arXiv:2303.05964v1 [math.RA] 10 Mar 2023

与带轨形点曲面的三角剖分相关的半线性 clannish 代数：奥伯沃尔法赫报告，2023年2月

DANIEL LABARDINI-FRAGOSO

Abstract. 这是我在奥伯沃尔法赫研讨会“箭图表示论与有限维代数”（2023年2月12日至2月18日）报告的扩展摘要。本文基于我与 R. Bennett-Tennenhaus 的合作成果（arXiv:2303.05326）。

本次报告的主要目标是介绍 [2]。我们为带有标记点和轨形点的曲面的着色三角剖分构造半线性 clannish 代数，并证明它们与 Geuenich 和我几年前在 [3, 4]中构造的带势物种的雅可比代数莫里田等价。

带有标记点和轨形点的曲面。一个带有标记点和轨形点的曲面是一个三元组 $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma, \mathbb{M}, \mathbb{O})$，由以下部分组成：

- 一个紧致连通定向二维实流形 Σ，带有（可能为空的）边界 $\partial\Sigma$；
- 一个有限的标记点 $\emptyset \neq \mathbb{M} \subseteq \Sigma$ 集合，每个连通分支中至少有一个点属于 $\partial\Sigma$；$\mathbb{P}$ 中的点称为标点；
- 一个（可能为空的）有限轨形点 $\mathbb{O} \subseteq \Sigma \setminus \partial\Sigma$集合。

一条位于 $\mathbf{\Sigma}$ 上的弧 k 是 Σ 上的一条曲线，它连接 $\mathbb{M}$中的一对点，或连接 $\mathbb{M}$ 中的一个点与 $\mathbb{O}$中的一个点，并满足以下条件：

- 除端点外，k 与 $\partial\Sigma \cup \mathbb{M} \cup \mathbb{O}$不相交；
- 除了可能在端点处之外，k 不会与自身相交；
- k 在 $\Sigma \setminus (\mathbb{M} \cup \mathbb{O})$ 中相对于 $\mathbb{M} \cup \mathbb{O}$不是同伦平凡的；
- k 在 Σ 中相对于 $\mathbb{M} \cup \mathbb{O}$ 不同伦于 Σ的一条边界线段；
- k 不是一个紧密包围单个轨形点的环。

弧分为两类：连接 $\mathbb{M}$中各点的弧，称为非悬垂弧；以及连接 $\mathbb{M}$ 中的一点与 $\mathbb{O}$中的一点的弧，称为悬垂弧。

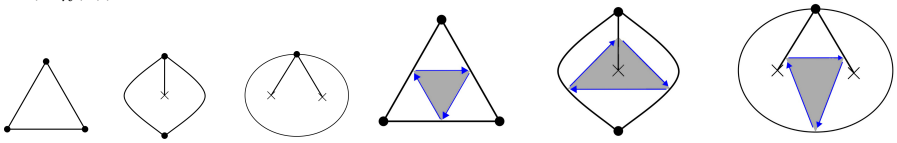
弧视为在相对于 $\mathbb{M} \cup \mathbb{O}$的同伦意义下等价。若两条弧在相对于 $\mathbb{M} \cup \mathbb{O}$ 的同伦类中存在代表元，使它们在$\Sigma \setminus \partial\Sigma$中不相交，则称它们相容 。 $\mathbf{\Sigma}$ 的三角剖分 是由两两相容的弧组成的极大集合。 $\mathbf{\Sigma}$ 的每个三角剖分 τ 都会将 Σ 分割成有限多个三角形。

从现在起，我们假设 $\mathbf{\Sigma}$ 满足以下条件之一 ：

$$(1) \quad \partial\Sigma \neq \emptyset \text{ and } \mathbb{M} \subseteq \partial\Sigma \ (\text{so } \mathbb{P} = \emptyset), \quad \text{or} \quad \partial\Sigma = \emptyset \text{ and } |\mathbb{M}| = 1 \ (\text{so } \mathbb{P} = \mathbb{M}).$$

那么，对于给定的 $\mathbf{\Sigma}$ 的任意三角剖分 τ，三角形有三种可能的类型，即图1所示的类型。

FIGURE 1. 左：三角剖分中三角形的树类型。右：CW复形 $X(\tau) = (X_n(\tau))_{n=0,\ 1,\ 2}$胞腔。



着色三角剖分。 定义一个 CW复形 $X(\tau) = (X_n(\tau))_{n=0,\ 1,\ 2}$如下：

0胞腔：$X_0(\tau) := \tau$ （即， τ 中的每条弧都成为一个0胞腔）1胞腔：$X_1(\tau) := \{$三角形内部顺时针连接0胞腔的箭$\}$2胞腔：$X_2(\tau) := \{3$上的圈（ $X_1(\tau)$），由 τ中的三角形产生，忽略旋转差异$\}$。

令 $C_n(\tau) := \mathbb{F}_2 X_n(\tau)$为以 $X_n(\tau)$为基的 $\mathbb{F}_2$-向量空间，其中 $\mathbb{F}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并定义链复形 $C_\bullet(\tau)$和上链复形 $C^\bullet(\tau)$如下

$$C_\bullet(\tau): \qquad 0 \longrightarrow C_2(\tau) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tau) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tau) \longrightarrow 0$$
$$\partial_2(\alpha\beta\gamma) := \alpha + \beta + \gamma, \quad \partial_1(\alpha) := h(\alpha) - t(\alpha)$$
$$C^\bullet(\tau) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2}(C_\bullet(\tau), \mathbb{F}_2): \qquad 0 \longleftarrow C^2(\tau) \xleftarrow{\partial_2^\vee} C^1(\tau) \xleftarrow{\partial_1^\vee} C^0(\tau) \longleftarrow 0$$

按照 [4], 的定义， $\mathbf{\Sigma} = (\Sigma,\ \mathbb{M},\ \mathbb{O})$的着色三角剖分是指一对$(\tau,\ \xi)$，由 $\mathbf{\Sigma}$的一个三角剖分 τ和一个1-余循环 $\xi \in \ker(\partial_2^\vee) \subseteq C^1(\tau)$组成；也就是说，从 $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$中选取元素$(\xi_a)_{a \in X_1(\tau)}$，并满足如下条件：对每个2胞腔 $\alpha\beta\gamma \in X_2(\tau)$，都有 $\xi_\alpha + \xi_\beta + \xi_\gamma = 0$ 模2。

S半线性族式代数。 令 K 为任意域，并假设给定：

- 一个有限箭图 Q，不一定没有环；
- 一个集合 $\mathbb{S} \subseteq Q$，由 特殊环组成；
- 对每个箭 $a \in Q_1$，给定一个域自同构 $\sigma_a \in \mathrm{Aut}(K)$；
- 一个由长度至少为 2 的路径组成的集合 $Z\ Q$；
- 一个二次多项式 $q_s \in K[s;\ \sigma_s]$对每个 $s \in \mathbb{S}$，其中 $K[s;\ \sigma_s]$是斜多项式环，在 s 上系数取自 K，并由 σ_s扭曲而成。

进一步假设满足以下条件：

- 对于每个顶点 $k \in Q_0$，至多有两条箭 Q 终止于（分别地，起始于） k；
- 对于每条箭 $a : k \to j$，若不属于 $\mathbb{S}$，则至多有一条箭 b 从 Q 终止于（分别地，起始于） k，并且满足 $ab \notin Z$ （分别地， $ba \notin Z$）；
- 没有属于 Z 的路径以特殊环作为其第一条或最后一条箭。

考虑环 $S := \times_{k \in \widehat{Q}_0} K$ 和 S-S-双模 $\bigoplus_{a \in \widehat{Q}_1} K^{\sigma_a} \otimes_K K$。对于任意域自同构 $\sigma \in \mathrm{Aut}(K)$，定义 K^σ 为扭曲的 K-K-双模，其底层阿贝尔群为 K，左 K 作用为 $z * m := zm$，右 K 作用为 $m * z := m\sigma(z)$，其中 $z \in K$ 和 $m \in K$。遵循 [1],，我们将张量代数 $K_{\boldsymbol{\sigma}}Q := T_S(\bigoplus_{a \in \widehat{Q}_1} K^{\sigma_a} \otimes_K K)$ 记作 $\widehat{\ }$，并称商

$$K_{\boldsymbol{\sigma}}\widehat{Q}/\langle Z \cup \{q_s \mid s \in \mathbb{S}\}\rangle$$

是一个半线性 *clannish* 代数。

与 [2], 中一样，我们为每个着色三角剖分（τ，ξ）关联一个半线性 clannish 代数，方法如下。固定以下两个域 K选项之一：

$$K := \mathbb{C} \quad \text{or} \quad K := \mathbb{R}$$

令 $Q(\tau)$ 为通过在 τ 的每条悬垂弧 j 上添加一个环 s_j，由 $(X_0(\tau)\ X_1(\tau))$ 得到的箭图。此外，令 $\theta\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为复共轭，并定义

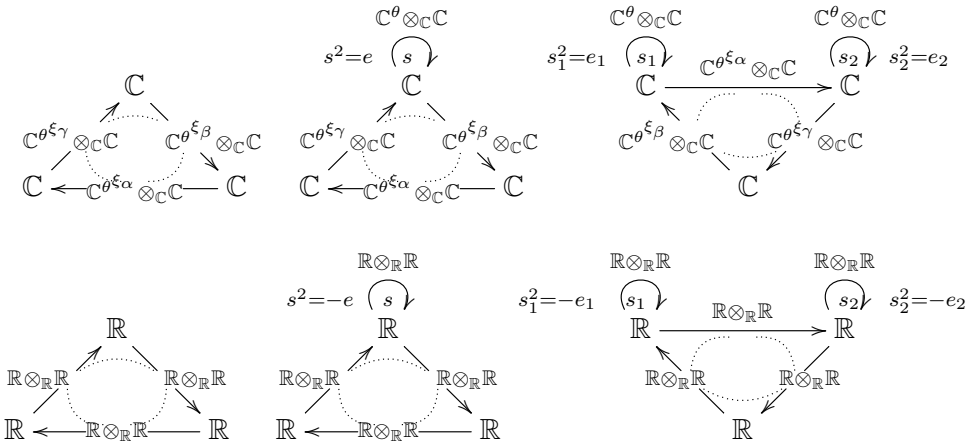
$$\mathbb{S}(\tau) := \{s_j \mid j \in \tau \text{ is pending}\} \qquad \text{i.e., all loops are special;}$$

$$\sigma_a := \begin{cases} \theta^{\xi_a}|_K & \text{if } a \in X_1(\tau) \\ \theta|_K & \text{if } a \in \mathbb{S}(\tau) \end{cases} \qquad \text{for each arrow } a \text{ of } \widehat{Q}(\tau);$$

$$Z(\tau) := \{\alpha\beta \mid \exists \gamma \in X_1(\tau) \text{ such that } \alpha\beta\gamma \in X_2(\tau) \text{ up to rotation of cycles}\},$$

$$q_{s_j} := \begin{cases} s_j^2 - 1 \in \mathbb{C}[s_j;\theta] & \text{if } K = \mathbb{C} \\ s_j^2 + 1 \in \mathbb{R}[s_j;\mathbb{1}_{\mathbb{R}}] & \text{if } K = \mathbb{R} \end{cases} \qquad \text{for all pending arcs } j \text{ of } \tau.$$

对于图 1 中的三角形，这些定义可以用助记方式直观表示如下（$K = \mathbb{C}$ 先， $K = \mathbb{R}$ 后）：



我们在 [2] 中证明， $K_{\boldsymbol{\sigma}}Q(\tau)/I(\tau,\ \xi)$，其中 $I(\tau,\ \xi) := \langle Z \cup \{q_{s_j} \mid s_j \in \mathbb{S}(\tau)\}\rangle$，是一个半线性 clannish 代数。

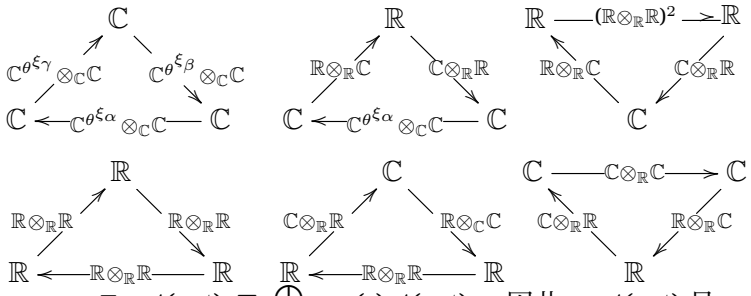
雅可比代数。令 $(\tau,\ \xi)$ 为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的着色三角剖分。为 $k \in \tau$ 选择以下两种域 F_k 赋值方式之一 $\mathbf{F} = (F_k)_{k\in\tau}$：

$$F_k := \begin{cases} \mathbb{R} & \text{for all } k \text{ pending;} \\ \mathbb{C} & \text{for all } k \text{ non-pending;} \end{cases} \quad \text{or } F_k := \begin{cases} \mathbb{C} & \text{for all } k \text{ pending;} \\ \mathbb{R} & \text{for all } k \text{ non-pending.} \end{cases}$$

我们称左侧的赋值是 B-型，右侧的赋值是 C-型。对于每个箭 $a \in X_1(\tau)$， $a\colon k \to j$，令 $g(\tau,\xi)_a := \theta^{\xi_a}|_{F_j\cap F_k}$并

$$A(\tau,\xi)_a := \begin{cases} (F_j \otimes_{\mathbb{R}} F_k)^2 = (\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R})^2 & \text{if } k,j \text{ are pending and } \mathbf{F} \text{ is } B\text{-like;} \\ F_j \otimes_{\mathbb{R}} F_k = \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} & \text{if } k,j \text{ are pending and } \mathbf{F} \text{ is } C\text{-like;} \\ F_j^{g(\tau,\xi)_a} \otimes_{F_j\cap F_k} F_k & \text{if at least one of } k,j \text{ is non-pending.} \end{cases}$$

这些域和双模的赋值可以通过助记方式将图1中的三角形可视化如下（先是B-型赋值，然后是 C-型赋值）



设 $R := \times_{k\in\tau} F_k$，$A(\tau,\xi) := \bigoplus_{a\in X_1(\tau)} A(\tau,\xi)a_\circ$ 因此，$A(\tau,\xi)$ 是一个 R-R-双模，故可以构造 $A(\tau,\xi)$ 在 R 上的（完备）张量环。按照[3, 4],，我们可以将一个“显然的”（超）势 $W(\tau,\xi) \in T_R(A(\tau,\xi))$ 定义为 $T_R(A(\tau,\xi))$ 中所有“显然的”三次圈之和，并取 $W(\tau,\xi)$ 的循环导数来定义雅可比代数 $\mathcal{P}(A(\tau,\xi)\ W(\tau,\xi))$。粗略地说，对于每个箭 a 和圈 c，循环导数 $\partial_a(c)$ 定义为通常的路径求和中删除 a 在 c 中每次出现后所得结果的 $g(\tau,\xi)_a^{-1}$-线性部分（若 $c = xay$ 则按 yx 重新排序），见 [3]。由于这些 F_k 不一定都属于同一个域，路径的概念必须加以扩展，因此当 a 是一个具有 $F_{h(a)} = \mathbb{C}$ （分别为 $F_{t(a)} = \mathbb{C}$）的箭时，a 和 ia （分别为 ai）都可以是路径。这样，例如，若 $t(a) = h(b)$，则 ab 和 aib 是不同的路径，$F_{h(a)} = \mathbb{R}$, $F_{t(a)} = \mathbb{C}$, $F_{t(b)} = \mathbb{R}$。另一方面，若 $t(a) = h(b)$，$F_{h(a)} = \mathbb{C}$, $F_{t(a)} = \mathbb{R}$, $F_{t(b)} = \mathbb{C}$，那么

$$ab = \frac{1}{2}(ab - iabi) + \frac{1}{2}(ab + iabi),$$
$$(ab - iabi)i = i(ab - iabi), \qquad (ab + iabi)i = -i(ab + iabi),$$

即，$\mathbb{1}_2(ab - iabi)$ 和 $\mathbb{1}_2(ab + iabi)$ 分别是 ab 的 $\mathbf{1}$-线性部分和 θ-线性部分。

主要结果。证明主要结果的关键在于以下简单观察：$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[s]/\langle s^2+1\rangle = \mathbb{R}[s;\ \mathbb{1}_{\mathbb{R}}]/\langle s^2+1\rangle$ 和 $\mathbb{R} \simeq_{\text{Morita}} \mathbb{C}[s;\ \theta]/\langle s^2-1\rangle$.

定理1。 [2] 若 $\mathbf{\Sigma}$ 是一个带有标记点和轨形点、且满足(1)的曲面，那么对于 $\mathbf{\Sigma}$的任意着色三角剖分(τ,ξ) ，雅可比代数 $\mathcal{P}(A(\tau,\xi)\ W(\tau,\xi))$ 与半线性 ***clannish*** 代数 $K_\sigma Q(\tau,\xi)/I(\tau,\xi)$ 莫里田等价（在 B 类情形下为 $K = \mathbb{C}$，在 C 类情形下为 $K = \mathbb{R}$）。

References

[1] *Semilinear clannish algebras* 2204 12138 R. Bennett-Tennenhaus, W. Crawley-Boevey。arXiv: 。R.
[2] *Semilinear clannish algebras arising from* Bennett-Tennenhaus, D. Labardini-Fragoso。*surfaces with orbifold points* 2303 。arXiv: 。05326
[3] J. Geuenich, D. Labardini-Fragoso。*Species with potential arising from surfaces with orbifold points of order 2 Part I: one choice of weights* 286 2017 3 4, 1065 1143 ，。《数学杂志》（），第 期，–。[4] J. Geuenich, D. *Species with Potential Arising from Surfaces with Orbifold* Labardini-Fragoso。*Points of Order 2 Part II: Arbitrary Weights* 2020, 12, 3649 3752 ，。《国际数学研究通知》第 期，–。

Daniel Labardini-Fragoso
Instituto de Matemáticas, UNAM, Mexico
Email address: labardini@im.墨西哥国立自治大学.mx