arXiv:2303.05969v1 [math.AP] 10 Mar 2023

超临界空间中的非线性 Klein–Gordon 方程整体柯西问题

王宝祥

摘要

通过引入一类新的函数空间 $B^{\sigma,\ p}{}^{s,\ q}$ 作为分辨空间，我们研究了所有空间维数 $d \geqslant 1$下非线性 Klein–Gordon 方程（非线性 Klein–Gordon 方程）的柯西问题,

$$\partial_t^2 u + u - \Delta u + u^{1+\alpha} = 0, \quad (u, \partial_t u)|_{t=0} = (u_0, u_1).$$

我们考虑超临界函数空间 $E^{\sigma,\ s} \times E^{\sigma-1,\ s}$ 中的初始数据 (u_0, u_1)，其范数定义为

$$\|f\|_{E^{\sigma,s}} = \|\langle\xi\rangle^{\sigma} 2^{s|\xi|} \widehat{f}(\xi)\|_{L^2},\ s < 0,\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

任意索伯列夫空间 H^{κ} 都可以嵌入 $E^{\sigma,\ s}$，即 $H^{\kappa} \subset E^{\sigma,\ s}$，对任意 κ、$\sigma \in \mathbb{R}$和 $s < 0$均成立。我们证明，如果非线性 Klein–Gordon 方程的初始数据属于某些 $E^{\sigma,\ s} \times E^{\sigma-1,\ s}$ $(s < 0,\ \sigma \geqslant \max(d/2 - 2/\alpha, 1/2)\ \ \alpha \in \mathbb{N},\ \alpha \geqslant 4/d)$，且其傅里叶变换的支集位于第一卦限，则解具有整体存在性和唯一性；对于这些整体解，不要求初始数据在 $E^{\sigma,\ s} \times E^{\sigma-1,\ s}$ 中满足小量条件。若空间维数 $d \geqslant 2$，双曲正弦-戈尔登方程 $\partial_t^2 u - \Delta u +$ 双曲正弦 $u = 0$ 也有类似结果。

2020 年数学学科分类：35L71、42B35、42B37。

1 引言

我们研究非线性 Klein–Gordon 方程（NLKG）和双曲正弦-Gordon 方程的柯西问题

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + u - \Delta u + f(u) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

其中，$u(x,t)$ 是关于 (x,t) 的复值函数 $\in \mathbb{R}^{d+1}$ 和 $f(u) = \pm u^{1+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}$ 或 $f(u) =$ 双曲正弦 $u - u$，双曲正弦 $u = (e^u - e^{-u})/2$。

非线性 Klein–Gordon 方程是数理物理中非线性相对论方程的基本模型[48, 64]。（复）双曲正弦-戈尔登方程源于几何分析 [15], ，并应用于可积量子场论、孤子动力学、流体动力学及许多其他科学领域

应用中（参见 [1, 33, 63] 及其中的参考文献）。大量研究致力于探讨能量次临界和临界情形下散焦型非线性 Klein-Gordon 方程的整体适定性与散射 $f(u) = |u|^{\alpha}u$，其中 $\alpha \leqslant 4/(d-2)$ 针对 $d \geqslant 3$，$\alpha < \infty$针对 $d = 1$，2。Ginibre 和 Velo [19, 20] 证明了能量次临界情形下有限能量解的整体适定性。Strauss [53], 、Tsutsumi [56] 和 Pecher [41, 42]研究了小数据情形下能量次临界情形的散射算子的存在性；Brenner [8, 9] 研究了维数为 $d \geqslant 3$ 时的情形，Nakanishi [38] 则分别研究了维数为 1 和 2 时大数据的情形。在三维能量临界情形 $\alpha = 4$，Struwe 对径向初值 [54] 以及 Grillakis 对一般初值 [24] 得到了经典整体解。在能量临界情形 $\alpha = 4/(d-2)$ $(d \geqslant 3)$，Shatah 和 Struwe[50] 证明了能量空间中的整体适定性。在 [39], ，Nakanishi 证明了能量临界情形下 $H^1 \times L^2$ 散射算子的存在性。在聚焦情形 $f(u) = -|u|^{\alpha}u$，Ibrahim、Masmoudi 和 Nakanishi [26, 27] 研究了能量次临界及临界非线性的散射阈值。在二维 L^2临界情形 $\alpha = 2$ 中，Killip、Stovall 和 Visan[32]研究了散射阈值。Hayashi 和 Naumkin [25] 考察了 $\alpha = 1$ 和 $d = 2$小数据下波算子的存在性。然而，对于能量超临界情形 $\alpha > 4/(d-2)$，非线性 Klein-Gordon 方程的整体适定性和散射目前仅在临界和次临界索伯列夫空间中对小柯西初值已知 $H^{\sigma} \times H^{\sigma-1}$ （参见 [59, 60, 61]）。如果非线性项具有指数增长，Nakamura 和 Ozawa [40] 证明了小数据下 $H^{\sigma} \times H^{\sigma-1}$ $(\sigma \geqslant d/2)$ 的整体适定性和散射，其结果包含双曲正弦-戈尔登方程这一特例。Struwe [55] 证明，对于任意光滑初值，具有指数型非线性 $f(u) = e^{u^2}u - u$的二维方程存在光滑解的整体解。

本文的主要目的是研究某些超临界函数空间 $E^{\sigma,s} \times E^{\sigma-1,s}$ $(s < 0)$ 中的非线性 Klein–Gordon 方程 (1)。这些空间包含任意索伯列夫空间 $H^{\kappa} \times H^{\kappa-1}$ $(\kappa \in \mathbb{R})$ 作为子空间；当非线性项的幂次 $\alpha \geqslant 4/d$ 以及初始数据的傅里叶变换的支集位于第一卦限时，我们将证明其解的整体存在性与唯一性。特别地，我们的结果涵盖能量超临界情形 $\alpha > 4/(d-2)$，且不要求初始数据满足 $E^{\sigma,s} \times E^{\sigma-1,s}$ 中的小性条件。双曲正弦-戈尔登方程以及 $f(u) = e^{u^2}u - u$for$d \geq 2$ 也有类似结果。为得到这些结果，我们将采用一类新的函数空间 $B^{\sigma,p}{}^{s}{}_{,q}$ and$F^{\sigma,p}{}^{s}{}_{q,}$$(\sigma, s \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty)$ 来处理非线性项（见第 2 节）。

1.1 函数空间 $E^{\sigma,s}$

令 $\mathscr{S}$为施瓦茨空间，$\mathscr{S}'$ 为其对偶空间。我们用 $|x| = |x_1| + ... + |x_d|$表示 $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$ 和

$$p_{\lambda}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} e^{\lambda|x|}|f(x)|, \quad q_{\lambda}(f) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} e^{\lambda|\xi|}|\widehat{f}(\xi)|,$$

$$\mathscr{S}_1 := \{f \in \mathscr{S} : p_{\lambda}(f) + q_{\lambda}(f) < \infty, \ \forall\ \lambda > 0\}.$$

$\mathscr{S}_1$ 配备半范数系 $\{p_\lambda + q_\lambda\}_{\lambda>0}$ 后，是一个完备的局部凸线性拓扑空间，称为盖尔范德-希洛夫空间，参见 [18]。我们用 $\mathscr{S}_1'$ 表示 $\mathscr{S}_1$的对偶空间。容易看出

$$\mathscr{S}_1 \subset \mathscr{S}, \quad \mathscr{S}' \subset \mathscr{S}_1'.$$

$\mathscr{S}_1$ 包含高斯函数 $e^{-\mathrm{i}mx}e^{-|x-n|_2^2/2}$ 的平移和调制及其线性组合[1], ，它在所有索伯列夫空间中稠密 H^σ （参见 [18]）。 $\mathscr{S}_1'$上的傅里叶变换可以通过对偶性定义（参见 [16]）。具体而言，对于任意 $f \in \mathscr{S}_1'$，其傅里叶变换$\mathscr{F} f = f$ 满足

$$\langle \mathscr{F} f, \varphi\rangle = \langle f, \mathscr{F}\varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}_1.$$

回顾一下 [14]中引入的函数空间 $E^{\sigma,\ s}$。对于 $s,\sigma \in \mathbb{R}$，记

$$E^{\sigma,s} := \{f \in \mathscr{S}_1' : \langle\xi\rangle^\sigma 2^{s|\xi|}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

其范数定义为$\|f\|_{E^{\sigma,\ s}} = \|\langle\xi\rangle^\sigma 2^{s|\xi|}\widehat{f}(\xi)\|_{L^2}$. $E^{\sigma,\ s}$是索伯列夫空间 H^σ 的推广: $= (I-\Delta)^{-\sigma/2}L^2(\mathbb{R}^d)$，其范数定义为

$$\|f\|_{H^\sigma} := \|\langle\xi\rangle^\sigma \widehat{f}\|_{L^2}. \tag{2}$$

容易看出 $H^\sigma = E^{\sigma,\ 0}$。在 $s>0$的情形下， $E^s := E^{0,\ s}$ 由 Bj¨orck [6]引入，是一个光滑函数空间。类似 $E^{\sigma,\ s}$ $(s>0)$这样的空间，在研究演化方程解的 Gevrey 正则性时有重要应用（例如参见 Foias 和 Temam [17], Bourdaud、Reissig 和 Sickel [7]）。然而，在 $s<0$的情形下， $E^{\sigma,\ s}$ 比任何 H^κ 都粗糙得多，并且我们有以下包含关系（参见 [14]）：

$$H^\kappa \subset E^{\sigma,s}, \quad \forall\, \kappa,\sigma \in \mathbb{R},\, s<0. \tag{3}$$

由 (3) 可知，若 $s<0$，则 $\cup_{\kappa\in\mathbb{R}}H^\kappa$ 是 $E^{\sigma,s}$ 的子集。

1.2 临界空间与超临界空间

首先注意，若 u 是非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 的一个解，且 $f(u) = \pm u^{\alpha+1}$，则 $u_\lambda(x,t) := \lambda^{2/\alpha}u(\lambda x, \lambda t)$ 是下列方程的解:

$$\begin{cases} \partial_t^2 v + \lambda^2 v - \Delta v \pm v^{\alpha+1} = 0, \\ v(x,0) = u_{0,\lambda}(x),\ v_t(x,0) = u_{1,\lambda}(x), \end{cases} \tag{4}$$

其中 $u_{0,\lambda}(x) = \lambda^{2/\alpha}u_0(\lambda x)$ $u_{1,\lambda}(x) = \lambda^{2/\alpha+1}u_1(\lambda x)$。由缩放论证可知，$(u_\lambda, \partial_t u_\lambda)|_{t=0}$ 在齐次索伯列夫空间 $\dot{H}^{\sigma_c}\times\dot{H}^{\sigma_c-1}$ ($\dot{H}^\sigma := (-\Delta)^{-\sigma/2}L^2$) 中是不变的，其中

$$\sigma_c := d/2 - 2/\alpha. \tag{5}$$

[1]我们将 $|x|_2 = (x_1^2 + ... + x_d^2)^{1/2}$ 记作 $x = (x_1, ..., x_d) \in \mathbb{R}^d$

对于任意 $\lambda > 0$, $H^{\sigma_c} \times H^{\sigma_c - 1}$ 被称为非线性 Klein–Gordon 方程 (4) 的临界 Sobolev 空间。$H^{\sigma} \times H^{\sigma-1}$满足 $\sigma > \sigma_c$ ($\sigma < \sigma_c$) 的空间被称为次临界（超临界）Sobolev 空间。满足某个 $\sigma < \sigma_c$ 下的 $H^{\sigma} \times H^{\sigma-1} \subset X$ 的任意 Banach 函数空间 X，都称为非线性 Klein–Gordon 方程的超临界空间。由包含关系 (3) 可知，任意超临界 Sobolev 空间 $H^{\kappa} \times H^{\kappa-1}$($\kappa < \sigma_c$) 都是 $E^{\sigma,\, s} \times E^{\sigma-1,\, s}$ 的子空间，其中 $s < 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$。因此， $E^{\sigma,\, s} \times E^{\sigma-1,\, s}$ 在 $s < 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ 时是超临界空间。

1.3 Besov 空间和 Triebel 空间

令 ψ 为满足 $\psi(\xi) = 1$ for $|\xi| \leqslant 1$ and supp $\psi = \{\xi\colon |\xi| \leqslant 5/4\}$ 的光滑径向隆起函数。记 $\varphi(\xi) = \psi(\xi) - \psi(2\xi)$ and $\varphi_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)$。可见

$$\psi(\xi) + \sum_{j \geqslant 1} \varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d$$

and

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \varphi_j(\xi) = 1, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

记

$$\triangle_0 = \mathscr{F}^{-1} \psi \mathscr{F}, \quad \triangle_j = \mathscr{F}^{-1} \varphi_j \mathscr{F}, \quad j \in \mathbb{N}$$

and

$$\dot{\triangle}_j = \mathscr{F}^{-1} \varphi_j \mathscr{F}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

. 注意，对于 $j \geqslant 1$，有 $\triangle_j = \dot{\triangle}_j$。 $\triangle_j$ with $j \in \mathbb{N}$ ($\triangle_j$ with $j \in \mathbb{Z}$) 称为（齐次）二进分解算子。令 $\sigma \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$。缓增分布 $f \in \mathscr{S}'$ 在 Besov 空间和 Triebel-Lizorkin 空间上的范数可按如下方式定义（针对 $q = \infty$ 作相应修改）：

$$\|f\|_{B^{\sigma}_{p,q}} = \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} 2^{\sigma j q} \|\triangle_j u\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/q}, \tag{6}$$

$$\|f\|_{F^{\sigma}_{p,q}} = \left\| \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} 2^{\sigma j q} |\triangle_j u|^q \Big)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{7}$$

1.4 主要结果

F为此，我们引入以下分辨空间（详情见第 2 节)

$$\|u\|_{\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R}; B^{\sigma,s}_{p,q})} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\sigma j q} \|2^{s|\nabla|} \triangle_j u\|^q_{L^{\gamma}_t L^p_x(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)} \right)^{1/q}. \tag{8}$$

这类不带指数导数 $2^{s|\nabla|}$ 的空间，即 $\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R};B^{\sigma,}{}_{p}{}^{0}{}_{q,})$，最早由 Chemin-Lerner [12] 引入。记 $\|f\|_{H^{\sigma,}{}_{p}{}^{s}}=\|\mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle^{\sigma}2^{s|\xi|}\mathscr{F}f\|_{L^{p}}$ 和

$$\mathbb{R}^{d}_{I}=\{\xi\in\mathbb{R}^{d}:\ \xi_{j}\geqslant 0,\ j=1,...,d\}.$$

我们有以下结果。

定理 1.1. 设 $d\geqslant 1$, $f(u)=u^{1+\alpha}$, $4/d\leqslant\alpha<\infty$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $s<0$ 和 $\sigma\geqslant\max(\sigma_{c},1/2)$。假设 $(u_{0},u_{1})\in E^{\sigma,\ s}\times E^{\sigma-1,\ s}$，且 $\operatorname{supp}\widehat{u}_{0}$、$\operatorname{supp}\widehat{u}_{1}\subset\mathbb{R}^{d}_{I}\setminus\{0\}$ 满足$d\leqslant 6$, $\operatorname{supp}\widehat{u}_{0}$、$\operatorname{supp}\widehat{u}_{1}\subset\mathbb{R}^{d}_{I}$ 满足 $d\geqslant 7$。则存在 $s_{0}\leqslant s$，使得非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 有唯一的温和解 $u\in C(\mathbb{R};E^{\sigma,\ s_{0}})\cap X^{\sigma,\ s_{0}}_{\ p}$，其中 $X^{\sigma,\ s}_{\ p}$ 上的范数定义为

$$\|u\|_{X^{\sigma,s}_{p}}=\begin{cases}\|u\|_{\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{2,2})}+\|u\|_{\widetilde{L}^{p}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2})}, & \sigma>1/2;\\ \|u\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},E^{1/2,s})}+\|u\|_{L^{p}(\mathbb{R},H^{0,s}_{p})}, & \sigma=1/2,\end{cases}\tag{9}$$

其中

$$p=\begin{cases}2(d+1)/(d-1), & for\ \alpha\geqslant 4/(d-1);\\ 2(d+1+\theta)/(d-1+\theta), & for\ \alpha=4/(d-1+\theta),\ \theta\in(0,1].\end{cases}$$

定理 1.2. 设 $d\geqslant 2$, $f(u)=$双曲正弦 $u-u$, $s<0,\sigma\geqslant d/2$, $(u_{0},u_{1})\in E^{\sigma,\ s}\times E^{\sigma-1,\ s}$，且 $\operatorname{supp}\widehat{u}_{0}$、$\operatorname{supp}\widehat{u}_{1}\subset\mathbb{R}^{d}_{I}\setminus\{0\}$ 满足 $d\leqslant 4$，$\operatorname{supp}\widehat{u}_{0}$、$\operatorname{supp}\widehat{u}_{1}\subset\mathbb{R}^{d}_{I}$ 满足 $d\geqslant 5$。则存在 $s_{0}\leqslant s$，使得非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 有唯一的温和解 $u\in C(\mathbb{R};E^{\sigma,\ s_{0}})\cap Y^{\sigma,\ s_{0}}_{\ r}$，其中 $Y^{\sigma,\ s}_{\ r}$ 上的范数定义为

$$\|u\|_{Y^{\sigma,s}_{r}}=\|u\|_{\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{2,2})}+\|u\|_{\widetilde{L}^{r}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{r,2})},\tag{10}$$

其中 $r=2+4/(d-1)$ 对于 $d\geqslant 3$；$r=2+4/d$ 对于 $d=2$。

注 1.3. 定理 1.1 需要作几点说明。

(i) 在定理 1.1 中，$s_{0}\leqslant s$ 来自对解应用缩放论证，更确切地说，$s_{0}=s_{0}(\|u_{0}\|_{E^{\sigma,\ s}},\|u_{1}\|_{E^{\sigma-1,\ s}})$ 对于 $d\geqslant 5$；$s_{0}=s_{0}(\|u_{0}\|_{E^{\sigma,\ s}},\|u_{1}\|_{E^{\sigma-1,\ s}},\varepsilon_{0})$ 对于 $d\leqslant 4$，其中 ε_{0} 满足 $\operatorname{supp}\widehat{u}_{0}$，$\operatorname{supp}\widehat{u}_{0}\subset\mathbb{R}^{d}_{I}\setminus B(0,\varepsilon_{0})$。由此可知，解映射在 $E^{\sigma,\ s_{0}}\times E^{\sigma-1,\ s_{0}}$ 中连续。此外，解在 $E^{\sigma,\ s_{0}}\times E^{\sigma-1,\ s_{0}}$ 中具有散射性质。

(ii) 采用与 [13, 14]，类似的方法，我们可以给出一些支集位于$\mathbb{R}^{d}_{I}\cup(-\mathbb{R}^{d}_{I})$ 中的初始数据，使得定理 1.1 和 1.2 中的解映射不光滑。

(iii) 定理 1.1 和 1.2 给出了相当粗糙的初始数据作为例子。例如，我们考虑空间维数 $d=1$。对于任意 $k\in\mathbb{Z}_{+}$, $A\in\mathbb{C}$，令 $\delta(x)$ 为狄拉克测度，并

$$F(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{x+\mathrm{i}\varepsilon}=\left(-\pi\mathrm{i}\delta(x)+p.v.\frac{1}{x}\right)$$

令其为索霍茨基-普莱梅利分布（参见 [51, 46]）。 $F(x)$ 在索霍茨基-普莱梅利公式中起着至关重要的作用，并广泛应用于量子场论、力学、机器人安全装置系统和数值模拟中（参见 [30, 37, 45, 47,58]）。令 $F^{(k)}$ be 为 k 阶 F 的广义导数。由于 $-\mathrm{i}\,\widehat{F}$is 为赫维赛德函数，可知 $u_0 = e^{\mathrm{i}\epsilon x}F^{(k)}(x)$ $(\forall\, k \in \mathbb{N},\, \epsilon > 0)$ 满足定理 1.1 的条件。此外，定理 1.1 包含一类初始值 u_0，例如

$$u_0 = e^{\mathrm{i}\epsilon x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}\,\lambda)^k}{k!}F^{(k)}(x),\quad 0<\lambda<|s|,$$

这超出了任何索伯列夫空间 $H^\kappa,\ \kappa\in\mathbb{R}$ 的控制范围。

(iv) 定理 1.2 的结果对于非线性项 $f(u) = e^{u^2}u - u$ and$f(u) = \sin u - u$ 同样成立；后一种非线性项与著名的正弦-戈登方程 $u_{tt} - \Delta u + \sin u = 0$ 有关，参见 [11, 35, 49, 43]。

(v) 定理 1.2 无法涵盖一维空间中的双曲正弦-戈尔登方程。不过，若取 $f(u) = \sinh u - u - u^3/6$，定理 1.2 的结果对于 $d = 1$ 也成立。利用 [13]，中的技巧，似乎也可以处理一维的双曲正弦-戈尔登方程以及 $\alpha < 4/d$ 情形下的非线性 Klein–Gordon 方程，从而为一类极弱解证明整体存在性和唯一性。

1.5 主要结果证明的思路

现在我们说明如何获得 $E^{\sigma,s}$ 中非线性 Klein–Gordon 方程的解的关键思路。回想一下，由于非线性估计存在问题，且在超临界 Sobolev 空间中会出现适定性差，因此无法在超临界 Sobolev 空间$H^\sigma \times H^{\sigma-1}$中求解非线性 Klein-Gordon 方程 $H^\sigma \times H^{\sigma-1}$（其中 $\sigma < \sigma_c$）。然而，当频率局限在第一卦限时， $E^{\sigma,s}$ 型空间具有良好的代数结构，因此在 $s < 0$ 的情况下， $E^{\sigma,s}$ 型空间中的非线性估计是可行的。

令 $\varphi \in E^{\sigma,s}$。注意到 $\lim_{b\to-\infty}\|\varphi\|_{E^{\sigma,b}} = 0$，我们立即得到某个 $s_0 < s$，使得 $\|\varphi\|_{E^{\sigma,\ s_0}} \leqslant \delta \ll 1$。因此，我们可以像 [59] 以及 Nakamura 和 Ozawa [40] 中那样，通过小数据论证求解非线性 Klein–Gordon 方程和 sinh-Gordon 方程。然而， $s_0 = s_0(\varphi)$ 将同时依赖于 δ 和 φ，并且对于所有 $\varphi \in E^{\sigma,s}$ 都无界（见第 5 节）。为了得到 $s_0 = s_0(\|\varphi\|_{E^{\sigma,s}})$，我们使用缩放论证，经过缩放后，非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 变为方程 (4)。观察超临界空间 H^σ（例如 $\sigma > 1$）中的方程 (4) 的缩放解 $u_\lambda(x,t) = \lambda^{2/\alpha}u(\lambda x, \lambda t)$，我们有

$$\|(u_\lambda, \partial_t u_\lambda)|_{t=0}\|_{H^\sigma\times H^{\sigma-1}} \lesssim \lambda^{\sigma-d/2+2/\alpha}\|(u_0,u_1)\|_{H^\sigma\times H^{\sigma-1}} \to 0,\quad \lambda\to\infty.$$

由此可知，缩放后的非线性 Klein–Gordon 方程在超临界 Sobolev 空间中可以具有非常小的初始数据。上述观察也适用于超临界空间 $E^{\sigma,\ s}\times E^{\sigma-1,\ s}(s<0)$。由于 $\lambda\to\infty$，$(u_\lambda, \partial_t u_\lambda)|_{t=0}$ 将在 $E^{\sigma,\ s}\times E^{\sigma-1,\ s}$ 中消失，如果 $(\widehat{u}_0, \widehat{u}_1)$ 的支集位于

远离原点的第一卦限内。因此，我们可以尝试通过假设 $E^{\sigma,\ s}\times E^{\sigma-1,\ s}$ 中的初始数据足够小来求解方程 (4)。

由于方程 (4) 含有参数 λ^2，我们必须将 λ 视为变量参数，来考察半群 $U_\lambda(t)$ 的衰减估计：$=e^{it\sqrt{\lambda^2-\Delta}}$ 考察其频率局部化版本后，我们发现，$U_\lambda(t)$ 的衰减估计取决于 λ；与 $U_1(t)=e^{it\sqrt{I-\Delta}}$ 的衰减估计相比，它在低频下更差，在高频下更好。

得到 $U_\lambda(t)$ 的时间衰减后，通过 TT^* 方法即可得到 $U_\lambda(t)$ 的 Strichartz 估计。由于 $U_\lambda(t)$ 在低频和高频下的衰减估计不同，因此 $U_\lambda(t)$ 的 Strichartz 估计在低频和高频下也有所不同。另一方面，为了处理 $E^{\sigma,s}$ 中的超临界~数据，Strichartz 估计中还需要用到新型函数空间 $B^{\sigma,p}{}^{s}{}_{,q}$ 以及 $L^\gamma(\mathbb{R},B^{\sigma,p}{}_{q}^{s})$，见第 2 节和第 3 节。

~还需要进一步建立在 $L^\gamma(\mathbb{R},B^{\sigma,p}{}_{q}^{s})$ 中的非线性映射估计。由于低频和高频下的 Strichartz 估计不同，我们需要分别处理低频和高频空间中的非线性项。

最后，可以通过压缩映射论证得出主要结果。

1.6 记号与组织结构

本文中，我们用 L^p_x 表示 $x\in\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格空间，并记作$\|f\|_p:=\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$.对于任意关于 $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}$ 的函数 g，我们记

$$\|g\|_{L_t^\gamma L_x^p}=\|\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|_{L_t^\gamma}=\left(\int_{\mathbb{R}}\|g(\cdot,t)\|_p^\gamma dt\right)^{1/\gamma}.$$

记 $\langle\nabla\rangle^s=\mathscr{F}^{-1}\langle\xi\rangle^s\mathscr{F}$, $2^{s|\nabla|}=\mathscr{F}^{-1}2^{s|\xi|}\mathscr{F}$，其中 $\langle\xi\rangle=(1+\xi_1^2+...+\xi_d^2)^{1/2}$，并用 $|\xi|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant d}|\xi_i|$ 表示 $\xi=(\xi_1,...,\xi_d)\in\mathbb{R}^d$。我们将使用以下记号。 $C\gtrsim 1$ 和 $c\lesssim 1$ 表示常数，其取值可能因位置而异；我们用 $A\lesssim B$ 表示 $A\leqslant CB$； $A\sim B$ 表示 $A\lesssim B$ 和 $B\lesssim A$,$A\vee B=\max(A,B)$ $A\wedge B=\min(A,B)$。 $a+=a+\varepsilon$表示 $0<\varepsilon\ll 1$。我们用$\mathscr{F}^{-1}f$表示 f的傅里叶逆变换。对于任意 $1\leqslant p\leqslant\infty$， l^p表示序列勒贝格空间。

本文的结构安排如下。第 2 节介绍函数~空间 $B^{\sigma,p}{}_{q}^{s}$，$F^{\sigma,p}{}_{q}^{s}$，$L^\gamma(\mathbb{R},B^{\sigma,p}{}_{q}^{s})$ 和 $L^\gamma(\mathbb{R},F^{\sigma,p}{}_{q}^{s})$ 的概念，随后分别讨论它们的缩放性质，以及与 Besov 空间和 Triebel 空间 $B^\sigma_{p,q}$ 和 $F^\sigma_{p,q}$之间的嵌入关系。第 3 节致力于研究半群$e^{it\sqrt{\lambda^2-\Delta}}$的时间衰减估计和 Strichartz 估计。通过建立一些非线性估计，我们在第 4 节证明主要结果。最后，第 5 节讨论低次幂非线性情形下缩放论证失效的情况。

2 函数空间 $B^{\sigma,s}_{p,q}$ 和 $F^{\sigma,s}_{p,q}$

2.1 函数空间 $B^{\sigma,s}_{p,q}$

设 $s,\sigma\in\mathbb{R}, 1\leqslant p,q\leqslant\infty$。我们引入以下函数空间

$$B^{\sigma,s}_{p,q}=\left\{f\in\mathscr{S}'_1:\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{\sigma jq}\|2^{s|\nabla|}\triangle_j f\|_p^q\right)^{1/q}<\infty\right\};\tag{11}$$

$$\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{p,q})=\left\{f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R},\mathscr{S}'_1):\|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{p,q})}=\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{\sigma jq}\|2^{s|\nabla|}\triangle_j f\|^q_{L^{\gamma}_tL^p_x}\right)^{1/q}<\infty\right\}.\tag{12}$$

若 $s=0$，则 $B^{\sigma,0}_{p,q}=B^{\sigma}_{p,q}$ 是Besov空间，参见 [5, 57, 62]。在 $s>0$ 的情形下，与Gevrey类相关的~函数空间 $B^{\sigma,s}_{2,2}$ 和 $L^{\gamma}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{p,q})$（其中 $s=c(t)$）在一些文献中鲜有提及（例如见 [17, 2]）。然而，若 $s<0$, $B^{\sigma,s}_{p,q}$ 且 $L^{\gamma}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{p,q})$, 则它们会变得相当粗糙；这类空间似乎是新的，并不包含在任何已知的函数空间之中。

我们将在 L^p 上使用乘子。我们将 L^p 上的乘子空间记为 M_p，即

$$\|m\|_{M_p}=\sup_{f\in\mathscr{S},\,\|f\|_p=1}\|\mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F}f\|_p.$$

以下Bernstein乘子估计是众所周知的。对于 $L>d/2, L\in\mathbb{N}, \theta=d/2L$（参见 [5, 62]），

$$\|m\|_{M_p}\lesssim\|\mathscr{F}^{-1}m\|_1\lesssim\|m\|_2^{1-\theta}\|m\|^{\theta}_{\dot{H}^L}.\tag{13}$$

首先，我们有

引理 2.1. 设 $s,\sigma\in\mathbb{R}$. 则有 $B^{\sigma,s}_{2,2}=E^{\sigma,s}$，且范数等价。

证明. 根据Plancherel恒等式，$\psi+\sum_{j\in\mathbb{N}}\varphi_j=1$ 以及ψ,φ_j的支集性质，我们立即得到所需结果。□

引理 2.2. 设 $s_i,\sigma_i\in\mathbb{R}, 1\leqslant p_i,q_i\leqslant\infty, i=1,2$. 则有

$$B^{\sigma_1,s_1}_{p_1,q_1}\subset B^{\sigma_2,s_2}_{p_2,q_2},\quad if\ s_1>s_2,\ p_1\leqslant p_2.\tag{14}$$

特别是,

$$B^{\sigma_1}_{p_1,q_1}\subset B^{\sigma_2,s}_{p_2,q_2},\quad if\ s<0,\ p_1\leqslant p_2,\tag{15}$$

$$H^{\kappa}\subset E^{\sigma,s},\quad if\ s<0,\ \kappa,\sigma\in\mathbb{R}.\tag{16}$$

证明。回顾一下（参见 [5, 57, 62]）

$$\|\triangle_j f\|_{p_2} \lesssim 2^{jd(1/p_1-1/p_2)}\|\triangle_j f\|_{p_1}.$$

由此可得

$$\|2^{s_2|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_2} \lesssim 2^{jd(1/p_1-1/p_2)}\|2^{s_2|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_1}.$$

利用 $\varphi_j = \varphi(2^{-j}\cdot)$ 的几乎正交性，可得对于 $j \geqslant 1$,

$$\|2^{s_2|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_1} \lesssim \sum_{\ell=-1}^{1} \|\mathscr{F}^{-1}\varphi_{j+\ell}2^{(s_2-s_2)|\xi|}\|_1\|2^{s_1|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_1}.$$

利用乘子估计 (13)，对于某个 $c>0$，有

$$\|\mathscr{F}^{-1}\varphi_j 2^{(s_2-s_2)|\xi|}\|_1 = \|\mathscr{F}^{-1}\varphi 2^{(s_2-s_2)|2^{2j}\xi|}\|_1 \lesssim 2^{c(s_2-s_1)2^{2j}}.$$

因此，我们有

$$\|2^{s_2|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_1} \lesssim 2^{c(s_2-s_1)2^{2j}}\|2^{s_1|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_1}.$$

for $j \geqslant 1$。容易看出，上述不等式对 $j=0$ 也成立。由此可 t

$$\begin{aligned}
\|f\|_{B^{\sigma_2,s_2}_{p_2,1}} &= \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\sigma_2 j}\|2^{s_2|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_2} \\
&\lesssim \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\sigma_2-\sigma_1+d(1/p_1-1/p_2))j}2^{c(s_2-s_1)2^{2j}}2^{\sigma_1 j}\|2^{s_1|\nabla|}\triangle_j f\|_{p_1} \\
&\lesssim \|f\|_{B^{\sigma_1,s_1}_{p_1,\infty}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\sigma_2-\sigma_1+d(1/p_1-1/p_2))j}2^{c(s_2-s_1)2^{2j}}.
\end{aligned}$$

注意到 $s_2-s_1<0$，可知对于任意 $\sigma>0$

$$\sup_{x\geqslant 0} x^{\sigma}\ 2^{c(s_2-s_1)x^2} < \infty.$$

这意味着

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{(\sigma_2-\sigma_1+d(1/p_1-1/p_2))j}2^{c(s_2-s_1)2^{2j}}$$

是一个收敛级数。因此，我们有 $B^{\sigma_1,\ s_1}_{p_1,\ \infty} \subset B^{\sigma_2,\ s_2}_{p_2\ 1}$, 。应用嵌入 $l^1 \subset l^q \subset l^\infty$，对任意 $q\in[1,\infty]$，即可得到所需结果。（16）是将 $H^\kappa = B^{\kappa}_{2,\ 2}$ 和 $E^{\sigma,\ s} = B^{\sigma,\ s}_{2\ 2}$，考虑在内后，由（15）直接推出的。□

由 (15) 可知，$B^{\sigma_1,\ q}_{p} \subset B^{\sigma_2,\ p\ q}$, 对任意 $s<0$ 均成立，且与 σ_1、$\sigma_2\in\mathbb{R}$ 无关，这意味着 $\cup_{\sigma\in\mathbb{R}} B^{\sigma,\ q}_{p}$ 是 $B^{\sigma_2,\ p\ q}$, 对任意 $\sigma_2>0$ 的子集。

引理 2.3. 设 s、s'、$\sigma \in \mathbb{R}$、$1 \leqslant p$、$q \leqslant \infty$。则

$$2^{(s'-s)|\nabla|} : B_{p,q}^{\sigma,s'} \to B_{p,q}^{\sigma,s} \tag{17}$$

是一个等距映射。特别地,

$$2^{s|\nabla|} : B_{p,q}^{\sigma,s} \to B_{p,q}^{\sigma} \tag{18}$$

是一个等距映射。

证明. 注意到

$$\|2^{(s'-s)|\nabla|} f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}} = \|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s'}},$$

由此得到所需结论。 □

现在我们考虑 $B^{\sigma}{}_{,p}{}^{s}{}_{,q}$上的缩放性质。回顾一下，勒贝格空间具有非常简单的缩放性质 $\|f(\lambda\cdot)\|_p = \lambda^{-d/p}\|f\|_p$。若 $s < 0$，我们将证明 $B^{\sigma}{}_{,p}{}^{s}{}_{,q}$ 上的缩放与 L^p非常接近。更确切地说，低频下 $B^{\sigma}{}_{,p}{}^{s}{}_{,q}$ 上的缩放与 L^p 中的几乎相同，仅相差一个对数因子；而其高频下的缩放则具有指数衰减行为，随着 $\lambda \to \infty$而发生。事实上，我们有以下

引理 2.4. 设 $s < 0, \sigma \in \mathbb{R}, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$。我们有以下结论。

(i) 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\lambda_0 = \lambda_0(\epsilon, s, \sigma, q) > 1$，使得对任意 $\lambda > \lambda_0$和$f \in B^{\sigma}{}_{,p}{}^{s}{}_{,q}$，

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{-d/p+\epsilon}\|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}$$

若 $\sigma < 0$，则上述不等式对 $\epsilon = 0$ 成立。

(ii) 假设 $\operatorname{supp} f \subset \{\xi : |\xi| \geqslant \varepsilon_0\}$ 对某个 $\varepsilon_0 > 0$ 成立。那么对 $\lambda \gg 1$,

$$\begin{aligned}
&\|f(\lambda\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{\sigma-d/p}2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}, \quad \sigma > 0;\\
&\|f(\lambda\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{-d/p}2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}, \quad \sigma < 0;\\
&\|f(\lambda\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{-d/p}(\ln\lambda)^{1/q}2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}, \quad \sigma = 0.
\end{aligned}$$

(iii) 对于 $\lambda \gg 1$，我们有,

$$\begin{aligned}
&\|f(\lambda^{-1}\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,\lambda s}} \lesssim \lambda^{d/p-\sigma}\|\varphi\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}, \quad \sigma < 0;\\
&\|f(\lambda^{-1}\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,\lambda s}} \lesssim \lambda^{d/p}\|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}, \quad \sigma > 0;\\
&\|f(\lambda^{-1}\cdot)\|_{B_{p,q}^{\sigma,\lambda s}} \lesssim \lambda^{d/p}(\log_2\lambda)^{1/q'}\|f\|_{B_{p,q}^{\sigma,s}}, \quad \sigma = 0.
\end{aligned}$$

证明。步骤 1。我们证明（i）的结果。令 $\lambda \gg 1$ 和 j_λ 为 $\log_2 \lambda$ 的整数部分。对于某个 $1 \leqslant c < 2$，我们有 $\lambda = 2^{j_\lambda} c$。根据定义，

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}} \leqslant \|2^{s|\nabla|}\triangle_0 f(\lambda\cdot)\|_p + \left(\sum_{j\geqslant 1} 2^{\sigma j q}\|2^{s|\nabla|}\triangle_j f(\lambda\cdot)\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/q} := I + II.$$

易知

$$\|2^{s|\nabla|}\triangle_0 f(\lambda\cdot)\|_p = \lambda^{-d/p}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\psi(\lambda\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p; \tag{19}$$

$$\|2^{s|\nabla|}\triangle_j f(\lambda\cdot)\|_p = \lambda^{-d/p}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-(j-j_\lambda)}c\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p. \tag{20}$$

由于 $\lambda \gg 1$，根据 $\|f(\mu\cdot)\|_1$ 关于 $\mu > 0$ 的不变性，我们有

$$\begin{aligned} I &\leqslant \lambda^{-d/p}\|\mathscr{F}^{-1}2^{s(\lambda-1)|\xi|}\psi(\lambda\xi)\|_1\|\Delta_0 2^{s|\nabla|}f\|_p \\ &\leqslant \lambda^{-d/p}\|\mathscr{F}^{-1}2^{-|\xi|}\|_1\|\mathscr{F}^{-1}\psi\|_1\|\Delta_0 2^{s|\nabla|}f\|_p \\ &\lesssim \lambda^{-d/p}\|\Delta_0 2^{s|\nabla|}f\|_p. \end{aligned}$$

利用 (20)，可得

$$II \leqslant \lambda^{\sigma-d/p}\left(\sum_{j\geqslant 1-j_\lambda} 2^{j\sigma q}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}]\|^q_p\right)^{1/q}.$$

令 $\varepsilon_0 \gg \lambda^{-1}$。将 f 分解为

$$\widehat{f} = (1-\psi(2\varepsilon_0^{-1}\cdot))\,\widehat{f} + \psi(2\varepsilon_0^{-1}\cdot)\widehat{f} := \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2.$$

于是我们有

$$II \leqslant \lambda^{\sigma-d/p}\sum_{k=1,2}\left(\sum_{j\geqslant 1-j_\lambda} 2^{j\sigma q}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_k]\|^q_p\right)^{1/q} := III + IV.$$

根据 $\widehat{f}_1$ 的支集性质，我们有

$$\begin{aligned} III \leqslant & \lambda^{\sigma-d/p}\left(\sum_{j\geqslant 0} 2^{j\sigma q}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_1]\|^q_p\right)^{1/q} \\ & + \lambda^{\sigma-d/p}\left(\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j<0} 2^{j\sigma q}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_1]\|^q_p\right)^{1/q} := V + VI. \end{aligned}$$

设 $\widetilde{\varphi} = \varphi_{-1} + \varphi + \varphi_1 \log_2\varepsilon_0 + 5$。由 $\|f(\mu\cdot)\|_1$ 关于 $\mu > 0$ 的不变性以及乘子估计 (13) 可得

$$\begin{aligned} \|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_1]\|_p &\leqslant \|\mathscr{F}^{-1}[2^{s(\lambda-1)|\xi|}\widetilde{\varphi}(2^{-j}c\xi)]\|_1\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p \\ &\lesssim 2^{s\lambda\varepsilon_0}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p. \end{aligned}$$

对于 $j \in [\log_2 \varepsilon_0 - 5,\ \log_2 \varepsilon_0 + 5]$，鉴于 $\|f(\mu\cdot)\|_1$ 关于 $\mu > 0$ 的不变性以及 (13)，我们有

$$\begin{aligned}
&\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_1]\|_p \\
&\leqslant \|\mathscr{F}^{-1}[2^{s(\lambda-1)\varepsilon_0|\xi|}\widetilde{\varphi}(2^{-j}\varepsilon_0 c\xi)(1-\psi(2\xi))]\|_1 \|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p \\
&\lesssim 2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p.
\end{aligned}$$

若 $j < 0$，由 $\varphi(2^{-j}c\cdot)$ 的支集性质可得

$$\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p \lesssim \|\triangle_0 2^{s|\nabla|}f\|_p. \tag{21}$$

将上述估计代入 IV 和 V，可得

$$\begin{aligned}
V &\lesssim \lambda^{\sigma-d/p}2^{s\lambda\varepsilon_0}\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}}, \\
VI &\lesssim \lambda^{\sigma-d/p}2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|\triangle_0 2^{s|\nabla|}f\|_p \left(\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j<0} 2^{j\sigma q}\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

经过直接计算可得,

$$\left(\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j<0} 2^{j\sigma q}\right)^{1/q} \lesssim \begin{cases} 1, & \sigma > 0; \\ (-\log_2\varepsilon_0)^{1/q}, & \sigma = 0; \\ \varepsilon_0^{\sigma}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

由此可得

$$VI \lesssim 2^{s\lambda\varepsilon_0/3}F(\lambda,\varepsilon_0)\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}},$$

其中

$$F(\lambda,\varepsilon_0) = \begin{cases} \lambda^{\sigma-d/p}, & \sigma > 0; \\ \lambda^{-d/p}(-\log_2\varepsilon_0)^{1/q}, & \sigma = 0; \\ \lambda^{\sigma-d/p}\varepsilon_0^{\sigma}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

结合 V 和 VI 的估计，可得

$$III \lesssim 2^{s\lambda\varepsilon_0/3}F(\lambda,\varepsilon_0)\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}}.$$

接下来，我们估计 IV。由 (21) 可容易看出,

$$IV \lesssim \lambda^{\sigma-d/p}\|\triangle_0 2^{s|\nabla|}f\|_p \left(\sum_{1-j_\lambda\leqslant j\leqslant\log_2\varepsilon_0+5} 2^{j\sigma q}\right)^{1/q}.$$

通过直接计算可以得到,

$$\left(\sum_{1-j_\lambda\leqslant j\leqslant\log_2\varepsilon_0+5} 2^{j\sigma q}\right)^{1/q} \lesssim \begin{cases} \varepsilon_0^{\sigma}, & \sigma > 0; \\ (\log_2\lambda)^{1/q}, & \sigma = 0; \\ \lambda^{-\sigma}, & \sigma < 0. \end{cases}$$

由此可得

$$IV \lesssim G(\lambda,\, \varepsilon_0)\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}},$$

其中

$$G(\lambda,\varepsilon_0)=\begin{cases} \lambda^{\sigma-d/p}\varepsilon_0^{\sigma}, & \sigma>0;\\ \lambda^{-d/p}(\log_2\lambda)^{1/q}, & \sigma=0;\\ \lambda^{-d/p}, & \sigma<0. \end{cases}$$

对于任意 $0<\epsilon<\sigma$，取 $\varepsilon_0=\lambda^{-1+\epsilon/\sigma}$，可找到一个 $\lambda_0:=\lambda_0(\epsilon,\sigma,q,s)>1$，使得

$$G(\lambda,\varepsilon_0)+2^{s\lambda\varepsilon_0/3}F(\lambda,\varepsilon_0)\leqslant\lambda^{-d/p+\epsilon}.$$

结合 I、III 和 IV 的估计，我们证明了 (i)。

步骤 2。若 $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset\{\xi:\,|\xi|\geqslant\varepsilon_0\}$ 对某个 $\varepsilon_0>0$ 成立，则在步骤 1 的证明中有 $f_2=0$。由 III 的估计可得结论。

步骤 3。我们证明 (iii)。有

$$\begin{aligned}\|f(\lambda^{-1}\cdot)\|_{B^{\sigma,s\lambda}_{p,q}}\leqslant&\left(\sum_{j\geqslant1}2^{\sigma jq}\|2^{s\lambda|\nabla|}\triangle_j f(\lambda^{-1}\cdot)\|^q_{L^p(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/q}\\&+\|2^{s\lambda|\nabla|}\triangle_0 f(\lambda^{-1}\cdot)\|_p=A+B.\end{aligned}$$

按照 (20) 中的同样方法，对于 $j\geqslant1$，有

$$\|2^{\lambda s|\nabla|}\triangle_j f(\lambda^{-1}\cdot)\|_p=\lambda^{d/p}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-(j+j_\lambda)}c^{-1}\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p. \tag{22}$$

由此可得

$$\begin{aligned}A&\leqslant\lambda^{d/p}\left(\sum_{j\geqslant1}2^{\sigma jq}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-(j+j_\lambda)}c^{-1}\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p^q\right)^{1/q}\\&\lesssim\lambda^{d/p-\sigma}\left(\sum_{j\geqslant j_\lambda}2^{\sigma jq}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-j}c^{-1}\xi)\widehat{f}(\xi)]\|_p^q\right)^{1/q}\\&\lesssim\lambda^{d/p-\sigma}\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}}.\end{aligned}$$

对于 B 的估计，我们有

$$\begin{aligned}B&\leqslant\lambda^{d/p}\|2^{s|\nabla|}\mathscr{F}^{-1}\psi(\lambda^{-1}\xi)\widehat{f}\|_p\\&\lesssim\lambda^{d/p}\sum_{j\leqslant j_\lambda+C}\|2^{s|\nabla|}\triangle_j f\|_p\|\mathscr{F}^{-1}\psi(\lambda^{-1}\xi)\|_1\\&\lesssim\lambda^{d/p}\sum_{j\leqslant j_\lambda+C}\|2^{s|\nabla|}\triangle_j f\|_p\\&\lesssim\lambda^{d/p}\|f\|_{B^{\sigma,s}_{p,q}}\left(\sum_{j\leqslant j_\lambda+C}2^{-j\sigma q'}\right)^{1/q'},\end{aligned}$$

由此即可得到所需结果。 □

~对于空间 $L^\gamma(\mathbb{R};\, B^{\sigma,\ p\ s}_{q,\ })$ 中的缩放，我们有

引理 2.5. 设 $s<0,\, \sigma\in\mathbb{R}$。记 $(D_\lambda f)(x,t)\ =f(x/\lambda,t/\lambda)$。则对任意 $\lambda>1$，有

$$\begin{aligned}
&\|D_\lambda f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,\lambda s}_{p,q})}\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p-\sigma}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q})},\quad \sigma<0;\\
&\|D_\lambda f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,\lambda s}_{p,q})}\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q})},\quad \sigma>0;\\
&\|D_\lambda f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,\lambda s}_{p,q})}\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p}(\log_2\lambda)^{1/q'}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q})},\quad \sigma=0.
\end{aligned}$$

证明. 我们沿用引理 2.4 的方法。根据定义，

$$\|D_\lambda f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s\lambda}_{p,q})}\leqslant\left(\sum_{j\geqslant1}2^{\sigma jq}\|2^{s\lambda|\nabla|}\triangle_jD_\lambda f\|^q_{L^\gamma_tL^p_x}\right)^{1/q}+\|2^{s\lambda|\nabla|}\triangle_0D_\lambda f\|_{L^\gamma_tL^p_x}=V+VI.$$

注意到恒等式

$$\|2^{\lambda s|\nabla|}\triangle_jD_\lambda f\|_{L^\gamma_tL^p_x}=\lambda^{1/\gamma+d/p}\|\mathscr{F}^{-1}[2^{s|\xi|}\varphi(2^{-(j+j_\lambda)}c^{-1}\xi)\widehat{f}]\|_{L^\gamma_tL^p_x},$$

采用引理 2.4 中对 III 的估计所用的相同方法，可得

$$V\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p-\sigma}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q})}$$

VI 的估计可用与引理 2.4 中对 IV 进行估计时类似的方法得到。 □

注 2.6. 设 $\mathbb{A}\subset\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}\cup\{0\}$，我们记作

$$\|u\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q}(\mathbb{A}))}=\left(\sum_{j\in\mathbb{A}}2^{\sigma jq}\|2^{s|\nabla|}\triangle_ju\|^q_{L^\gamma_tL^p_x(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)}\right)^{1/q}.\tag{23}$$

按照引理 2.4 和 2.5 的证明，我们已证明

$$\begin{aligned}
&\|D_\lambda f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,\lambda s}_{p,q}(\mathbb{N}))}\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p-\sigma}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q}(\mathbb{Z}^c_\lambda))};\\
&\|2^{s\lambda|\nabla|}\triangle_0D_\lambda f\|_{L^\gamma_tL^p_x}\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p+}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q}(\mathbb{Z}_\lambda))},\quad \sigma\geq0;\\
&\|2^{s\lambda|\nabla|}\triangle_0D_\lambda f\|_{L^\gamma_tL^p_x}\lesssim\lambda^{1/\gamma+d/p-\sigma}\|f\|_{\widetilde{L}^\gamma(\mathbb{R};B^{\sigma,s}_{p,q}(\mathbb{Z}_\lambda))},\quad \sigma<0;
\end{aligned}$$

其中 $\mathbb{Z}_\lambda=\{j\geqslant0:\ 2^j\lesssim\lambda\}$, $\mathbb{Z}^c_\lambda=\{j\geqslant0:\ 2^j\gtrsim\lambda\}$。

2.2 函数空间 $F^{\sigma,\ s}_{p\ ,q}$ 和 $H^{\sigma,\ s}_{p\ }$

设 $s,\sigma\in\mathbb{R},\,1\leqslant p,q\leqslant\infty$。我们引入如下

$$F^{\sigma,s}_{p,q}=\{f\in\mathscr{S}_1':\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}<\infty\},\quad \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}=\left\|\left(\sum_{j=0}^\infty2^{\sigma jq}|\triangle_j2^{s|\nabla|}f|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p},\tag{24}$$

$$H^{\sigma,s}_p=\{f\in\mathscr{S}_1':\|f\|_{H^{\sigma,s}_p}<\infty\},\quad \|f\|_{H^{\sigma,s}_p}=\left\|2^{s|\nabla|}(I-\Delta)^{\sigma/2}f\right\|_{L^p}.\tag{25}$$

引理 2.7。设 $s, s_i, \sigma_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, p_i, q_i \leqslant \infty$, $i = 1, 2$。则有

$$B^{\sigma,s}_{p,p\wedge q} \subset F^{\sigma,s}_{p,q} \subset B^{\sigma,s}_{p,p\vee q}, \tag{26}$$

$$F^{\sigma_1,s_1}_{p_1,q_1} \subset F^{\sigma_2,s_2}_{p_2,q_2}, \quad \text{if } s_1 > s_2,\ p_1 \leqslant p_2. \tag{27}$$

证明。由 $l^{q_1} \subset l^{q_2}$ 对 $q_1 \leqslant q_2$ 以及Minkowski不等式，可得 (26)。利用引理 2.2 和 (26)，可得

$$F^{\sigma_1,s_1}_{p_1,q_1} \subset B^{\sigma_1,s_1}_{p_1,\infty} \subset B^{\sigma_2,s_2}_{p_2,1} \subset F^{\sigma_2,s_2}_{p_2,q_2} \tag{28}$$

若 $s_1 > s_2$, $p_1 \leqslant p_2$。 □

现在我们考察 $F^{\sigma,s}_{p,q}$ 上的缩放性质。首先，回顾一下 $L^p(l^q)$中的一个乘子估计（参见 [57]）。

引理 2.8。设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, $\{\Omega_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}^d$ 的一列紧子集， $d_k > 0$ 是 Ω_k 的直径， $k \in \mathbb{Z}_+$。设 $\kappa > d/2 + d/(p \wedge q)$。则有

$$\|\mathscr{F}^{-1} M_k \mathscr{F}\|_{L^p(l^q)} \lesssim \sup_{j\geqslant 0} \|M_j(d_j\,\cdot)\|_{H^\kappa} \|f_k\|_{L^p(l^q)}$$

对于 $\operatorname{supp} f_k \subset \Omega_k$, $M_k \in H^\kappa$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\|f_k\|_{L^p(l^q)} = \|\|\{f_k\}_{k=0}^{\infty}\|_{l^q}\|_{L^p}$。

引理 2.9. 设 $s < 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$。我们有以下结果。

(i) 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\lambda_0 = \lambda_0(\epsilon, s, \sigma, q) > 1$，使得对任意 $\lambda > \lambda_0$ 和 $f \in F^{\sigma,s}_{p,q}$，

$$\|f(\lambda\,\cdot)\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{-d/p+\epsilon} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}$$

若 $\sigma < 0$，则上述不等式对 $\epsilon = 0$ 成立。

(ii) 假设 $\operatorname{supp} f \subset \{\xi : |\xi| \geqslant \varepsilon_0\}$ 对某个 $\varepsilon_0 > 0$ 成立。那么对任意 $\lambda \gg 1$，我们有

$$\begin{aligned}
&\|f(\lambda\,\cdot)\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{\sigma-d/p} 2^{s\lambda\varepsilon_0/3} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \quad \sigma > 0;\\
&\|f(\lambda\,\cdot)\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{-d/p} 2^{s\lambda\varepsilon_0/3} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \quad \sigma < 0;\\
&\|f(\lambda\,\cdot)\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{-d/p} \log_2 \lambda 2^{s\lambda\varepsilon_0/3} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \quad \sigma = 0.
\end{aligned}$$

(iii) 对于任意 $f \in F^{\sigma,s}_{p,q}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\|f(\lambda^{-1}\,\cdot)\|_{F^{\sigma,\lambda s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{d/p-\sigma} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \quad \sigma < 0;\\
&\|f(\lambda^{-1}\,\cdot)\|_{F^{\sigma,\lambda s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{d/p} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \quad \sigma > 0;\\
&\|f(\lambda^{-1}\,\cdot)\|_{F^{\sigma,\lambda s}_{p,q}} \lesssim \lambda^{d/p} \log_2 \lambda\, \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \quad \sigma = 0.
\end{aligned}$$

证明。步骤 1。我们证明（i）。根据 $F^{\sigma,\ s}_{p\ q}$，上的范数定义，

$$\|f(\lambda\cdot)\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}=\left\|\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{\sigma jq}|\triangle_j 2^{s|\nabla|}f(\lambda\cdot)|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}. \tag{29}$$

令 $1\ll\lambda=2^{j_\lambda}c$，其中 $1\leqslant c<2$。我们有

$$\begin{aligned}\triangle_0 2^{s|\nabla|}f(\lambda\cdot)&=\left(\mathscr{F}^{-1}\varphi(\lambda\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}\right)(\lambda\cdot),\\ \triangle_j 2^{s|\nabla|}f(\lambda\cdot)&=\left(\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^{-(j-j_\lambda)}c\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}\right)(\lambda\cdot),\quad j\geqslant 1.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|f(\lambda\cdot)\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}\leqslant&\lambda^{-d/p}\|\mathscr{F}^{-1}\psi(\lambda\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}\|_{L^p}\\&+\lambda^{\sigma-d/p}\left\|\left(\sum_{j=1-j_\lambda}^{\infty}2^{\sigma qj}|\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^{-j}c\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}:=I+II.\end{aligned} \tag{30}$$

与引理 2.4 类似，

$$I\lesssim\lambda^{-d/p}\|\triangle_0 2^{s|\nabla|}f\|_p\leqslant\lambda^{-d/p}\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}. \tag{31}$$

令 $\varepsilon_0\gg\lambda^{-1}$，并按照引理 2.4 证明中的相同方式分解 f，

$$\widehat{f}=(1-\psi(2\varepsilon_0^{-1}\cdot))\,\widehat{f}+\psi(2\varepsilon_0^{-1}\cdot)\widehat{f}:=\widehat{f}_1+\widehat{f}_2.$$

由 (30) 可得

$$II\leqslant\lambda^{\sigma-d/p}\sum_{k=1,2}\left\|\left(\sum_{j=1-j_\lambda}^{\infty}2^{\sigma qj}|\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^{-j}c\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}:=III+IV. \tag{32}$$

我们来估计 III。我们有

$$\begin{aligned}III\leqslant&\lambda^{\sigma-d/p}\left\|\left(\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j\leqslant 5}^{\infty}2^{\sigma qj}|\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^{-j}c\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}_1|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}\\&+\lambda^{\sigma-d/p}\left\|\left(\sum_{j>5}^{\infty}2^{\sigma qj}|\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^{-j}c\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}_1|^q\right)^{1/q}\right\|_{L^p}:=V+VI.\end{aligned} \tag{33}$$

记

$$M_j(\xi)=\varphi(2^{-j}c\xi)2^{s(\lambda-1)|\xi|}(1-\psi(2\varepsilon_0^{-1}\xi)).$$

容易看出,

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}^{-1}\varphi(2^{-j}c\xi)2^{s\lambda|\xi|}\widehat{f}_1 = \mathscr{F}^{-1}M_j(\xi)\mathscr{F}\sum_{-2\leqslant\ell\leqslant 1}\triangle_{j+\ell}2^{s|\nabla|}f,\\
&M_j(\xi) = \varphi(2^{-j}c\xi)2^{s(\lambda-1)|\xi|},\quad \text{for } j > \log_2\varepsilon_0 + 5,\\
&M_j(\xi) = 0,\quad \text{for } j < \log_2\varepsilon_0 - 5.
\end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\varphi_j) = 5\cdot 2^{j-2}$。由引理 2.8 可得，对于 $\lambda \gg 1, \kappa > d/2+d/(p\wedge q)$，

$$\begin{aligned}
VI \lesssim& \lambda^{\sigma-d/p}\sup_{j>5}\|\varphi(\xi)2^{s(\lambda-1)c^{-1}2^j|\xi|}\|_{H^\kappa}\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}\\
\lesssim& \lambda^{\sigma-d/p}2^{s\lambda}\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}.
\end{aligned}\tag{34}$$

现在我们估计 V。注意到 $\operatorname{supp}\widehat{f}\subset\mathbb{R}^d\setminus B(0,\varepsilon_0)$，并利用 (21)，可得

$$\begin{aligned}
V \lesssim& \lambda^{\sigma-d/p}\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j\leqslant 5}2^{\sigma j}\|\mathscr{F}^{-1}2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_1\|_p\\
\lesssim& \lambda^{\sigma-d/p}\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j\leqslant 5}2^{\sigma j}\|\mathscr{F}^{-1}M_j\|_1\sum_{-2\leqslant\ell\leqslant 1}\|\triangle_{j+\ell}2^{s|\nabla|}\widehat{f}\|_p\\
\lesssim& \lambda^{\sigma-d/p}\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}\sum_{\log_2\varepsilon_0-5\leqslant j\leqslant 5}2^{\sigma j}\|\mathscr{F}^{-1}M_j\|_1.
\end{aligned}\tag{35}$$

在引理 2.4 的证明中，我们已经证明

$$\|\mathscr{F}^{-1}M_j\|_1 \lesssim 2^{s\varepsilon_0\lambda/3}$$

因此，我们有

$$V \lesssim \lambda^{-d/p}F(\lambda,\varepsilon_0)2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}},\tag{36}$$

$$F(\lambda,\varepsilon_0) = \begin{cases}\lambda^{\sigma-d/p}, & \sigma>0,\\ \lambda^{-d/p}\log_2\varepsilon_0^{-1} & \sigma=0,\\ \lambda^{\sigma-d/p}\varepsilon_0^{\sigma}, & \sigma<0.\end{cases}$$

利用嵌入 $B^{\sigma,\ s}_{p,\ 1}\subset F^{\sigma,\ s}_{p,\ q},$，可得

$$IV \lesssim \lambda^{\sigma-d/p}\sum_{1-j_\lambda\leqslant j\leqslant\log_2\varepsilon_0+5}2^{\sigma j}\|\mathscr{F}^{-1}2^{s\lambda|\xi|}\varphi(2^{-j}c\xi)\widehat{f}_2\|_p.\tag{37}$$

沿用引理 2.4 的证明，可得

$$IV \lesssim G(\lambda,\varepsilon_0)\|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}},\tag{38}$$

其中

$$G(\lambda,\varepsilon_0) = \begin{cases}\lambda^{\sigma-d/p}\varepsilon_0^{\sigma}, & \sigma>0,\\ \lambda^{-d/p}\log_2\lambda, & \sigma=0,\\ \lambda^{-d/p}, & \sigma<0.\end{cases}$$

取 $\varepsilon_0 = \lambda^{-1+\epsilon/\sigma}$，即可得到 (i) 的结论，证毕。

步骤 2。我们证明 (ii)。注意到 $f = f_2$ 在 (i) 的证明中，我们看到 (ii) 是 (i) 的直接推论。

步骤 3。我们给出 (iii) 的结果。接下来，我们考虑 $f(\lambda^{-1}\cdot)$ 关于 $\lambda \gg 1$ 的缩放。根据 $F^{\sigma,\ s}_{p\ q}$ 上的定义，

$$\|f(\lambda^{-1}\cdot)\|_{F^{\sigma,\lambda s}_{p,q}} = \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{\sigma j q} |\triangle_j 2^{s\lambda|\nabla|} f(\lambda^{-1}\cdot)|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p}. \tag{39}$$

令 $\lambda = 2^{j_\lambda} c$，其中 $1 \leqslant c < 2$。对于 $j \geqslant 1$，我们有，

$$\begin{aligned} \triangle_j 2^{s\lambda|\nabla|} f(\lambda^{-1}\cdot) &= \left(\mathscr{F}^{-1} \varphi(2^{-(j+j_\lambda)} c\xi) 2^{s|\xi|} \widehat{f} \right)(\lambda^{-1}\cdot) \\ \triangle_0 2^{s\lambda|\nabla|} f(\lambda^{-1}\cdot) &= \left(\mathscr{F}^{-1} \psi(\lambda^{-1}\xi) 2^{s|\xi|} \widehat{f} \right)(\lambda^{-1}\cdot). \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \|f(\lambda^{-1}\cdot)\|_{F^{\sigma,\lambda s}_{p,q}} \leqslant & \lambda^{d/p} \left\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{\sigma j q} |\mathscr{F}^{-1} \varphi(2^{-(j+j_\lambda)} c\xi) 2^{s|\xi|} \widehat{f}|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p} \\ & + \lambda^{d/p} \|\mathscr{F}^{-1} \psi(\lambda^{-1}\xi) 2^{s|\xi|} \widehat{f}\|_{L^p} := A + B. \end{aligned} \tag{40}$$

由引理 2.8，采用与上述类似的方法，我们有

$$\begin{aligned} A \leqslant & \lambda^{d/p-\sigma} \left\| \left(\sum_{j>j_\lambda}^{\infty} 2^{\sigma j q} |\mathscr{F}^{-1} \varphi(2^{-j} c\xi) 2^{s|\xi|} \widehat{f}|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p} \\ \leqslant & \lambda^{d/p-\sigma} \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}. \end{aligned} \tag{41}$$

对于 B 的估计，我们有

$$\begin{aligned} B \leqslant & \lambda^{d/p} \sum_{j=0}^{j_\lambda+2} \|\triangle_j \mathscr{F}^{-1} \psi(\lambda^{-1}\xi) 2^{s|\xi|} \widehat{f}\|_{L^p} \\ \leqslant & \lambda^{d/p} \sum_{j=0}^{j_\lambda+2} \|\triangle_j 2^{s|\nabla|} f\|_{L^p} \\ \leqslant & \lambda^{d/p} G(\lambda) \|f\|_{F^{\sigma,s}_{p,q}}, \end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$G(\lambda) = \begin{cases} \lambda^{-\sigma}, & \sigma < 0 \\ \log_2 \lambda & \sigma = 0 \\ 1, & \sigma > 0. \end{cases}$$

结论由此得出。 □

引理 2.10。设 $s, s', \sigma \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$。那么

$$2^{(s'-s)|\nabla|} : F_{p,q}^{\sigma,s'} \to F_{p,q}^{\sigma,s} \tag{43}$$

是一个等距映射。特别地,

$$2^{s|\nabla|} : F_{p,q}^{\sigma,s} \to F_{p,q}^{\sigma} \tag{44}$$

是一个等距映射。

证明。由.....可直接得到

$$\|2^{(s'-s)|\nabla|} f\|_{F_{p,q}^{\sigma,s}} = \|f\|_{F_{p,q}^{\sigma,s'}}. \qquad \square$$

回忆一下，对于所有的 $1 < p < \infty, \sigma \in \mathbb{R}$，都有 $F_{p,2}^{\sigma} = H_p^{\sigma}$（参见 [22]）。利用这一事实

$$2^{s|\nabla|} F_{p,2}^{\sigma} = F_{p,2}^{\sigma,s}, \quad 2^{s|\nabla|} H_p^{\sigma} = H_p^{\sigma,s},$$

我们立即得到

引理 2.11。设 $\sigma, s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$。则 $F^{\sigma}{}_{,p}{}^{s}{}_{,2} = H^{\sigma}{}_{,p}{}^{s}$，且范数等价。

利用 $F^{\sigma}{}_{,}{}_{p}{}^{s}{}_{2,}$ 的缩放性质，我们有以下

推论 2.12. 设 $s < 0$、 $\sigma \in \mathbb{R}$、 $1 < p < \infty$。我们有以下结果。

(i) 对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\lambda_0 = \lambda_0(\epsilon、\ s、\ \sigma) > 1$，使得对任意 $\lambda > \lambda_0$和$f \in H^{\sigma}{}_{,}{}_{p}{}^{s}$,

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{H_p^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{-d/p+\epsilon} \|f\|_{H_p^{\sigma,s}}$$

若 $\sigma < 0$，则上述不等式对 $\epsilon = 0$ 成立。特别地,

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{E^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{-d/2+\epsilon} \|f\|_{E^{\sigma,s}}.$$

(ii) 假设 $\operatorname{supp} f \subset \{\xi : \ |\xi| \geqslant \varepsilon_0\}$，其中 $\varepsilon_0 > 0$。那么对任意 $\lambda \gg 1$,

$$\|f(\lambda \cdot)\|_{H_p^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{\sigma-d/p} 2^{s\lambda\varepsilon_0/3} \|f\|_{H_p^{\sigma,s}}, \quad \sigma > 0;$$
$$\|f(\lambda \cdot)\|_{H_p^{\sigma,s}} \lesssim \lambda^{-d/p} 2^{s\lambda\varepsilon_0/3} \|f\|_{H_p^{\sigma,s}}, \quad \sigma \leqslant 0.$$

(iii) 对任意 $f \in H^{\sigma}{}_{,}{}_{p}{}^{s}$、 $\lambda \gg 1$，我们有,

$$\|f(\lambda^{-1} \cdot)\|_{H_p^{\sigma,\lambda s}} \lesssim \lambda^{d/p-\sigma} \|f\|_{H_p^{\sigma,s}}, \quad \sigma < 0;$$
$$\|f(\lambda^{-1} \cdot)\|_{H_p^{\sigma,\lambda s}} \lesssim \lambda^{d/p} \|f\|_{H_p^{\sigma,s}}, \quad \sigma \geqslant 0.$$

证明。只需考虑 $\sigma = 0$ 这一情形，通过观察$\|f\|_{H^{0,}{}_{p}{}^{s}} = \|\mathscr{F}^{-1} 2^{s|\xi|} \widehat{f}\|_p$ 即可轻松得出。 $\square$

推论 2.13. 设 $s < 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$。记 $(D_\lambda f)(x,t) = f(x/\lambda, t/\lambda)$。那么，对于任意$\lambda > 1$，有

$$\|D_\lambda f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}; H_p^{\sigma,\lambda s})} \lesssim \lambda^{1/\gamma+d/p-\sigma} \|f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}; H_p^{\sigma,s})}, \quad \sigma < 0;$$
$$\|D_\lambda f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}; H_p^{\sigma,\lambda s})} \lesssim \lambda^{1/\gamma+d/p} \|f\|_{L^\gamma(\mathbb{R}; H_p^{\sigma,s})}, \quad \sigma \geqslant 0;$$

3 变量参数 $\lambda > 1$ 的衰减估计

我们来考察缩放线性 Klein-Gordon 方程解的衰减估计

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \lambda^2 u - \Delta u = f, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{45}$$

如引言所述，需要取足够大的 $\lambda > 1$，以保证初始数据在 E^{σ} 中足够小，$^{s} \times E^{s}_{\sigma-1}$。因此，在估计方程 (45) 的解的衰减时，我们需要将 $\lambda > 1$ 视为变量参数。为方便起见，记

$$K_\lambda(t) := \frac{\sin t(\lambda^2 - \Delta)^{1/2}}{(\lambda^2 - \Delta)^{1/2}}, \quad K_\lambda'(t) := \cos t(\lambda^2 - \Delta)^{1/2}. \tag{46}$$

众所周知，方程 (45) 的解可改写为

$$u(t) = K_\lambda'(t)u_0 + K_\lambda(t)u_1 + \int_0^t K_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau. \tag{47}$$

记

$$U_\lambda(t) := e^{\mathrm{i}t(\lambda^2-\Delta)^{1/2}}. \tag{48}$$

容易看出

$$K_\lambda'(t) = \frac{1}{2}(U_\lambda(t) + U_\lambda(-t)), \quad K_\lambda(t) = \frac{U_\lambda(t) - U_\lambda(-t)}{2\mathrm{i}(\lambda^2 - \Delta)^{1/2}}.$$

为了估计 $K_\lambda'(t)$ 和 $K_\lambda(t)$，只需考虑 $U_\lambda(t)$ 的衰减估计。为了说明 $U_\lambda(t)$ 在高空间维数下的衰减，我们先考虑一维情形，这比高空间维数的情形容易得多。

3.1 一维衰减

我们考虑一维中 $\lambda > 1$ 的 $U_\lambda(t)$ 衰减估计。首先，回顾范德科普特引理 [52]:

引理 3.1. 设 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，且存在 $k \geqslant 2$，使得 $P \in C^k(\mathbb{R})$ 满足 $|P^{(k)}(\xi)| \geqslant \rho$，对所有 $\xi \in \operatorname{supp} \phi$ 均成立。则有

$$\left| \int e^{\mathrm{i}P(\xi)} \phi(\xi) d\xi \right| \leqslant \rho^{-1/k}(\|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_1) \tag{49}$$

容易看出，对于 $j \in \mathbb{N}$,

$$\triangle_0 U_\lambda(t)f = \mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|\xi|^2}}\psi(\xi)) * f, \quad \triangle_j U_\lambda(t)f = \mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|\xi|^2}}\varphi_j(\xi)) * f. \tag{50}$$

根据杨氏不等式,

$$\|\triangle_0 U_\lambda(t)f\|_\infty \leqslant \|\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|\xi|^2}}\psi(\xi))\|_\infty \|f\|_1. \tag{51}$$

记 $p_\lambda(\xi)=x\xi+t\sqrt{\lambda^2+\xi^2}$。容易看出

$$p'_\lambda(\xi)=x+t\xi(\lambda^2+\xi^2)^{-1/2},\quad p''_\lambda(\xi)=t\lambda^2(\lambda^2+\xi^2)^{-3/2}.$$

应用范德科普特引理，可得

$$\|\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|\xi|^2}}\psi(\xi))\|_\infty \lesssim \lambda^{1/2}|t|^{-1/2}. \tag{52}$$

由 (51) 和 (52) 可得

$$\|\triangle_0 U_\lambda(t)f\|_\infty \lesssim \lambda^{1/2}|t|^{-1/2}\|f\|_1. \tag{53}$$

接下来，通过缩放和杨氏不等式，我们有

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_\infty \leqslant 2^j\|\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\varphi(\xi))\|_\infty \|f\|_1. \tag{54}$$

记 $p_{j,\ \lambda}(\xi)=x\xi+t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}$。我们看到

$$p'_{j,\lambda}(\xi)=x+2^{2j}t\xi(\lambda^2+2^{2j}\xi^2)^{-1/2},\quad p''_{j,\lambda}(\xi)=t2^{2j}\lambda^2(\lambda^2+|2^j\xi|^2)^{-3/2}.$$

由此可得

$$|p''_{j,\lambda}(\xi)| \gtrsim |t|2^{2j}\lambda^2(\lambda^3+2^{3j})^{-1}.$$

由范德科普特引理,

$$\|\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\varphi(\xi))\|_\infty \lesssim (\lambda^{1/2}2^{-j}+\lambda^{-1}2^{j/2})|t|^{-1/2}. \tag{55}$$

因此，由 (53)、(54) 和 (55) 可得，对于 $j\geqslant 0$,

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_\infty \lesssim (\lambda^{1/2}+\lambda^{-1}2^{3j/2})|t|^{-1/2}\|f\|_1. \tag{56}$$

由于 ψ 和 φ 的支集均为紧集，对于 $j\geqslant 0$,

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_\infty \lesssim 2^j\|f\|_1. \tag{57}$$

由 Plancherel恒等式，对于 $j\geqslant 0$,

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_2 \leqslant \|f\|_2. \tag{58}$$

通过插值，对于 $\delta(p)=1/2-1/p$，对于 $2\leqslant p\leqslant\infty$,

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_p \lesssim (\lambda^{\delta(p)}+\lambda^{-2\delta(p)}2^{3\delta(p)j})|t|^{-\delta(p)}\|f\|_{p'}, \tag{59}$$

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_p \lesssim 2^{2\delta(p)j}\|f\|_{p'}. \tag{60}$$

引理 3.2. 设 $2\leqslant p\leqslant\infty$, $\delta(p)=1/2-1/p$。对于任意 $\theta\in[0,1]$，有

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_p \lesssim (\lambda^{\theta\delta(p)}2^{2(1-\theta)\delta(p)j}+\lambda^{-2\theta\delta(p)}2^{(2+\theta)\delta(p)j})|t|^{-\theta\delta(p)}\|f\|_{p'}. \tag{61}$$

3.2 高维衰减

若取 $\lambda = 1$，Klein-Gordon 方程的色散估计是众所周知的，参见 [8, 9, 10, 19, 21, 29]。由于我们将 $\lambda > 1$ 视为变量参数，$U_\lambda(t)$ 衰减率的估计取决于 $\lambda > 0$。我们将应用 [4, 23]中的技巧来计算 $U_\lambda(t)$ 的衰减。通过缩放和杨氏不等式，有

$$\|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t) f\|_\infty \leqslant 2^{jd} \|\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\varphi(\xi))\|_\infty \|f\|_1. \tag{62}$$

根据 Hausdorff-Young 不等式，我们有

$$\|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t) f\|_\infty \leqslant 2^{jd} \|f\|_1. \tag{63}$$

对于径向函数 f，已知

$$(\mathscr{F}^{-1} f)(x) = c\pi \int_0^\infty f(r) r^{d-1} (r|x|)^{-(d-2)/2} J_{(d-2)/2}(r|x|) dr, \tag{64}$$

其中 $J_m(x)$ 是由下式定义的贝塞尔函数

$$J_m(r) = \frac{(r/2)^m}{\Gamma(m+1/2)\pi^{1/2}} \int_{-1}^1 e^{\mathrm{i}rt}(1-t^2)^{m-1/2} dt, \quad m > -1/2. \tag{65}$$

回顾满足以下条件的贝塞尔函数（参见 [23, 28, 62]）

命题 3.3. 设 $m > -1/2$ 和 $0 < r < \infty$。我们有以下结果。

(i) $r^{-m} J_m(r) \leqslant C$。(ii) $\frac{d}{dr}($
$r^{-m} J_m(r)) = -r^{-m} J_{m+1}(r)$】【。

(iii) $r^{-(d-2)/2} J_{(d-2)/2}(r) = c_d \mathfrak{Re}\left(e^{\mathrm{i}r} h(r)\right)$，其中 $h(r)$ 满足

$$\left|\frac{d^k}{dr^k} h(r)\right| \leqslant C_k (1+r)^{-(d-1)/2-k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{66}$$

利用 (64)，我们得到

$$\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\varphi(\xi))(x) = 2\pi \int_0^\infty e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j r|^2}} \varphi(r) r^{d-1} K(r|x|) dr,$$

其中 $K(\varrho) := \varrho^{-(d-2)/2} J_{(d-2)/2}(\varrho)$。现在我们将证明分为以下两种情况。情况 1. $0 \leqslant |x| \leqslant 1$。注意到 $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi\colon\ |\xi| \in [1/2, 2]\}$，我们看到，对于$0 \leqslant |x| \leqslant 1$,

$$|\partial_r^k (r^{d-1}\varphi(r) K(r|x|))| \lesssim 1. \tag{67}$$

记 $p_{j,\lambda}(r)=\sqrt{\lambda^2+2^{2j}r^2}$。分部积分可得

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{\mathrm{i}tp_{j,\lambda}(r)}\varphi(r)r^{d-1}K(r|x|)dr\\
&\quad=-\int_{1/2}^2 e^{\mathrm{i}tp_{j,\lambda}(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mathrm{i}tp'_{j,\lambda}(r)}\varphi(r)r^{d-1}K(r|x|)\right)dr\\
&\quad=\int_{1/2}^2 e^{\mathrm{i}tp_{j,\lambda}(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mathrm{i}tp'_{j,\lambda}(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\mathrm{i}tp'_{j,\lambda}(r)}\varphi(r)r^{d-1}K(r|x|)\right)\right)dr\\
&\quad=\dots\,. \qquad (68)
\end{aligned}$$

重复上述论证并利用引理 A.2，对于任意 $q\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^\infty e^{\mathrm{i}tp_{j,\lambda}(r)}\varphi(r)r^{d-1}K(r|x|)dr\right|\\
&\lesssim|t|^{-q}\sup_{r\in[1/2,2]}\sum_{\alpha_1+\dots+\alpha_q\leqslant q}\left|\left(\frac{1}{p'_{j,\lambda}(r)}\right)^{(\alpha_1)}\dots\left(\frac{1}{p'_{j,\lambda}(r)}\right)^{(\alpha_q)}\right|. \qquad (69)
\end{aligned}$$

注意到 $p_{j,\lambda}(r)=2^j((\lambda/2^j)^2+r^2)^{1/2}$，$p'_{j,\lambda}(r)\sim 2^{2j}(\lambda^2+2^{2j})^{-1/2}$对于 $r\in[1/2,2]$，由引理 A.1 和 A.3，我们得到

$$\left|\int_0^\infty e^{\mathrm{i}tp_{j,\lambda}(r)}\varphi(r)r^{d-1}K(r|x|)dr\right|\lesssim|t|^{-q}(\lambda 2^{-2j}+2^{-j})^q,\quad\forall\ q\geqslant 0. \qquad (70)$$

因此，对于 $j\in\mathbb{Z}$ 和 $|x|\leqslant 1$,

$$|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t)f(x)|\leqslant 2^{jd}|t|^{-q}(\lambda 2^{-2j}+2^{-j})^q\|f\|_1. \qquad (71)$$

特别地，对于 $j\in\mathbb{Z}$ 和 $|x|\leqslant 1$,

$$|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t)f(x)|\leqslant|t|^{-d/2}(\lambda^{d/2}+2^{dj/2})\|f\|_1. \qquad (72)$$

情形 2. $|x|\geqslant 1$。利用命题 3.3 的 (iii)，可以改写为

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}^{-1}(e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\varphi(\xi))=&c_d\pi\int_0^\infty e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^jr|^2}+ir|x|}\varphi(r)r^{d-1}h(r|x|)dr\\
&+c_d\pi\int_0^\infty e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^jr|^2}-ir|x|}\varphi(r)r^{d-1}h(r|x|)dr\\
:=&A_{j,\lambda}(x)+B_{j,\lambda}(x). \qquad (73)
\end{aligned}$$

只需考虑 $A_{j,\lambda}(x)$ 的估计。记 $h_{j,\lambda}(r)=t\sqrt{\lambda^2+|2^jr|^2}+r|x|$。注意到

$$A_{j,\lambda}(x)=c_d\pi\int_0^\infty e^{\mathrm{i}h_{j,\lambda}(r)}\varphi(r)r^{d-1}h(r|x|)dr. \qquad (74)$$

我们强调，$h_{j,\lambda}$ 与 (68) 中的 $p_{j,\lambda}$ 起着相似的作用。容易看出

$$h'_{j,\lambda}(r) = |x| + \frac{t2^{2j}r}{\sqrt{\lambda^2 + |2^j r|^2}}.$$

若 $r \in [1/2, 2]$，我们看到

$$\frac{|t|2^{2j}r}{\sqrt{\lambda^2 + |2^j r|^2}} \sim \frac{|t|2^{2j}}{\lambda + 2^j}.$$

我们可以假设 $t < 0$，因为相反的情形更容易处理。我们考虑以下三个子情形。

情形 2a。 $|x| \geqslant 1 \vee C|t|2^{2j}/(\lambda + 2^j)$。由此可得

$$|h'_{j,\lambda}(r)| \gtrsim |t|(\lambda 2^{-2j} + 2^{-j})^{-1}.$$

采用与 (68) 和 (69) 相同的方法，对 $A_{j,\lambda}$ 分部积分，可得

$$|A_{j,\lambda}(x)| \lesssim |t|^{-q}(\lambda 2^{-2j} + 2^{-j})^q.$$

情形 2b。 $|x| \geqslant 1$, $|x| \leqslant c|t|2^{2j}/(\lambda + 2^j)$。我们仍有

$$|h'_{j,\lambda}(r)| \gtrsim |t|(\lambda 2^{-2j} + 2^{-j})^{-1}.$$

采用与情形 2a 类似的方法，可得

$$|A_{j,\lambda}(x)| \lesssim |t|^{-q}(\lambda 2^{-2j} + 2^{-j})^q.$$

情形 2c. $|x| \geqslant 1$, $|x| \sim |t|2^{2j}/(\lambda + 2^j)$。注意，对于 $r \in [1/2, 2]$

$$|h''_{j,\lambda}(r)| = \frac{|t|2^j(\lambda/2^j)^2}{((\lambda/2^j)^2 + r^2)^{3/2}} \sim \frac{|t|\lambda^2 2^{2j}}{\lambda^3 + 2^{3j}}$$

对于 $k = 0, 1$,

$$|\partial_r^k h(r|x|)| \lesssim |x|^{-(d-1)/2} \lesssim \left(\frac{|t|2^{2j}}{\lambda + 2^j}\right)^{-(d-1)/2}, \tag{75}$$

由范德科普特引理可得

$$\begin{aligned} |A_{j,\lambda}(x)| &\lesssim \left(\frac{|t|\lambda^2 2^{2j}}{\lambda^3 + 2^{3j}}\right)^{-1/2} \left(\frac{t2^{2j}}{\lambda + 2^j}\right)^{-(d-1)/2} \\ &\lesssim |t|^{-d/2}\lambda^{-1}2^{-dj}(\lambda + 2^j)^{(d+2)/2} \\ &\lesssim |t|^{-d/2}2^{-dj}(\lambda^{d/2} + \lambda^{-1}2^{(d+2)j/2}). \end{aligned} \tag{76}$$

另一方面，利用 (75)，可以得到对于 $|x| \sim |t|2^{2j}/(\lambda + 2^j)$,

$$|A_{j,\lambda}(x)| \lesssim |x|^{-(d-1)/2} \lesssim |t|^{-(d-1)/2}2^{-j(d-1)}(\lambda + 2^j)^{(d-1)/2}. \tag{77}$$

综上，我们得到

$$\|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t)f\|_\infty \lesssim \min\left(|t|^{-d/2}(\lambda^{d/2}+\lambda^{-1}2^{j(d+2)/2}), |t|^{-(d-1)/2}(\lambda^{(d-1)/2}2^j + 2^{j(d+1)/2})\right)\|f\|_1. \tag{78}$$

因此，对任意 $\theta\in[0,1]$,

$$\|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t)f\|_\infty \lesssim |t|^{-(d-1+\theta)/2}(\lambda^{(d-1+\theta)/2}2^{j(1-\theta)} + \lambda^{-\theta}2^{j(d+1+\theta)/2})\|f\|_1. \tag{79}$$

将 (79) 与

$$\|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t)f\|_2 \leqslant \|f\|_2,$$

我们有，对于 $\delta(p) = 1/2-1/p$, $2\leqslant p\leqslant\infty$,

$$\|\dot{\triangle}_j U_\lambda(t)f\|_p \lesssim |t|^{-(d-1+\theta)\delta(p)}(\lambda^{(d-1+\theta)\delta(p)}2^{2j(1-\theta)\delta(p)} + \lambda^{-2\theta\delta(p)}2^{j(d+1+\theta)\delta(p)})\|f\|_{p'}. \tag{80}$$

结合 (80) 和引理 3.2，我们得到

引理 3.4. 设 $d\geqslant 1$, $2\leqslant p\leqslant\infty$, $\delta(p) = 1/2-1/p$。对于任意 $\theta\in[0,1]$，我们有

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_p \lesssim |t|^{-(d-1+\theta)\delta(p)}(\lambda^{(d-1+\theta)\delta(p)}2^{2j(1-\theta)\delta(p)} + \lambda^{-2\theta\delta(p)}2^{j(d+1+\theta)\delta(p)})\|f\|_{p'} \tag{81}$$

对所有 $f\in L^{p'}$, $j\in\mathbb{Z}_+$。

证明。若 $j\geqslant 1$，由（80）可得结论。因此，只需证明在$j=0$的情况下成立（81）。由 $\psi(\xi) = \sum_{j\leqslant 0}\varphi_j(\xi)$ $\xi\neq 0$ 可得

$$\|\triangle_0 U_\lambda(t)f\|_\infty \leqslant \left\|\sum_{j\leqslant 0}2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(2^j\cdot)\right|\right\|_\infty \|f\|_1.$$

首先，我们有

$$\sum_{j\leqslant 0}2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(2^j\cdot)\right| \leqslant \sum_{j\leqslant 0}2^{jd}\lesssim 1.$$

令 $y\in\mathbb{R}^d$ 且

$$\mathbb{Z}_y = \{j\in\mathbb{Z}_-:\ |2^j y|\leqslant 1\}.$$

若 $j\in\mathbb{Z}_y$，则有

$$2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(2^j y)\right| \lesssim |t|^{-q}\lambda^q 2^{j(d-2q)}.$$

记 $\mathbb{Z}_{y,1} = \{j\in\mathbb{Z}_y:\ 2^j\leqslant\lambda^{1/2}|t|^{-1/2}\}$, $\mathbb{Z}_{y,2} = \mathbb{Z}_y\setminus\mathbb{Z}_{y,1}$。取 $q>d/2$，我们有

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_y}2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(2^j y)\right| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}_{y,1}}2^{jd} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_{y,2}}|t|^{-q}\lambda^q 2^{j(d-2q)} \lesssim \lambda^{d/2}|t|^{-d/2}.$$

接下来，我们考虑关于 $j \in \mathbb{Z}_y^c = \mathbb{Z}_- \setminus \mathbb{Z}_y$ 的求和。如果存在满足 $|y| \leqslant C|t|2^j(\lambda+2^j)^{-1}$ 的 j，那么我们可以找到满足 $|y| \leqslant C|t|2^{j_0}(\lambda+2^{j_0})^{-1}$ 的最小整数 $j_0 := j_0(y,\lambda,t)$。我们可以将关于 $j \in \mathbb{Z}_y^c$ 的求和分解为

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in\mathbb{Z}_y^c} 2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(2^jy)\right| \\ &\qquad = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}_y^c,\,|j-j_0|\leqslant C} + \sum_{j\in\mathbb{Z}_y^c,\,|j-j_0|>C}\right) 2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(2^jy)\right|. \qquad (82)\end{aligned}$$

由 (78) 可知

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}_y^c,\,|j-j_0|\leqslant C} 2^{jd}\left|\mathscr{F}^{-1}\left(\varphi(\xi)e^{\mathrm{i}t\sqrt{\lambda^2+|2^j\xi|^2}}\right)(x)\right| \lesssim \lambda^{d/2}|t|^{-d/2}. \qquad (83)$$

如果这样的 j_0 不存在，或者 $j_0 \gg 1$，那么 $\{j \in \mathbb{Z}_y^c : \ |j-j_0| \leqslant C\}$ 是一个空集。求和 $\sum_{j\in\mathbb{Z}_y^c,\ |j-j_0|>C}$ 可通过沿用情形 $j \in \mathbb{Z}_y$ 的证明来处理。事实上，根据 $A_{j,\ \lambda}$ 的估计中的情形 2a 和 2b，$|j-j_0| > C$ 意味着$A_{j,\ \lambda}$（2^jy）具有与情形 $j \in \mathbb{Z}_y$ 相同的衰减率。综上上述估计，我们得到

$$\|\triangle_0 U_\lambda(t)f\|_\infty \leqslant \min(1,\ \lambda^{d/2}|t|^{-d/2})\|f\|_1,$$

这就推出了情形 $j=0$ 下 (81) 的结论。 □

3.3 参数 $\lambda > 1$ > 1 时的 Strichartz 估计

由引理 3.4，对于任意 $2 \leqslant p \leqslant \infty$, $\delta(p) = 1/2 - 1/p$,

$$\|\triangle_j U_\lambda(t)f\|_p \lesssim \begin{cases} |t|^{-(d-1+\theta)\delta(p)}\lambda^{(d-1+\theta)\delta(p)}2^{2j(1-\theta)\delta(p)}\|f\|_{p'}, & 2^j \lesssim \lambda, \\ |t|^{-(d-1+\theta)\delta(p)}\lambda^{-2\theta\delta(p)}2^{j(d+1+\theta)\delta(p)})\|f\|_{p'}, & 2^j \gtrsim \lambda. \end{cases} \qquad (84)$$

为方便起见，我们记

$$\mathscr{A}_\lambda f(t) := \int_0^t U_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (85)$$

根据标准 TT^* 方法（见附录 B），我们可以证明如下

引理 3.5. 设 $2 \leqslant p,r \leqslant \infty$, $\delta(p) = 1/2-1/p$, $\theta \in [0,1]$, $2/\gamma(\theta,p) = (d-1+\theta)\delta(p)$，且 $2\sigma(\theta,p) = (d+1+\theta)\delta(p)$。假设 $2/\gamma(\theta,p)$ $2/\gamma(\theta,r) \in [0,1)$。我们有如下 Strichartz 估计

(i) 如果 $2^j \leqslant \lambda$，则有

$$\lambda^{-1/\gamma(\theta,p)}2^{-j(1-\theta)\delta(p)}\|\triangle_j U_\lambda(t)u_0\|_{L^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},L^p)} \lesssim \|u_0\|_2, \qquad (86)$$

$$\lambda^{-1/\gamma(\theta,p)}2^{-j(1-\theta)\delta(p)}\|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f\|_{L^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},L^p)} \lesssim \lambda^{1/\gamma(\theta,r)}2^{j(1-\theta)\delta(r)}\|f\|_{L^{\gamma(\theta,r)'}(\mathbb{R},L^{r'})}. \qquad (87)$$

(ii) 如果 $2^j > \lambda$, 则有

$$\lambda^{\theta\delta(p)}2^{-j\sigma(\theta,p)}\|\triangle_j U_\lambda(t)u_0\|_{L^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},L^p)} \lesssim \|u_0\|_2, \tag{88}$$

$$\lambda^{\theta\delta(p)}2^{-j\sigma(\theta,p)}\|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f\|_{L^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},L^p)} \lesssim \lambda^{-\theta\delta(r)}2^{j\sigma(\theta,r)}\|f\|_{L^{\gamma(\theta,r)'}(\mathbb{R},L^{r'})}. \tag{89}$$

记 $\lambda > 1$, $j_\lambda := \log_2 \lambda$

$$\mathbb{Z}_\lambda = \{j \in \mathbb{Z}_+ :\ 0 \leqslant j \leqslant j_\lambda\}, \quad \mathbb{Z}_\lambda^c = \mathbb{Z}_+ \setminus \mathbb{Z}_\lambda.$$

由引理 3.5 可得

命题 3.6. 设 $2 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $\delta(p) = 1/2-1/p$, $\theta \in [0,1]$, $2/\gamma(\theta,p) = (d-1+\theta)\delta(p)$, 且 $2\sigma(\theta,p) = (d+1+\theta)\delta(p)$。假设 $2/\gamma(\theta,p)$ $2/\gamma(\theta,r) \in [0,1)$。则有

$$\lambda^{-1/\gamma(\theta,p)}\|U_\lambda(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-(1-\theta)\delta(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{90}$$

$$\lambda^{-1/\gamma(\theta,p)}\|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-(1-\theta)\delta(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \lambda^{1/\gamma(\theta,r)}\|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(\theta,r)'}(\mathbb{R},B_{r',2}^{\sigma+(1-\theta)\delta(r),s}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{91}$$

$$\lambda^{\theta\delta(p)}\|U_\lambda(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\sigma(\theta,p),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{92}$$

$$\lambda^{\theta\delta(p)}\|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(\theta,p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\sigma(\theta,p),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))} \lesssim \lambda^{-\theta\delta(r)}\|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(\theta,r)'}(\mathbb{R},B_{r',2}^{\sigma+\sigma(\theta,r),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}. \tag{93}$$

将 Keel 和 Tao 在 [29], 中的论证应用于命题 3.6, 也适用于端点情形 $\gamma(\theta,p) = 2$ 或 $\gamma(\theta,r) = 2$, $p, r \neq \infty$ （参见 [62]）。比较 $\lambda \gg 1$ 与$\lambda = 1$两种情形可知, $\lambda \gg 1$ 的 Strichartz 估计在低频（高频）部分比 $\lambda = 1$的更差（更好）。在命题 3.6 中取 $\theta = 1$, 即可得

推论 3.7. 设 $2 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $\delta(p) = 1/2 - 1/p$, $2/\gamma(p) = d\delta(p)$ 和 $2\sigma(p) = (d+2)\delta(p)$。假设 $2/\gamma(p)$ $2/\gamma(r) \in [0,1)$。那么我们有

$$\lambda^{-1/\gamma(p)}\|U_\lambda(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\gamma(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma,s}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{94}$$

$$\lambda^{-1/\gamma(p)}\|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma,s}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \lambda^{1/\gamma(r)}\|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(r)'}(\mathbb{R},B_{r',2}^{\sigma,s}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{95}$$

$$\lambda^{\delta(p)}\|U_\lambda(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\gamma(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\sigma(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{96}$$

$$\lambda^{\delta(p)}\|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\sigma(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))} \lesssim \lambda^{-\delta(r)}\|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma(r)'}(\mathbb{R},B_{r',2}^{\sigma+\sigma(r),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}. \tag{97}$$

推论 3.8. 设 $2 \leqslant p, r \leqslant \infty$, $\delta(p) = 1/2 - 1/p$, $2/\gamma_1(p) = (d-1)\delta(p)$ 和 $2\sigma_1(p) = (d+1)\delta(p)$。假设 $2/\gamma_1(p)$ $2/\gamma_1(r) \in [0,1)$。那么我们有

$$\lambda^{-1/\gamma_1(p)}\|U_\lambda(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\gamma_1(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\delta(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{98}$$

$$\lambda^{-1/\gamma_1(p)}\|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^{\gamma_1(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\delta(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \lambda^{1/\gamma_1(r)}\|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma_1(r)'}(\mathbb{R},B_{r',2}^{\sigma+\delta(r),s}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{99}$$

$$\|U_\lambda(t)u_0\|_{\widetilde{L}^{\gamma_1(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\sigma_1(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{100}$$

$$\|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^{\gamma_1(p)}(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-\sigma_1(p),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))} \lesssim \|f\|_{\widetilde{L}^{\gamma_1(r)'}(\mathbb{R},B_{r',2}^{\sigma+\sigma_1(r),s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}. \tag{101}$$

4 非线性 Klein–Gordon 方程的整体解

4.1 $u^{1+\alpha}$ 关于 $\alpha \geqslant 4/(d-1)$ 的估计

在推论 3.8 中取 $p = 2 + 4/(d-1)$ $d \geqslant 2$，可得

$$\delta(p) = \frac{1}{d+1}, \quad \sigma_1(p) = \frac{1}{2}, \quad \gamma_1(p) = 2 + \frac{4}{d-1}.$$

令 $\lambda \gg 1$. 根据推论 3.8 中的 Strichartz 估计，我们选取以下函数空间 X 来求解非线性 Klein–Gordon 方程:

$$\begin{aligned}\|v\|_X =& \lambda^{-(d-1)/2(d+1)} \|v\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/(d+1),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}))} \\ &+ \|v\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))},\end{aligned} \tag{102}$$

其中

$$\mathbb{Z}_\lambda = \{j \in \mathbb{Z}_+ : \ j \leqslant \log_2 \lambda\}, \quad \mathbb{Z}^c_\lambda = \mathbb{Z}_+ \setminus \mathbb{Z}_\lambda.$$

为方便起见，我们记

$$\|v\|_{X_1} = \lambda^{-(d-1)/2(d+1)} \|u\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/(d+1),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}, \tag{103}$$

$$\|v\|_{X_2} = \|u\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}. \tag{104}$$

我们的目标是求解非线性 Klein–Gordon 方程 (4) 的积分形式:

$$v(t) = K'_\lambda(t) u_{0,\lambda} + K_\lambda(t) u_{1,\lambda} + \int_0^t K_\lambda(t-\tau) f(v(\tau)) d\tau. \tag{105}$$

我们考虑映射

$$\mathcal{T} : v(t) \to K'_\lambda(t) u_{0,\lambda} + K_\lambda(t) u_{1,\lambda} + \int_0^t K_\lambda(t-\tau) f(v(\tau)) d\tau. \tag{106}$$

在空间

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \{v \in X : \ \|v\|_X \leqslant M_\lambda, \ \operatorname{supp} \widehat{v(t)} \subset \mathbb{R}^d_I\}, \\ d(v,w) &= \|v - w\|_X,\end{aligned} \tag{107}$$

其中 $M_\lambda > 0$ 将在稍后选取。由乘子估计 (13),

$$\left\| \triangle_j \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \Delta}} f \right\|_p \lesssim 2^{-j} \|f\|_p, \quad 2^j \gtrsim \lambda,$$

利用 Strichartz 估计和推论 3.7，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T} v\|_{X_2} \lesssim& \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \left\| \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - \Delta}} f(v) \right\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R}, B^{\sigma+1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \\ \lesssim& \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \|f(v)\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}.\end{aligned} \tag{108}$$

因此，我们需要对 $\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2, s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}$进行非线性估计。首先，我们有

引理 4.1（正则性传递）。假设 $\operatorname{supp}\ \widehat{u}_i \subset \mathbb{R}^d_I,\ i=1,...,\alpha+1$。那么我们有

$$2^{s|\nabla|}(u_1...u_{1+\alpha}) = (2^{s|\nabla|}u_1)(2^{s|\nabla|}u_2)...(2^{s|\nabla|}u_{\alpha+1}).$$

证明。注意到

$$\mathscr{F}(2^{s|\nabla|}(u_1...u_{1+\alpha})(\xi) = 2^{s|\xi|}\int \widehat{u}_1(\xi_1)...\widehat{u}_\alpha(\xi_\alpha)\widehat{u}_{\alpha+1}(\xi-\xi_1-...-\xi_{\alpha+1})d\xi_1...d\xi_\alpha. \quad (109)$$

注意到，对于任意 $\xi_1,...,\xi_\alpha,\xi-\xi_1-...-\xi_\alpha \in \mathbb{R}^d_I$，我们有

$$|\xi| = |\xi_1|+...+|\xi_\alpha|+|\xi-\xi_1-...-\xi_\alpha|.$$

我们立即得到

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}(2^{s|\nabla|}(u_1...u_{1+\alpha})(\xi)\\
&\quad = \int_{(\mathbb{R}^d_I)^\alpha} 2^{s|\xi_1|}\widehat{u}_1(\xi_1)...2^{s|\xi_\alpha|}\widehat{u}_\alpha(\xi_\alpha)2^{s|\xi-\xi_1-...-\xi_\alpha|}\widehat{u}_{\alpha+1}(\xi-\xi_1-...-\xi_{\alpha+1})d\xi_1...d\xi_\alpha\\
&\quad = \mathscr{F}[(2^{s|\nabla|}u_1)(2^{s|\nabla|}u_2)...(2^{s|\nabla|}u_{\alpha+1})](\xi), \qquad (110)
\end{aligned}$$

这就得到了所需结果。 □

现在，我们估计 $\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},\ B^{\sigma-1/2,\ s}_{p',2},\ (\mathbb{Z}^c_\lambda))}$。我们有如下

引理 4.2. 设 $d\geqslant 2,\ p=2(d+1)/(d-1),\ \alpha\in\mathbb{N},\ \alpha\geqslant 4/(d-1),\ \sigma\geqslant\sigma_c=d/2-2/\alpha,$ $\sigma>1/2,\ s<0$. 假设 $\operatorname{supp}\ \widehat{v}\subset\mathbb{R}^d_I$。则有

$$\begin{aligned}
&\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\\
&\quad\leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\left(\|v\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|v\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))\cap\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\right.\\
&\qquad\left.+\ \lambda^{-1/p}\|v\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|v\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\right)\|v\|^{\alpha-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (111)
\end{aligned}$$

根据定义，我们有

$$\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} = \left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2(\sigma-1/2)j}\|\triangle_j 2^{s|\nabla|}(u_1u_2...u_{\alpha+1})\|^2_{L^{p'}_{x,t}}\right)^{1/2}. \quad (112)$$

设 $\operatorname{supp}\ \widehat{u}_i\subset\mathbb{R}^d_I,\ v_i=2^{s|\nabla|}u_i,\ i=1,...,\alpha+1$。由引理 4.1，可得

$$\begin{aligned}
&\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\\
&\quad=\left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2(\sigma-1/2)j}\|\triangle_j(v_1...v_{\alpha+1})\|^2_{L^{p'}_{x,t}}\right)^{1/2}\\
&\quad\leqslant\left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j_1,...,j_{1+\alpha}\in\mathbb{Z}_+}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1})\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}. \qquad (113)
\end{aligned}$$

步骤 1. 考虑 $d \geqslant 5$ 的情况。首先，假设 $\alpha \geqslant 2$。由对称性，不妨设

$$j_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant \alpha+1} j_k, \quad j_2 = \max_{2\leqslant k\leqslant \alpha+1} j_k, \quad j_3 = \max_{3\leqslant k\leqslant \alpha+1} j_k \tag{114}$$

在 (113) 中的求和 $\sum_{j_1,\dots,j_{1+\alpha}\in\mathbb{Z}_+}$。注意到 $\operatorname{supp} \widehat{v}_j \subset \mathbb{R}^d_I$，我们得到

$$\triangle_j(\triangle_{j_1} v_1 \triangle_{j_2} v_2 \dots \triangle_{j_{\alpha+1}} v_{\alpha+1}) \neq 0$$

这意味着 $j - c(\alpha) \leqslant j_1 \leqslant j+1$, $c(\alpha) := [\log_2(1+\alpha)] + 1$。令

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_0 &= \{(j_1,\dots,j_{1+\alpha}) :\ j_\lambda \geqslant j_1 \geqslant 0,\ j - c(\alpha) < j_1 \leqslant j+1\},\\
\mathcal{Z}_1 &= \{(j_1,\dots,j_{1+\alpha}) :\ j_1 > j_\lambda \geqslant j_2,\ j - c(\alpha) < j_1 \leqslant j+1\},\\
\mathcal{Z}_2 &= \{(j_1,\dots,j_{1+\alpha}) :\ j_2 > j_\lambda \geqslant j_3,\ j - c(\alpha) < j_1 \leqslant j+1\},\\
\mathcal{Z}_3 &= \{(j_1,\dots,j_{1+\alpha}) :\ j_3 > j_\lambda \geqslant \max_{k=4,\dots,1+\alpha} j_k,\ j - c(\alpha) < j_1 \leqslant j+1\},\\
\mathcal{Z}_4 &= \{(j_1,\dots,j_{1+\alpha}) :\ \max_{k=4,\dots,1+\alpha} j_k > j_\lambda,\ j - c(\alpha) < j_1 \leqslant j+1\}.
\end{aligned}$$

由于 φ_j 是 $L^{p'}$ 上的乘子，我们有

$$\begin{aligned}
&\|u_1 \dots u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\\
&\quad\leqslant \sum_{\ell=0}^{4} \left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j} \left(\sum_{(j_1,\dots,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_\ell} \|\triangle_{j_1} v_1 \dots \triangle_{j_{1+\alpha}} v_{\alpha+1}\|_{L^{p'}_{x,t}} \right)^2 \right)^{1/2}\\
&\quad= I + \dots + V.
\end{aligned} \tag{115}$$

我们来估计 III。由 H¨older 不等式和 Bernstein 不等式，对于 $(j_1,\dots,j_{1+\alpha}) \in \mathcal{Z}_2$,

$$\begin{aligned}
&\|\triangle_{j_1} v_1 \dots \triangle_{j_{1+\alpha}} v_{\alpha+1}\|_{L^{p'}_{x,t}}\\
&\leqslant \|\triangle_{j_1} v_1\|_{L^p_{x,t}} \|\triangle_{j_2} v_2\|^{4/(d-1)}_{L^p_{x,t}} \|\triangle_{j_2} v_2\|^{1-4/(d-1)}_{L^\infty_{x,t}} \prod_{k=3}^{\alpha+1} \|\triangle_{j_k} v_k\|_{L^\infty_{x,t}}\\
&\leqslant C^\alpha \|\triangle_{j_1} v_1\|_{L^p_{x,t}} \|\triangle_{j_2} v_2\|^{4/(d-1)}_{L^p_{x,t}} (2^{dj_2/2} \|\triangle_{j_2} v_2\|_{L^\infty_t L^2_x})^{1-4/(d-1)} \prod_{k=3}^{\alpha+1} (2^{dj_k/2} \|\triangle_{j_k} v_k\|_{L^\infty_t L^2_x}).
\end{aligned} \tag{116}$$

注意到，对于 $\sigma_c = d/2 - 2/\alpha$,

$$\sum_{j_k\leqslant j_3} 2^{dj_k/2} \|\triangle_{j_k} v_k\|_{L^\infty_t L^2_x} \leqslant \sqrt{\alpha}\, 2^{2j_3/\alpha} \|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \tag{117}$$

由此可得

$$\sum_{j_4,\dots,j_{1+\alpha}\leqslant j_3}\prod_{k=4}^{1+\alpha}(2^{dj_k/2}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L_t^\infty L_x^2})\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha 2^{2j_3(1-2/\alpha)}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}. \tag{118}$$

因此，由 H¨lder 不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{(j_1,\dots,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_2}\|\triangle_{j_1}v_1\dots\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1}\|_{L_{x,t}^{p'}}\\
&\quad\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L_{x,t}^p}\\
&\qquad\times\sum_{j_\lambda<j_2\leqslant j_1}(2^{j_2(\sigma_c-1/2)}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L_{x,t}^p})^{4/(d-1)}(2^{j_2\sigma_c}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L_t^\infty L_x^2})^{1-4/(d-1)}\\
&\qquad\times\sum_{j_3\leqslant j_2}2^{2(j_3-j_2)(1-1/\alpha)}2^{j_3\sigma_c}\|\triangle_{j_3}v_3\|_{L_t^\infty L_x^2}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}\\
&\quad\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L_{x,t}^p}\\
&\qquad\times\|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma_c-1/2,s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}^{4/(d-1)}\|u_2\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}^{1-4/(d-1)}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}.
\end{aligned}\tag{119}$$

将上述估计 (119) 代入 III，由杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}
III&\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha\|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma_c-1/2,s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}^{4/(d-1)}\|u_2\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}^{1-4/(d-1)}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}\\
&\quad\times\left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L_{x,t}^p}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\leqslant(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma-1/2,s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}\|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B_{p,2}^{\sigma_c-1/2,s}(\mathbb{Z}_\lambda^c))}^{4/(d-1)}\\
&\quad\times\|u_2\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}^{1-4/(d-1)}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B_{2,2}^{\sigma_c,s})}.
\end{aligned}\tag{120}$$

由 III 的估计可知， IV、 V 可以按照处理 III 的相同方法处理，证明细节从略。

现在我们估计 I。采用与上面类似的方法，并注意到 $\delta(p)\leqslant 1/2$，我们

得到

$$
\begin{aligned}
I \leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha}\left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{(j-c(\alpha))\vee 0\leqslant j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\times\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\\
\leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha}\lambda^{-1/p}\left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-\delta(p))j}\left(\sum_{(j-c(\alpha))\vee 0\leqslant j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\times\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\\
\leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\lambda^{-1/p}\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\\
&\times\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \qquad (121)
\end{aligned}
$$

II 的估计与 I的估计类似。为了去掉假设 (114)，需要考虑 $(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\sim\alpha^3$ 许多类似的情形。

接下来，我们考虑情形 $d\geqslant 5$, $\alpha=1$。记

$$
S_ju=\sum_{k=0}^{j}\triangle_k u,\quad S_{[j_1,j_2]}u=S_{j_2}u-S_{j_1}u,\quad S_{-1}u=0.
$$

利用 Bony 的抛物乘积分解，我们有

$$
v_1v_2=\sum_{j_1=0}^{\infty}(\triangle_{j_1}v_1S_{j_1}v_2+S_{j_1-1}v_1\triangle_{j_1}v_2).
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
\|u_1u_2\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \leqslant & \left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1S_{j_1}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}\\
&+\left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j_1=0}^{\infty}\|\triangle_j(S_{j_1-1}v_1\triangle_{j_1}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}\\
= & I+II. \qquad (122)
\end{aligned}
$$

它 足以估计 I。为了 $\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1S_{j_1}v_2)\neq 0$，我们有 $j<j_1+4$。由此可得 s

that

$$
\begin{aligned}
I \leqslant & \left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j-4<j_1\leqslant j_\lambda}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1 S_{j_1}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2} \\
& + \left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j_1>(j-4)\vee j_\lambda}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1 S_{j_1}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2} \\
=: & I_1 + I_2. \qquad (123)
\end{aligned}
$$

还可以将 I_2 进一步分解为

$$
\begin{aligned}
I_2 \leqslant & \left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j_1>(j-4)\vee j_\lambda}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1 S_{[j_\lambda,\, j_1]}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2} \\
& + \left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{j_1>(j-4)\vee j_\lambda}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1 S_{j_\lambda}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2} \\
=: & I_{21} + I_{22}. \qquad (124)
\end{aligned}
$$

现在，我们来考虑 I_{21} 的估计。可以看出

$$
\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{4}{(d-1)}\left(\frac{1}{p} - \frac{\sigma_c - 1/2}{d}\right) + \left(1 - \frac{4}{(d-1)}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma_c}{d}\right)
$$

对于 $\sigma_c = d/2 - 2$。取

$$
\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{\sigma_c - 1/2}{d}, \quad \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2} - \frac{\sigma_c}{d} = \frac{2}{d},
$$

由 H¨older 不等式，对于 $j_1 > (j-4) \vee j_\lambda$，有

$$
\begin{aligned}
& \|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1 S_{[j_\lambda,\, j_1]}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}} \\
& \quad \leqslant \|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\|S_{[j_\lambda,\, j_1]}v_2\|^{4/(d-1)}_{L^p_t L^{p_1}_x}\|S_{[j_\lambda,\, j_1]}v_2\|^{1-4/(d-1)}_{L^\infty_t L^{p_2}_x}. \qquad (125)
\end{aligned}
$$

利用 Sobolev 嵌入 $B^{\sigma_c-1/2}_{p,\,2} \subset L^{p_1}$，$B^{\sigma_c}_{2,\,2} \subset L^{p_2}$，以及 $S_j\colon L^r \to L^r$，由 Minkowski不等式可得

$$
\begin{aligned}
& \|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1 S_{[j_\lambda,\, j_1]}v_2)\|_{L^{p'}_{x,t}} \\
& \quad \leqslant \|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\|v_2\|^{4/(d-1)}_{L^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|v_2\|^{1-4/(d-1)}_{L^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c}_{2,2})} \\
& \quad \leqslant C\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (126)
\end{aligned}
$$

由此可得

$$
I_{21} \leqslant C\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (127)
$$

类似地,

$$I_{22}\leqslant C\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda)}\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda)}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}, \tag{128}$$

$$I\leqslant C\lambda^{-1/p}\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda)}\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda)}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \tag{129}$$

步骤 2. 我们考虑 $d=4$ 的情形。可知 $\alpha\geqslant 2$。我们可以假设 (114) 成立。令 $\mathcal{Z}_0$, ..., $\mathcal{Z}_4$ 与步骤 1 中的相同。下面将证明与 (115) 联系起来。首先，我们估计 IV。由 H¨older 不等式和 Bernstein 不等式，对于 $(j_1,...,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_3$,

$$\begin{aligned}
&\|\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1})\|_{L^{p'}_{x,t}}\\
&\leqslant\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^p_{x,t}}\|\triangle_{j_3}v_3\|^{1/3}_{L^p_{x,t}}\|\triangle_{j_3}v_3\|^{2/3}_{L^\infty_{x,t}}\prod_{k=4}^{\alpha+1}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_{x,t}}\\
&\leqslant C^\alpha\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^p_{x,t}}\|\triangle_{j_3}v_3\|^{1/3}_{L^p_{x,t}}(2^{dj_2/2}\|\triangle_{j_3}v_3\|_{L^\infty_tL^2_x})^{2/3}\prod_{k=4}^{\alpha+1}(2^{dj_k/2}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_tL^2_x}).
\end{aligned}\tag{130}$$

由 (130)、H¨older 不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{(j_1,...,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_3}\|\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1})\|_{L^{p'}_{x,t}}\\
&\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha\prod_{k=4}^{\alpha+1}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\sum_{j_2\leqslant j_1}2^{(\sigma_c-1/2)j_2}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^p_{x,t}}\\
&\quad\times\sum_{j_\lambda<j_3\leqslant j_2}2^{(j_3-j_2)(3/2-2/\alpha)}(2^{\sigma_cj_3}\|\triangle_{j_3}v_3\|_{L^\infty_tL^2_x})^{2/3}(2^{(\sigma_c-1/2)j_3}\|\triangle_{j_3}v_3\|_{L^p_{x,t}})^{1/3}\\
&\leqslant C(C\sqrt{\alpha})^\alpha\|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_3\|^{1/3}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\\
&\quad\times\prod_{k=4}^{\alpha+1}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^p_{x,t}}.
\end{aligned}\tag{131}$$

由杨氏不等式,

$$\begin{aligned}
IV\leqslant(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}&\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_3\|^{1/3}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\\
&\times\|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\prod_{k=6}^{\alpha+1}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}.
\end{aligned}\tag{132}$$

其他项可以利用 (132) 中的思路和步骤 1 中的方法进行估计，细节从略。

步骤 3. 对于 $d=2,3$，其证明比情形 $d=4$ 的证明更容易，因为 $4/(d-1)=4$当 $d=2$ 且 $4/(d-1)=2$当 $d=3$ 时都是整数。事实上，可以使用二维情形下的估计，

$$\|\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1}\|_{L^{p'}_{x,t}}\leqslant\prod_{\ell=1}^{5}\|\triangle_{j_\ell}v_\ell\|_{L^{p}_{x,t}}\prod_{k=4}^{\alpha+1}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^{\infty}_{x,t}} \tag{133}$$

代替（130）。与步骤 2 类似，我们可以假设

$$j_k=\max_{k\leqslant\ell\leqslant 1+\alpha}j_\ell,\quad k=1,...,5.$$

然后，我们可以采用与步骤 2 类似的方法得到所需结果。 □

推论 4.3. 设 $d\geqslant 2$, $p=2(d+1)/(d-1)$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\geqslant 4/(d-1)$, $\sigma\geqslant\sigma_c=d/2-2/\alpha$,$\sigma>1/2$, $s<0$, $\lambda\gg 1$。设 X_1 和 X_2 如（103）和（104）所示。假设 supp $\widehat{v}\subset\mathbb{R}^d_I$。则有

$$\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\leqslant(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\lambda^{2/(d+1)}\|v\|^{1+\alpha}_{X_1\cap X_2}. \tag{134}$$

现在我们来估计 $\|\mathcal{T}v\|_{X_1}$。根据推论 3.8 中的 Strichartz 估计以及下面的乘子估计

$$\left\|\triangle_j\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\Delta}}f\right\|_p\lesssim\lambda^{-1}\|f\|_p,\quad 2^j\leqslant\lambda,$$

我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}v\|_{X_1}\lesssim&\|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}}+\|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}+\lambda^{1/p}\left\|\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\Delta}}f(v)\right\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma+\delta(p),s}_{p',2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\\ \lesssim&\|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}}+\|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}+\lambda^{-1+1/p}\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma+\delta(p),s}_{p',2}(\mathbb{Z}_\lambda))}.\end{aligned} \tag{135}$$

注意到对于 $j\in\mathbb{Z}_\lambda$, $2^j\leqslant\lambda$，我们有

$$\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma+\delta(p),s}_{p',2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\lesssim\lambda^{2\delta(p)}\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p',\infty}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{136}$$

由 (135) 和 (136) 可得

$$\|\mathcal{T}v\|_{X_1}\lesssim\|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}}+\|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}+\lambda^{-1/p}\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p',\infty}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{137}$$

因此，我们需要对 $\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p)}_{,p'\infty}{}^{s}{}_{,}(\mathbb{Z}_\lambda))}$ 作非线性估计。我们有如下

引理 4.4. 设 $d\geqslant 2$, $p=2(d+1)/(d-1)$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\geqslant 4/(d-1)$, $\sigma\geqslant\sigma_c=d/2-2/\alpha$,$s<0$. 假设 supp $\widehat{v}\subset\mathbb{R}^d_I$。则有

$$\begin{aligned}\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p',\infty}(\mathbb{Z}_\lambda))}\leqslant&(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\left(\lambda^{1/p}\|v\|_{\widetilde{L}^{p}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}+\|v\|_{\widetilde{L}^{p}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\right)\\ &\times\|v\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^{p}(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|v\|^{\alpha-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^{\infty}(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}.\end{aligned} \tag{138}$$

证明. 我们可以假设 $\lambda\in 2^{\mathbb{N}}$。回顾 $j_\lambda=\log_2\lambda$。我们考虑估计 e

$$\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p',\infty}(\mathbb{Z}_\lambda))}=\sup_{j\leqslant j_\lambda}2^{(\sigma-\delta(p))j}\|\triangle_j2^{s|\nabla|}(u_1...u_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{t,x}}. \tag{139}$$

记 $v_\ell=2^{s|\nabla|}u_\ell$。由引理 4.1 可得

$$\triangle_j2^{s|\nabla|}(u_1...u_{1+\alpha})=\triangle_j(v_1...v_{1+\alpha})=\sum_{j_1,...,j_{1+\alpha}\in\mathbb{Z}_+}\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha}). \tag{140}$$

不失一般性，我们可以假设在求和 $\sum_{j_1,...,j_{1+\alpha}\in\mathbb{Z}_+}$ 中,

$$j_1=\max_{1\leqslant\ell\leqslant1+\alpha}j_\ell,\quad j_2=\max_{2\leqslant\ell\leqslant1+\alpha}j_\ell.$$

容易看出，在 (140) 中

$$(j-c(\alpha))\vee0\leqslant j_1\leqslant j+1,\ \ c(\alpha)=[\log_2(1+\alpha)]+3,\quad j_2\leqslant j\text{ for }\ j_1=j+1. \tag{141}$$

由此可得，对于 $j=j_\lambda$,

$$\begin{aligned}\|\triangle_{j_\lambda}(v_1...v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}}&\leqslant\sum_{(j_\lambda-c(\alpha))\vee0\leqslant j_1\leqslant j_\lambda+1}\ \sum_{j_2,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_\lambda}\|\triangle_{j_\lambda}(\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}}\\&\leqslant\sum_{j_2,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_\lambda}\|\triangle_{j_\lambda}(\triangle_{j_\lambda+1}v_1\triangle_{j_2}v_2...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}}\\&\quad+\sum_{(j_\lambda-c(\alpha))\vee0\leqslant j_1\leqslant j_\lambda}\ \sum_{j_2,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_\lambda}\|\triangle_{j_\lambda}(\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}}\\&=:I+II.\end{aligned} \tag{142}$$

令 $d\geqslant5$。仿照 (119) 中的方法,

$$\begin{aligned}I\leqslant&\|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\sum_{j_2\leqslant j_\lambda}\ \sum_{j_3,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_2}\|\triangle_{j_2}v_2\|^{4/(d-1)}_{L^p_{x,t}}\|\triangle_{j_2}v_2\|^{1-4/(d-1)}_{L^\infty_{t,x}}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_{t,x}}\\\leqslant&\|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\sum_{j_2\leqslant j_\lambda}2^{-2j_2/(d+1)}(2^{(\sigma_c-\delta(p))j_2}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^p_{x,t}})^{4/(d-1)}(2^{\sigma_cj_2}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^\infty_tL^2_x})^{1-4/(d-1)}\\&\times(C\sqrt{\alpha})^\alpha\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\\\leqslant&C(C\sqrt{\alpha})^\alpha\|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^p_{x,t}}\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}.\end{aligned} \tag{143}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}2^{(\sigma-\delta(p))j_\lambda}I\leqslant&(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\lambda^{1/p}\|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\\&\times\|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\prod_{k=3}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}.\end{aligned} \tag{144}$$

类似地,

$$\begin{aligned} II \leqslant & \sum_{(j_\lambda - c(\alpha))\vee 0 \leqslant j_1 \leqslant j_\lambda} \|\triangle_{j_1} v_1\|_{L^p_{x,t}} \sum_{j_2 \leqslant j_\lambda} \|\triangle_{j_2} v_2\|^{4/(d-1)}_{L^p_{x,t}} \|\triangle_{j_2} v_2\|^{1-4/(d-1)}_{L^\infty_{t,x}} \\ & \times \sum_{j_3,\dots,j_{1+\alpha} \leqslant j_2} \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|\triangle_{j_\ell} v_\ell\|_{L^\infty_{t,x}} \\ \leqslant & (C\sqrt{\alpha})^\alpha \sum_{(j_\lambda - c(\alpha))\vee 0 \leqslant j_1 \leqslant j_\lambda} \|\triangle_{j_1} v_1\|_{L^p_{x,t}} \|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma_c - \delta(p), s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\ & \times \|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c, s}_{2,2})} \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c, s}_{2,2})}. \end{aligned} \tag{145}$$

由杨氏不等式和 $\delta(p) < 1/2$ 可得

$$\begin{aligned} 2^{(\sigma-\delta(p))j_\lambda} II \leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C} \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \\ & \times \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \end{aligned} \tag{146}$$

由 (144) 和 (146),

$$\begin{aligned} & 2^{(\sigma-\delta(p))j_\lambda} \|\triangle_{j_\lambda}(v_1 \dots v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}} \\ & \quad \leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C} \left(\lambda^{1/p} \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} + \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \right) \\ & \quad \times \|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \end{aligned} \tag{147}$$

If $j < j_\lambda$, $2^{(\sigma-\delta(p))j} \|\triangle_j(v_1 \dots v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}}$的估计与 (146) 类似，因此我们有

$$\begin{aligned} \sup_{j<j_\lambda} 2^{(\sigma-\delta(p))j} \|\triangle_j(v_1 \dots v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}} \leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C} \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,\infty}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_2\|^{4/(d-1)}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,\infty}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\ & \times \|u_2\|^{1-4/(d-1)}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,\infty})} \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,s}_{2,\infty})}. \end{aligned} \tag{148}$$

接下来，我们考虑情形 $d = 4$。将该估计与 (142) 联系起来，还可以进一步假设

$$j_3 = \max_{3 \leqslant \ell \leqslant 1+\alpha} j_\ell.$$

回顾一下， $4/(d-1)=4/3$ 对 $d=4$。由 H¨older 不等式,

$$
\begin{aligned}
I \leqslant & \|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^p_{x,t}} \sum_{j_3\leqslant j_2\leqslant j_\lambda} \sum_{j_4,\dots,j_{1+\alpha}\leqslant j_3} \|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^p_{x,t}} \|\triangle_{j_3}v_3\|^{1/3}_{L^p_{x,t}} \|\triangle_{j_3}v_3\|^{2/3}_{L^\infty_{t,x}} \prod_{k=4}^{1+\alpha} \|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_{t,x}} \\
\leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha-4/3} \|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^p_{x,t}} \sum_{j_2\leqslant j_\lambda} 2^{-j_2/p} (2^{(\sigma_c-\delta(p))j_2}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^p_{x,t}}) \\
& \times \sum_{j_3\leqslant j_2} 2^{-j_3/3p} (2^{(\sigma_c-\delta(p))j_3}\|\triangle_{j_3}v_3\|_{L^p_{x,t}})^{1/3} \|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \prod_{k=4}^{1+\alpha} \|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \\
\leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha-4/3} \|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^p_{x,t}} \|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_3\|^{1/3}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\
& \times \|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \prod_{k=4}^{1+\alpha} \|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (149)
\end{aligned}
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
2^{(\sigma-\delta(p))j_\lambda} I \leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha} \lambda^{1/p} \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_3\|^{1/3}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\
& \times \|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \prod_{k=4}^{1+\alpha} \|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (150)
\end{aligned}
$$

采用与 (149) 和 (146) 类似的方法，我们有

$$
\begin{aligned}
2^{(\sigma-\delta(p))j_\lambda} II \leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C} \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_3\|^{1/3}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\
& \times \|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,\infty})} \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (151)
\end{aligned}
$$

由 (150) 和 (151),

$$
\begin{aligned}
& 2^{(\sigma-\delta(p))j_\lambda} \|\triangle_{j_\lambda}(v_1\dots v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}} \\
\leqslant & (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C} \left(\lambda^{1/p} \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{p,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} + \|u_1\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \right) \|u_2\|_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\
& \times \|u_3\|^{1/3}_{\widetilde{L}^p(\mathbb{R},B^{\sigma_c-\delta(p),s}_{p,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \|u_3\|^{2/3}_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})} \prod_{\ell=3}^{1+\alpha} \|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \qquad (152)
\end{aligned}
$$

对于任意 $j<j_\lambda$， $2^{(\sigma-\delta(p))j}\|\triangle_j(v_1\dots v_{1+\alpha})\|_{L^{p'}_{x,t}}$ 的估计与 $2^{(\sigma-\delta(p))j}II$ 的估计类似，这里省略细节。

第三，注意到对于 $d=2$，3， $4/(d-1)$ 是整数，因此 $d=2$，3 对应结果的证明比 $d=4$ 的证明更简单，故省略细节。□

推论 4.5. 设 $d\geqslant 2$, $p=2(d+1)/(d-1)$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\geqslant 4/(d-1)$, $\sigma\geqslant\sigma_c=d/2-2/\alpha$,$s<0$, $\lambda\gg 1$。设 X_1和 X_2如 (103) 和 (104) 中所述。假设 supp $\widehat{v}\subset\mathbb{R}^d_I$。则有

$$
\lambda^{-1/p}\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R},B^{\sigma-\delta(p),s}_{p',2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\lambda^{2/(d+1)}\|v\|^{1+\alpha}_{X_1\cap X_2}. \qquad (153)
$$

当 $d \geqslant 2$ 满足 $4/d \leqslant \alpha < 4/(d-1)$，且 $d = 1$ 满足 $4 \leqslant \alpha < \infty$ 时，我们无法达到临界指标 $\sigma \geqslant \sigma_c = d/2 - 2/\alpha$。我们需要条件 $\sigma \geqslant 1/2$。令

$$r = \frac{2(d+1+\theta)}{d-1+\theta}, \quad \theta \in (0,1]. \tag{154}$$

令 $\delta(r)$ $\sigma(\theta, r)$ $\gamma(\theta, r)$ 如命题 3.6 所述。我们看到

$$\delta(r) = \frac{1}{d+1+\theta}, \quad \sigma(\theta, r) = \frac{1}{2}, \quad \gamma(\theta, r) = r. \tag{155}$$

$$\lambda^{-1/r} \|U_\lambda(t) u_0\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{156}$$

$$\lambda^{-1/r} \|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \lesssim \lambda^{1/r} \|f\|_{\widetilde{L}^{r'}(\mathbb{R}, B^{\sigma+(1-\theta)\delta(r),s}_{r',2}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{157}$$

$$\lambda^{\theta\delta(r)} \|U_\lambda(t) u_0\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \lesssim \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{158}$$

$$\lambda^{\theta\delta(r)} \|\mathscr{A}_\lambda f\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \lesssim \lambda^{-\theta\delta(r)} \|f\|_{\widetilde{L}^{r'}(\mathbb{R}, B^{\sigma+1/2,s}_{r',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}. \tag{159}$$

In 鉴于上述 Strichartz 估计，可以选择如下分辨空间 s:

$$\|v\|_{W_1} = \lambda^{-1/r} \|u\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}, \tag{160}$$

$$\|v\|_{W_2} = \lambda^{\theta\delta(r)} \|u\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}, \tag{161}$$

$$\|v\|_W = \|v\|_{W_1} + \|v\|_{W_2}. \tag{162}$$

我们的目标是在空间中求解积分方程 (105)

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{v \in W : \ \|v\|_W \leqslant \delta \lambda^{-2(1-\theta)/(d+1+\theta)}, \ \operatorname{supp} \widehat{v(t)} \subset \mathbb{R}^d_I\}, \\ d(v, w) &= \|v - w\|_W, \end{aligned} \tag{163}$$

其中 $\delta > 0$ 足够小。由 (158) 和 (159),

$$\|\mathcal{T} v\|_{W_2} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \lambda^{-\theta\delta(r)} \|f(v)\|_{\widetilde{L}^{r'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}. \tag{164}$$

$$\|\mathcal{T} v\|_{W_1} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \lambda^{-1/r-2\theta\delta(r)} \|f(v)\|_{\widetilde{L}^{r'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r',2}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{165}$$

我们有以下非线性估计:

引理 4.6。令 $d \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha = 4/(d-1+\theta)$ $\theta \in (0, 1]$, $\sigma > 1/2$, $s < 0$。令 r 如 (154) 中所示。假设 supp $\widehat{v} \subset \mathbb{R}^d_I$。则有

$$\begin{aligned} \|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{r'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \leqslant\ & C^{\alpha+1} \|v\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \|v\|^\alpha_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{r,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda)) \cap \widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \\ & + C^{\alpha+1} \lambda^{-1/r-\theta\delta(r)} \|v\|^{1+\alpha}_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R}, B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \end{aligned} \tag{166}$$

引理 4.7。令 $d \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha = 4/(d-1+\theta)$ $\theta \in (0,1]$, $\sigma > 1/2$, $s < 0$。令 r 如 (154) 中所示。假设 supp $\widehat{v} \subset \mathbb{R}^d_I$。则有

$$\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{r'}(\mathbb{R},B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r',2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \leqslant C^\alpha \lambda^{1/r+\theta\delta(r)} \|v\|_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{r,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \|v\|^\alpha_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R},B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} + \|v\|^{1+\alpha}_{\widetilde{L}^r(\mathbb{R},B^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s}_{r,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{167}$$

推论 4.8. 设 $d \geqslant 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha = 4/(d-1+\theta)$ $\theta \in (0,1]$, $\sigma > 1/2$, $s < 0$. 假设 supp $\widehat{v} \subset \mathbb{R}^d_I$。令 W如 (162) 中所述。则有

$$\|\mathcal{T}v\|_W \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \lambda^{2(1-\theta)/(d+1+\theta)} \|v\|^{1+\alpha}_W. \tag{168}$$

4.2 二维中双曲正弦 $u - u$ – $u - u$ 的估计

观察双曲正弦 $u-u = \sum_{k=1}^\infty \frac{u^{2k+1}}{(2k+1)!}$的泰勒展开，可知其最低次幂为 $u^3/6$。当 $d \geq 3$时，第 4.1 节中的技巧对 u^3 非常有效，但对 $d = 2$不起作用。因此，我们将应用推论 3.7 来处理二维中的 u^3 。在推论 3.7 中取 $d = 2$ ，可得

$$\delta(4) = \frac{1}{4}, \quad \sigma(4) = \frac{1}{2}, \quad \gamma(4) = 4.$$

根据推论 3.7 中的 Strichartz 估计，我们选取以下函数空间 Y 来求解非线性 Klein–Gordon 方程:

$$\|v\|_{Y_1} = \lambda^{-1/4} \|v\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}_\lambda))} \tag{169}$$

$$\|v\|_{Y_2} = \lambda^{1/4} \|v\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} + \|v\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{2,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}. \tag{170}$$

其中 $\mathbb{Z}_\lambda$ 和 $\mathbb{Z}^c_\lambda$ 与第 4.1 节中的相同。记

$$\|v\|_Y = \|v\|_{Y_1} + \|v\|_{Y_2}.$$

我们的目标是在空间中考虑映射 (106)，求解积分方程 (105)，其中$f(v)$ =双曲正弦 $v - v$

$$\mathcal{D}_2 = \{v \in Y : \ \|v\|_Y \leqslant M, \ \operatorname{supp} \widehat{v(t)} \subset \mathbb{R}^d_I\},$$
$$d(v,w) = \|v - w\|_Y, \tag{171}$$

其中 $M > 0$ 将在稍后选取。利用推论 3.7，我们有

$$\|\mathcal{T}v\|_{Y_2} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \lambda^{-1/4} \|f(v)\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}. \tag{172}$$

因此，我们需要对 $\lambda^{-1/4}\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2}_{4/3\,2}{}^{,s}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}$作非线性估计。

引理 4.9. 设 $d = 2$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant 2$, $\sigma \geqslant \sigma_\alpha := 1 - 1/\alpha$, $\sigma > 1/2$, $s < 0$。假设 supp $\widehat{v} \subset \mathbb{R}^d_I$。则有

$$\lambda^{-1/4} \|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C} \|v\|^{1+\alpha}_Y. \tag{173}$$

在引理 4.2 中，我们需要满足条件 $\alpha \geq 4$ in 二维，此时临界正则性指标σ_c 是可达到的。为了处理非线性幂次 $\alpha = 2$，我们在引理 4.9 中引入 $\sigma_\alpha(> \sigma_c)$，它并非非线性项 $v^{1+\alpha}$的临界指标。然而，如果我们在二维中考虑 $f(v) = e^{u^2}u - u$ or $f(v) =$双曲正弦 $v - v$作为非线性项，那么 $\sigma = 1$就是临界正则性指标，引理 4.9 已足以满足我们的需求。

现在我们来估计

$$\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} = \left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\|\triangle_j 2^{s|\nabla|}(u_1u_2...u_{\alpha+1})\|^2_{L^{4/3}_{x,t}}\right)^{1/2}. \quad (174)$$

取 $v_i = 2^{s|\nabla|}u_i$。按照 (113)–(115) 中相同的方法，我们有

$$\begin{aligned}
&\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\\
&\quad\leqslant \sum_{\ell=0}^{4}\left(\sum_{j>j_\lambda} 2^{2(\sigma-1/2)j}\left(\sum_{(j_1,...,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_\ell}\|\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1}\|_{L^{4/3}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}\\
&\quad= I + ... + V. \qquad (175)
\end{aligned}$$

首先，我们估计 II。由 H¨older 不等式和 Bernstein 不等式，对于 $(j_1,...,j_{1+\alpha}) \in \mathcal{Z}_1$,

$$\|\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1}\|_{L^{4/3}_{x,t}} \leqslant C^\alpha\prod_{\ell=1}^{3}\|\triangle_{j_\ell}v_\ell\|_{L^4_{x,t}}\prod_{k=4}^{\alpha+1}(2^{dj_k/2}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_t L^2_x}). \qquad (176)$$

若 $\alpha \geq 3$，由 H¨older 不等式和杨氏不等式可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{(j_1,...,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_1}\|\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1}\|_{L^{4/3}_{x,t}}\\
&\quad\leqslant C^\alpha\sum_{j_1>(j-c(\alpha))\vee j_\lambda\geqslant j_2\geqslant j_3}\prod_{\ell=1}^{3}\|\triangle_{j_\ell}v_\ell\|_{L^4_{x,t}}\sum_{j_4,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_3}\prod_{k=3}^{\alpha+1}(2^{dj_k/2}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_t L^2_x})\\
&\quad\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha\sum_{j_1>(j-c(\alpha))\vee j_\lambda\geqslant j_2\geqslant j_3}2^{(1-2/\alpha)j_3}\prod_{\ell=1}^{3}\|\triangle_{j_\ell}v_\ell\|_{L^4_{x,t}}\prod_{\ell=4}^{1+\alpha}\|u_\ell\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}\\
&\quad\leqslant(C\sqrt{\alpha})^\alpha\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^4_{x,t}}\sum_{j_2\leqslant j_\lambda}(2^{j_2(\sigma_\alpha-1/2)}\|\triangle_{j_2}v_2\|_{L^4_{x,t}})\\
&\qquad\times\sum_{j_3\leqslant j_2}2^{2(j_3-j_2)(1/2-1/\alpha)}(2^{j_3(\sigma_\alpha-1/2)}\|\triangle_{j_3}v_3\|_{L^4_{x,t}})\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}\\
&\quad\leqslant C(C\sqrt{\alpha})^\alpha\sum_{(j-c(\alpha))\vee j_\lambda<j_1\leqslant j+1}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^4_{x,t}}\\
&\qquad\times\|u_2\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\|u_3\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}. \qquad (177)
\end{aligned}$$

将上述估计代入 II，并使用杨氏不等式，可得

$$II \leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\|u_1\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\prod_{k=2}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}. \tag{178}$$

同理,

$$III \leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\prod_{k=1}^{2}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\|u_3\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}, \tag{179}$$

$$IV+V \leqslant (C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\|u_1\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\prod_{k=2}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}. \tag{180}$$

现在我们估计 I。由于 $2^j > \lambda$ for $j > j_\lambda$，我们有

$$I \leqslant \lambda^{-1/2}\left(\sum_{j>j_\lambda}2^{2\sigma j}\left(\sum_{(j_1,\dots,j_{1+\alpha})\in\mathcal{Z}_\ell}\|\triangle_{j_1}v_1\dots\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{\alpha+1}\|_{L^{4/3}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{181}$$

然后，我们可以采用与估计 II 类似的方法，得到

$$I \leqslant \lambda^{-1/2}(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\|u_1\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=2}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_\alpha,s}_{2,2})}. \tag{182}$$

接下来，对于 $\alpha = 2$，证明比 $\alpha \geqslant 3$ 的证明更简单。比如，我们估计 II。注意到 $\sigma > 1/2$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{(j_1,j_2,j_3)\in\mathcal{Z}_1}\|\triangle_{j_1}v_1\dots\triangle_{j_3}v_3\|_{L^{4/3}_{x,t}} &\leqslant \sum_{j_1>(j-3)\vee j_\lambda\geqslant j_2\geqslant j_3}\prod_{\ell=1}^{3}\|\triangle_{j_\ell}v_\ell\|_{L^4_{x,t}}\\ &\lesssim \sum_{j_1>(j-3)\vee j_\lambda}\|\triangle_{j_1}v_1\|_{L^4_{x,t}}\prod_{\ell=2}^{3}\|u_\ell\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}.\end{aligned} \tag{183}$$

由此可得

$$II \lesssim \|u_1\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\prod_{k=2}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{184}$$

现在我们估计 $\|\mathscr{T}v\|_{Y_1}$。根据推论 3.7 中的 Strichartz 估计,

$$\|\mathcal{T}v\|_{Y_1} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \lambda^{-3/4}\|f(v)\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}. \tag{185}$$

利用双曲正弦的泰勒展开，需要对 $\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},\ B^{\sigma,\ s}_{4/3,\ 2}(\mathbb{Z}_\lambda))}$进行估计。我们有如下

引理 4.10. 设 $d=2$, $\alpha\in\mathbb{N}$, $\alpha\geqslant 2$, $\sigma\geqslant\sigma_c=d/2-2/\alpha$, $\sigma>0$, $s<0$, $\lambda\gg 1$。设Y_1和 Y_2如 (169) 和 (170) 中所述。假设 supp $\widehat{v}\subset\mathbb{R}^d_I$。则有

$$\lambda^{-3/4}\|v^{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\leqslant(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\|v\|^{1+\alpha}_{Y_1\cap Y_2}. \tag{186}$$

证明。根据定义,

$$\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}=\left(\sum_{j\leqslant j_\lambda}2^{2\sigma j}\|\triangle_j 2^{s|\nabla|}(u_1u_2...u_{\alpha+1})\|^2_{L^{4/3}_{x,t}}\right)^{1/2}. \tag{187}$$

取 $v_i=2^{s|\nabla|}u_i$。有

$$\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\leqslant\left(\sum_{j\leqslant j_\lambda}2^{2\sigma j}\left(\sum_{j_1,...,j_{1+\alpha}\in\mathbb{Z}_+}\|\triangle_j(\prod_{\ell=1}^{1+\alpha}\triangle_{j_\ell}v_\ell)\|_{L^{4/3}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{188}$$

由对称性，不妨设

$$j_1=\max_{1\leqslant k\leqslant 1+\alpha}j_k,\quad j_2=\max_{2\leqslant k\leqslant 1+\alpha}j_k,\quad j_3=\max_{3\leqslant k\leqslant 1+\alpha}j_k$$

在上述求和中，$\sum_{j_1,...,j_{1+\alpha}}$。注意到

$$\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha})=0,\quad j_1,\,j_2\geqslant j+1,$$

有

$$\begin{aligned}&\|u_1...u_{1+\alpha}\|_{\widetilde{L}^{4/3}(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4/3,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\\&\quad\leqslant 2^{\sigma j_\lambda}\sum_{j_2,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_\lambda}\|\triangle_{j_\lambda}(\triangle_{j_\lambda+1}v_1\triangle_{j_2}v_2...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha})\|_{L^{4/3}_{x,t}}\\&\qquad+\left(\sum_{j\leqslant j_\lambda}2^{2\sigma j}\left(\sum_{j_1,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_\lambda}\|\triangle_j(\triangle_{j_1}v_1...\triangle_{j_{1+\alpha}}v_{1+\alpha})\|_{L^{4/3}_{x,t}}\right)^2\right)^{1/2}\\&\quad:=I+II.\end{aligned} \tag{189}$$

采用与引理 4.2 类似的方法，可得

$$II\leqslant(C\sqrt{\alpha})^{\alpha+C}\prod_{k=1}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}. \tag{190}$$

利用 H¨older 不等式，并采用与引理 4.2 类似的方法,

$$\begin{aligned}I\leqslant&2^{\sigma j_\lambda}\sum_{j_2,...,j_{1+\alpha}\leqslant j_\lambda}\|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^4_{x,t}}\prod_{k=2}^{3}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^4_{x,t}}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|\triangle_{j_k}v_k\|_{L^\infty_{x,t}}\\\leqslant&(C\sqrt{\alpha})^\alpha 2^{\sigma j_\lambda}\|\triangle_{j_\lambda+1}v_1\|_{L^4_{x,t}}\prod_{k=2}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\\\leqslant&(C\sqrt{\alpha})^\alpha\lambda^{1/2}\|u_1\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma-1/2,s}_{4,2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}\prod_{k=2}^{3}\|u_k\|_{\widetilde{L}^4(\mathbb{R},B^{\sigma,s}_{4,2}(\mathbb{Z}_\lambda))}\prod_{k=4}^{1+\alpha}\|u_k\|_{\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R},B^{\sigma_c,s}_{2,2})}\end{aligned} \tag{191}$$

结合 I 和 II的估计，我们便得到所需结果。 □

4.3 定理 1.1 的证明

注 4.11. 我们指出，定理 1.1 中的支集条件可以通过以下条件略作改进:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\widehat{u}_0 \subset \mathbb{R}^d_I \text{ for } \alpha > 4/d, \quad \operatorname{supp}\widehat{u}_0 \subset \mathbb{R}^d_I \setminus \{0\} \text{ for } \alpha = 4/d \in \mathbb{N};\\
&\operatorname{supp}\widehat{u}_1 \subset \mathbb{R}^d_I \text{ for } \alpha > \frac{4(d+2)}{(d-2)(d+1)},\ d \geqslant 3,\\
&\operatorname{supp}\widehat{u}_1 \subset \mathbb{R}^d_I \setminus \{0\} \text{ for } \alpha \leqslant \frac{4(d+2)}{(d-2)(d+1)}\ (\alpha < \infty \text{ for } d = 1, 2).
\end{aligned}$$

我们将在上述支集条件的假设下证明我们的结果。

步骤 1. 我们考虑 $\alpha \geqslant 4/(d-1)$ $\sigma > 1/2$ 的情形。我们将证明与 (108) 和 (137) 联系起来。由推论 4.3 和 4.5，并注意到 $X = X_1 \cap X_2$，我们有

$$\|\mathcal{T}v\|_X \leqslant C(\|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}) + C\lambda^{2/(d+1)}\|v\|_X^{1+\alpha}, \tag{192}$$

$$\|\mathcal{T}v_1 - \mathcal{T}v_2\|_X \leqslant C\lambda^{2/(d+1)}(\|v_1\|_X^{\alpha} + \|v_2\|_X^{\alpha})\|v_1 - v_2\|_X. \tag{193}$$

$\alpha \geqslant 4/(d-1)$ 意味着 $d/2 - 2/\alpha > 2/\alpha(1+d)$。因此，存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\frac{d}{2} - \frac{2}{\alpha} \geqslant 2\epsilon + \frac{2}{\alpha(1+d)}.$$

由推论 2.12，存在 $\lambda_0 > 1$，使得对任意 $\lambda > \lambda_0$

$$\|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} \leqslant C\lambda^{-d/2+\sigma+\epsilon}\|u_0\|_{E^{\sigma,s}} \leqslant C\lambda^{-2/\alpha(1+d)-\epsilon}\|u_0\|_{E^{\sigma,s}}, \tag{194}$$

如果 $\alpha > 4(d+2)/(d-2)(1+\alpha)$，那么存在 $\epsilon > 0$ 使得

$$\frac{d}{2} - \frac{2}{\alpha} - 1 \geqslant 2\epsilon + \frac{2}{\alpha(1+d)},$$

其中可以假设 ϵ 与 (194) 中的相同。由推论 2.12 可知，对于 $\lambda > \lambda_0$,

$$\|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} \leqslant C\lambda^{1-d/2+2/\alpha+\epsilon}\|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}} \leqslant C\lambda^{-2/\alpha(1+d)-\epsilon}\|u_0\|_{E^{\sigma,s}}. \tag{195}$$

如果 $\operatorname{supp}\widehat{u}_1 \subset \{\xi : |\xi| \geqslant \varepsilon_0\}$，其中某个 $\varepsilon_0 > 0$，则由推论 2.12 可知，存在 $\lambda_1 > \lambda_0$ 使得对任意 $\lambda > \lambda_1$,

$$\begin{aligned}
\|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} &\leqslant C\lambda^{1-d/2+2/\alpha+(\sigma-1)\vee 0}2^{s\lambda\varepsilon_0/3}\|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}\\
&\leqslant C\lambda^{-2/\alpha(1+d)-\epsilon}\|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}.
\end{aligned} \tag{196}$$

设 $\delta > 0$ 满足 $C\delta^{\alpha} \leqslant 1/100$，并且

$$M_\lambda = \lambda^{-2/\alpha(1+d)}\delta.$$

取一个满足以下条件的 $\lambda_2 > \lambda_1$

$$C\lambda^{-\epsilon}(\|u_0\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_1\|_{E^s_{\sigma-1}}) \leqslant \delta/2. \tag{197}$$

如果 $\lambda > \lambda_2$，那么我们有

$$C(\|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}) \leqslant M_\lambda/2.$$

于是我们看到，对于 $\lambda > \lambda_2$，以及任意的 v、v_1、$v_2 \in \mathcal{D}$,

$$\|\mathcal{T}v\|_X \leqslant M_\lambda/2 + C\lambda^{2/(d+1)}M_\lambda^{1+\alpha} \leqslant M_\lambda/2 + C\delta^\alpha M_\lambda \leqslant M_\lambda, \tag{198}$$

$$\|\mathcal{T}v_1 - \mathcal{T}v_2\|_X \leqslant 2C\delta^\alpha\|v_1 - v_2\|_X \leqslant \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_X. \tag{199}$$

由 (198) 和 (199) 可知，$\mathcal{T}$ 有唯一的不动点 $v \in \mathcal{D}$，它是方程 (105) 的温和解，且满足 $f(v) = \pm v^{1+\alpha}$。

为了回到非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 的解，我们对方程 (105) 的解 v 进行缩放，并令

$$u(x,t) = \lambda^{-2/\alpha}v(\lambda^{-1}x, \lambda^{-1}t),$$

由缩放引理 2.4 可得

$$\|\varphi(\lambda^{-1}\cdot)\|_{E^{\sigma,s\lambda_1}} \lesssim \lambda^{d/2+}\|\varphi\|_{E^{\sigma,s}}, \quad \sigma \geqslant 0,$$
$$\|\varphi(\lambda^{-1}\cdot)\|_{E^{\sigma,s\lambda_1}} \lesssim \lambda^{d/2-\sigma}\|\varphi\|_{E^{\sigma,s}}, \quad \sigma < 0.$$

我们看到，u 满足

$$u(t) = K_1'(t)u_0 + K_1(t)u_1 + \int_0^t K_1(t-\tau)u^{1+\alpha}(\tau)d\tau, \tag{200}$$

根据引理 2.5，它是空间 $\widetilde{L}^\infty(\mathbb{R}, B^{\sigma_c,2}{}_2{}^{s\lambda}) \cap \widetilde{L}^p(\mathbb{R}, B^{\sigma_c-1/2}{}_{,p}{}_2{}^{s\lambda})$ 中非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 的温和解。我们已经证明了 $\alpha \geqslant 4/(d-1)$ $\sigma > 1/2$ 情形下的定理 1.1。

步骤 2。我们考虑 $4/d \leqslant \alpha \leqslant 4/(d-1)$、$\alpha \neq \infty$ 对于 $d = 1$ 的情形。首先，我们考虑 $\sigma = 1/2$ 的情形。我们可以找到某个满足以下条件的 $\theta \in [0,1]$ ($\theta \in (0,1]$ 对于 $d = 1$)

$$\alpha = \frac{4}{d-1+\theta}. \tag{201}$$

Put

$$r = \frac{2(d+1+\theta)}{d-1+\theta}, \quad \theta \in \begin{cases} [0,1] & d \geqslant 2; \\ (0,1] & d = 1. \end{cases} \tag{202}$$

回忆一下，$\delta(r) = 1/(d+1+\theta)$ $\sigma(\theta,r) = 1/2$, $\gamma(\theta,r) = r$. 应用引理 2.7 和 2.11，可得

$$B^{\rho,s}_{r,2} \subset F^{\rho,s}_{r,2} = H^{\rho,s}_r, \quad H^{\rho,s}_{r'} = F^{\rho,s}_{r',2} \subset B^{\rho,s}_{r',2},$$

其中 $1/r+1/r'=1$。记 $P_{>\lambda}=\mathscr{F}^{-1}\chi_{|\xi|>\lambda}\mathscr{F}$, $P_{\leqslant\lambda}=I-P_{>\lambda}$. 由命题 3.6 可知

$$\lambda^{-1/r}\|U_\lambda(t)P_{\leqslant\lambda}u_0\|_{L^r(\mathbb{R},H_r^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s})}\lesssim\|u_0\|_{E^{\sigma,s}},\tag{203}$$

$$\lambda^{-1/r}\|\mathscr{A}_\lambda P_{\leqslant\lambda}f\|_{L^r(\mathbb{R},H_r^{\sigma-(1-\theta)\delta(r),s})}\lesssim\lambda^{1/r}\|P_{\leqslant\lambda}f\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H_{r'}^{\sigma+(1-\theta)\delta(r),s})}.\tag{204}$$

$$\lambda^{\theta\delta(r)}\|U_\lambda(t)P_{>\lambda}u_0\|_{L^r(\mathbb{R},H_r^{\sigma-1/2,s})}\lesssim\|u_0\|_{E^{\sigma,s}},\tag{205}$$

$$\lambda^{\theta\delta(r)}\|\mathscr{A}_\lambda P_{>\lambda}f\|_{L^r(\mathbb{R},H_r^{\sigma-1/2,s})}\lesssim\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}f\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H_{r'}^{\sigma+1/2,s})}.\tag{206}$$

根据 Strichartz 估计，我们选择以下函数空间 W 来求解非线性 Klein–Gordon 方程:

$$\|u\|_{W_1}=\lambda^{-1/r}\|P_{\leqslant\lambda}u\|_{L^r(\mathbb{R},H_r^{1/2-(1-\theta)\delta(r),s})}+\|P_{\leqslant\lambda}u\|_{L^\infty(\mathbb{R},E^{1/2,s})},\tag{207}$$

$$\|u\|_{W_2}=\lambda^{\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}u\|_{L^r(\mathbb{R},H_r^{0,s})}+\|P_{>\lambda}u\|_{L^\infty(\mathbb{R},E^{1/2,s})}.\tag{208}$$

$$\|u\|_W=\|u\|_{W_1}+\|u\|_{W_2}.\tag{209}$$

设 $u_{0,\lambda}=\lambda^{2/\alpha}u_0(\lambda\,\cdot)$ $u_{1,\lambda}=\lambda^{1+2/\alpha}u_1(\lambda\,\cdot)$。我们考虑映射

$$\mathcal{T}:u(t)\to K'_\lambda(t)u_{0,\lambda}+K_\lambda(t)u_{1,\lambda}+\int_0^t K_\lambda(t-\tau)u^{1+\alpha}(\tau)d\tau.\tag{210}$$

在空间

$$\begin{aligned}\mathcal{D}=\{u\in W:\ \|u\|_W\leqslant\lambda^{-2(1-\theta)/\alpha(d+1+\theta)}\delta,\ \operatorname{supp}\widehat{u(t)}\subset\mathbb{R}_I^d\},\\ d(u,v)=\|u-v\|_W,\end{aligned}\tag{211}$$

where $\delta>0$ 稍后选定。利用 Strichartz 估计和引理 2.8，我们有

$$\|\mathcal{T}u\|_{W_2}\lesssim\|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}}+\|u_{1,\lambda}\|_{E^{-1/2,s}}+\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}(u^{1+\alpha})\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H_{r'}^{0,s})}.\tag{212}$$

因此，我们需要对 $\|P_{>\lambda}(u_1...u_{1+\alpha})\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H^{0,s}_{r'})}$进行非线性估计。设 $\operatorname{supp}\widehat{u}_i\subset\mathbb{R}_I^d$, $v_i=2^{s|\nabla|}u_i$, $i=1,...,\alpha+1$。由引理 4.1，我们有

$$\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}(u_1u_2...u_{\alpha+1})\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H_{r'}^{0,s})}=\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}(v_1v_2...v_{\alpha+1})\|_{L_{x,t}^{r'}}.\tag{213}$$

在 (213) 的右侧，可以假设 v_1 具有最高频率。因此

$$P_{>\lambda}((P_{\leqslant\lambda/(1+\alpha)}v_1)v_2...v_{\alpha+1})=0.$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}(v_1v_2...v_{\alpha+1})\|_{L_{x,t}^{r'}}=&\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}((P_{>\lambda/(1+\alpha)}v_1)v_2...v_{\alpha+1})\|_{L_{x,t}^{r'}}\\ \leqslant&\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}((P_{\lambda/(1+\alpha)<\cdot\leqslant\lambda}v_1)v_2...v_{\alpha+1})\|_{L_{x,t}^{r'}}\\ &+\lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}((P_{>\lambda}v_1)v_2...v_{\alpha+1})\|_{L_{x,t}^{r'}}:=I+II.\end{aligned}\tag{214}$$

根据 H¨older 不等式和引理 2.8,

$$I \leqslant \lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{\lambda/(1+\alpha)<\cdot\leqslant\lambda}v_1\|_{L^r_{x,t}}\prod_{j=2}^{1+\alpha}\|P_{\leqslant\lambda}v_j\|_{L^r_{x,t}} \lesssim \lambda^{2(1-\theta)/(d+1+\theta)}\prod_{j=1}^{1+\alpha}\|u_j\|_{W_1}. \tag{215}$$

通过分解 $v_j = P_{>\lambda}v_j + P_{\leqslant\lambda}v_j$, 我们可得

$$\begin{aligned} II &\leqslant \lambda^{-\theta\delta(r)}\|P_{>\lambda}v_1\|_{L^r_{x,t}}\prod_{j=2}^{1+\alpha}(\|P_{\leqslant\lambda}v_j\|_{L^r_{x,t}} + \|P_{>\lambda}v_j\|_{L^r_{x,t}}) \\ &\leqslant \lambda^{-2\theta\delta(r)}\|u_1\|_{W_2}\prod_{j=2}^{1+\alpha}(\lambda^{-\theta\delta(r)}\|u_j\|_{W_2} + \lambda^{1/r}\|u_j\|_{W_1}) \\ &\lesssim \lambda^{2(1-\theta)/(d+1+\theta)}\|u_1\|_{W_2}\prod_{j=2}^{1+\alpha}\|u_j\|_{W}. \end{aligned} \tag{216}$$

将 I 和 II 的估计代入 (212),

$$\|\mathcal{T}u\|_{W_2} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{-1/2,s}} + \lambda^{2(1-\theta)/(d+1+\theta)}\prod_{j=1}^{1+\alpha}\|u_j\|_{W}. \tag{217}$$

接下来, 由 Strichartz 估计和引理 2.8, 可得

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}u\|_{W_1} \lesssim& \|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{-1/2,s}} + \lambda^{1/r-1}\left\|P_{\leqslant\lambda}(u^{1+\alpha})\right\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H^{1/2+(1-\theta)\delta(r),s}_{r'})} \\ \lesssim& \|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{-1/2,s}} + \lambda^{1/r-1+2(1-\theta)\delta(r)}\|P_{\leqslant\lambda}(u^{1+\alpha})\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H^{1/2-(1-\theta)\delta(r),s}_{r'})}. \end{aligned} \tag{218}$$

由于 supp $\widehat{u} \subset \mathbb{R}^d_I$, 我们可得 $P_{\leqslant\lambda}u^{1+\alpha} = P_{\leqslant\lambda}(P_{\leqslant\lambda}u)^{1+\alpha}$。取 $v = 2^{s|\nabla|}u$, 可得

$$\begin{aligned} \|P_{\leqslant\lambda}(u^{1+\alpha})\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H^{1/2-(1-\theta)\delta(r),s}_{r'})} &\leqslant \|(P_{\leqslant\lambda}v)^{1+\alpha}\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H^{1/2-(1-\theta)\delta(r)}_{r'})} \\ &\leqslant \|P_{\leqslant\lambda}v\|^{1+\alpha}_{L^{r}(\mathbb{R},H^{1/2-(1-\theta)\delta(r)}_{r})}. \end{aligned} \tag{219}$$

(219) 中的最后一个不等式可通过对以下内容进行多线性插值而得

$$\|v_1...v_{1+\alpha}\|_{L^{r'}(\mathbb{R},H^k_{r'})} \leqslant \prod_{i=1}^{1+\alpha}\|v_i\|^{1+\alpha}_{L^r(\mathbb{R},H^k_r)}, \quad k = 0, 1. \tag{220}$$

由此可得

$$\|\mathcal{T}u\|_{W_1} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{-1/2,s}} + \lambda^{2(1-\theta)/(d+1+\theta)}\|u\|^{1+\alpha}_{W_1}. \tag{221}$$

总结式（217）和（221）

$$\|\mathcal{T}u\|_{W} \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{-1/2,s}} + \lambda^{2(1-\theta)/(d+1+\theta)}\|u\|^{1+\alpha}_{W}. \tag{222}$$

注意,

$$\frac{d}{2}-\frac{2}{\alpha}>\frac{2(1-\theta)}{2\alpha(d+1+\theta)} \text{ for } \alpha=\frac{4}{d-1+\theta},\ \theta<1,$$

对于某个 $\epsilon>0$,

$$\frac{d}{2}-\frac{2}{\alpha}=\frac{2(1-\theta)}{2\alpha(d+1+\theta)}+2\epsilon.$$

根据 $E^{1/2,\,s}$ 上的缩放可知

$$\|u_{0,\lambda}\|_{E^{1/2,s}}\leqslant C\lambda^{-d/2+2/\alpha+\epsilon}\|u_0\|_{E^{1/2,s}}\leqslant C\lambda^{-\epsilon}\lambda^{-\frac{2(1-\theta)}{2\alpha(d+1+\theta)}}\|u_0\|_{E^{1/2,s}}. \tag{223}$$

由于 $\widehat{u}_1$ 的支集包含于 $\{\xi:\ |\xi|\geqslant\varepsilon_0\}$，其中某个 $\varepsilon_0>0$，我们可知

$$\|u_{1,\lambda}\|_{E^{1/2,s}}\leqslant C\lambda^{-\epsilon}\lambda^{-\frac{2(1-\theta)}{2\alpha(d+1+\theta)}}\|u_1\|_{E^{1/2,s}}. \tag{224}$$

然后，我们可以重复上述过程，完成 $\sigma=1/2$ 情形的证明。若 $\sigma>1/2$，由推论 4.8 可知，(168) 起到与 (222) 相同的作用，因此省略证明细节。

4.4 定理 1.2 的证明

定理 1.2 中对初始数据的支集条件并非最优，还可以稍作改进，如下所示

$$\begin{cases}\operatorname{supp}\widehat{u}_0,\ \operatorname{supp}\widehat{u}_1\subset\mathbb{R}^d_I\setminus\{0\} \text{ for } d=2;\\ \operatorname{supp}\widehat{u}_0\subset\mathbb{R}^d_I,\ \operatorname{supp}\widehat{u}_1\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\} \text{ for } d=3,4;\\ \operatorname{supp}\widehat{u}_0,\ \operatorname{supp}\widehat{u}_1\subset\mathbb{R}^d_I \text{ for } d\geqslant 5.\end{cases}$$

我们将假设上述支集条件成立，以证明定理 1.2。若 u 是非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 的一个解，且 $f(u)=$双曲正弦 $u-u$，则 $u_\lambda(x,t):=u(\lambda x,\lambda t)$ 满足

$$\begin{cases}\partial_t^2 v+\lambda^2 v-\Delta v+\lambda^2(\sinh v-v)=0,\\ v(x,0)=u_0(\lambda x),\ v_t(x,0)=\lambda u_1(\lambda x),\end{cases} \tag{225}$$

Let X, X_1, X_2 如 (102)–(104) 所示。我们的目标是求解以下积分方程

$$v(t)=K'_\lambda(t)v_{0,\lambda}+K_\lambda(t)v_{1,\lambda}+\lambda^2\int_0^t K_\lambda(t-\tau)f(v(\tau))d\tau, \tag{226}$$

其中 $f(v)=$双曲正弦 $v-v$, $v_{0,\ \lambda}=u_0(\lambda\,\cdot)$ $v_{1,\ \lambda}=\lambda u_1(\lambda\,\cdot)$。首先，假设 $d\geqslant 3$。我们考虑映射

$$\mathcal{T}_s: v(t)\to K'_\lambda(t)v_{0,\lambda}+K_\lambda(t)v_{1,\lambda}+\lambda^2\int_0^t K_\lambda(t-\tau)f(v(\tau))d\tau \tag{227}$$

在空间中

$$\mathcal{D}_\delta=\{v\in X:\ \|v\|_X\leqslant\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta,\ \operatorname{supp}\widehat{v(t)}\subset\mathbb{R}^d_I\},\quad d(v,w)=\|v-w\|_X, \tag{228}$$

其中 $\delta>0$ 将在后面选定。与 (108) 中的方法相同，我们有

$$\|\mathcal{T}_s v\|_{X_2} \lesssim \|v_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|v_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + \lambda^2 \|\sinh v - v\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))}. \tag{229}$$

根据双曲正弦 v的泰勒展开，我们得到

$$\sinh v - v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} v^{2k+1} = \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} \frac{v^m}{m!}.$$

注意到 $X = X_1 \cap X_2$。由推论 4.3 和 (229)，对任意 $v \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_s v\|_{X_2} \leqslant & C(\|v_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|v_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}) + C\lambda^2 \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} \frac{1}{m!} \|v^m\|_{\widetilde{L}^{p'}(\mathbb{R}, B^{\sigma-1/2,s}_{p',2}(\mathbb{Z}^c_\lambda))} \\
\leqslant & C(\|v_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|v_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}) + C\lambda^{2+2/(d+1)} \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} a_m \|v\|_X^m \\
\leqslant & C(\|v_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|v_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}}) + C\lambda^{-(d+2)/(d+1)} \delta^3 \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} a_m (\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta)^{m-3}.
\end{aligned} \tag{230}$$

其中

$$a_m = \frac{(C\sqrt{m})^{m+C}}{m!}.$$

若 $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}$ 支集包含于 $\mathbb{R}_I \setminus \{0\}$，由推论 2.12 的 (ii)，存在 $\varepsilon_0, \lambda_0 > 1$，使得对任意 $\lambda \geqslant \lambda_0$,

$$\lambda \|\varphi(\lambda\cdot)\|_{E^{\tilde{\sigma},s}} \leqslant 2^{s\lambda\varepsilon_0/4} \|\varphi\|_{E^{\tilde{\sigma},s}} \leqslant \lambda^{-(d+2)/(d+1)-1} \|\varphi\|_{E^{\tilde{\sigma},s}},\ \tilde{\sigma}\in\mathbb{R}. \tag{231}$$

$d \geqslant 3$ 意味着 $d/2 > (d+2)/(d+1)$。令 $\epsilon_1 > 0$ 满足 $d/2 - 2\epsilon_1 = (d+2)/(d+1)$。由推论 2.12 的 (i)，存在 $\lambda_1 > 1$，使得对任意 $\lambda \geqslant \lambda_1$,

$$\|v_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} \leqslant C\lambda^{-d/2+\epsilon_1} \|u_0\|_{E^{\sigma,s}} = C\lambda^{-(d+2)/(d+1)-\epsilon_1} \|u_0\|_{E^{\sigma,s}}. \tag{232}$$

同理，$d \geqslant 5$ 意味着 $d/2 > 1 + (d+2)/(d+1)$。令 $\epsilon_2 > 0$ 满足 $d/2 - 2\epsilon_2 = 1 + (d+2)/(d+1)$。由推论 2.12 的 (i)，存在 $\lambda_1 > 1$，使得对任意 $\lambda \geqslant \lambda_2$,

$$\|v_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} \leqslant C\lambda^{-d/2+1+\epsilon_2} \|u_0\|_{E^{\sigma-1,s}} = C\lambda^{-(d+2)/(d+1)-\epsilon_2} \|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}. \tag{233}$$

取 $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$。我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_s v\|_{X_2} \leqslant & C\lambda^{-(d+2)/(d+1)-\epsilon}(\|u_0\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}) \\
& + C\lambda^{-(d+2)/(d+1)} \delta^3 \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} a_m (\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta)^{m-3}.
\end{aligned} \tag{234}$$

由 (137) 和推论 4.5 可知，$\|\mathcal{T}_s v\|_{X_1}$ 具有与 (234) 相同的上界。因此，对于任意 $v \in \mathcal{D}_\delta$, $\lambda \geqslant \max(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_s v\|_{X} \leqslant & C\lambda^{-(d+2)/(d+1)-\epsilon}(\|u_0\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}) \\
& + C\lambda^{-(d+2)/(d+1)} \delta^3 \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} a_m (\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta)^{m-3}.
\end{aligned} \tag{235}$$

由于 $\lim_{k\to\infty} a_{2k+3}/a_{2k+1} = 0$，可知对于任意 $\delta > 0$,

$$L_\delta := \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} a_m \delta^{m-3}$$

是一个收敛级数。设 $\delta > 0$ 满足 $CL_1\delta^2 \leqslant 1/100.$。可以找到一个 $\lambda_* \geqslant \max(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, 使得

$$2C\lambda_*^{-\epsilon}(\|u_0\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}) < \delta.$$

由此可得，对于 $\lambda = \lambda_*$, $v \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\|\mathcal{T}_s v\|_X \leqslant \delta/2 + CL_1\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta^3 \leqslant \delta. \tag{236}$$

同理，对于任意 v_1, $v_2 \in \mathcal{D}_\delta$,

$$\|\mathcal{T}_s v_1 - \mathcal{T}_s v_2\|_X \leqslant \frac{1}{2}\|v_1 - v_2\|_X. \tag{237}$$

因此， $\mathcal{T}_s$ 在 $\mathcal{D}_\delta$ 中有唯一的不动点，它是方程 (226) 的一个解。对于 $d \geqslant 3$ ，定理 1.2 证明的前半部分与定理 1.1 的证明相同。在维数 $d = 2$ 下，我们可以使用第 4.2 节中的估计并仿照上述论证。令 $M = \lambda^{-1}\delta$ ，其中 $\delta > 0$ 足够小，代入 (171)。由 (238)、引理 4.9 和引理 4.10，对于任意 $v \in \mathcal{D}_2$,

$$\|\mathcal{T} v\|_Y \lesssim \|u_{0,\lambda}\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_{1,\lambda}\|_{E^{\sigma-1,s}} + C\lambda^{-1}\delta^3 \sum_{m\in 2\mathbb{N}+1} a_m(\lambda^{-1}\delta)^{m-3}. \tag{238}$$

然后我们可以重复 $d \geqslant 3$ 情形的证明来得到结论，具体细节从略。

注 1.3 的 (iii) 的证明概要。利用 $\sin u$ 的泰勒展开，我们有

$$\sin u - u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} v^{2k+1}.$$

因此，可以像处理 $\sinh u - u$ 一样处理非线性项 $\sin u - u$，定理 1.2 对正弦-戈登方程也成立。回忆

$$e^{v^2} v - v = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} v^{2m+1}.$$

因此， $e^{v^2} v$ 的增长速度快于双曲正弦 v。不过，定理 1.2 的证明仍适用于非线性项 $f(v) = e^{v^2} v - v$。例如，对于 $d \geqslant 3$，利用 $e^{v^2} v - v$ 的泰勒展开，并沿用定理 1.2 证明中的 (235)，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}_s v\|_X \leqslant & C\lambda^{-(d+2)/(d+1)-\epsilon}(\|u_0\|_{E^{\sigma,s}} + \|u_1\|_{E^{\sigma-1,s}}) \\ & + C\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta^3 \sum_{m\in\mathbb{N}} b_m(\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta)^{2(m-1)}.\end{aligned} \tag{239}$$

其中

$$b_m = \frac{(C\sqrt{2m+1})^{2m+1+C}}{m!}.$$

容易看出,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{b_{m+1}(\lambda^{-(d+2)/(d+1)})^{2(m+1)}}{b_m(\lambda^{-(d+2)/(d+1)})^{2(m-1)}} = C^2 2e\lambda^{-2(d+2)/(d+1)}.$$

由此可知, $\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m(\lambda^{-(d+2)/(d+1)}\delta)^{2(m-1)}$ 是收敛级数, 当

$$\delta^2 < \eta = \lambda^{2(d+2)/(d+1)}/C^2 2e.$$

然后, 我们可以采用与定理 1.2 的证明类似的方法, 得到注 1.3 中 (iii) 的结果。

Nakamura 和 Ozawa [40], 在 $H^\sigma \times H^{\sigma-1}, \sigma \geqslant d/2$ 下证明了非线性 Klein–Gordon 方程小数据的整体适定性; 他们将微分差分范数应用于 Besov空间, 并结合 Sobolev 嵌入的一个有趣的极限形式。

5 关于初始数据的进一步讨论

与 $\lim_{\sigma\to-\infty}\|\varphi\|_{H^\sigma} = 0$ 一样, 由控制收敛定理可知, 对于 $\varphi \in E^{\sigma,\ s}$,

$$\lim_{b\to-\infty}\|\varphi\|_{E^{\sigma,b}} = 0,\ \sigma\in\mathbb{R}.$$

因此, 对于任意 $(u_0,u_1) \in E^{\sigma,\ s}\times E^{\sigma-1,\ s}$, 我们可以找到某个 $s_0 \leqslant s$, 使得

$$\|u_0\|_{E^{\sigma,s_0}} + \|u_1\|_{E^{\sigma-1,s_0}} \ll 1. \tag{240}$$

由引理 4.1 可知, 若 u 是非线性 Klein–Gordon 方程 (1) 的解, 则 $2^{s|\nabla|}u$ 也是该方程的解, 其初始数据为 $(2^{s|\nabla|}u_0, 2^{s|\nabla|}u_1)$, 且其频率空间中的支集位于第一卦限。根据 (240), 可以直接应用 Nakamura 和 Ozawa [40] 中的技巧, 分别得到与定理 1.1 和 1.2 类似的结果。然而, (240) 中的 $s_0 = s_0(u_0,u_1)$ 将依赖于$u_0, u_1 \in E^{\sigma,\ s}$, 对于所有 $u_0, u_1 \in E^{\sigma,\ s}$, 该量都无界, 并且我们有

引理 5.1。设 χ_A 是 $A\subset\mathbb{R}^d$ 上的示性函数。设 $b<s<0, \sigma\in\mathbb{R}$。设$\widehat{\varphi_k} = k^{d/2}\chi_{B(0,1/k)}$, $k\gg 1$。则有 $\varphi_k \in E^{\sigma,\ s}$。如果

$$\|\varphi_k\|_{E^{\sigma,b}} \leqslant \varepsilon,$$

于是我们有 $-b \gtrsim k\log_2\varepsilon^{-1}$。

证明。我们有

$$\|\varphi_k\|_{E^{\sigma,s}} = \|\langle\xi\rangle^\sigma 2^{s|\xi|}\widehat{\varphi_k}(\xi)\|_2 \lesssim_\sigma \|\varphi_k\|_2 \lesssim 1.$$

反过来,

$$\|\varphi_k\|_{E^{\sigma,b}} = \|\langle\xi\rangle^\sigma 2^{b|\xi|}\widehat{\varphi_k}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \gtrsim_\sigma 2^{b/k}\|\varphi_k\|_2 \gtrsim_\sigma 2^{b/k}.$$

因此, $\|\varphi_k\|_{E^{\sigma,\ b}} \leqslant \varepsilon$ 意味着 $|b| \gtrsim k\log_2\varepsilon^{-1}$。 □

由引理 5.1 可知

$$b(\varphi,\varepsilon):=\sup\{b<s:\ \varphi\in E^{\sigma,s},\ \|\varphi\|_{E^{\sigma,b}}\leqslant\varepsilon\}$$

同时取决于 $\varphi\in E^{\sigma、s}$ 和 $0<\varepsilon\ll 1$ 以及 $\inf_{\varphi\in E^{\sigma、s}} b(\varphi,\varepsilon)=-\infty$。

然而，如果我们采用论文中的缩放论证，或者假设对于某个 $\varepsilon_0>0$，有 $\operatorname{supp}\widehat{\varphi}\subset\mathbb{R}^d_I\setminus B(0,\varepsilon_0)$，那么我们可以得出 $\inf_{\varphi\in E^{\sigma、s}} b(\varphi,\varepsilon)<-\infty$。在后一种情况下，$b(\varphi,\varepsilon)=b(\|\varphi\|_{E^{\sigma、s}},\varepsilon_0)$。

高阶导数

引理 A.1. 设 $\alpha\in\mathbb{R}$, $p(r)=(\mu^2+r^2)^\alpha$，其中 $\mu>0$ 是一个变量参数。那么存在 $a_{k、j}:=a_{k、j}(\alpha,k)$ $(j=0,...,k)$，它们与 $\mu>0$ 无关，使得

$$p^{(2k)}(r)=\sum_{j=0}^{k}a_{k,j}\mu^{2j}(\mu^2+r^2)^{\alpha-k-j},\tag{241}$$

$$p^{(2k+1)}(r)=2r\sum_{j=0}^{k}(\alpha-k-j)a_{k,j}\mu^{2j}(\mu^2+r^2)^{\alpha-k-j-1}.\tag{242}$$

此外，我们有

$$|p^{(\ell)}(r)|\leqslant C_k(\mu^2+r^2)^{\alpha-\ell/2},\quad\forall\,\ell\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\tag{243}$$

证明。对 (241) 求导，得到 (242)。因此，只需用归纳法证明 (241)。$k=0$ 的情形显然成立。现在假设 (241) 成立。我们计算 $p^{(2k+2)}(r)$。对 (242) 求导,

$$\begin{aligned}p^{(2k+2)}(r)=&2\sum_{j=0}^{k}(\alpha-k-j)a_{k,j}\mu^{2j}(\mu^2+r^2)^{\alpha-k-j-1}\\&+4\sum_{j=0}^{k}(\alpha-k-j)(\alpha-k-1-j)a_{k,j}\mu^{2j}r^2(\mu^2+r^2)^{\alpha-k-j-2}\\=&2\sum_{j=0}^{k}(\alpha-k-j)(2\alpha-2k-2j-1)a_{k,j}\mu^{2j}(\mu^2+r^2)^{\alpha-(k+1)-j}\\&-4\sum_{j=1}^{k+1}(\alpha-k-j+1)(\alpha-k-j)a_{k,j-1}\mu^{2j}(\mu^2+r^2)^{\alpha-(k+1)-j}.\end{aligned}\tag{244}$$

令

$$\begin{aligned}a_{k+1,0}=&2a_{k,0}(\alpha-k)(2\alpha-2k-1),\quad a_{k+1,k+1}=-4a_{k,k}(\alpha-k)(\alpha-k+1),\\a_{k+1,j}=&2a_{k,j}(\alpha-k-j)(2\alpha-2k-2j-1)-4a_{k,j-1}(\alpha-k-j)(\alpha-k-j+1)\end{aligned}$$

对 $j=1,...,k$，我们得到 (241) 和 (242)，如所需。由 (241) 和 (242) 可知

$$|p^{(2k)}(r)|\leqslant C_k(\mu^2+r^2)^{\alpha-k},\quad |p^{(2k+1)}(r)|\leqslant C_k(\mu^2+r^2)^{\alpha-k-1/2}, \tag{245}$$

这意味着 (243) 成立。 □

引理 A.2. 设 $h(r)$ $\Phi(r)$ 为光滑函数。记

$$\sigma^{(1)}(h)=(h\Phi)',\quad \sigma^{(k+1)}(h)=(h\sigma^{(k)}(h))',\quad k=1,2,... \tag{246}$$

则有

$$\sigma^{(\ell)}(h)=\sum_{\alpha_1+...+\alpha_\ell\leqslant\ell} C_{\alpha_1,...,\alpha_\ell}h^{(\alpha_1)}...h^{(\alpha_\ell)}\Phi^{(\ell-\alpha_1-...-\alpha_\ell)}. \tag{247}$$

证明. 根据莱布尼茨法则，对于 $k=1$，结论成立。一般情形可通过归纳法得到。事实上，假设 (247) 成立，则有

$$\sigma^{(\ell+1)}(h)=\sum_{\alpha_1+...+\alpha_\ell\leqslant\ell} C_{\alpha_1,...,\alpha_\ell}\frac{d}{dr}(hh^{(\alpha_1)}...h^{(\alpha_\ell)}\Phi^{(\ell-\alpha_1-...-\alpha_\ell)}). \tag{248}$$

利用莱布尼茨法则可得所需结论。 □

引理 A.3. 有

$$\left(f^{-1}\right)^{(k)}=\frac{1}{f^{k+1}}\sum_{\alpha_1+...+\alpha_k=k} C_{\alpha_1,...,\alpha_k}f^{(\alpha_1)}...f^{(\alpha_k)}. \tag{249}$$

证明。由莱布尼茨法则和归纳法可得所需结果。 □

B 引理 3.5 的证明

我们仅略述 (86) 和 (87) 的证明。由 (84) 可知，对于 $2^j\lesssim\lambda$,

$$\|\triangle_j\mathscr{A}_\lambda f\|_p\lesssim\lambda^{2/\gamma(\theta,p)}2^{2j(1-\theta)\delta(p)}\int_0^t|t-\tau|^{-2/\gamma(\theta,p)}\|f(\tau)\|_{p'}d\tau. \tag{250}$$

利用哈代–利特尔伍德–索博列夫不等式,

$$\|\triangle_j\mathscr{A}_\lambda f\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)}L_x^p}\lesssim\lambda^{2/\gamma(\theta,p)}2^{2j(1-\theta)\delta(p)}\|f\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)'}L_x^{p'}}. \tag{251}$$

由柯西–施瓦茨不等式,

$$\left|\int\left(\triangle_jU_\lambda(t)u_0,f(t)\right)dt\right|\leqslant\left\|\int\triangle_jU_\lambda(-t)f(t)dt\right\|_2\|u_0\|_2. \tag{252}$$

根据对偶性,

$$\begin{aligned}\left\|\int\triangle_jU_\lambda(-t)f(t)dt\right\|_2^2&\leqslant\|f\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)'}L_x^{p'}}\left\|\int\triangle_jU_\lambda(t-\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)}L_x^p}\\&\lesssim\lambda^{2/\gamma(\theta,p)}2^{2j(1-\theta)\delta(p)}\|f\|^2_{L_t^{\gamma(\theta,p)'}L_x^{p'}}.\end{aligned} \tag{253}$$

根据（252）和（253），

$$\left|\int \left(\triangle_j U_\lambda(t)u_0, f(t)\right) dt\right| \lesssim \lambda^{1/\gamma(\theta,p)} 2^{j(1-\theta)\delta(p)} \|f\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)'} L_x^{p'}} \|u_0\|_2. \tag{254}$$

由对偶性，我们得到 (86)。采用与 (253) 类似的方法，

$$\|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f(t)\|_{L_t^\infty L_x^2} \lesssim \lambda^{1/\gamma(\theta,r)} 2^{j(1-\theta)\delta(r)} \|f\|_{L_t^{\gamma(\theta,r)'} L_x^{r'}}. \tag{255}$$

根据 (251)，

$$\lambda^{-1/\gamma(\theta,r)} 2^{-j(1-\theta)\delta(r)} \|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f(t)\|_{L_t^{\gamma(\theta,r)} L_x^r} \lesssim \lambda^{1/\gamma(\theta,r)} 2^{j(1-\theta)\delta(r)} \|f\|_{L_t^{\gamma(\theta,r)'} L_x^{r'}}. \tag{256}$$

对于任意 $p \in [2, r]$，存在 $\eta \in [0, 1]$ 使得

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\eta}{2} + \frac{\eta}{r}.$$

由此可得

$$\delta(p) = (1-\eta)\delta(2) + \eta\delta(r), \quad \frac{1}{\gamma(\theta,p)} = \frac{1-\eta}{\gamma(\theta,2)} + \frac{\eta}{\gamma(\theta,r)}.$$

由 H¨older 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
&\lambda^{-1/\gamma(\theta,p)} 2^{-j(1-\theta)\delta(p)} \|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f(t)\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)} L_x^p} \\
&\quad \leqslant \left(\|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f(t)\|_{L_t^\infty L_x^2}\right)^{1-\eta} \left(\lambda^{-1/\gamma(\theta,r)} 2^{-j(1-\theta)\delta(r)} \|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f(t)\|_{L_t^{\gamma(\theta,r)} L_x^r}\right)^{\eta} \\
&\quad \lesssim \lambda^{1/\gamma(\theta,r)} 2^{j(1-\theta)\delta(r)} \|f\|_{L_t^{\gamma(\theta,r)'} L_x^{r'}}.
\end{aligned} \tag{257}$$

再次根据对偶性，

$$\lambda^{-1/\gamma(\theta,p)} 2^{-j(1-\theta)\delta(p)} \|\triangle_j \mathscr{A}_\lambda f(t)\|_{L_t^{\gamma(\theta,p)} L_x^p} \lesssim \|f\|_{L_t^1 L_x^2}. \tag{258}$$

若 $r \in [2, p]$，通过对 (251) 和 (258) 进行插值，即可得到所需结果。这就完成了 (86) 和 (87) 的证明。

致谢。作者感谢 K. Nakanishi 教授就本文进行的启发性讨论。本项目部分获得国家自然科学基金委员会项目（批准号：12171007）资助。

参考文献

[1] M. J. Ablowitz、D. J. Kaup、A. C. Newell、H. Segur, *Nonlinear-evolution equations of physical significance*, 《物理评论快报》, 31 (1973), 125–127。

[2] H.Bae, A. Biswas 和 E. Tadmor, *Analyticity and decay estimates of the Navier-Stokes equations in critical Besov spaces*, 《数学物理分析档案》205 (2012), 第 3 期, 963–991。

[3] H. Bahouri, P. G´erard,
High frequency approximation of solutions to critical nonlinear wave equa-tions, 《美国数学杂志》121 (1999), 第 1 期，131–175。[4] M. Ben-Artzi, H. Koch, J. C. Saut,
Dispersion estimates for fourth order Schrödinger equations, 《巴黎科学院学报》系列 I 330 (2000), 87–92。[5] J. Bergh 和 J. L¨ofstr¨om, 《插值空间》，施普林格出版社，1976。[6] G. Bj¨orck,
Linear partial differential operators and generalized distributions. 《数学档案》6 (1966), 351–407。[7] G. Bourdaud, M. Reissig, W. Sickel, *Hyperbolic equations, function spaces with exponential weights and Nemytskij operators*, 《纯粹与应用数学年刊》182 (2003), 409–455[8] P. Brenner,
On space-time means and everywhere defined scattering operators for nonlinear Klein-Gordon equations. 《数学杂志》186 (1984), 383–391。[9] P. Brenner, 《非线性克莱因–戈登方程的散射与处处有定义的散射算子》。《微分方程杂志》56 (1985), 310–344。[10] P. Brenner,
On space–time means and strong global solutions of nonlinear hyperbolic equations, 《数学杂志》201 (1989), 45–55。[11] A. C. Bryan, C. R. Haines, A. E. G. Stuart,
Complex solitons and poles of the sine-Gordon equation, 《数学物理快报》第 2 卷 (1978), 445–449。[12] J-Y. Chemin 和 N. Lerner, *Flot de champs de vecteurs non lipschitziens et équations de Navier–Stokes*, 《微分方程杂志》121 (1995), 第 2 期，314–328。[13] J. Chen, Y. F. Lu, B. X. Wang,
Global Cauchy problems for the nonlocal (derivative) NLS in E^s_σ, 《微分方程杂志》344 (2023), 767–806[14] J. Chen, B. X. Wang 和 Z. M. Wang, *Complex valued semi-linear heat equations in super-critical spaces* $E^{\sigma,s}$, 《数学年刊》（即将出版）。[15] S. S. Chern,
Geometrical interpretation of the sinh-Gordon equation, 《波兰数学年刊》39 (1981), 63–69。[16] H. Feichtinger, K. Gr¨ochenig, K. J. Li 和 B. X. Wang, *Navier-Stokes equation in super-critical spaces* $E^s_{p,q}$, 《巴黎科学院学报》非线性分析系列 38 (2021), 第 1 期，139–173。[17] C. Foias, R. Temam,
Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. , 《函数分析杂志》87 (1989), 第 2 期，359–369。[18] I. M. Gelfand 和 G. E. Shilov, *Generalized Functions*,
Spaces of Fundamental and GeneralizedFunctions, Vol 2, 学术出版社，纽约-伦敦，1968。[19] J. Ginibre 和 G. Velo, *The global Cauchy problem for the nonlinear Klein–Gordon equation*, 《数学杂志》189 (1985), 487–505。[20] J. Ginibre, G. Velo,
The global Cauchy problem for the nonlinear Klein–Gordon equation, II. 《巴黎科学院学报》非线性分析系列 6 (1989), 15–35。[21] J. Ginibre 和 G. Velo,
Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, 《函数分析杂志》133 (1995), 50–68。[22] L. Grafakos, 《古典与现代傅里叶分析》，培生教育公司，上萨德尔河，NJ，2004。[23] Z. H. Guo, L. Z. Peng, B. X. Wang, *Decay estimates for a class of wave equations*, 《函数分析杂志》254 (2008), 1642–1660。[24] M. G.Grillakis,
Regularity and asymptotic behaviour of the wave equation with a critical nonlinearity, 《数学年刊》132 (1990), 485–509。

[25] N. Hayashi, P. I. Naumkin, *A bilinear estimate and its application to a quadratic nonlinear Klein-Gordon equation in two space dimensions*, 《函数分析杂志》270（2016年），1971–1994。[26] S. Ibrahim, N. Masmoudi, and K. Nakanishi, *Scattering threshold for the focusing nonlinear Klein–Gordon equation*, 《偏微分方程分析》4（2011年），405–460。[27] S. Ibrahim, N. Masmoudi, and K. Nakanishi, *Threshold solutions in the case of mass-shift for thecritical Klein–Gordon equation*, 《美国数学会汇刊》366（2014年），5653–5669。[28] F. John, 《平面波与球面平均：在偏微分方程中的应用》，施普林格，1981年[29] M. Keel, T. Tao, *Endpoint Strichartz estimates*, 《美国数学杂志》120（1998年），360–413。[30] D. Kermanschah,
Numerical integration of loop integrals through local cancellation of threshold sin-gularities, 《高能物理学杂志》，151（2022年）https://doi.org/10.1007/JHEP01(2022)151[31] R. Killip, B. Stovall, M. Visan, *Scattering for the cubic Klein-Gordon equation in two space dimen-sions* 《美国数学会汇刊》364（2012年），1571–1631[32] R. Killip, B. Stovall, M. Visan,
Blowup behaviour for the nonlinear Klein–Gordon equation, 《数学年刊》358（2014年），289–350 [33] D. Kumar, A. R. Seadawy, R. Chowdhury, *On new complex soliton structures of the nonlinear partial differential equation describing the pulse narrowing nonlinear transmission lines*, 《光学与量子电子学》50，108（2018年）。https://doi.org/10.1007/s11082-018-1383-6[34] P. Lemari´e-Rieusset, *Une remarque sur lanalyticite des solutions milds des equations de Navier-Stokes dans* $\mathbb{R}^3$. , 《巴黎科学院报告》I辑，330（2000年），183–186。[35] F. Lund *Example of a Relativistic,*
Completely Integrable, Hamiltonian System, 《物理评论快报》38（1977年），1175–1178。[36] B. Marshall, W. Strauss and S. Wainger, L^p–L^q *estimates for the Klein-Gordon equation*, 《纯粹与应用数学杂志》59（1980年），417–440。[37] S. Mogilevskaya, A.Linkov,
Complex fundamental solutions and complex variables boundary elementmethod in elasticity, 《计算力学》22（1998年），88–92。[38] K. Nakanishi,
Energy scattering for nonlinear Klein–Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2, 《函数分析杂志》169（1999年），201–225。[39] K. Nakanishi,
Scattering theory for the nonlinear Klein–Gordon equation with Sobolev critical power, 《国际数学研究通知》第1期（1999年），31–60。[40] M. Nakamura and T. Ozawa
The Cauchy problem for nonlinear Klein–Gordon equations in theSobolev spaces, 《京都大学数理科学研究所出版物》37（2001年），255–293。[41] H. Pecher,
Nonlinear small data scattering for the wave and Klein–Gordon equation, 《数学杂志》185（1984年），261–270。[42] H. Pecher, *Low energy scattering for nonlinear Klein–Gordon equations*, 《函数分析杂志》63（1985年），101–122。[43] J. Rubinstein, *Sine-Gordon equation* , 《数学物理学杂志》11（1970年），258–266。[44] R. S. Strichartz,
Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions ofwave equations, 《杜克数学杂志》44（1977年），705C714。[45] V. Z. Parton,
Fracture mechanics of piezoelectric materials. 《宇航学报》3（1976年），671–683。[46] J. Plemelj, *Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.* 《数学与物理月刊》19（1908年），211–246。[47] J. J. Sakurai, J. Napolitano, *Modern Quantum Mechnics*，剑桥大学出版社，2014年。[48] L. I. Schiff, *Nonlinear meson theory of nuclear forces*, 《物理评论》84（1951年），1-12。

[49] A. C. Scott, *A nonlinear Klein-Gordon equation*, 《美国物理学杂志》37（1969年），52–61。[50] J. Shatah, M. Struwe, *Well-posedness in the energy space for semilinear wave equations with critical growth*, 《国际数学研究通知》1994年，第7期，303–309。[51] Y. W. Sokhotskii, *On definite integrals and functions used in series expansions.* 圣彼得堡，1873年。[52] E.M. Stein, *Harmonic Analysis*, 普林斯顿大学出版社，1993年。[53] W. Strauss, *Nonlinear scattering theory at low energy*, 《函数分析杂志》41（1981年），110–133。[54] M. Struwe, *Globally regular solutions to the u^5 Klein–Gordon equation*, 比萨高等师范学校科学类年刊（第4辑）15（1988年），495–513。[55] M. Struwe, *The critical nonlinear wave equation in two space dimensions*, 《欧洲数学会杂志》15（2013年），第5期，1805–1823。[56] M. Tsutsumi, *Scattering of solutions of nonlinear Klein–Gordon equations in three space dimensions*, 《日本数学会杂志》35（1983年），521–538。[57] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Birkh¨auser–Verlag, 1983年。[58] J. Vanderperre，一项与机器人安全装置系统相关的索霍茨基–普莱梅利问题，《运筹学快报》27（2000年），61-71。[59] B. X. Wang, *On existence and scattering for critical and subcritical nonlinear Klein–Gordon equationsin H^s*, 《非线性分析》31（1998年），573–587。[60] B. X. Wang, *Scattering of solutions for critical and subcritical nonlinear Klein–Gordon equations inH^s*, 《离散与连续动力系统》5（1999年），753–763。[61] B. X. Wang and H. Hudzik, *The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small roughdata*, 《微分方程杂志》232（2007年），36-73。[62] B. X. Wang, Z. H. Huo, C. C. Hao, Z. H. Guo，《非线性演化方程的调和分析方法I》，世界科学出版公司，哈肯萨克，新泽西州，2011年。[63] A.-M. Wazwaz *One and two soliton solutions for the sinh-Gordon equation in$(1+1)$, $(2+1)$ and$(3+1)$ dimensions*, 《应用数学快报》25（2012年），2354–2358。[64] G. B. Whitham，《线性波与非线性波》，威利出版社，纽约，1974年。

Baoxiang Wang: School of Sciences, Jimei University, Xiamen, 361021 P. R. of China.*E-mail address*: wbx@jmu.edu.cn