to M$ 在 $\mathbb{L}^{N+1}$ 中不可延拓，且可用 $t = X^0 \circ \sigma$参数化，使得对于 $V = \phi_*(v)$， $v = \dot{\sigma}$，有 $\beta = 1$，并且定义域变为 $\mathbb{R}$ （因为 t 是柯西的）。不等式 $\mathrm{d}X_+(\phi_*(\dot{\sigma})) \geq 1/2$证明了 t_+ 是柯西的。类似地， t_- 是柯西的。

此外，根据构造， f 在形如 $t^{-1}([a,b])$ 的子集上是真，因为 F在形如 $(X^0)^{-1}([a,b])$ 的子集上是真。因此， $t \times f\colon M \to \mathbb{R}^2, p \mapsto (t(p), f(p))$ 是真映射。

（a）的证明： $\Rightarrow$（c）及 t的性质。令 $\tilde{h} = h + 2\mathrm{d}f^2$，即可由方程（10）得到方程（9）。显然， $\tilde{h}$是完备的，因为 h是完备的。将方程（9）作用于未来因果向量可知， $\sqrt{2}\,t$是严格陡峭且 $\tilde{h}$-陡峭的，因而是柯西的。如果 v 与类空超曲面 $S_a := t^{-1}(a)$ 相切，那么 $\|v\|_{\tilde{h}} \leq \sqrt{g(v,v)} = \sqrt{\gamma^a(v,v)}$，这意味着 (S_a, γ^a) 的完备性。

（iii）的证明。设 μ 是一个非负函数，且有常数 $q > 0$作为上界。 $\mathbb{R}^{N+1}$上的平直度量$\check{}\eta^{(N+1)} = -(1+q)(\mathrm{d}X^0)^2 + \sum_i(\mathrm{d}X^i)^2$,在 M上诱导出度量$\check{}g = -q\mathrm{d}t^2 + g$。显然， X^0关于$\check{}\eta^{(N+1)}$是柯西的，因此 t 关于$(M, \check{}g)$是柯西的（因为每条不可延拓的$\check{}g$-因果曲线都是$\check{}\eta$-因果不可延拓曲线），从而 t 关于$(M, \tilde{g})$是柯西的。

（b） $\Rightarrow$（a）。时间函数条件和式（8）都是开条件，因此，如果 t_-， t_+ 是 C^1 并满足这些条件，那么根据基于 [14, 定理2.6] [14, 第 35] 页的稠密性论证（该论证已在定理1.6的证明中使用），可以找到它们C^∞，同时仍满足（b）中的真正规性条件。

假设存在两个光滑时间函数 t_-、 $t_+\colon M \to \mathbb{R}$，使得等式 (8) 成立。根据引理 1.11， M 上的度量 C^k

$$h = \mathrm{d}t_- \otimes \mathrm{d}t_+ + \mathrm{d}t_+ \otimes \mathrm{d}t_- + g = g + 2\mathrm{d}t^2 - 2\mathrm{d}f^2,$$

是正定的，其中我们令 $t = (t_- + t_+)/2$, $f = (t_+ - t_-)/2$。根据纳什定理，它可以等距嵌入到 E^{N-1} 中，其中某个 $N \geq 2$。令$\varphi\colon M \to E^{N-1}$ 为纳什嵌入，并考虑由 $\phi = (\sqrt{2}t, \varphi, \sqrt{2}f)$给出的嵌入$\phi\colon M \to \mathbb{L}^{N+1}$。于是

$$\phi^*\eta^{(N+1)} = -(\mathrm{d}(\sqrt{2}t))^2 + h + (\mathrm{d}(\sqrt{2}f))^2 = g.$$

假设 $\mathbb{L}^{N+1}$ 中的嵌入有一个边界点 q，并令 $\tilde{O}$ 为 q的相对紧 $\mathbb{L}^{N+1}$-开邻域，那么在 M 上存在一个非相对紧开集 $O = \phi^{-1}(\tilde{O})$，在该集合上 t 和 f 有界，这意味着 t_- 和 t_+ 有界。特别地， $t_-|_O \geq a, t_+|_O \leq b$，其中某个$a$, $b \in \mathbb{R}$，由 $O \subset t_-^{-1}([a,+\infty)) \cap t_+^{-1}((-\infty, b])$ 可知，这与右侧集合紧致相矛盾。

这证明了该嵌入是真嵌入，因此所需的蕴含成立；同时也证明，当 $X^0 \circ \phi = \sqrt{2}t$ 时，光滑函数 $\sqrt{2}t := (t_+ + t_-)/\sqrt{2}$

按照蕴含关系（a） $\Rightarrow$ (c)中所用的相同论证，该函数是类时的、陡峭的且为柯西函数。事实上，可以像那里那样重新定义 f、 t_- 和 t_+，这表明 t 可以选为光滑函数，而 t_-、 t_+ 仍然是 C^s。

(c) $\Rightarrow$ (a)。度量 $\tilde{h}$的正则性为 C^k。令 $\Phi\colon M \to E^N$ 为 $(M, \tilde{h})$ 到 E^N 的一个 C^s真等距嵌入，其中 N。根据推论 1.8，该嵌入存在。由 $\tilde{\Phi} = (\sqrt{2}t, \Phi)$ 给出的嵌入 C^s $\tilde{\Phi}\colon M \to \mathbb{L}^{N+1}$ 是等距的，因为

$$\tilde{\Phi}^* \eta^{(N+1)} = -(\mathrm{d}(\sqrt{2}t))^2 + \tilde{h} = g.$$

~ ~方程（9）表明 t 是 h-陡峭的，而 h 的完备性意味着 t 是柯西的。假设嵌入 Φ 有一个边界点 Q，那么我们可以找到 $q_n \in M$, $\phi(q_n) \to Q$，因此它们逃离 M 上的每一个紧集。令σ_n 为一条经过 q_n 的不可延拓因果曲线，并令 $r_n \in M$ 为 σ_n 与 $t^{-1}(t(q)) = \phi^{-1}((X^0)^{-1}(X^0(Q)))$ 的交点。由于 $\sigma_n \circ \phi$ 也是 $\mathbb{L}^{n+1}$ 中的不可延拓因果曲线（请记住，它们必须与 X^0 的所有水平集相交，因为 t 是柯西的），并且它们经过趋近于 Q 的 $\phi(q_n)$，因此点 $\phi(r_n)$ 满足 $\phi(r_n) \to Q$。然而，这一事实意味着 Φ 不是闭合的，矛盾。

□

备注1.13。 在 [22,定理 1]（第二个陈述）中，M¨uller 指出，如果 (M, g) 紧密等距可嵌入，那么就存在一个具有完备水平集的光滑陡峭柯西时间函数 t，正如我们在定理 1.12 中所述。实际上， [22,定理 1]（第一个陈述）声称其逆命题成立，但证明有误。Miguel S´anchez 和我指出了这个错误；M¨uller 在一封私人通信（2017年4月）中承认了这一点。他可以通过添加温和性等进一步假设来修正该结果，定义参见 [22]，但勘误至今尚未发表。

一般而言，以下说法是错误的：如果 t 是一个光滑陡峭柯西时间函数，且其水平集关于由 g诱导的度量是完备的，那么 $\tilde{h} := g + 2\mathrm{d}t^2$ 将是完备黎曼度量（因此根据定理 1.12 的 (c) 点可推出闭嵌入）。它当然是黎曼度量，但未必完备。考虑 $1+1$ 闵可夫斯基时空、 $\eta = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$，并令 $\sigma\colon (0, \pi/2) \to M$ 为类空曲线 $s \mapsto (s, \tan s)$。考虑γ 的一个管状邻域，其等时截面紧致，并在该邻域上作非平凡的共形缩放 $\eta \to g = \Omega\eta$，其中 $\Omega \leq 1$ 仅在该邻域内取值，且在邻域边界处趋于 1。由于 $\mathrm{d}t(\dot{\sigma}) = 1 > 0$

$$\sqrt{\tilde{h}(\sigma', \sigma')} \leq \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})} + \sqrt{2}\,\mathrm{d}t(\dot{\sigma})$$

~并且由于 t 在 σ上有界，因此适当选取 Ω 后，我们可以对 σ的 h长度~进行界定，这意味着 h 并不完备，因为 σ 趋于无穷远。然而， t 的水平集在由 g 诱导的度量下是完备的，因为在每个切片$t^{-1}(a)$上， $a \in \mathbb{R}$的度量只在一个紧集内作了修改。最后， t 对于 g 仍然是陡的，因为对于未来指向的 g因果（因而也是未来指向的 η因果）向量 v，当 $\Omega \leq 1$ 时，$\mathrm{d}t(v) \geq \|v\|_\eta \geq \|v\|_g$。

注 1.14（陡峭因子的几何意义）。将嵌入流形 M 视为 $\mathbb{L}^{N+1}$中的类时子流形，并令 t 为由第一坐标限制得到的陡函数。向量$TM \ni w = \nabla t / g(\nabla t, \nabla t)$满足 $\mathrm{d}t(w) = 1$，且 $g(w,w) = 1/g(\nabla t, \nabla t)$。向量 w 可分解如下：$w = \partial_0 + \alpha u$，$\alpha \geq 0$，其中 $u \in T\mathbb{L}^{N+1}$满足 $\mathrm{d}X^0(u) = 0$，并按度量 $\sum_i (\mathrm{d}X^i)^2$进行归一化。因此$g(w,w) = \eta^{N+1}(w,w) = -1 + \alpha^2$，由此得到 $\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{-g\ \nabla t(\ ,\nabla t)}}$。$TM$ 中每个与 ∇t正交的类空向量都属于 $\ker \mathrm{d}X^0$，因此它在欧几里得和洛伦兹型两种解释下都与 ∂_0 正交，进而也与 u正交。注意，α 是 w 与∂_0 所成欧几里得角的切向量，因此它表示 TM 相对于 ∂_0的倾斜程度。因此，∇t 的长度越接近 1，TM 与 ∂_0之间的欧几里得角就越小。

推论 1.15. 设(M, g) 是一个存在紧致柯西超曲面的全局双曲时空，并设 $g \in C^k$，$k \in \mathbb{N} \backslash \{1,2\} \cup \{\infty\}$。那么，存在一个$C^s$ 闵可夫斯基时空 $\mathbb{L}^{N(n,k)+2}$中的真等距嵌入，其中 $s := k$当 $k \geq 3$时；$s := 1$ 当 $k = 0$时。

证明。 每个满足 $g \in C^0$ 的全局双曲时空都存在一个光滑陡峭时间函数 t [17, 定理 3.12], 因此 $\|\nabla t\|_g \geq 1$。该时空同胚于乘积 $\mathbb{R} \times S$，其中 S 与柯西超曲面同胚（任意两个柯西超曲面均同胚），且到第一个因子的投影为 t。令 $t_- := t =: t_+$，则不等式 (8) 成立；又由于 $t^{-1}([a,b])$ 与 $[a,b] \times S$同胚，因此它是紧致的，由此证明得证。

□

定义 1.16. 真时空是满足定理 1.12 中等价性质的时空。

以下一般性结果可应用于等距嵌入的存在性问题，并能提供开集（可能是整个时空 M）上度量形式的信息，其中 t_- 和 t_+ 的梯度不成比例。

命题 1.17. 设 t_- 和 t_+ 是定义在时空开区域 $g \in C^0$ 中、梯度因果且不成比例的 C^1 函数，其中时空为 (M, g)。那么，在余维为 *2* 的流形 Σ_{c_-} 上存在一个黎曼度量 m_{c_-,c_+}；该流形是常数 c_-、c_+ 对应的类空超曲面 $t_- = c_-$、$t_+ = c_+$ 的交集，并且满足

$$g = -[\alpha \mathrm{d}t_-^2 + 2\beta \mathrm{d}t_- \mathrm{d}t_+ + \gamma \mathrm{d}t_+^2] \oplus m_{t_-,t_+} \tag{12}$$

对于某些 C^0 函数 α、β、γ：$M \to \mathbb{R}$，其中 α、$\gamma \leq 0$。反之，若 *(12)* 对某些 C^1 函数 t_-、t_+、C^0 函数 α、β、γ 以及黎曼度量 m_{t_-,t_+} 构成一个洛伦兹度量，且不等式 α、$\gamma \leq 0$ 成立，则 t_-和 t_+ 的梯度因果且不成比例。

此外，在这种情况下 $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, $\beta \neq 0$，并且我们有如下恒等式

$$\alpha = -\frac{\|\nabla t_-\|_g^2}{\Delta^2}, \qquad \beta = \frac{-g(\nabla t_-, \nabla t_+)}{\Delta^2}, \qquad \gamma = -\frac{\|\nabla t_+\|_g^2}{\Delta^2},$$

其中 $\Delta^2 := g(\nabla t_-, \nabla t_+)^2 - \|\nabla t_+\|_g^2 \|\nabla t_-\|_g^2 = \frac{1}{\beta^2 - \alpha\gamma} > 0$。梯度具有相同的时间定向，当且仅当 $\beta > 0$。

特别地，不等式

$$|1 + g(\nabla t_+, \nabla t_-)| < \|\nabla t_+\|_g \, \|\nabla t_-\|_g, \tag{13}$$

等价于不等式（实际上，在非严格情形下也等价）

$$(\beta - 1)^2 < \alpha\gamma, \tag{14}$$

并且等价于 $g + 2\mathrm{d}t_- \mathrm{d}t_+$ 是正定的；在这种情况下，∇t_- 和 ∇t_+是具有相同时间定向的类时向量。

注意，在定理 1.12 的真等距嵌入假设下（见条目 (b)），轨迹 $t_-^{-1}(c_-) \cap t_+^{-1}(c_+)$ 是紧致的。如果 $\mathrm{d}t_-$ 和 $\mathrm{d}t_+$ 在其上不成比例，那么它就是一个紧致类空子流形。

证明。 假设 t_- 和 t_+ 具有过去指向的、非成比例的因果梯度。考虑度量

$$h = g + \alpha \mathrm{d}t_-^2 + 2\beta \mathrm{d}t_- \mathrm{d}t_+ + \gamma \mathrm{d}t_+^2.$$

我们希望找到函数 α, β, γ，使得 h 被 span$(\nabla t_-, \nabla t_+)$ 中的任意向量湮灭。注意，若这些函数存在，则 (12) 可写为 $m = h|_{\ker \mathrm{d}t_- \cap \ker \mathrm{d}t_+}$。我们来计算（为简便起见，对于具有因果梯度的函数，我们简记为 $-g\ \nabla t\ \nabla t\ = -g^{-1}\quad t\quad t$ $\|\nabla t\|_g^2\ =$ (,) (d,d)）。

$$h(\nabla t_-, \cdot) = [1 - \alpha\|\nabla t_-\|_g^2 + \beta g(\nabla t_-, \nabla t_+)]\mathrm{d}t_- + [-\beta\|\nabla t_-\|_g^2 + \gamma g(\nabla t_-, \nabla t_+)]\mathrm{d}t_+$$

由于这个量以及 t_+ 对应的类似量必须为零，我们有

$$0 = 1 - \alpha\|\nabla t_-\|_g^2 + \beta g(\nabla t_-, \nabla t_+), \tag{15}$$
$$0 = 1 - \gamma\|\nabla t_+\|_g^2 + \beta g(\nabla t_-, \nabla t_+), \tag{16}$$
$$0 = -\beta\|\nabla t_-\|_g^2 + \gamma g(\nabla t_-, \nabla t_+), \tag{17}$$
$$0 = -\beta\|\nabla t_+\|_g^2 + \alpha g(\nabla t_-, \nabla t_+) \tag{18}$$

注意，由反三角不等式可得 $\Delta^2 > 0$，且 $g(\nabla t_-, \nabla t_+) \neq 0$，因为这些梯度不成比例。将第一个方程乘以$\|\nabla t_+\|^2$ 并利用最后一个方程，得到 $\alpha\Delta^2 = -\|\nabla t_+\|_g^2$，类似地可得 $\gamma\Delta^2 = -\|\nabla t_-\|_g^2$。最后，将第一个方程乘以 Δ^2，得到 $\beta\Delta^2 = -g(\nabla t_-, \nabla t_+)$。恒等式 $(\beta^2 - \alpha\gamma)\Delta^2 = 1$ 很容易推出。注意，∇t_- 和 ∇t_+ 的因果性分别与 α 和 γ 的符号有关，并且它们具有相同时间定向当且仅当 $-g(\nabla t_-, \nabla t_+) > 0$，即 $\beta > 0$。关于 (13) 与 (14) 等价的陈述现可通过简单计算证明，而关于 (13) 与 $g + \mathrm{d}t_- \otimes \mathrm{d}t_+ + \mathrm{d}t_+ \otimes \mathrm{d}t_-$ 正定等价的陈述则由引理 1.11 得出。

反过来，假设公式（12）成立，其中 g 为洛伦兹型，且 $\alpha, \gamma \leq 0$。方括号中的度量必须是洛伦兹型，也就是说，其行列式必须

为负数，由此得到 $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$，进而得到 $\beta \neq 0$。将公式（12）应用于 ∇t_-，然后再次应用于 ∇t_+，我们再次得到公式（15）-（18）。根据最后两个方程

$$\beta^2 \|\nabla t_-\|_g^2 \|\nabla t_+\|_g^2 = \alpha\gamma g(\nabla t_-, \nabla t_+)^2 < \beta^2 g(\nabla t_-, \nabla t_+)^2$$

因此 $\Delta^2 > 0$ 和 $g(\nabla t_-, \nabla t_+) \neq 0$。沿用之前的相同步骤，$0 \leq -\alpha\Delta^2 = \|\nabla t_+\|_g^2$ 这意味着 ∇t_+ 是因果的，同理 ∇t_- 也是因果的。现在，$\Delta^2 > 0$ 意味着它们不成比例。 □

2 共形嵌入

本节旨在证明以下定理，该定理表明，整体双曲性刻画了闵可夫斯基时空中闭洛伦兹子流形的因果结构。

请记住，(M, g)，$g \in C^k$，是共形可嵌入的，当且仅当存在一个函数 $\Omega^2 : M \to (0, \infty)$，使得 $\tilde{g} := \Omega^2 g = \phi^* \eta^{(N+1)}$，其中 ϕ 是嵌入。

定理 2.1。设 (M, g) 是一个 n 维时空 (M, g)，其中 g 是C^k, $k \in \mathbb{N}\backslash\{1, 2\} \cup \{\infty\}$，并设 $s := k$ 对于 $k \geq 3$；$s := 1$ 对于 $k = 0$。

时空(M, g) 可以在某个 $N > 0$ 下正规共形嵌入到闵可夫斯基时空 $\mathbb{L}^{N+1}$ 中，当且仅当它是全局双曲的（换言之，全局双曲时空恰好是与完备时空共形相关的时空）。此外，对于 $k \geq 3$，若 S 是一个类空柯西超曲面，则可以选取一个共形嵌入 C^k ϕ: $M \to \mathbb{L}^{N+1}$，使得$(\phi^0)^{-1}(0) = S$。整数 N可以取为 $N(n, k)$，其中$N(n, k)$是黎曼等距嵌入问题的最优值。

证明。 $\Rightarrow$。设 $\tilde{g}$ 与 g共形相关，且 $(M, \tilde{g})$ 是 $\mathbb{L}^{N+1}$ 的一个闭合洛伦兹子流形（为简单起见，省略嵌入 ϕ）。M 中的每条不可延拓因果曲线在 $\mathbb{L}^{N+1}$中也是不可延拓的因果曲线，因此它们必定与集合 $(X^0)^{-1}(0) \cap M$ 相交；该集合于是是 $(M, \tilde{g})$ 的柯西超曲面，因而也是 (M, g) 的柯西超曲面。

$\Leftarrow$。由于整体双曲性具有稳定性 [3] [11] [17, 定理 2.91]，我们可以找到$g' > g$，使得 (M, g') 是整体双曲的，并且（对于 $k \geq 3$）S 是 (M, g') 的柯西超曲面。令 h 为 M 上的完备黎曼度量，并令$p \in M$。存在足够大的 $\lambda_1(p) > 0$，使得对每个 $v \in T_pM$，

$$g'(v, v) \geq 0 \text{ and } h(v, v) \geq 1 \Rightarrow \lambda_1 g(v, v) > 1,$$

由于右侧的不等式是严格的，对于相同的 λ_1，在 p 的邻域 V_p 中，同样的推论仍然成立。引入一个局部有限细化 $\{U_i\}$ 和一个单位分解 $\{\varphi_i\}$，并定义光滑正函数 $\Omega_1 := \sum_i \lambda_1^i \varphi_i$。定义 $\tilde{g} := \Omega_1 g$ 后，对每个 $v \in TM$，我们得到

$$g'(v, v) \geq 0 \text{ and } h(v, v) \geq 1 \Rightarrow \tilde{g}(v, v) > 1, \qquad \text{(first inequality)}.$$

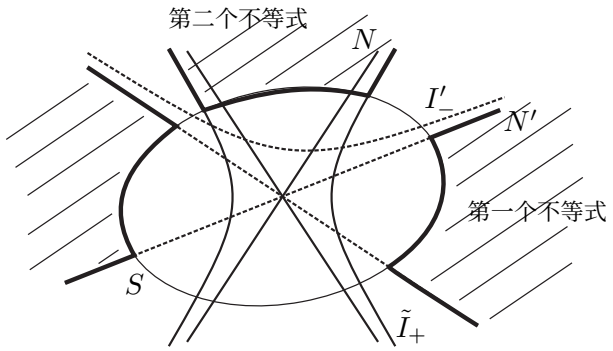

图1：定理 2.1 中不等式背后的几何直观。这里， S是 h的单位球， $I_\pm = \{v \in T_pM : \ g(v,\ v) \ = \pm 1\}$ ，而 g'也类似；N和 N'则是零锥。首先，给定 S、 N和 N'，将 g缩放到 $\tilde{g}$，使得I_+ 不包含范数为一的 g'-类空向量或 g'-类光向量。这就得到第一个不等式。然后将 g' 缩放，使得 I'_- 不包含满足 $v \ \tilde{g}$ $(v,\ v) \leq 1$ 且 $h(v,\ v) \geq 1$的向量，这就得到第二个不等式。

类似地，对于每个 p ，以及充分大的 $\lambda_2(p) > 0$ ，对每个 $v \in T_pM$，我们有，

$$\tilde{g}(v,v) \leq 1 \ \text{ and } \ h(v,v) \geq 1 \ \Rightarrow \ \lambda_2 g'(v,v) < -1.$$

由于右侧的不等式是严格的，对于相同的 λ_2 ，同一蕴含关系在 p的一个邻域 W_p 内仍然成立。引入单位分解 $\{\hat{}\varphi_i\}$和函数 $\Omega_2 := \sum_i \lambda_2^i \hat{}\varphi_i$后，我们发现，对于每个 $v \in TM$

$$\tilde{g}(v,v) \leq 1 \ \text{ and } \ h(v,v) \geq 1 \ \Rightarrow \ g'(v,v) < -1, \qquad \text{(second inequality)},$$

其中我们重新定义了 $\Omega_2 g' \to g'$ （它仍然是整体双曲的，并且满足$g' > \tilde{g}$）。由于 $(M,\ g')$ 是整体双曲的，它存在一个光滑的 g'-时间函数，该函数是 g'-陡峭的；也就是说，对于每个未来指向的 g'-因果向量 v，$\mathrm{d}t(v) \geq \sqrt{-g'(v,\ v)}$ [17, 定理 3.12]。此外，对于 $k \geq 3$，由于 S 是 $(M,\ g')$ 的一个 C^{k+1} 类空柯西超曲面，根据 [7, 定理 1] [19, 定理 2.5] ，我们可以找到如上所述的 t ，但其正则性为 C^{k+1} ，并且还满足 $S = t^{-1}(0)$。

我们来证明这个是 C^k个完备黎曼度量，因为我们证明了

$h \geq h \quad v \quad h\ v\ v \ = 1 \quad \tilde{g}\ v\ v \ \geq$ 。设 满足 $(,)$，若 $(,)\ 1$，则显然 $h(v,v) \geq 1$，于是证明完成；若相反， $\tilde{g}(v,v) < 1$，则由显示式 $g'(v,v) < -1$中的第二个蕴含可得，特别是 v 为 g'-类时，因此由 t的 g'-陡峭性， $[\mathrm{d}t(v)]^2 \geq -g'(v,v) > 1$ ，从而 $\tilde{h}(v,v) \geq 1$。根据定理 1.12的刻画 (c)，$(M,\tilde{g})$ 可真等距嵌入闵可夫斯基时空，因此 (M,g) 可真共形嵌入闵可夫斯基时空。定理 1.12中 $(c) \ \Rightarrow \ (a)$ 的证明表明，嵌入的零坐标为 $\sqrt{2}t$ ，由此可得最后一个结论。 □

	非闭合	闭合
共形	稳定因果 （定理 1.4）	整体双曲 (定理 2.1)
等距	稳定 (定理 1.1)	真 (定理 1.12)
等距于 每个 $g' \in [g]$	整体双曲 （注 1.5）	None （注 2.2）

图 2：嵌入类型与时空性质之间的等价关系。此处“非闭合”表示嵌入不必是闭合的。第二列由本文的结果填充。请注意：真 $\Rightarrow$ 整体双曲$\Rightarrow$ 稳定 $\Rightarrow$ 稳定因果。

注 2.2。 与注 1.5类似，但针对闭合嵌入的问题是：哪些共形结构 $(M, [g])$ 满足对于每个$\tilde{g} \in [g]$，$(M, \tilde{g})$ 都紧密等距可嵌入闵可夫斯基时空?

它必须是整体双曲的，因此对于共形类中的某个 g，它与 $\mathbb{R} \times S$ 微分同胚，其度量为 $g = -\beta \mathrm{d}t^2 + h_t$ [5]。不过，我们也可以考虑将共形类中的代表元乘以 β^{-1} 后得到的度量，即 $\tilde{g} = -\mathrm{d}t^2 + \tilde{h}_t$。设 $\varphi\colon M \to (0, \infty)$，使得对于每个 $x \in S$，$\varphi(\cdot, x)$ 在 $t = 0$ 处取得最大值，并且在双线性型的意义下 $\varphi_t h_t \leq 2\varphi_0 h_0$，其中 $\varphi < 1$ 对于 $t = 0$ 足够小，以至于 $(S, 2\varphi_0 h_0)$ 不完备。于是，由于 M 上的每个柯西超曲面都是 S 上的图，$(M, \hat{}g)$（其中 $\hat{}g = \varphi\tilde{g}$）具有这样的性质：任意柯西超曲面（赋予诱导度量）到 $(S, 2\varphi_0 h_0)$ 的投影都是非收缩的，因此，每个柯西超曲面在由 $\hat{}g$ 诱导的度量下都不完备。

然而，任何紧密等距可嵌入时空都具有由柯西超曲面构成的叶状结构，且这些超曲面在诱导黎曼度量下是完备的。这表明 $(M, \hat{}g)$ 不可紧密等距嵌入。总之，对最初问题的答案是：不存在。

3 嵌入存在性的一些推论

借助嵌入，可以得到若干有趣的结果，说明如何通过特殊时间函数来表示局部（或逐点）性质。注意，后者表达的是时空的整体性质，因此这是一种局部—整体关系。

在下面的结果中，‘光滑’实际上意指 C^s，其中 s 是表示嵌入正则性的常数，正如前面定理中所介绍的。

命题 3.1. 设(M, g) 是一个稳定因果时空，且 $v \in T_pM$ 是

一个过去指向的类光向量。则存在一个光滑函数 $f\colon M \to \mathbb{R}$，其具有过去指向的因果梯度 ∇f，使得 $\nabla f(p) = v$。

证明。我们知道，存在一个函数 $\Omega^2 : M \to \mathbb{R}$，使得 $(M,\Omega^2 g)$ 可视为 $\mathbb{L}^{N+1}$ 中的闭洛伦兹子流形。向量 v 读作$v = a(-\partial_0 + u)$，$a > 0$，其中 $\mathrm{d}X^0(u) = 0$，且 $\|u\|_E = 1$。但此时函数 $F = X^0 + \sum_{i=1}^N X^i u_i$ 满足：$\mathrm{d}F$ 在 $\mathbb{L}^{N+1}$ 的任意未来因果锥上非负，并且 $\mathrm{d}F(v) = 0$ 在 p处成立。因此，对于某个常数 $b > 0$，$f = bF|_M$具有所需的性质。事实上，$\mathrm{d}f$ 在未来因果锥上非负（这些锥对于 g 和 $\Omega^2 g$是相同的），这意味着 $\nabla^g f$是过去指向的因果向量。但反三角不等式取等号的情形以及 $\mathrm{d}f(v) = 0$ 在 p 处成立，意味着 $\nabla^g f$ 在 p处与 v 成比例；调整 b即可取等号。 □

命题3.2. 设(M, g) 是一个稳定时空，且 $v \in T_pM$ 是一个单位过去指向类时向量。那么存在一个光滑陡峭时间函数$f\colon M \to \mathbb{R}$，使得 $\nabla f(p) = v$。若该时空为真，则可将 f选为柯西函数。

证明。时空(M, g)可视为$\mathbb{L}^{N+1}$中的一个洛伦兹子流形。向量 v 写作 $v = a(-\partial_0 + u)$，$a > 0$，其中 $\mathrm{d}X^0(u) = 0$，且$\|u\|_E < 1$。实际上，我们可以对 $\mathbb{L}^{N+1}$ 进行洛伦兹变换来改变其坐标，同时保持时间定向，使得使用新坐标时，我们得到与上文相同的表达式，但其中 $u = 0$,$a = 1$。然后，仍使用新的 X^0，$f = X^0|_M$，便得到光滑陡峭时间函数。注意，在 p处，$g(\nabla f, v) = \mathrm{d}f(v) = \mathrm{d}X^0(-\partial_0) = -1$。但反三角不等式为 $-g(\nabla f, v) \geq \|\nabla f\|_g \|v\|_g$。由于陡峭性条件给出 $\|\nabla f\|_g \geq 1$，且根据假设 $\|v\|_g = 1$，我们处于反三角不等式的等号成立情形，这意味着 $\nabla f \propto v$，并且 $\|\nabla f\|_g = 1$，从而推出 $\nabla f = v$。我们在先前的证明中已经指出，如果时空为真，则函数 $f = X^0|_M$ 是柯西函数，因为 M 中的每条不可延拓因果曲线在 $\mathbb{L}^{N+1}$中也不可延拓。 □

我们有以下关于用陡峭时间函数表示度量的有趣公式。这是距离公式 [17, Thm. 4.6] 的一种无穷小类比。

定理 3.3. 设(M, g) 是一个稳定时空。向量 $v \in TM$ 是类时的充要条件是$\inf_f |\mathrm{d}f(v)|^2 \neq 0$，其中 f 遍历光滑陡峭时间函数；在这种情况下

$$g(v, v) = -\inf_f |\mathrm{d}f(v)|^2, \tag{19}$$

事实上，下确界可以取到。此外，对于 v 类空的情形，我们有$\inf_f \mathrm{d}f(v) = -\infty$。如果时空为真，则函数 f 还可以要求为柯西函数。

证明。时空 (M, g) 可视为$\mathbb{L}^{N+1}$中的一个洛伦兹子流形。向量 $v \in TM$可视为 $T\mathbb{L}^{N+1}$的一个元素。若它是

类空的，我们可以适当选取 $\mathbb{L}^{N+1}$ 的典范坐标，使得 $\mathrm{d}X^0(v)=0$。那么 $f=X^0|_M$ 便给出一个光滑陡峭时间函数，使得 $\mathrm{d}f(v)=0$。因此，如果 v 是 $\mathrm{f}_f\,|\mathrm{d}f(v)|^2=0$中的一个类空向量。

对于 v 类空的情形，我们也可以在 $\mathbb{L}^{N+1}$ 中选取典范坐标，使得从欧几里得意义下看，v 可以任意长，并且接近过去类光锥。这可以通过沿着与 v“相反的方向”进行推进来实现（在这一非严格的描述中，我假设读者对洛伦兹变换有所了解）。因此，$\mathrm{d}f(v)=\mathrm{d}X^0(v)$可以任意负。

如果 v 是类光向量，那么 $v=a(\partial_0+u)$，$a>0$，$\|u\|_E=1$。但是，可以在 $\mathbb{L}^{N+1}$ 上选取典范坐标，使得 a 可以任意小。对于任意一组典范坐标，$f=X^0|_M$ 都给出一个光滑陡峭时间函数，使得$\mathrm{d}f(v)=a\mathrm{d}X^0(-\partial_0)=-a$，$|\mathrm{d}f(v)|=a$，由此证明$\inf_f|\mathrm{d}f(v)|^2=0$。

让我们对类时向量证明公式 (19)，这也将证明定理的第一个结论。只需对 v 未来指向的情形进行证明，因为两边的表达式都不依赖于时间定向。

如果 f 是陡峭的，且 v 是未来指向的类时向量，那么 $\mathrm{d}f(v)\geq\|v\|_g$，即$|\mathrm{d}f(v)|^2\geq-g(v,v)$。因此，我们有不等式 $-g(v,v)\leq\inf_f|\mathrm{d}f(v)|^2$。

注意，$-v/\|v\|_g$ 是单位过去指向类时向量，因此，根据命题 3.2，存在一个光滑陡峭时间函数 f，使得 $\nabla f=-v/\|v\|_g$。这意味着 $\mathrm{d}f(v)=g(\nabla f,v)=-g(v,v)/\|v\|_g=\|v\|_g$，从而得到公式 (19)，且下确界可以取到。最后一个结论的证明与前面的证明相同。 □

4 结论

我们证明了整体双曲共形结构恰好是闵可夫斯基时空中类时闭子流形的共形结构（定理 2.1）。

我们探讨了如何通过内在的真性质刻画可紧密等距嵌入闵可夫斯基时空的洛伦兹流形这一问题。我们找到了两种可能的刻画方式，并进一步得出了这些时空的若干性质，这些性质或许能导向更多刻画（定理 1.12）。我们还研究了这类空间的度量形式（命题 1.17）。

值得注意的是，这些我们称为真的时空甚至比整体双曲时空具有更好的性质。我们认为它们或许会在物理学中发挥某种作用，不过这一可能性仍有待探索和阐明。

与非闭合嵌入相比，闭合共形嵌入的优势在于，不可延拓因果曲线会被映射为不可延拓因果曲线，这通常使我们能够利用 $\mathbb{L}^{N+1}$ 上的因果性结果来推导关于 (M,g) 的结果。(M,g) 的因果边界可以识别为彭罗斯共形边界的一个子集，而彭罗斯共形边界还可能带来一些有趣的简化。

一般而言，嵌入问题的解可能会为解决时空中的因果性问题和度量问题带来新的策略。例如，通过嵌入可以轻松得到一些局部—整体结果。我们在第3节给出了一个例子，证明了一个无穷小距离公式。

参考文献

[1] D. Azagra、J. Ferrera、F. L´opez-Mesas 和 Y. Rangel。黎曼流形上利普希茨函数的光滑逼近。《数学分析及其应用杂志》，326：1370–1378，2007。[2] J. K. Beem、P. E. Ehrlich 和 K. L. Easley。《整体洛伦兹几何》。Marcel Dekker Inc.，纽约，1996。[3] J. J. Benavides Navarro 和 E. Minguzzi。整体双曲性在区间拓扑中具有稳定性。*J. Math. Phys.*，52：112504，2011。arXiv:1108.5120。[4] A. N. Bernal 和 M. S´anchez。光滑整体双曲分裂与时间函数。*RSME*，8：3–14，2004。第二届洛伦兹几何国际会议论文集，穆尔西亚（西班牙），2003年11月12日至14日。[5] A. N. Bernal 和 M. S´anchez。时间函数的光滑性及整体双曲时空的度量分裂。*Commun. Math. Phys.*，257：43–50，2005。[6] P. Bernard 和 S. Suhr。闭锥场的李雅普诺夫函数：从Conley理论到时间函数。*Commun. Math. Phys.*，359：467–498，2018。[7] P. Bernard 和 S. Suhr。整体双曲锥场的柯西时间函数与一致时间函数。*Proc. Amer. Math. Soc.*，148：4951–4966，2020。[8] A. Y. Burtscher。连续黎曼度量流形上的长度结构。*New York J. Math.*，21：273–296，2015。[9]P. T. Chru´sciel、J. D. E. Grant 和 E. Minguzzi。体积时间函数的可微性。*Ann. Henri Poincar´e*，17：2801–2824，2016。arXiv:1301.2909。[10] C. J. S. Clarke。伪黎曼流形的整体等距嵌入。*Proc. Roy. Soc. London Ser. A*，314：417–428，1970。[11] A. Fathi 和 A. Siconolfi。关于光滑时间函数。*Math. Proc. Camb.Phil. Soc.*，152：303–339，2012。[12] M. L. Gromov 和 V. A. Rokhlin。黎曼几何中的嵌入与浸入。*Uspehi Mat. Nauk*，25(5 (155))：3–62，1970。英文译本：Russian Math. Surveys 25 (1970)，第5期，1–57。[13] S. W. Hawking 和 G. F. R. Ellis。《时空的大尺度结构》。剑桥大学出版社，剑桥，1973年。

[14] M. W. Hirsch。《微分拓扑》。Springer-Verlag，纽约，1976年。[15] C. De Lellis。《约翰·福布斯·纳什二世的杰作》，载于 H. Holden、R. Piene（编），《阿贝尔奖 2013–2017》，第391–499页。Cham，瑞士，2019年。[16] E. Minguzzi。关于光滑柯西陡峭时间函数的存在性。《经典与量子引力》，33：115001，2016。arXiv:1601.05932。[17] E. Minguzzi。闭锥结构的因果理论及其应用。《数学物理评论》，31：1930001，2019。arXiv:1709.06494。[18] E. Minguzzi。洛伦兹因果理论。《相对论活评论》，22：3，2019。[19] E. Minguzzi。闭锥结构中柯西超曲面与时间函数的正则性。《数学物理评论》，32：2050033，2020。arXiv:1909.09352。[20] G. W. Moore。什么是膜? 《美国数学学会通报》，52：214–215，2005。[21] O. M¨uller。关于闭等距嵌入的一则说明。《数学分析及其应用杂志》，349(1)：297–298，2009。[22] O. M¨uller。整体双曲流形上的特殊时间函数。《数学物理快报》，103：285–297，2013。勘误即将在《数学物理快报》刊出。[23] O. M¨uller 和 M. S´anchez。可等距嵌入 $\mathbb{L}^N$的洛伦兹流形。《美国数学会汇刊》，363：5367–5379，2011。[24] J. Nash。 C^1 等距嵌入。《数学年刊》 (2)，60：383–396，1954。[25] J. Nash。黎曼流形的嵌入问题。《数学年刊》 (2)，63：20–63，1956。[26] H. Whitney。可微流形。*Ann. Math.*，37：645–680，1936。[27] H. Whitney。光滑 n流形在 $2n$空间中的自交。*Ann. Math.*，45：22–246，1944。