arXiv:2303.05980v1 [math.SP] 10 Mar 2023

嵌套分形上安德森模型的态密度

HUBERT BALS AM，Kamil Kaleta、Mariusz Olszewski 和 Katarzyna Pietruska-PA-LUB A

ABSTRACT. 我们证明了某些无限直径分形空间上的随机哈密顿算子的积分态密度存在，并确定了其 Lifschitz 奇异性。动能项 H_0 由 $\phi(-\mathcal{L})$，给出，其中 $\mathcal{L}$ 是分形上的拉普拉斯算子， ϕ 是满足某些温和正则性条件的完全单调函数。随机势 V^ω 为合金型势。

Key-words：积分态密度、合金型势、从属布朗运动、嵌套分形、良好标记性质、反射过程、诺伊曼边界条件。

2010 *MS Classification*：主要分类：82B44、28A80、60K37；次要分类：47D08、60J45、60J57。

1. 引言

设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是一个具有良好标记性质（简称 GLP）的平面无界简单嵌套分形（简称 USNF），并设 $\mathcal{L}$ 是与之对应的拉普拉斯算子，即 $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu)$ 上热半群的生成元（或者等价地，是取值于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的布朗运动的生成元）。这里，μ 表示分形上的归一化豪斯多夫测度。我们提出并研究随机安德森型薛定谔算子

$$H^\omega = H_0 + V^\omega, \quad \text{acting in} \quad L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu),$$

其中动能项 H_0 具有如下形式

$$H_0 = \phi(-\mathcal{L}),$$

对于足够正则的算子单调函数 ϕ，而 V^ω 是一个函数的乘法算子，我们称该函数为分形合金型势；它按如下方式构造：

$$V^\omega(x) := \sum_{v \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_v(\omega) \cdot W(x, v), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},$$

其中， $\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 表示张成 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的自相似分形格的顶点集合， W 是定义在 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \times \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 上的非负单个格点（双变量）势，而 $\{\xi_v : v \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\}$ 是给定概率空间 $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbb{Q})$ 上的非负非退化独立同分布随机变量。

本文的主要目标是证明算子 H^ω 的积分态密度 (IDS) 存在，并研究其渐近性质。对于具有 GLP 的平面无界简单嵌套分形，我们给出关于 ϕ、 W 和 ξ_v' 的一般充分条件，在这些条件下，积分态密度存在，并且在 H^ω 的谱底端呈现利夫希茨型行为。

随机薛定谔算子 H^ω 可以解释为某种量子系统数学模型中的哈密顿量——也就是一个单粒子（电子）在完美

[0]本研究部分由波兰国家科学中心资助，项目编号为 2015/17/B/ST1/01233 和 2019/35/B/ST1/02421。

有序材料（例如晶体）中运动，同时材料中含有杂质和缺陷（即所谓的无序介质）。该材料以嵌套分形建模——离子位于分形格点的顶点处$\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$，而无序性则由合金型势 V^ω建模。我们提出的模型是经典安德森模型 的分形对应模型；在经典模型中，离子位于整数格 $\mathbb{Z}^d$上（参见 [63] 及其中的参考文献）。据我们所知，基于此类分形合金型势的模型此前尚未得到研究。我们指出，算子 $\phi(-\mathcal{L})$描述自由粒子的动能。本文考虑的函数 $\phi(\lambda)$在零点处与λ^{α/d_w} 相当（此处 $\alpha \in (0,\ d_w]$，其中 d_w 是 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$的游走维数），且在无穷远处增长得足够快。精确表述见第 2.2.3 节中的假设 **(B)** 。我们的框架涵盖 $\phi(\lambda) = \lambda$ 的非相对论 模型（即基于拉普拉斯算子的哈密顿算符），也涵盖 $\phi(\lambda) = (\lambda + m^{2/\alpha})^{\alpha/2} - m$、 $\alpha \in (0,\ 2)$、 $m \geq 0$ 的相对论型 模型（即基于非局部动能项算子的模型）。

现在我们总结本文的主要贡献。

(1) 积分态密度的存在性。 我们给出了关于随机变量 ξ_v 和单点势 W 的相当一般的充分条件（详细陈述见第 2.3 节中的假设**(Q1)** 和**(W1)-(W3)** ），在这些条件下，算子 H^ω 的积分态密度（记为 $\mathcal{N}$）存在。它是相应的狄利克雷和诺伊曼随机薛定谔算子的特征值计数归一化测度的弱极限；这些算子作用于 $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mu)$，其中 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 是随着 $M \to \infty$趋于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 而逼近 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的有界分形。该结果陈述为定理 3.1。

(2) 积分态密度的 *Lifschitz* 尾。 在对随机变量 ξ_v 的分布函数 F_ξ 以及单点势 W 作出额外假设后（见第 4 节中的**(Q2)**、**(W4)** 和**(W5)** ；特别地，我们假设 W 具有有限程），我们描述$\mathcal{N}(\lambda) := \mathcal{N}[0,\lambda]$ 在 $\lambda \to 0^+$时的渐近行为。更确切地说，我们的主要结果定理 4.1 表明，存在$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$正数常数 K， K， R， R 使得

$$-K \leq \liminf_{\lambda\searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \mathcal{N}(\lambda)}{g(R/\lambda)} \quad \text{and} \quad \limsup_{\lambda\searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \mathcal{N}(\lambda)}{g(\widetilde{R}/\lambda)} \ \leq\ -\widetilde{K},$$

其中 $g(r) := -\log F_\xi(D_0/r)$，这里 $D_0 > 0$是某个常数， F_ξ 是 ξ_v的累积分布函数。显然，当 ξ_v在零处有原子时，$\lim_{\lambda\searrow 0} g(D_0/\lambda)$存在且有限。因此，此时上述速率会简化。

随机 Schr¨odinger 算子的积分态密度的 Lifschitz奇异性，强烈表明该系统呈现所谓的谱局域化（参见例如 Combes 和 Hislop [14], Bourgain 和 Kenig [8], Germinet、Hislop 和 Klein [25], 及其中的参考文献）。对局域化性质的严格证明通常依赖于通过 Lifschitz 尾对积分态密度进行逼近（参见例如 Klopp[40, 41] 和 Kirsch-Veseli´c [39]的论文）。在此背景下，值得一提的是，经典连续情形（在 $\mathbb{R}^d$ 上）的 Lifschitz 尾已针对各种类型的随机势得到确立（参见 Benderskii 和 Pastur [7], Friedberg 和 Luttinger [17], Luttinger [46], Nakao [49], Pastur[54], Kirsch 和 Martinelli [36, 37], Mezincescu [47], Kirsch 和 Simon [38], Kirsch 和 Veseli´c[39]），而在离散情形（在 $\mathbb{Z}^d$ 上），相关结果例如由 Fukushima [21], Fukushima、Nagai 和 Nakao [23],Nagai [48], Romerio 和 Wreszinski [58], Simon [62]给出。这些论文中的动能项 H_0 是拉普拉斯算子——连续或离散的拉普拉斯算子。关于这一点，Okura [52], Kaleta 和 Pietruska-Pa-luba [32, 33], 以及 Gebert 和 Rojas-Molina [24]研究了 $\mathbb{R}^d$ 和 $\mathbb{Z}^d$ 上的非局部动能项。

关于分形，这一问题仅在非常有限的范围内得到研究。Pietruska- Pa-luba [55] 证明了在泊松杀死障碍物间演化的布朗运动（对应于在障碍物集合上满足狄利克雷 $\mathcal{L}$ 条件的拉普拉斯算子）的积分态密度（IDS）存在，并得到了其 Lifschitz 尾。

在平面 Sierpi´nski 垫上。Shima [61] 将这一结果推广到一般的嵌套分形，并推广到基于 $\mathcal{L}$ 、具有有限程二元形状函数的泊松随机场的随机 Schr¨odinger 算子。最近，Kaleta 和 Pietruska-Pa-luba [30] 在无界平面 Sierpi´nski 垫上，研究了一大类算子单调函数 ϕ 和具有相当一般形状函数（可能为无限程）的泊松势所对应的随机 Schr¨odinger 算子 $\phi(-\mathcal{L}) + V^\omega$的积分态密度（IDS）是否存在。该模型对应于在泊松势作用下演化的从属布朗运动；在算子层面，它同时涵盖局部模型和非局部模型。文献 [31], 得到了积分态密度的 Lifschitz 奇异性，但该文的方法要求对 ϕ 在零点处的行为施加一些限制：它排除了满足 $\phi(\lambda) \approx \lambda$ 当 $\lambda \searrow 0$时的非局部模型，例如具有质量 $m > 0$的相对论模型。

本文从至少两个不同方向拓展了上述结果，为该领域带来了实质性进展。首先，以上研究都局限于泊松随机介质，而本文则研究相当一般的平面嵌套分形上分形合金型势的积分态密度的存在性及其渐近行为。即使在 Sierpi´nski 垫片的情形下，这类模型也是新的。此外，我们涵盖了范围本质上更广的拉普拉斯算子的算子单调函数 $\phi(-\mathcal{L})$，其中包括相对论动能项。我们指出，定理 4.1 的结果构成了 [33,定理 1.1]的分形对应版本。

分形上的分析仍是数学中一个充满活力的分支，例如可参见 Kigami 的论文 [35], 以及 Alonso-Ruiz 等人关于分形上的函数空间的一系列论文 [2, 3, 4, 5]）。此外，分形型空间和具有分形边界的集合在建模中日益受到关注，例如偏微分方程理论（Chen 等人 [11]以及 Dekkers 等人 [15]）、信息论（Akkermans 等人 [1]）、静磁学问题（Hinz 和 Teplyaev [28]）、声学理论（Hinz 等人 [26]），以及这些集合上的随机游走理论（例如 Kumagai 和 Nakamura [27]）。另请参见 Kumagai 的论文 [43] ，其中综述了无序介质上的扩散。这些只是从该主题丰富的近期文献中选取的分形理论潜在应用的若干例子。

现在让我们简要谈谈主要结果的证明。对于齐性空间（它们是平移不变的），例如 $\mathbb{R}^d$，以及基于整数格 $\mathbb{Z}^d$ 的合金型势，可以利用这类随机场的平稳性和遍历性的经典概念来研究积分态密度的存在性及其渐近行为（参见例如 [9, Theorem VI.1.1 和 Remark VI.1.2]）。对于分形等规则性较低的空间，这个问题会更加困难，需要采用专门的方法。定理 3.1 的证明沿用了 [30] 的一般方法，该方法改进了最初针对双曲空间 [64, 65] 和谢尔宾斯基三角形 [55] 上泊松障碍物间演化的布朗运动所采用的论证。粗略地说，该方法基于用定义在 $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mu)$ 上的算子近似作用于 $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu)$ 的算子 H^ω ，其中 $M \nearrow \infty$。关键步骤在于构造一套一致的顶点标签，这意味着该分形具有足够规则的周期结构。 [30] 的方法适用于一大类在相当一般的泊松随机场中演化的从属布朗运动，但此前仅在谢尔宾斯基三角形 ´ 上得到实现。该分形是最规则的平面无界简单嵌套分形之一；当时，将这一方法推广到几何结构更丰富的分形仍是一个开放问题。定理 4.1 的证明遵循 [33] 的思路——将 $\mathbb{R}^d$ 的技术调整到嵌套分形框架中。该方法具有泛函分析性质；其中一个关键步骤是应用 Temple 不等式——在合金型随机介质背景下使用该不等式的想法源自 Simon [62], 以及 Kirsch 和 Simon [38] 的经典论文。为了应用这一工具，需要将问题转化为研究具有周期势 $\mathbb{Z}^d$ 的薛定谔算子，或者等价地，将初始算子投影到环面 [9, 上。从我们的角度来看，至关重要的是欧几里得空间具有自然的周期结构，从而可以进行这种约化。

题目转化为研究具有周期势 [38] 的薛定谔算子 ¨，或者等价地，将初始算子投影到环面 [33] 上。从我们的角度来看，至关重要的是欧几里得空间具有自然的周期结构，从而可以进行这种约化。

因此，我们看到，将上述思想应用于更一般的嵌套分形，取决于这些分形内在的特定规则性，简而言之，即存在足够规则的周期结构。对于平面无界简单嵌套分形，Kaleta、Olszewski 和 Pietruska-Pa-luba 最近才解决了这一问题 [29]：他们引入了良好标记性质 这一概念，并描述了具有这种规则性的分形类别（另见 Nieradko 和 Olszewski [51]）。这使作者得以定义折叠投影 π_M：$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \to \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$,$M \in \mathbb{Z}_+$，并构造有界分形上的保守扩散过程序列 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$，同时精确确定相邻层级过程之间的关系。我们想强调的是，这些工具对于证明定理 3.1 和 4.1 至关重要。

本文的组织结构如下。第 2 节汇集了后续各节所需的预备知识——分形、分形集上的随机过程及其生成元，以及随机 Schr¨odinger 算子的基础知识。特别地，在命题 2.1 中，我们证明所考虑的随机势属于相应过程的 Kato 类，因此可以用 Feynman–Kac 公式正确表示随机半群。积分态密度存在性的证明见第 3 节。部分技术性引理移至附录。第 4 节给出 Lifschitz 奇异性的证明。我们研究积分态密度的拉普拉斯变换；分别证明上界（定理 4.2）和下界（定理 4.3），再将其转化为零点处积分态密度的估计（定理 4.1）。第 4 节论证中至关重要的工具（Temple 不等式、Bernstein 型估计、陶伯定理）均在需要时予以陈述。

2. 预备知识

2.1. 具有良好标记性质的无界简单嵌套分形

本节回顾 [45, 42, 56, 57], 中关于嵌套分形的一些基本定义，以及 [29] 中关于标记性质的内容。考虑一族相似变换 $\Psi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$，它们具有相同的缩放因子 $L > 1$，以及相同的等距变换部分 U，即 $\Psi_i(x) = (1/L)U(x) + \nu_i$，其中 $\nu_i \in \mathbb{R}^2$,$i \in \{1, ..., N\}$.。我们假设 $\nu_1 = 0$。存在唯一的非空紧集 $\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}$（称为由系统 $(\Psi_i)_{i=1}^N$ 生成的分形），使得 $\mathcal{K}^{\langle 0\rangle} = \bigcup_{i=1}^N \Psi_i\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right)$。由于 $L > 1$，每个相似变换恰有一个不动点，因此变换 $\Psi_1, ..., \Psi_N$ 有 N 个不动点（不一定互不相同）。令 F 为这些不动点构成的集合。

若存在另一个不动点 $y \in F$ 和两个不同的相似变换 Ψ_i、Ψ_j，使得 $\Psi_i(x) = \Psi_j(y)$，则称不动点 $x \in F$ 为本质不动点。变换 $\Psi_1, ..., \Psi_N$ 的所有本质不动点组成的集合记为 $\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}$。若集合 $\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}$ 满足以下条件，则称其为 嵌套分形 。

(1) $k := \#\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} \geq 2$.(2)（开集条件）存在一个开集 $U \subset \mathbb{R}^2$，使得对于 $i \neq j$，有$\Psi_i(U)$ $\cap \Psi_j(U) = \emptyset$且 $\bigcup_{i=1}^N \Psi_i(U) \subseteq U$。（3)（嵌套性）
$\Psi_i\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right) \cap \Psi_j\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right) = \Psi_i\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right) \cap \Psi_j\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right)$ 对于 $i \neq j$。

(4)（对称性）对于 x， $y \in \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}$ ，，令 $S_{x,\ y}$ 表示关于平分线段 $[x,y]$ 的直线的对称变换。则

$$\forall i \in \{1,...,M\}\ \forall x,y \in \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\ \exists j \in \{1,...,M\}\ S_{x,y}\left(\Psi_i\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right)\right) = \Psi_j\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right).$$

(5)（连通性）在集合 $\mathcal{V}_{-1}^{\langle 0\rangle} := \bigcup_i \Psi_i\left(\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\right)$ 上，我们定义图结构 E_{-1} 如下：$(x,\ y) \in E_{-1}$ 当且仅当存在某个 i使得 x， $y \in \Psi_i\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right)$。然后，要求图 $(\mathcal{V}_{-1}^{\langle 0\rangle},\ E_{-1})$ 是连通的。

对于 $k = 2$ ，集合 $\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}$ 只是两个本质不动点之间的一条线段，我们要求$k \geq 3$。在这种情况下，来自 $\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}$ 的点是一个正多边形 [29, 命题 2.1]的顶点。

其余概念汇总在一个定义中。

定义 2.1。设 $M \in \mathbb{Z}$.

(1)

$$\mathcal{K}^{\langle M\rangle} = L^M \mathcal{K}^{\langle 0\rangle} = \Psi_1^{-M}(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}), \tag{2.1}$$

是大小为 L^M 的分形（附属于 (0、0) 的 M-复形，见下文 (2.3)）。

(2)

$$\mathcal{K}^{\langle \infty\rangle} = \bigcup_{M=0}^{\infty} \mathcal{K}^{\langle M\rangle}. \tag{2.2}$$

是无界简单嵌套分形（*USNF*）。

(3) M-复形：每个形如 $\Delta_M \subset \mathcal{K}^{\langle \infty\rangle}$ 的集合

$$\Delta_M = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \nu_{\Delta_M}, \tag{2.3}$$

其中 $\nu_{\Delta_M} = \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$，对于某个 $J \geq M+1$、 $\nu_{i_j} \in \{\nu_1,...,\nu_N\}$，称为 M-复形。

(4) M-复形 (2.3)的顶点：集合 $\mathcal{V}(\Delta_M) = L^M \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} + \nu_{\Delta_M} = L^M \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle} + \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$。*(5)* $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 的顶点：

$$\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle} = \mathcal{V}\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right) = L^M \mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}.$$

(6) 一个$(M+m)$-复形内所有 M-复形的顶点（针对 $m > 0$递归定义）：

$$\mathcal{V}_M^{\langle M+m\rangle} = \bigcup_{i=1}^{N} \mathcal{V}_M^{\langle M+m-1\rangle} + L^{M+m}\nu_i.$$

(7) 无界嵌套分形内所有 *0*-复形的顶点：

$$\mathcal{V}_0^{\langle \infty\rangle} = \bigcup_{M=0}^{\infty} \mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}.$$

(8) 来自无界分形的 M-复形的顶点：

$$\mathcal{V}_M^{\langle \infty\rangle} = L^M \mathcal{V}_0^{\langle \infty\rangle}.$$

(9) $\mathcal{C}_M(x)$：所有包含 x 的 $M-$复形的并集：

– 当 $x \notin \mathcal{V}_M^{\langle \infty\rangle}$ 时唯一的 $M-$复形，– 当 $x \in \mathcal{V}_M^{\langle \infty\rangle}$. 时所有在 x 处相交的 $M-$复形的并。其数量记为 秩 (x)。

(10) $\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$ 中的 M-复形：

$$\Delta_{M,i}=\mathcal{K}^{\langle M\rangle}+L^{M}\nu_i,\quad i=1,...,N.$$

$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的分形（豪斯多夫）维数等于 $d=\log N\log L$。支撑集为 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$、维数为 d 的豪斯多夫测度记作 μ。其归一化方式使其满足 $\mu\left(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\right)=1$。它作为 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的一种"均匀"测度。

定义 2.2。对于 $M\in\mathbb{Z}$ 和 $x,\ y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 令

(2.4)

$$d_M(x,y):=\begin{cases}0, & \text{if } x=y;\\ 1, & \text{if there exists } \Delta_M\in\mathcal{T}_M \text{ such that } x,y\in\Delta_M \text{ and } x\neq y;\\ n>1, & \text{if there does not exist } \Delta_M\in\mathcal{T}_M \text{ such that } x,y\in\Delta_M \text{ and } n \text{ is the smallest}\\ & \text{number for which there exists a chain } \Delta_M^{(1)},\Delta_M^{(2)},...,\Delta_M^{(n)}\in\mathcal{T}_M \text{ such that } x\in\Delta_M^{(1)},\\ & y\in\Delta_M^{(n)} \text{ and } \Delta_M^{(i)}\cap\Delta_M^{(i+1)}\neq\emptyset \text{ for } 1\leq i\leq n-1.\end{cases}$$

上文定义的集合 $\mathcal{C}_M(x)$ 就是 d_M 度量下以 x 为中心、半径为 1 的球。令

$$r_0:=\max\ \mathrm{rank}(v),\qquad v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}. \tag{2.5}$$

对于 $k\geq 4$，有 $r_0=2$。对于 $k=3$，我们有 $r_0\in\{2,3\}$。在谢尔宾斯基 ́垫中有 $r_0=2$，但在 [29] 中的例3.2里有 $r_0=3$。

我们还需要估计 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$，内部来自 0–网格的点的数量；对于 $M\in\mathbb{Z}_+$，即 $\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$. 的基数。记这个数为 $k_0^{\langle M\rangle}$. 。我们很容易看出，存在一个常数$C_0>1$，使得

$$L^{Md}\leq\#\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}=k_0^{\langle M\rangle}\leq C_0L^{Md}. \tag{2.6}$$

现在我们引入顶点良好标记的概念。

考虑由 k 个符号组成的字母表 $\mathcal{A}:=\{a_1,a_2,a_3,...,a_k\}$，其中 $k=\#\mathcal{V}_0^{\langle 0\rangle}\geq 3.$。 $\mathcal{A}$ 中的元素称为标签。阶数为 $M\in\mathbb{Z}$ 的标记函数是任意映射 $l_M\colon\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}\to\mathcal{A}.$。回想一下，每个 M-复形 Δ_M 的顶点都是一个具有 k 个顶点的正多边形的顶点。特别地，恰好存在 k 个绕 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$重心的不同旋转，它们将 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$ 映射到 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$.。这些旋转记为 $\{R_1,...,R_k\}=:\mathcal{R}_M$（旋转的排序方式使得对于 $i=1,\ 2,\ .....,\ k,$，旋转 R_i 转过的角度为 $\frac{2\pi i}{k}$）。

—

定义 2.3 (阶数为 M)。设 $M\in\mathbb{Z}$。若函数 $\ell_M\colon\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}\to\mathcal{A}$满足以下条件，则称其为阶数为 M 的良好标记函数。

(1) ℓ_M 在 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$ 上的限制是到 $\mathcal{A}$的双射。*(2)* 对于每个 M-复形 Δ_M，其表示为

$$\Delta_M=\mathcal{K}^{\langle M\rangle}+\nu_{\Delta_M},$$

其中 $\nu_{\Delta_M}=\sum_{j=M+1}^{J}L^j\nu_{i_j}$，具有某些 $J\geq M+1$和 $\nu_{i_j}\in\{\nu_1,...,\nu_N\}$（参见定义 *2.1*），存在一个旋转 $R_{\Delta_M}\in\mathcal{R}_M$，使得

$$\ell_M(v)=\ell_M\left(R_{\Delta_M}\left(v-\nu_{\Delta_M}\right)\right),\quad v\in\mathcal{V}\left(\Delta_M\right). \tag{2.7}$$

若存在一个阶数为 M 的良好标记函数，则称 USNF $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有阶数为 M 的良好标记性质。

由于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$具有自相似结构，某个 M 阶数的良好标记性质对某个$M \in \mathbb{Z}$ 成立，当且仅当任意其他阶数 $M' \in \mathbb{Z}$也具有这一性质。因此得到以下一般定义。

定义 2.4 (**良好标记性质**)。 若某个 *USNF* $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有某个阶数 M 的良好标记性质，则称其具有良好标记性质（简称 GLP）。

换言之，分形 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有 GLP，当且仅当可以对 $\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 中的顶点进行标记，使得每个 M-复形的顶点都带有一套完整的标签，并且标签的顺序在各个 M-复形之间保持不变。

已知，当 k 为素数或 $k = 2^n$ 时，该分形具有 GLP。对于 k 的其他取值，可以构造具有 GLP 的例子，也可以构造不具有该性质的例子——这取决于 1-复形内部 0-复形的结构。有关 GLP 的详细分析，包括对该性质的几何刻画，请参见 [29, 51]。

对于具有 GLP 的无界分形 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，我们通过以下公式定义从 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 到主 M-复形 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 的投影映射 π_M

$$\pi_M(x) := R_{\Delta_M}\left(x - \nu_{\Delta_M}\right), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \tag{2.8}$$

其中 $\Delta_M = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \nu_{\Delta_M} = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$ 是一个包含 x 的 M-复形，$R_{\Delta_M} \in \mathcal{R}_M$ 是由 (2.7) 确定的唯一旋转。更准确地说，

(1) 若 $x \notin \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$，则取 $\Delta_M = \mathcal{C}_M(x)$（即 Δ_M 是包含 x 的唯一 M-复形）；(2) 若 $x \in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$，则 Δ_M 可取在 x 相交的任意一个 M-复形（由于 GLP，像不依赖于包含 x 的某个 M-复形的具体选择）。

将此投影限制在任意 M-复形 Δ_M 上，所得映射是一个双射，因此该限制的逆映射 $(\pi_M|_{\Delta_M})^{-1} =: \widetilde{\pi}_{\Delta_M}$，定义良好，且由以下公式给出

$$\widetilde{\pi}_{\Delta_M}(x) = R_{\Delta_M}^{-1}(x) + \nu_{\Delta_M}, \quad x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$$

其中 $\Delta_M = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \nu_{\Delta_M} = \mathcal{K}^{\langle M\rangle} + \sum_{j=M+1}^{J} L^j \nu_{i_j}$。

我们也可以投影到任意选取的其他 M-复形 Δ_M上。我们通过如下方式定义$\pi_{\Delta_M}\colon \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \to \Delta_M$

$$\pi_{\Delta_M}(x) = \widetilde{\pi}_{\Delta_M}\left(\pi_M(x)\right). \tag{2.9}$$

显然，$\pi_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} = \pi_M$，因为 $\widetilde{\pi}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} = \mathrm{Id}$。

2.2. 布朗运动、从属布朗运动及相应的反射过程

2.2.1. *USNF* 上的布朗运动。 令 $Z = (Z_t, \mathbf{P}^x)_{t\geq 0,\, x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}$ 为 USNF $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ [45, 44] 上的布朗运动。这种过程可通过狄利克雷型构造得到 [19, 42]。它是一个具有连续轨迹的费勒过程，其分布在 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的局部等距变换下保持不变。其转移半群的 L^2-生成元是分形上的拉普拉斯算子，记为 $\mathcal{L}$（不带任何下标）。过程 Z关于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的 d 维豪斯多夫测度 μ 具有转移概率密度 $g(t,x,y)$。更准确地说，有

$$\mathbf{P}^x(Z_t \in A) = \int_A g(t,x,y)\mu(\mathrm{d}y), \quad t > 0, \quad x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}).$$

密度 $g(t,\ x,\ y)$ 在 $(0,\ \infty)$ 上联合连续 $\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 并满足标度性质

$$g(t,x,y)=L^d g(L^{d_w}t,Lx,Ly),\quad t>0,\ \ x,y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}.$$

此外，它们满足以下次高斯估计：存在绝对常数$C_1^g,...,C_4^g>0$，使得 [42, 定理 5.2、5.5]

$$C_1^g t^{-d_s/2}\exp\left(-C_2^g\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_J-1}}\right)\le g(t,x,y)\le C_3^g t^{-d_s/2}\exp\left(-C_4^g\left(\frac{|x-y|^{d_w}}{t}\right)^{\frac{1}{d_J-1}}\right),\quad t>0,\ \ x,y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\tag{2.10}$$

其中 d_w 是 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，$d_s=2d/d_w$ 的游走维数，$d_s=2d/d_w$ 是其谱维数，而 $d_J>1$ 是 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$的所谓化学指数。密度 g 的正则性以及界 (2.10) 已由 T. Kumagai 在文献 [42] 中针对一般嵌套分形证明，所需假设在我们的情形下总是满足（参见 [29, 引理 A.2] 之后的注释）。

文献中引入常数 d_J，作为描述给定嵌套分形 [42, 第 3] 节上最短路径标度 的参数。通常 $d_w\neq d_J$，但已知在 Sierpi´nski 垫片的情形下有 $d_w=d_J$。

2.2.2. 反射布朗运动的构造。现在假设无界分形$\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 具有 GLP。对于任意的 $M\in\mathbb{Z}$，$\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上的反射布朗运动按如下方式规范地定义：

$$Z_t^M=\pi_M(Z_t),\tag{2.11}$$

其中 $\pi_M:\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\to\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 是式（2.8）中的投影。

形式上，这是随机过程 $(Z_t^M,\ \mathbf{P}_M^x)_{t\ge0,\ x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}$，其中测度 $\mathbf{P}_M^x,\ x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$（定义在 $C(\mathbb{R}_+,\ \mathcal{K}^{\langle M\rangle})$上）是测度 $\mathbf{P}^x,\ x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$（定义在 $C(\mathbb{R}_+,\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})$上）的投影；后者确定自由布朗运动的分布。$Z^M$ 的有限维分布为

$$\mathbf{P}_M^x(Z_{t_1}^M\in A_1,...,Z_{t_n}^M\in A_n)=\mathbf{P}^x(Z_{t_1}\in\pi_M^{-1}(A_1),...,Z_{t_n}\in\pi_M^{-1}(A_n)),\tag{2.12}$$

对于每个 $n=1$、2、.....、$0\le t_1<t_2<...<t_n,\ x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 和 A_1、.....、$A_n\in\mathcal{B}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$。注意，实际上，测度 $\mathbf{P}^x$（记作 $\pi_M(\mathbf{P}^x)$）的投影对每个 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$都有良好定义，并且 (2.12) 右端一般定义了这类测度的有限维分布。

根据测度 $\mathbf{P}_M^x$ 的定义，显然，过程 Z^M 的一维分布相对于限制在复形 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上的豪斯多夫测度 μ 绝对连续。

转移概率密度函数 $g_M(t,\ x,\ y):(0,\ \infty)\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\to(0,\ \infty)$ 由下式给出

$$g_M(t,x,y)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)}g(t,x,y') & \text{if } y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle},\\ \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)}g(t,x,y')\cdot\mathrm{rank}(y') & \text{if } y\in\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle},\end{cases}\tag{2.13}$$

其中，$\mathrm{rank}(y')$ 是在点 $y'\in\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 相交的 M-复形的数量

.

2.2.3. 从属过程。设 $S=(S_t)_{t\geq 0}$ 是定义在概率空间$\widetilde{(}\Omega\ \mathcal{F},\ \mathcal{P})$上的一个从属过程，即取值于 $\mathbb{R}_+$ 的非减 L´évy 过程。 S_t 的分布由 $\eta_t(\mathrm{d}u):=\mathcal{P}(S_t\in \mathrm{d}u)\ t\geq 0,$ 给出，它们构成 $[0,\infty$ 上的概率测度卷积半群，并由拉普拉斯变换唯一确定

$$\int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\lambda u}\eta_t(\mathrm{d}u)=\mathrm{e}^{-t\phi(\lambda)},\quad \lambda>0, \tag{2.14}$$

其中，拉普拉斯指数 ϕ 是一个伯恩斯坦函数，满足 $\phi(0+)=0$。关于伯恩斯坦函数及相应随机过程，我们通常参考专著 [60]。

已知，每个满足 $\phi(0+)=0$ 的伯恩斯坦函数 ϕ 都可表示为

$$\phi(\lambda)=b\lambda+\int_{(0,\infty)}(1-\mathrm{e}^{-\lambda u})\rho(\mathrm{d}u), \tag{2.15}$$

其中 $b\geq 0$，且 ρ是定义在 $(0,\ \infty)$ 上的非负拉东测度，满足$\int_{(0,\ \infty)}(u\wedge 1)\rho(\mathrm{d}u)<\infty$。数值 b 和测度 ρ 分别称为从属过程 S的漂移项和列维测度。

伯恩斯坦函数 ϕ 的以下正则性条件将作为全文的基本假设。

(B) 存在 $\alpha\in(0,\ d_w]$ 和 $C_1,\ C_2,\ \lambda_0>0$ 使得

$$C_1\lambda^{\alpha/d_w}\leq\phi(\lambda)\leq C_2\lambda^{\alpha/d_w},\quad \lambda\in(0,\lambda_0]. \tag{2.16}$$

此外，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\phi(\lambda)}{\log\lambda}=\infty. \tag{2.17}$$

本文的理论框架涵盖了广泛的伯恩斯坦函数及相应的从属过程，包括 α/d_w-稳定和相对论性 α/d_w-稳定过程；这里 $\phi(\lambda)=\lambda^{\alpha/d_w},\ \alpha\in(0,\ d_w]$，以及 $\phi(\lambda)=(\lambda+m^{d_w/\vartheta})^{\vartheta/d_w}-m,\ \vartheta\in(0,\ d_w),\ m>0$，分别如此。后一种情况下，我们有 $\phi(\lambda)\approx\lambda$ 对 $\lambda\to 0^+$成立，以及 $\phi(\lambda)\approx\lambda^{\vartheta/d_w}$ 对 $\lambda\to\infty$成立。更多例子可参见专著 [60]。

显然，在 (2.17) 条件下，我们有 $\lim_{\lambda\to\infty}\phi(\lambda)=\infty$，因此 $b>0$ 或 $\int_{(0,\ \infty)}\rho(\mathrm{d}u)=\infty$。我们也很容易从 (2.14) 看出，在这种情况下，对每个 $t>0$，都有 $\eta_t(\{0\})=0$。 [33,中证明了引理 2.1] ：在完全性假设 (B) 下，对每个 $\gamma,\ t_0>0$ ，存在一个常数$c=c(\gamma,\ t_0)$，使得

$$\int_0^\infty u^{-\gamma}\eta_t(\mathrm{d}u)\leq ct^{-\gamma d_w/\alpha},\quad t\geq t_0. \tag{2.18}$$

这尤其说明，对于每个 $t_0>0$,

$$\sup_{t\geq t_0}\int_0^\infty u^{-\gamma}\eta_t(\mathrm{d}u)<\infty.$$

另一方面，由 (2.16) 可得（见 [30,引理 2.2]）

$$\int_1^\infty \eta_t(u,\infty)\frac{\mathrm{d}u}{u}<\infty,\quad t>0. \tag{2.19}$$

可以验证，这等价于以下条件:

$$\text{for every }\ a>1\ \text{ and }\ t>0\ \text{ we have }\ \sum_{M=1}^{\infty}\eta_t\left(a^M,\infty\right)<\infty. \tag{2.20}$$

给定一个从属过程 S，其拉普拉斯指数为 ϕ，并满足假设 **(B)**，我们定义从属布朗运动 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 和从属反射布朗运动$X^M =(X_t^M)_{t\geq 0}$ 如下：

$$X_t := Z_{S_t}, \quad t \geq 0,$$

and

$$X_t^M := Z_{S_t}^M, \quad t \geq 0,$$

分别地。严格来说，这些过程分别定义在各自的乘积概率空间上，但为简便起见，其概率测度将使用与扩散 Z 和 Z^M 相同的符号 $\mathbf{P}^x$, $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 和 $\mathbf{P}_M^x$,$x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 表示（此处 x 表示过程的起始位置）。根据从属理论的一般结论（例如参见 [60, 第 5 章和 13]），从属过程 X 和 X^M 是 Feller 过程，具有 c`adl`ag 路径。

如上所述，在条件 (2.17) 下，我们有 $\eta_t(\{0\}) = 0, t > 0$，这确保了过程 X 和 X^M 的转移概率密度存在。它们由下式给出：

$$p(t,x,y) = \int_0^\infty g(u,x,y)\eta_t(\mathrm{d}u), \quad t > 0,\ x, y, \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},$$

and

$$p_M(t,x,y) = \int_0^\infty g_M(u,x,y)\eta_t(\mathrm{d}u), \quad t > 0,\ x, y, \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle},$$

分别。根据 Tonelli 定理，有

$$p_M(t,x,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} p(t,x,y') & \text{if } y \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}, \\ \displaystyle\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} p(t,x,y')\cdot \mathrm{rank}(y') & \text{if } y \in \mathcal{V}_M^{\langle M\rangle} \end{cases} \tag{2.21}$$

（回忆一下，rank(y') 表示在点 $y' \in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 处相交的 M-复形的数量）。对于任意固定的 $t > 0$，密度 $p(t,\ x,\ y)$ 和 $p_M(t,\ x,\ y)$ 关于空间变量是对称的，且有界。它们还继承了密度 $g(t,\ x,\ y)$ 和 $g_M(t,\ x,\ y)$ 的连续性，这一点将在下文引理 2.1 中证明。因此，过程 X 和 X^M 都是强 Feller。

引理 2.1。以下结论成立。

(a) 对于任意固定的 $t_0 > 0$，存在一个常数 $c_1 = c_1(t_0)$，使得对于任意 $t \geq t_0$，都有

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} p(t,x,y) \leq c_1 t^{-d/\alpha}.$$

此外，函数 $(t,x,y) \mapsto p(t,x,y)$ 在 $(0,\infty) \times \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle} \times \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上连续。

(b) 对每个固定的 $t_0 > 0$，存在一个常数 $c_2 = c_2(t_0) > 0$，使得对每个 $t \geq t_0$ 和 $M \in \mathbb{Z}_+$，都有

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p_M(t,x,y) \leq c_2\left(t^{-d/\alpha} \vee L^{-dM}\right).$$

此外，函数 $(t,x,y) \mapsto p_M(t,x,y)$ 在 $(0,\infty) \times \mathcal{K}^{\langle M\rangle} \times \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上连续。

证明。我们先证明 (a)。有界性直接由以下估计得出

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} g(u,x,y) \leq C_3^g u^{-d_s/2}, \quad u > 0,$$

（常数 C_3^g 来自密度 $g(u,x,y)$ 的对角线上界估计）以及应用于 $\gamma = d_s/2$ 的 (2.18)。

现在我们证明连续性。固定 $(t,x,y)\in(0,\infty)\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 和 $\varepsilon>0$。根据 (2.18)，存在 $r>0$ 使得

$$C_3^g\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[(S_{t/2})^{-d_s/2}\mathbf{1}_{S_{t/2}\in(0,r]}\right]=C_3^g\int_0^r u^{-d_s/2}\eta_{t/2}(du)<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{2.22}$$

令 $R>r\vee 1$ 满足

$$C_3^g(R-1)^{-d_s/2}<\frac{\varepsilon}{8}. \tag{2.23}$$

此外，由于函数 $(u,x,y)\mapsto g(u,x,y)$ 在 $(0,\infty)\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上连续（这意味着它在 $(0,\infty)\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的紧子集上一致连续），因此存在 $\delta\in(0,1)$，使得对于所有满足 $|s-v|<\delta$ 的 $s,v\in[r,R]$，以及所有满足 $|x-z|<\delta,|y-w|<\delta$ 的 $z,w\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，都有

$$|g(s,x,y)-g(v,z,w)|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

另一方面，由从属过程 S 的随机连续性可知，存在$\widetilde{\delta}\in(0,\delta\wedge t/2)$，使得

$$\mathcal{P}(|S_t-S_u|\geq\delta)<\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{4(C_3^g)^2\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[(S_{t/2})^{-d_s}\right]}}\right)^2,\quad\text{for every }\ u>0\ \text{ that satisfies }\ |t-u|<\widetilde{\delta}$$

（注意，　分母中期望的有限性再次由 (2.18) 得出）

现在，对于每个满足 $|t-u|+|x-z|+|y-w|<\widetilde{\delta}$ 的 $u>0$ 和 $z,\ w\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，我们可以写出

$$\begin{aligned}
&|p(t,x,y)-p(u,z,w)|\leq\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|g(S_t,x,y)-g(S_u,z,w)|\right]\\
&=\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|\dots|\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|\geq\delta\}}\right]+\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|\dots|\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|<\delta\}}\right]\\
&=\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|\dots|\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|\geq\delta\}}\right]+\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|\dots|\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|<\delta\}}\mathbf{1}_{\left\{S_{t/2}<r\right\}}\right]\\
&\quad+\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|\dots|\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|<\delta\}}\mathbf{1}_{\left\{S_{t/2}\geq r\right\}}\mathbf{1}_{\{S_u,S_t\leq R\}}\right]+\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|\dots|\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|<\delta\}}\mathbf{1}_{\left\{S_{t/2}\geq r\right\}}\mathbf{1}_{\{S_u>R\vee S_t>R\}}\right]\\
&=:I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

我们先估计 I_1。由柯西–施瓦茨不等式、初等估计 $(a-b)^2\leq a^2+b^2$,$a,\ b\geq 0$，以及 $S_t,\ S_u\geq S_{t/2}$，$\mathcal{P}$-a.s. 这一事实，可得

$$\begin{aligned}
I_1&\leq\sqrt{\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[|g(S_t,x,y)-g(S_u,z,w)|^2\right]}\sqrt{\mathcal{P}(|S_t-S_u|\geq\delta)}\\
&<\sqrt{\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[(2C_3^g(S_{t/2})^{-d_s/2})^2\right]}\cdot\frac{\varepsilon}{4\sqrt{4(C_3^g)^2\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[(S_{t/2})^{-d_s}\right]}}=\frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

由单调性和 (2.22)，我们还有

$$I_2\leq 2C_3^g\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[(S_{t/2})^{-d_s/2}\mathbf{1}_{S_{t/2}<r}\right]<\frac{\varepsilon}{4},$$

并且由 (2.24)，

$$I_3<\frac{\varepsilon}{4}.$$

最后，由 (2.23) 可得

$$I_4\leq\mathbf{E}_{\mathcal{P}}\left[C_3^g\left((S_t)^{-d_s/2}+(S_u)^{-d_s/2}\right)\mathbf{1}_{\{|S_t-S_u|<\delta\}}\mathbf{1}_{\{S_u>R\vee S_t>R\}}\right]\leq 2C_3^g(R-1)^{-d_s/2}\leq\frac{\varepsilon}{4},$$

由此完成了 (a) 的证明。

现在证明 (b) 中的有界性。由 [53, 推论 3.1] 可知，存在一个常数 $c_1 > 0$ （关于 M 一致），使得

$$\sup_{(x,y)\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} g_M(u,x,y) \le c_1\left(u^{-d_s/2}\vee L^{-dM}\right) = c_1\left(u^{-d_s/2}\mathbf{1}_{\left\{u\in(0,L^{d_w M})\right\}} + L^{-dM}\mathbf{1}_{\left\{u\ge L^{d_w M}\right\}}\right), \quad u>0.$$

因此，应用带有 $\gamma = d_s/2$ 的 (2.18)，即可得到所述界。$p_M(t,\ x,\ y)$ 连续性的证明与 (a) 部分中的证明相同，故略去。□

下一章中的一些结果将基于从属过程的桥测度的性质。我们将用 $\mathbf{P}_t^{x\,y}{}_{,}$, $t>0$, $x,\ y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 表示在 $\mathbf{P}^x$ 下 $(X_s)_{s\in[0,t]}$ 给定 $X_t = y$ 时条件分布的一个版本。这是定义在 $D([0,t],\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})$ 上的测度，并满足以下解体公式：对任意 $0<s<t$ 和 $A\in\sigma(X_u:\ u\le s)$，

$$p(t,x,y)\mathbf{P}_t^{x,y}(A) = \mathbf{E}^x[\mathbf{1}_A p(t-s,X_s,y)]. \tag{2.25}$$

关于为一般费勒过程构造的马尔可夫桥的精确定义及其性质的更多信息，请参见 [10]。我们还考虑反射过程的桥测度，即在 $D([0,t],\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$ 上的测度 $\mathbf{P}_{M\ ,,t}^{x\,y}$, $M\in\mathbb{Z}$, $t>0$, $x,y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$，使得对每个 $0\le s<t$ 和 $A\in\sigma\left(X_u^M:\ u\le s\right)$ 均有

$$p_M(t,x,y)\mathbf{P}_{M,t}^{x,y}(A) = \mathbf{E}^x\left[\mathbf{1}_A p_M(t-s,X_s^M,y)\right]. \tag{2.26}$$

相对于测度 $\mathbf{P}_t^{x\,y}{}_{,}$ 和 $\mathbf{P}_{M\ ,,t}^{x\,y}$ 的期望值分别记为 $\mathbf{E}_t^{x\,y}{}_{,}$ 和 $\mathbf{E}_{M\,t}^{x\,y}{}_{,,}$。

下述恒等式将反射从属布朗运动与自由从属布朗运动的桥测度联系起来，后文将用到。其证明可由 [29, Theorem 4.3] 推出；证明过程与 [30,Lemma2.6] 类似。

回顾一下，$\Delta_{M,\ i}$ 对于 $1\le i\le N$， M-复形在 $\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$ 中表示（见定义 2.1 (10)），而 $\pi_{\Delta_{M,\ i}}:\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\to\Delta_{M,\ i}$ 是到 $\Delta_{M,\ i}$ 上的投影（见 2.9）。

引理 2.2。设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是具有 *GLP* 的 *USNF*，且假设 **(B)** 成立。则有以下结论。

(a) 对任意 $t>0$、x、$y\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$、$M\in\mathbb{Z}_+$ 以及集合 $A\in\mathcal{B}$（$D[0,t]$、$\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$），有

$$p_M(t,\pi_M(x),\pi_M(y))\mathbf{P}_{M,t}^{\pi_M(x),\pi_M(y)}(A) = \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(y))} p(t,x,y')\mathbf{P}_t^{x,y'}\left(\pi_M^{-1}(A)\right).$$

(b) 因此，对于任意 $i=1$、2、.....、N 以及 $x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$，

$$\sum_{x'\in\pi_M^{-1}(x)} p(t,\pi_{\Delta_{M,i}}(x),x')\mathbf{P}_t^{\pi_{\Delta_{M,i}}(x),x'}\left(\pi_M^{-1}(A)\right) = \sum_{x'\in\pi_M^{-1}(x)} p(t,x,x')\mathbf{P}_t^{x,x'}\left(\pi_M^{-1}(A)\right).$$

2.2.4. 过程的转移半群和生成元。全文中，我们将用记号 $(T_t)_{t\ge0}, (T_t^M)_{t\ge0}$ 表示过程 $X, X^M.$ 的 L^2-转移半群。我们有

$$T_t f(x) = \int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} f(y)p(t,x,y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad f\in L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\mu),\ x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\ t>0,$$

and

$$T_t^M f(x) = \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} f(y)p_M(t,x,y)\,\mathrm{d}\mu(y), \quad f\in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\mu),\ x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\ t>0.$$

这些半群的生成元可识别为算子 $-\phi(-\mathcal{L})$ 和 $-\phi(-\mathcal{L}_M)$，其中 $\mathcal{L}$和 $\mathcal{L}_M$ 分别是扩散过程 Z 和 Z^M的生成元。

根据引理 2.1 (b)，对每个 $t>0$，核 $p_M(t,\ x,\ y)$ 都是有界函数；又由于$\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})<\infty$，算子 T_t^M、 $t>0$ 在 $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\ \mu)$ 上是希尔伯特–施密特算子。算子$\phi(-\mathcal{L}_M)$ 具有纯离散谱：它们的特征值均为有限重数，并满足 $0=\lambda_1^M<\lambda_2^M\le\lambda_3^M\le\ldots\to\infty$. 将算子 $-\mathcal{L}_M$（它是 $\phi(\lambda)=\lambda$ 时$\phi(-\mathcal{L}_M)$ 的一个特例）的特征值记为 $\mu_1^M,\ \mu_2^M,\ \mu_3^M,\ \ldots$。由于它们按 $\mu_k^M=L^{-Md_w}\cdot\mu_k^1$、$k=1,\ 2,\ \ldots$ 缩放，因此有

$$\lambda_k^M=\phi(\mu_k^M)=\phi(L^{-Md_w}\cdot\mu_k^1)\qquad k=1,2,\ldots. \tag{2.27}$$

此外，存在一组完备的特征函数 $(\psi_k^M)_{k\ge1}$（其中 $\psi_1\equiv L^{-\frac{Md}{2}}$），使得 —

$$\phi(-\mathcal{L}_M)\psi_k^M=\lambda_k^M\psi_k^M\qquad\text{and}\qquad T_t^M\psi_k^M=\mathrm{e}^{-t\lambda_k^M}\psi_k^M. \tag{2.28}$$

2.3. **随机合金型势与费曼–卡茨半群**

本节中，我们始终假设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是具有 GLP 的 USNF。回顾一下， $\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$ 表示 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 内所有 0-复形的顶点集合，类似地， $\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 表示 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$内所有 0-复形的顶点集合。

我们考虑以下一类随机势。

定义 2.5. （分形合金型势）设 $W\colon\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\to[0,\infty)$ 是一个博雷尔可测函数，并设 $\{\xi_v:\ v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\}$ 是在概率空间 （Ω $\mathcal{M}$、 $\mathbb{Q}$）上的一族独立同分布的非负非退化随机变量。那么随机场

$$V^\omega(x):=\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}}\xi_v(\omega)\cdot W(x,v) \tag{2.29}$$

将称为基于分形格点 $\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 的合金型势 。二元轮廓函数 W 将称为单点势。

稍后，我们需要将此合金型势 V^ω 替换为基于相同单点势、且由关于映射 π_M 周期化的格点随机变量构型所生成的势。更准确地说，我们定义

$$V_M^\omega(x)=\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_v(\omega)\sum_{v'\in\pi_M^{-1}(v)}W(x,v'),\quad x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\ M\in\mathbb{Z}_+. \tag{2.30}$$

该定义依赖于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的良好标记性质，正是它使得我们能够定义连续投影 $\pi_M\colon\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\to\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$。请注意，一般而言， V_M^ω 的实现并不一定关于 π_M，周期，即存在单点势 W，使得对于某个 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，有 $V_M^\omega(\pi_M(x))\ne V_M^\omega(x)$；参见例 2.2。

若无更多假设，这些势可能不够规则，无法继续。具体而言，我们需要 V^ω 和 V_M^ω 都属于 X 和 X^M. 的局部 Kato 类。下面回顾其定义。

定义 2.6. 我们称可测函数 $f\colon\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\to\mathbb{R}$ 属于过程 X 的 ***Kato*** 类，记作 $\mathbb{K}^X$，如果

$$\lim_{t\to0}\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\int_0^t|T_tf(x)|\,\mathrm{d}s=0. \tag{2.31}$$

我们称 f 属于过程 X 的局部 *Kato* 类，记作 $\mathbb{K}^X_{loc}$，如果对任意 M-复形Δ，函数 $f\cdot\mathbf{1}_\Delta$ 属于 $\mathcal{K}^X$.

要得到 X^M 的 Kato 类和局部 Kato 类的定义（分别记作 $\mathbb{K}^{X^M}$ 和 $\mathbb{K}^{X^M}_{loc}$），只需作显而易见的修改。于是可以直接看出，$\mathbb{K}^{X^M}_{loc}=\mathbb{K}^{X^M}$。

为满足这些要求，我们引入以下假设：

(Q1) 随机变量 $\xi_v,\, v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 属于 $L^1(\mathbb{Q})$;**(W1)** $W(\cdot,v)\in\mathbb{K}^X_{loc}$对每个 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$,都成立，并且存在一组数 $\{a_v\colon v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\}$，满足 $\sum_v a_v<\infty$，使得对所有 $x,v\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 和 $M\in\mathbb{Z}$,

$$\left(x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\wedge v\notin\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}\right)\Rightarrow W(x,v)\le a_v;$$

（W2）对于充分大的 $M\in\mathbb{Z}_+$,

$$\sum_{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v))}W\left(\pi_M(x),v'\right)\le\sum_{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v))}W\left(\pi_{M+1}(x),v'\right),\quad x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle},\ v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}.\tag{2.32}$$

由于轮廓函数 $W(x,\ v)$ 衡量位于 v 的单个格点对位于点 x 的粒子的影响强度，条件 （**W2**）意味着，对于每个固定的 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 和 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$，来自 $\pi_M^{-1}(\pi_M(v))$ 的格点对位于 $\pi_M(x)$ 的粒子的影响，$\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$平均而言小于对位置 $\pi_{M+1}(x)$ 的影响。

在讨论 Kato 类问题之前，请注意，在这些假设下，随机势 (2.29) 和 (2.30) 几乎必然是 $\mathbb{Q}-$有限的。事实上，级数 $\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}}a_v\xi_v$ 几乎必然收敛（收敛到一个有限极限） $\mathbb{Q}-$：我们有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\sum_{v\in\ \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}}a_v\xi_v=\sum_v a_v\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\xi_v<\infty,$$

因此该级数在 $L^1(\mathbb{Q})$，中收敛，故也几乎必然 $\mathbb{Q}-$。对于 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，令 $\mathbb{Z}\ni M_0=M_0(x)$ 为满足 $x\in\mathcal{K}^{\langle M_0\rangle}$. 的最小数。于是我们有

$$V^\omega(x)=\sum_{v\in\mathcal{K}^{\langle M_0+1\rangle}}\xi_v(\omega)W(x,v)+\sum_{v\notin\mathcal{K}^{\langle M_0+1\rangle}}\xi_v(\omega)W(x,v).$$

第一个求和只有有限项，而第二个求和中的系数 $W(x,\ v)$ 可以用 a_v. 估计。由此可得收敛性。

对于周期化势，论证类似：对于给定的 x 和上文所述的 M_0，若 $M\ge M_0$，则

$$V^\omega_M(x)\le\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_v\left(W(x,v)+\sum_{v'\notin\mathcal{V}_0^{\langle M_0+1\rangle}}a_{v'}\right)\le\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_v\left(W(x,v)+\|(a_v)\|_1\right)<\infty,$$

因为该求和只有有限项。当 $M<M_0$，时，我们将内层求和拆分为两部分：第一部分对 $v'\in\mathcal{V}_0^{\langle M_0\rangle}$，求和，另一部分对 $v'\notin\mathcal{V}_0^{\langle M_0\rangle}$. 求和。同样，第一部分只有有限项，而对于另一部分，我们可以使用 **(W1)**。

命题 2.1. 设**(Q1)**，**(W1)**和**(W2)**成立。则：

(i) $\mathbb{Q}-$几乎必然，$V^\omega\in\mathbb{K}^X_{loc}(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})$;*(ii)* 对任意 $M\in\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}-$几乎必然，$V^\omega_M\in\mathbb{K}^X_{loc}(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})$;*(iii)* 当 $M\in\mathbb{Z}_+$ 足够大时，$\mathbb{Q}-$几乎必然 $V^\omega_M\in\mathbb{K}^{X^M}(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$。

证明。 (i) 只需证明存在一个全测度可测集 $\Omega_0 \subset \Omega$，使得对任意 $\omega \in \Omega_0$ 以及 $M \in \mathbb{Z}_+$，条件 (2.31) 对 $f = V^\omega \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}$. 成立。我们有:

$$V^\omega(x)\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(x) \;=\; \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(x)\left(\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}} \xi_v(\omega)W(x,v) + \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}} \xi_v(\omega)W(x,v)\right).$$

第一个和式包含有限项。对于另一个和式，我们使用(**W1**)中的界： $W(x,\ v) \le a_v$. 因此,

$$V^\omega(x)\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(x) \le \mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(x)\left(\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}} \xi_v(\omega)W(x,v) + \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_v(\omega)a_v\right),$$

并且级数 $\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_v(\omega)a_v$ 收敛到一个有限极限， $\mathbb{Q}$–几乎必然成立。由此可得:

$$\begin{aligned}\int_0^t T_s(V^\omega\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}})(x)\,\mathrm{d}s \;&\le\; \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}} \xi_v(\omega)\int_0^t T_s(W(\cdot,v)\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(\cdot))(x)\,\mathrm{d}s + t\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_v(\omega)a_v \\ &\le\; \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}} \xi_v(\omega)\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\int_0^t T_s(W(\cdot,v)\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(\cdot))(x)\,\mathrm{d}s + t\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_v(\omega)a_v.\end{aligned}$$

由于假设 $W(\cdot,\ v)$ 对任意 $v \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 都属于 X 的局部 Kato 类，当 $t \to 0.$ 时，第一项中的上确界趋于 0。由于涉及的 v' 数量有限，整个第一项趋于 0。第二项中的级数是 $\mathbb{Q}$-几乎必然有界的，因此对于 $t \to 0$ ，整个表达式收敛于零。

(ii) 证明与 (i) 的证明完全相同——我们只需将 ξ_v 替换为 $\xi_{\pi_M(v)}$.

(iii) 现在令 $M \in \mathbb{Z}_+$ 足够大，使得 (**W2**) 成立。对于 $x \in \mathcal{K}^{\langle M}$，我们有 $\rangle$:

$$\begin{aligned}V_M^\omega(x) \;&=\; \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \xi_v(\omega)\sum_{v'\in\pi_M^{-1}(v)} W(x,v') \\ &=\; \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \xi_v(\omega)\left(\sum_{v'\in\pi_M^{-1}(v)\cap\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} W(x,v') + \sum_{v'\in\pi_M^{-1}(v)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} W(x,v')\right).\end{aligned}$$

根据算子 T_t^M的定义，我们有

$$\begin{aligned}
T_t^M V_M^\omega(x) &= \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p_M(s,x,y) V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \left(\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} p(s,x,y') \right) V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \left(\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y') + \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y') \right) V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y) \\
&= \int_{\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y) V_M(\pi_M(y))\mu(\mathrm{d}y) + \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y') V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y) \\
&\leq T_s\left(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} V_M\right)(x) + \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y') V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

最后两行之间的不等式由 **(W2)** 得出。利用 Tonelli 定理和估计[53, 引理 3.4]，我们有

$$\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y') = \int_0^\infty \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} g(u,x,y')\eta_s(\mathrm{d}u) \leq cL^{-dM},$$

这给出了

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \int_0^t T_s^M V_M^\omega(x)\mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \int_0^t T_s\left(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} V_M^\omega\right)(x)\mathrm{d}s + \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \int_0^t \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\setminus\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} p(s,x,y') V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y)\mathrm{d}s \\
&\leq \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \int_0^t T_s\left(\mathbf{1}_{\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}} V_M^\omega\right)(x)\mathrm{d}s + ctL^{-dM} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} V_M^\omega(y)\mu(\mathrm{d}y).
\end{aligned}$$

第一项一致收敛到零由 **(ii)** 得出。此外，**(ii)** 还蕴含$V_M^\omega \in L^1_{loc}(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu)$。因此，第二项中的积分有界，整个表达式在 $t\to 0$ 时趋于零。

□

为了证明积分态密度的存在性，我们还需要对单点势 W 作出另一个技术性假设。我们将假设

(W3) $$\sum_{M=1}^\infty \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{C}_{\lfloor M/4\rfloor}(x)} W(x,v) < \infty.$$

现在我们给出两个满足**(W1)-(W3)**的单点势的例子。

例2.1. 对于 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$, $y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$令 $f(x,y) = \min\{M\in\mathbb{N}\colon \exists\Delta_M\ x,y\in\Delta_M\}$。我们定义

$$W(x,y) = \begin{cases} \varphi\left(f(x,y)\right), & x\notin\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle} \\ 0, & x\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle} \end{cases}$$

其中 $\varphi\colon \mathbb{N}\to[0,\infty)$ 是一个非递增函数，并且存在 $c>1$，使得 $\varphi(m)\le N^{-cm}$，对于 $m\in\mathbb{N}$。

我们首先证明 *(W2)* 成立。设 $M\ge 0$。若 $\pi_M(x)\neq\pi_{M+1}(x)$，则 $\pi_{M+1}(x)$ 位于不同的 M-复形中，且对于每个 $m\le M$ 和 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$，都存在 $\#\{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v)):f(\pi_{M+1}(x)\ v')=m\}=\#\{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v)):\ f(\pi_M(x)\ v')=m\}$，因为每个 M-复形的内部结构都相同，并且 $\pi_M(\pi_{M+1}(x))=\pi_M(x)$（参见 [29] 中的命题 *3.3*）。

类似地，$\#\{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v)):\ f(\pi_{M+1}(x)\ v')=M+1\}=\#\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}-\#\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}=\#\{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v)):\ f(\pi_M(x)\ v')=M+1\}$，因为每个集合中都有一些点 $v'\in\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$ 不包含在某个 M-复形中（更准确地说，前一种情况下不包含在 $\Delta_M(\pi_M(x))$ 中，后一种情况下不包含在 $\Delta_M(\pi_{M+1}(x))$ 中）。

对于 $m>M+1$ 我们有 $\{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v)):\ f(\pi_{M+1}(x)\ v')=m\}=\{v'\in\pi_M^{-1}(\pi_M(v)):\ f(\pi_{M+1}(x)\ v')=m\}$。

总之，对于每个 m，(2.32) 中的两个和恰好包含相同数量的项 $\varphi(m)$；特别地，对于所有 $M\ge 0$，(2.32) 中等号成立。因此，**(W2)** 成立。

为验证 *(W3)*，注意若 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\backslash\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$，即它不是一个 *0*-复形的顶点，则它恰好属于一个 *0*-复形，记作 $\Delta_0(x)$，该复形有 k 个顶点。在 $\Delta_1(x)$ 中，除 $\Delta_0(x)$ 外还有 $N-1$ 个 *0*- 复形。一般而言，在 $\Delta_m(x)\backslash\Delta_{m-1}(x)$ 中有 $N^{m-1}(N-1)$ 个 *0*-复形，每个都含有 k 个顶点。对于 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\cap(\Delta_m(x)\backslash\Delta_{m-1}(x))$，我们有 $f(x,v)=m$。

这意味着，对于 $m\ge 1$，满足 $f(x,v)=m$ 的点 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 至多有 $N^{m-1}(N-1)k$ 个，因为有些顶点可能属于多个 0-复形。

我们可以估计

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\backslash\mathcal{C}_{\lfloor M/4\rfloor}(x)}W(x,v)&\le\sum_{m=\lfloor M/4\rfloor+1}^{\infty}k(N-1)N^{m-1}\varphi(m)\\&\le\sum_{m=\lfloor M/4\rfloor+1}^{\infty}k(N-1)N^{m-1}N^{-cm}\\&\le\frac{k(N-1)}{N}\sum_{m=\lfloor M/4\rfloor+1}^{\infty}N^{-(c-1)m}\\&=\frac{k(N-1)}{N^c-N}N^{-(c-1)\lfloor M/4\rfloor},\end{aligned}$$

这是收敛级数中的一项。因此，满足**(W3)**。

(W1) 的证明类似。我们按如下方式为顶点 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 赋值 a_v

$$a_v=\begin{cases}1, & \text{if } v\in\mathcal{K}^{\langle 0\rangle}\\ N^{-cm}, & \text{if } v\in\mathcal{K}^{\langle m\rangle}\backslash\mathcal{K}^{\langle m-1\rangle}\ \text{for } m\ge 1\end{cases}$$

与之前一样，对于 $m\ge 1$，满足 $a_v=N^{-cm}$ 的点 $v\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$ 至多有 $N^{m-1}(N-1)k$ 个。我们可以计算

$$\sum_v a_v\le k\cdot 1+\sum_{m=1}^{\infty}N^{m-1}(N-1)k\cdot N^{-cm}=k+\frac{k}{N}\sum_{m=1}^{\infty}N^{-m(c-1)}$$

由此得到一个收敛几何级数，因为 $c>1$。

现在令 $M\in\mathbb{Z},M\ge 0$ 和 $x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle},v\notin\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$。

若 $x \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$，则 $W(x,v) = 0$。否则，令 $m \geq M+2$ 为满足 $v \in \mathcal{K}^{\langle m\rangle}$ 的最小整数。我们有 $f(x,v) = m$，并且

$$W(x,v) = \varphi(f(x,v)) = \varphi(m) \leq N^{-cm} = a_v,$$

因此，条件 ***(W1)*** 得以满足。

下一个例子给出一个在顶点处取非零值的单点势，对于某些点，条件**(A2)**中的严格不等式成立。

例 2.2. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 为无界谢尔宾斯基垫片。对于 $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, v \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}$，令 $f(x,v) = \min\{M \in \mathbb{N}: \exists \Delta_M\ x, v \in \Delta_M\}$ 且

$$W(x,v) = 4^{-f(x,v)}.$$

于是 **(W1)-(W3)** 成立。特别地，对于满足 $x \in \mathcal{V}_M^{\langle\infty\rangle}$ 且 $\pi_M(x) \neq \pi_{M+1}(x)$的情形，式 (2.32) 中的严格不等式成立。验证 **(W1)-(W3)** 的工作留给读者——计算虽然初等，但颇为繁琐。

2.4. **随机薛定谔半群**

在本文余下部分中，我们假设 $X = (X_t)_{t\geq 0}$ 是上文介绍的从属布朗运动，并且假设**(B)**、**(Q1)** 以及 **(W1)-(W3)** 成立。

给定一个来自相应 Kato 类的非负合金型势 V^ω，我们定义从属布朗运动 X的随机 Feynman–Kac 半群 $\left\{T_t^\omega:\ t \geq 0\right\}$

$$T_t^{V^\omega} f(x) = \mathbf{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} f(X_t) \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu), \ \ t > 0.$$

该半群在 $L^2(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu)$上强连续，且由自伴算子组成。其$L^2$-生成元可计算为 $-H^\omega$，其中 $H^\omega = \phi(-\mathcal{L}) + V^\omega$ 是基于 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$上的从属布朗运动生成元 X 的随机薛定谔算子。回顾一下，ϕ 是从属过程 S的拉普拉斯指数，该从属过程在第 2.2 节中介绍；而 $\mathcal{L}$ 是 USNF 上自由布朗运动的生成元（分形拉普拉斯算子）。关于基于费勒过程生成元的薛定谔算子及其相应的 Feynman–Kac 半群，我们通常参考 Demuth 和 van Casteren 的专著 [16] （另见 [13,第 3.2-3.3]章）。

我们还定义了随机 Feynman–Kac 半群 $\left\{T_t^{D,M,V^\omega}:\ t \geq 0\right\}$ 和 $\left\{T_t^{N,M,V^\omega}:\ t \geq 0\right\}$，分别对应于在离开复形 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 时被杀死的过程 X 以及在$\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$中演化的反射过程 X^M。更准确地说，我们令

$$T_t^{D,M,V^\omega} f(x) = \mathbf{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} f(X_t); t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mu),\ M \in \mathbb{Z}_+,\ t > 0;$$

$$T_t^{N,M,V^\omega} f(x) = \mathbf{E}_M^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s} f(X_t^M) \right], \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}, \mu),\ M \in \mathbb{Z}_+,\ t > 0.$$

这里，$\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} = \inf\{t : X_t \notin \mathcal{K}^{\langle M\rangle}\}$ 表示过程首次离开集合 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$的时间。此外，分别用 A^{D,M,V^ω} 和 A^{N,M,V^ω} 表示这些半群的 L^2-生成元。如上所述，对过程施加杀死和反射，分别对应于在该过程的生成元上施加狄利克雷和诺伊曼条件。因此，（正定的）“有限体积”算子

$$H_M^{D,V^\omega} := -A^{D,M,V^\omega} \qquad \text{and} \qquad H_M^{N,V^\omega} := -A^{N,M,V^\omega}$$

可视为基于初始从属布朗运动 X 的狄利克雷和诺伊曼生成元的广义薛定谔算子。

算子 T^{D}、 $_{M}{}^{V^{\omega}}$、和 T^{N}、 $_{M}{}^{V^{\omega}}$, $t>0$ 均为积分型：对于每个 $t>0$，都存在对称有界核 u^{D}_{M}、$_{\omega}(t$、 x、^{t} $y)$ 和 u^{N}_{M}、$_{\omega}(t$、 ^{t} x、 $y)$，使得

$$T_t^{D,M,V^\omega} f(x) = \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u^D_{M,\omega}(t,x,y) f(y)\mu(\mathrm{d}y), \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\mu)$$

and

$$T_t^{N,M,V^\omega} f(x) = \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u^N_{M,\omega}(t,x,y) f(y)\mu(\mathrm{d}y), \quad f \in L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle},\mu).$$

由 (2.25) 和 (2.26)，这些核具有如下桥表示

$$u^D_{M,\omega}(t,x,y) = p(t,x,y)\,\mathbf{E}_t^{x,y}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s}; t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]$$

and

$$u^N_{M,\omega}(t,x,y) = p_M(t,x,y)\,\mathbf{E}_{M,t}^{x,y}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X^M_s)\mathrm{d}s}\right].$$

按照此前处理自由过程半群时所用的论证，算子 T^{D}, $_{M}{}^{V^{\omega}}$,, T^{N}, $_{M}{}^{V^{\omega}}$,$t>0$ 均为希尔伯特–施密特算子。因此， H^{D}, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 和 H^{N}, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 的谱由孤立特征值构成, ^{t} 且这些特征值具有有限重数，满足

$$0 \le \lambda_1^{D,M,V^\omega} < \lambda_2^{D,M,V^\omega} \le \lambda_3^{D,M,V^\omega} \le \ldots \to \infty$$

and

$$0 \le \lambda_1^{N,M,V^\omega} < \lambda_2^{N,M,V^\omega} \le \lambda_2^{N,M,V^\omega} \le \ldots \to \infty,$$

分别。

我们考虑建立在 $[0,\infty)$ 上的随机经验测度，它们基于 H^{D}, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 和 H^{N}, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 的谱构造，并以 $\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$ 归一化：

$$\mathcal{N}_M^{D,V^\omega} := \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\lambda_n^{D,M,V^\omega}} \tag{2.33}$$

and

$$\mathcal{N}_M^{N,V^\omega} := \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{\lambda_n^{N,M,V^\omega}}\ . \tag{2.34}$$

我们的目标是证明随机测度 $\mathcal{N}^{D}$, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 和 $\mathcal{N}^{N}$, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 弱收敛到共同极限 $\mathcal{N}$，后者是 $[0,\infty)$ 上的一个非随机测度。该测度称为积分态密度。

3. 态密度的存在性

定理 3.1. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是一个具有 *GLP* 的 *USNF*，且假设 **(B)**、**(Q1)** 以及 **(W1)-(W3)** 成立。那么，随机测度 $\mathcal{N}^{D}$, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 和 $\mathcal{N}^{N}$, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 随 $M\to\infty$ 的变化几乎必然按模糊拓扑收敛到 $[0,\infty)$ 上的同一个非随机极限测度 $\mathcal{N}$。

这里我们描述 证明的策略，详细内容将在附录中给出。

如引言中所述，我们证明定理 3.1 所采用的方法总体上遵循 [30]。我们将根据测度 $\mathcal{N}^{D}$, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 和 $\mathcal{N}^{N}$, $_{M}{}^{V^{\omega}}$ 的拉普拉斯变换的收敛性，推导出这些测度的收敛性

$$\Lambda_M^{D,V^\omega}(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathcal{N}_M^{D,V^\omega}(\mathrm{d}\lambda) \qquad \text{and} \qquad \Lambda_M^{N,V^\omega}(t) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathcal{N}_M^{N,V^\omega}(\mathrm{d}\lambda), \qquad t>0.$$

首先注意到

$$\begin{aligned}\Lambda_M^{D,V^\omega}(t) &= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n^{D,M,V^\omega}t} = \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\operatorname{Tr}T_t^{D,M,V^\omega}\\ &= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u_{M,\omega}^{D}(t,x,x)\,\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s};t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Lambda_M^{N,V^\omega}(t) &= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_n^{N,M,V^\omega}t} = \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\operatorname{Tr}T_t^{N,M,V^\omega}\\ &= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} u_{M,\omega}^{N}(t,x,x)\,\mu(\mathrm{d}x)\\ &= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p_M(t,x,x)\mathbf{E}_{M,t}^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s}\right]\mu(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

遗憾的是，一般而言，这些拉普拉斯变换的期望未必关于M单调。因此，我们不会直接分析 $\mathcal{N}^{D,\ M}{}^{V^\omega}$和 $\mathcal{N}^{N,\ M}{}^{V^\omega}$的收敛性，而是将初始合金型势 V^ω 替换为周期化后的势 V_M^ω （由式（2.30）给出），这样便能够证明单调性，进而证明收敛性。事实上，一旦固定了初始从属布朗运动 X 在 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 上的路径以及 $t>0$，我们便证明期望$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s))\mathrm{d}s}$关于 M单调（用 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$表示关于概率测度 $\mathbb{Q}$的期望值，见定义 2.5）。

随后将利用这一单调性论证证明，对于每个固定的 $t>0$，期望 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{N,\ M}{}^{V_M^\omega}(t)$ 在 $M\to\infty$ 时收敛到有限极限 $\Lambda(t)$，且该收敛是单调递减的。这一方法依赖于以下引理。

引理 3.1. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是一个具有 *GLP* 的 *USNF*，并且假设 **(Q1)** 和 **(W1)-(W2)**成立。对于每个 $t>0$，当 $M\in\mathbb{Z}_+$ 充分大时，有

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega(\pi_{M+1}(X_s))\mathrm{d}s}\le\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s))\mathrm{d}s}\ . \tag{3.1}$$

证明。来自 $\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}$ 的每个点都通过 π_M 投影到 $\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$ 中的一个点，因此

$$\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}=\bigcup_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}$$

且此和为 互不相交。因此，对于每个固定的 $t>0$ 以及过程 X的路径，我们有 e

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_{M+1}^{\omega}(\pi_{M+1}(X_s))\mathrm{d}s} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\int_0^t \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\xi_y(\omega)\sum_{y'\in\pi_{M+1}^{-1}(y)}W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\int_0^t \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\sum_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\xi_{\widetilde{y}}(\omega)\sum_{y'\in\pi_{M+1}^{-1}(\widetilde{y})}W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\prod_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\exp\left(-\sum_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\xi_{\widetilde{y}}(\omega)\int_0^t\sum_{y'\in\pi_{M+1}^{-1}(\widetilde{y})}W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\mathrm{d}s\right)\\ &= \prod_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\sum_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\xi_{\widetilde{y}}(\omega)a_{\widetilde{y}}\right)=(*)\end{aligned}$$

with

$$a_{\widetilde{y}}=\int_0^t\sum_{y'\in\pi_{M+1}^{-1}(\widetilde{y})}W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\mathrm{d}s,$$

因为所有 $\xi_{\widetilde{y}}$ 都是 独立随机变量。注意，数值 $a_{\widetilde{y}}$ 不依赖于 ω .

现在固定 $y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$，并记 $C_y=\left\{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\text{ 为 }\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}:\ a_{\widetilde{y}}>0\right\}$。首先假设 $C_y\neq\emptyset$。将集合 C_y 的元素依次记为 $\widetilde{y}_i$，其中 $1\le i\le n=\#C_y$。然后，利用广义 H¨older 不等式

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(|X_1...X_n|\right)\le\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}|X_1|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}...\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}|X_n|^{p_n}\right)^{\frac{1}{p_n}}$$

其中 $X_i=\mathrm{e}^{-\xi_{\widetilde{y}_i}a_{\widetilde{y}_i}}$ 且 $p_i=\frac{1}{a_{\widetilde{y}_i}}\sum_{j=1}^n a_{\widetilde{y}_j}$（显然，$\frac{1}{p_1}+...+\frac{1}{p_n}\equiv 1$），我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\sum_{i=1}^n\xi_{\widetilde{y}_i}(\omega)a_{\widetilde{y}_i}\right)&=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-\xi_{\widetilde{y}_i}(\omega)a_{\widetilde{y}_i}}\\ &\le\prod_{i=1}^n\left(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\xi_{\widetilde{y}_i}(\omega)\sum_{j=1}^n a_{\widetilde{y}_j}}\right)^{\frac{a_{\widetilde{y}_i}}{\sum_{j=1}^n a_{\widetilde{y}_j}}}=\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\xi_y(\omega)\sum_{j=1}^n a_{\widetilde{y}_j}}.\end{aligned}$$

同样，最后一个等式是由所有 $\xi_{\widetilde{y}_i}$ 都是独立同分布随机变量这一事实得出的。由此可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\sum_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\xi_{\widetilde{y}}(\omega)a_{\widetilde{y}}\right)\le\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\xi_y(\omega)\sum_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}a_{\widetilde{y}}\right).$$

如果 $C_y=\emptyset$，那么同样的界显然成立。因此，

$$(*)\le\prod_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\exp\left(-\xi_y(\omega)\sum_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\int_0^t\sum_{y'\in\pi_{M+1}^{-1}(\widetilde{y})}W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\mathrm{d}s\right).$$

最后，由于 $\pi_M\circ\pi_{M+1}=\pi_M$ ([29, 命题 3.3])，我们得出，对于每个 $y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$

$$\pi_M^{-1}(y)=\bigcup_{\widetilde{y}\in\pi_M^{-1}(y)\cap\mathcal{V}_0^{\langle M+1\rangle}}\pi_{M+1}^{-1}(\widetilde{y})$$

且该和是互不相交的。通过重新排列上式中的求和顺序，我们可以得到它等于

$$\prod_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp\left(-\xi_y(\omega)\int_0^t \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\mathrm{d}s\right)$$
$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp\left(-\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \xi_y(\omega)\int_0^t \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} W\left(\pi_{M+1}(X_s),y'\right)\mathrm{d}s\right).$$

应用**(W2)**，我们得出，对于充分大的 M，最后一个期望小于或等于

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \exp\left(-\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \xi_y(\omega)\int_0^t \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} W\left(\pi_M(X_s),y'\right)\mathrm{d}s\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(\pi_M(X_s))\mathrm{d}s},$$

这就完成了证明。 □

下面我们给出一个命题，讨论 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{N,V_M^\omega}_M(t)$ 期望值的单调收敛性。其证明及一些相关引理见附录。这与文献 [30] 中关于谢尔宾斯基地毯上泊松势的证明类似。

命题 3.1. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是具有 *GLP* 的 *USNF*，且满足假设 **(B)**、**(Q1)** 和**(W1)-(W2)** 。那么，对每个 $t>0$, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{N,V_M^\omega}_M(t)$，当 $M\to\infty$ 时，它递减至有限极限 $\Lambda(t)$。

下一个引理断言，当 $M\to\infty$ 时，$\Lambda^{D,V_M^\omega}_M(t)$、$\Lambda^{D,V^\omega}_M(t)$ 和 $\Lambda^{N,V^\omega}_M(t)$ 的期望与 $\Lambda^{N,V_M^\omega}_M(t)$ 的期望具有相同的极限。

引理 3.2. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是具有 *GLP* 的 *USNF*，并且假设 **(B)**、**(Q1)** 和 **(W1)-(W3)** 成立。固定 $t>0$。

(a) 我们有

$$\sum_{M=1}^{\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Lambda_M^{D,V^\omega}(t)-\Lambda_M^{N,V^\omega}(t)\right)^2<\infty;$$

特别地，

$$\lim_{M\to\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Lambda_M^{D,V^\omega}(t)-\Lambda_M^{N,V^\omega}(t)\right)^2=0.$$

(b) 我们有

$$\lim_{M\to\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Lambda_M^{D,V_M^\omega}(t)-\Lambda_M^{N,V_M^\omega}(t)\right)=0 \quad \textit{and} \quad \lim_{M\to\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Lambda_M^{D,V^\omega}(t)-\Lambda_M^{D,V_M^\omega}(t)\right)=0.$$

由命题 3.1 和引理 3.2，我们得到以下推论。

推论 3.1. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是具有 *GLP* 的 *USNF*，且假设 **(B)**、**(Q1)** 和**(W1)-(W3)** 成立。对于每个 $t>0$、$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{D,V^\omega}_M(t)$、$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{D,V_M^\omega}_M(t)$ 以及 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{N,V^\omega}_M(t)$ 也都收敛，其中 $M\to\infty$ 趋于命题 *3.1* 中确定的 $\Lambda(t)$ 。

现在我们已知这些期望收敛，因此最后一个技术步骤是证明随机变量 $\Lambda^{D,V^\omega}_M(t)$ 和 $\Lambda^{N,V^\omega}_M(t)$ 的方差级数收敛。

引理 3.3。 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 为一个满足 *GLP* 的 *USNF*，并且假设 **(B)**、**(Q1)** 和 **(W1)-(W3)** 成立。对于每个 $t>0$，我们有

$$\sum_{M=1}^{\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Lambda_M^{D,V^\omega}(t)-\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda_M^{D,V^\omega}(t)\right]^2<\infty \tag{3.2}$$

and

$$\sum_{M=1}^{\infty}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Lambda_M^{N,V^\omega}(t)-\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda_M^{N,V^\omega}(t)\right]^2<\infty \tag{3.3}$$

命题 3.1 和引理 3.3 得证后，要得到定理 3.1 的结论，我们可以原样沿用 [30,定理 3.2]证明中的论证。

4. **Lifschitz 尾**

在单点势满足额外假设的情况下，可以证明分形上安德森模型存在 Lifschitz 尾。这些假设如下:

(W4) (有限程且一致可积) 存在 $M_0>0$，使得 $W(x,v)=0$ 当 $d_{M_0}(x,v)>1$ （即当 x,v 不属于同一个 M_0-复形时），并且

$$\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\int_{\mathcal{C}_{M_0}(v)}W(x,v)\mu(\mathrm{d}x)<\infty;$$

(W5) (与零分离) 存在 $m_1\in\mathbb{Z}_-:=\{-1,-2,-3,\ldots\}$ 和 $A_0>0$，使得$W(x,v)>A_0$ 当 $d_{m_1}(x,v)\le 1$。

位于 0 处的积分态密度的行为反映了顶点处随机变量共同累积分布函数的行为，即函数

$$F_\xi(t):=\mathbb{Q}(\xi_v\le t). \tag{4.1}$$

请回想，我们始终假设随机变量 ξ_v 非负、非退化且可积，参见定义 2.5 和假设 **(Q1)**。现在我们要求更高一些的正则性。具体来说，函数 F_ξ 需要满足以下假设:

(Q2) $F_\xi(\lambda)>0$ 当 $\lambda>0$，并且存在 $\lambda_0>0$，使得 F_ξ 在 $[0,\lambda_0]$ 上连续（在 0 处可能存在左侧不连续，对应于位于 0 的原子）。

我们定义

$$D_0:=\frac{\widetilde{C}_1}{4A_0C_0r_0}, \tag{4.2}$$

其中

$$\widetilde{C}_1=C_1(\mu_2^1)^{\alpha/d_w} \tag{4.3}$$

（C_1 是式 (2.16) 中的常数，μ_2^1 在第 2.2.4 节中定义），C_0 来自式 (2.6)，A_0 来自**(W5)**，而 r_0 是式 (2.5) 中的最大秩。

接下来 [33, 第 3] 节，我们引入以下函数:

$$g(x):=\log\frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{x})},\qquad j(x):=x^{d+\alpha}g(x^\alpha),\quad x>0, \tag{4.4}$$

其中常数 $D_0 > 0$ 由式 (4.2) 确定。函数:

$$x_t := j^{-1}(t), \qquad h(t) := g(x_t^\alpha), \quad \text{for } t \geq t_0 := j\left(\left(\frac{D_0}{\lambda_0}\right)^{1/\alpha}\right), \tag{4.5}$$

有良好定义，并且满足以下关系

$$t = x_t^{d+\alpha} h(t) = x_t^{d+\alpha} \log \frac{1}{F_\xi\left(\frac{D_0}{x_t^\alpha}\right)}. \tag{4.6}$$

此外，我们有 $x_t \to \infty$ 当 $t \to \infty$. 我们的目标是给出以下定理，其思想与 $\mathbb{R}^d$–对应结果 [33, 非常相似：定理 1.1]。

定理 4.1。 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是一个具有 *GLP* 的 *USNF*，并且满足假设 **(B)**、**(Q1)-(Q2)** 以及 $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ **(W1)-(W5)** 。则存在正常数 K, K, R, R 使得

$$-K \leq \liminf_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \mathcal{N}(\lambda)}{g(R/\lambda)} \quad \textit{and} \quad \limsup_{\lambda \searrow 0} \frac{\lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \mathcal{N}(\lambda)}{g(\widetilde{R}/\lambda)} \leq -\widetilde{K}, \tag{4.7}$$

其中 $g(\lambda)$ 由上文的 *(4.4)* 定义。

注意，当 $\lim_{\kappa\to 0} F_\xi(\kappa) > 0$ （存在位于零处的原子）时，该结论变为

$$-K' \leq \liminf_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \mathcal{N}(\lambda) \leq \limsup_{\lambda \searrow 0} \lambda^{\frac{d}{\alpha}} \log \mathcal{N}(\lambda) \leq -\widetilde{K}'$$

$\widetilde{}$具有某些正的 K'， K'，这与我们针对泊松势得到的结论一致，参见 [30, 6]。关于修正速率 g 对 F_ξ 在零附近性质的依赖，我们在 [33, 第 6] 节中作进一步讨论。

与此类问题中的通常做法相同，我们不会直接处理该定理。相反，我们将研究积分态密度的拉普拉斯变换 Λ， 在无穷远处的行为，然后利用塔伯型论证推导出积分态密度的界。

4.1. 积分态密度的拉普拉斯变换上界

We 先从上界入手，它有助于正确识别速率函数。

定理 4.2. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 为具有 *GLP* 的 *USNF*，且假设 **(B)**、**(Q1)-(Q2)**、**(W1)-(W3)**以及**(W5)** 成立。设 h 由 *(4.5)* 给出。则存在 $K_1 > 0$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \Lambda(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}} \cdot h(t)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}} \leq -K_1. \tag{4.8}$$

特别地，当 $F_\xi(0) > 0$ 时，

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log \Lambda(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}}} \leq -K_1 \cdot \left(\log \frac{1}{F_\xi(0)}\right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}. \tag{4.9}$$

作为证明该定理的起点，我们先汇集一些辅助估计和引理。由命题 3.1 可知，对于充分大的 $M \in \mathbb{Z}_+$ 和所有 $t > 0$ ，有

$$\Lambda(t) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Lambda_M^{N, V_M^\omega}(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p_M(t, x, x) \mathbf{E}_{M,t}^{x,x} \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega(X_s^M)\mathrm{d}s}\right] \mu(\mathrm{d}x)\right],$$

右侧积分是反射从属过程的算子在$\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 上、时刻 t 的迹，该过程在势 $V_M^\omega(x)$ 的作用下演化，也就是说，对于每个 $t>0$，当 $M\in\mathbb{Z}_+$ 充分大时

$$\Lambda(t)\le\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\mathrm{Tr}\,T_t^{N,M,V_M^\omega}.$$

还可以进一步估计为（参见 [31,第 3921] 页）

$$\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}}\right]\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}p_M(1,x,x),\quad t>1, \tag{4.10}$$

其中 $\lambda^{N,M,V_M^\omega}_1$ 是薛定谔算子 $H^{N,M}{}^{V_M^\omega}=\phi(-\mathcal{L}_M)+V_M^\omega$的基态特征值，见第 2.4 节。由于

$$A^*:=\sup_{M\ge0}\frac{1}{\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})}\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}p_M(1,x,x)<\infty, \tag{4.11}$$

参见引理 2.1 (b)，我们只需对 (4.10) 指数中的特征值作下界估计。

固定 $M\in\mathbb{Z}_+$（注意，自动有 $M>m_1$，其中 m_1 是~(**W5**)中出现的负整数）。我们用截断后的随机变量 ξ_v，替换随机变量 ξ_v，其中

$$\sim\xi_v:=\xi_v\wedge\frac{D_0}{L^{M\alpha}}\quad v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}. \tag{4.12}$$

注意，由(**W5**) 可知

$$V_M^\omega(x)\ge\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\widetilde{\xi}_v(\omega)W(x,v)\ge A_0\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\widetilde{\xi}_v(\omega)\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{m_1}(v)}(x)=:\widetilde{V}_M^\omega(x),\quad x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}. \tag{4.13}$$

~由于 $\lambda^{N,M,V_M^\omega}_1\le\lambda^{N,,M,V_M^\omega,}_1$，只需找到 $\lambda^{N,M,V_M^\omega}_1$,的下界。为此，我们将使用Temple不等式。

命题 4.1 (Temple不等式，[59, 定理 XIII。5])。设$(H,\mathcal{D}(H))$ 是希尔伯特空间上一个内积为 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 的自伴算子，满足 $\lambda_1:=$下确界 $\sigma(H)$ 是一个孤立特征值，并令 $\mu\le\inf(\sigma(H)\setminus\{\lambda_1\})$。那么，对于任意满足以下条件的 $\psi\in\mathcal{D}(H)$

$$\langle\psi,H\psi\rangle<\mu\quad and\quad\|\psi\|=1 \tag{4.14}$$

下列估计

$$\lambda_1\ge\langle\psi,H\psi\rangle-\frac{\langle H\psi,H\psi\rangle-\langle\psi,H\psi\rangle^2}{\mu-\langle\psi,H\psi\rangle}. \tag{4.15}$$

成立。

我们推导出以下引理。

引理 4.1。设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 为具有 *GLP* 的 *USNF*，且假设 (**B**)、(**Q1**)-(**Q2**)、(**W1**)和(**W5**) 成立。那么存在 $M_2\in\mathbb{Z}_+$，使得对任意 $M\ge M_2$，都有

$$\lambda_1^{N,M,V_M^\omega}\ge\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega}\ge\frac{1}{L^{Md}}\left[\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\widetilde{V}_M^\omega(x)\mu(\mathrm{d}x)-\frac{2\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(\widetilde{V}_M^\omega(x))^2\mu(\mathrm{d}x)}{\widetilde{C}_1L^{-M\alpha}}\right], \tag{4.16}$$

~其中常数 C_1 在（*4.3*）中引入。

~证明。令 $M \in \mathbb{Z}_+$. 由于 $V_M^\omega \geq \widetilde{V}_M^\omega$，于是有 $\lambda^{N,\ M\,V_M^\omega} \geq \lambda^{N,\ M\,V_M^\omega}$，将对算子 H: $= H^{N,\ M\,V_M^\omega} = \phi(-\mathcal{L}_M) + \widetilde{V}_M^\omega$ 作用于 $L^2(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})$，以及 $\mu^{\,1} = \lambda_2^M$~（非随机）[1]应用 Temple不等式~。$H := H^{N,\ M\,V_M^\omega}$的谱是离散的，并且我们有

$$\mu = \lambda_2^M \leq \lambda_2^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} = \inf\left(\sigma\big(H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\big)\setminus\left\{\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega}\right\}\right).$$

为了使用 Temple 不等式，我们选择 $\psi = \psi_1^M \equiv \frac{1}{L^{Md/2}}$ 为算子 $-\mathcal{L}_M$ 对应于特征值 $\mu_1^M = 0$. 的归一化主特征函数。因此， $\phi(-\mathcal{L}_M)\psi = \lambda_1^M\psi = 0$，这意味着

$$\left\langle \psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\right\rangle = \langle\psi,\phi(-\mathcal{L}_M)\psi\rangle + \left\langle\psi,\widetilde{V}_M^\omega\psi\right\rangle = \left\langle\psi,\widetilde{V}_M^\omega\psi\right\rangle = \frac{1}{L^{Md}}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\widetilde{V}_M^\omega(x)\mu(\mathrm{d}x).$$

~根据 (4.13)、(2.5)、(2.6) 和 (4.12) 中 V_M^ω 的定义，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\widetilde{V}_M^\omega(x)\mu(\mathrm{d}x) &= A_0\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\widetilde{\xi}_v(\omega)\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\cap\mathcal{C}_{m_1}(v))\\ &\leq A_0 r_0 L^{m_1 d}\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\widetilde{\xi}_v(\omega) \leq A_0 r_0 C_0 L^{Md}\frac{D_0}{L^{M\alpha}}.\end{aligned}$$

因此，根据 D_0, (4.2) 的定义，

$$\left\langle\psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\right\rangle \leq \frac{A_0 C_0 D_0 r_0}{L^{M\alpha}} = \frac{\widetilde{C}_1}{4L^{M\alpha}}.$$

另一方面，由 (2.27) 和 (2.16) 可知，存在 $M_2 \in \mathbb{Z}_+$，使得对于 $M \geq M_2$

$$\frac{\widetilde{C}_1}{L^{M\alpha}} < \phi(\mu_2^1\cdot L^{-Md_w}) = \lambda_2^M = \mu,$$

这意味着条件 (4.14) 得到满足。

此外，

$$\begin{aligned}\mu - \left\langle\psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\right\rangle &= \lambda_2^M - \left\langle\psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\right\rangle\\ &\geq \frac{\widetilde{C}_1}{L^{M\alpha}} - \frac{\widetilde{C}_1}{4L^{M\alpha}} > \frac{\widetilde{C}_1}{2L^{M\alpha}}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

将 (4.17) 代入 Temple不等式 (4.15) 中的公式，得到:

$$\begin{aligned}\lambda_1^{N,M,\widetilde{V}_M^\omega} &\geq \langle\psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\rangle - \frac{2\langle H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\rangle - 2\langle\psi, H_M^{N,\widetilde{V}_M^\omega}\psi\rangle^2}{\widetilde{C}_1 L^{-M\alpha}}\\ &\geq \frac{1}{L^{Md}}\left[\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\widetilde{V}_M^\omega(x)\mu(\mathrm{d}x) - \frac{2\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(\widetilde{V}_M^\omega(x))^2\mu(\mathrm{d}x)}{\widetilde{C}_1 L^{-M\alpha}}\right].\end{aligned}$$

□

该估计适用于满足以下条件的构型：具有$\xi_v(\omega) > \frac{D_0}{L^{M\alpha}}$ 的格点数量足够多，即属于集合

$$\mathcal{A}_{M,\delta} = \left\{\omega : \#\left\{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle} : \xi_v(\omega) > \frac{D_0}{L^{M\alpha}}\right\} \geq \delta\cdot k_0^{\langle M\rangle}\right\},$$

其中 $\delta \in (0,\ 1)$ 是固定的。回顾一下， $k_0^{\langle M\rangle}$ 是 $\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$ 的基数； $k_0^{\langle M\rangle}$ 的估计见式 (2.6)。

我们准备证明另一个引理。

引理 4.2. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是具有 *GLP* 的 *USNF*，并且假设 **(B)**、**(Q1)**-**(Q2)**、**(W1)** 和 **(W5)** 成立。固定 $\delta > 0$ （稍后将选取一个与 M无关的值）。那么对于任意$M \geq M_2$ （M_2 来自引理 ***4.1***）以及 $\omega \in \mathcal{A}_{M,\delta}$，我们有

$$\lambda_1^{N,M}(\omega) \geq \frac{B_0\delta}{L^{M\alpha}}.$$

其中 $B_0 := (\widetilde{C}_1 L^{m_1 d})/(8C_0 r_0)$。

证明。设 $M \geq M_2$。回忆

$$\widetilde{V}_M^{\omega}(x) = A_0 \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega)\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{m_1}(v)}(x), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}. \tag{4.18}$$

由于 $m_1 < 0$ 集合 $\mathcal{C}_{m_1}(v)$ 两两不相交，因此

$$(\widetilde{V}_M^{\omega}(x))^2 = A_0^2 \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega)^2\mathbf{1}_{\mathcal{C}_{m_1}(v)}(x), \quad x \in \mathcal{K}^{\langle M\rangle},$$

并且进一步

$$\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} (\widetilde{V}_M^{\omega}(x))^2\mu(\mathrm{d}x) = A_0^2 \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega)^2\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\cap\mathcal{C}_{m_1}(v)) \leq A_0^2 r_0 L^{m_1 d} \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega)^2. \tag{4.19}$$

同理，

$$\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \widetilde{V}_M^{\omega}(x)\mu(\mathrm{d}x) = A_0 \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega)\mu(\mathcal{C}_{m_1}(v)) \geq A_0 L^{m_1 d} \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega). \tag{4.20}$$

另请注意，

$$\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v^2(\omega) \leq \frac{D_0}{L^{M\alpha}} \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega), \tag{4.21}$$

因此，由 (2.6) 以及集合 $\mathcal{A}_{M,\delta}$ 关于 $\omega \in \mathcal{A}_{M,\delta}$ 的定义可得

$$\sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \xi_v(\omega) \geq \frac{D_0}{L^{M\alpha}} \cdot \delta \cdot k_0^{\langle M\rangle} \geq \frac{D_0}{L^{M\alpha}} \cdot \delta \cdot L^{Md}. \tag{4.22}$$

将估计式 (4.19) 和 (4.20) 代入 (4.16)，再利用 D_0, 的定义、估计式 (4.21) 和 (4.22)，并重新整理可得：

$$\begin{aligned}
\lambda_1^{M,V_M^{\omega}} &\geq \frac{1}{L^{Md}} \left[A_0 L^{m_1 d} \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega) - \frac{2A_0^2 r_0 L^{m_1 d} \cdot \sum_{v\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega)^2}{\widetilde{C}_1 L^{-M\alpha}} \right] \\
&\geq \frac{1}{L^{Md}} \sum_{v\in V_0^{\langle M\rangle}} \widetilde{\xi}_v(\omega) \left[A_0 L^{m_1 d} - \frac{2A_0^2 D_0 r_0 L^{m_1 d}}{\widetilde{C}_1} \right] \\
&\geq \frac{\delta D_0}{L^{M\alpha}} \cdot A_0 L^{m_1 d} \cdot \left(1 - \frac{1}{2C_0}\right) \\
&\geq \frac{\widetilde{C}_1 L^{m_1 d}\delta}{8C_0 r_0 L^{M\alpha}}.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

在继续证明定理 4.2 之前，我们先回顾一个关于二项分布的伯恩斯坦型估计（例如参见 [33, 引理 3.5]），该估计将在证明过程中用到。

命题 4.2。 设给定概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$，并设 $S_n : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个服从二项分布的随机变量 $B(n,p)$ $n \geq 1, p \in (0,1)$. 那么，对于任意满足 $\gamma > p$ 的 $p, \gamma \in (0,1)$，

$$\mathbb{P}\left(S_n \geq \gamma n\right) \leq \left(\left(\frac{1-p}{1-\gamma}\right)^{1-\gamma}\left(\frac{p}{\gamma}\right)^{\gamma}\right)^{n}. \tag{4.23}$$

定理 4.2 的证明结束部分。 由 (4.11)，我们可以将 (4.10) 中的估计继续写为

$$\Lambda(t) \leq A^{*}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)}; \mathcal{A}_{M,\delta}\right] + A^{*}\mathbb{Q}\left[\mathcal{A}_{M,\delta}^{c}\right], \quad t > 1. \tag{4.24}$$

为了估计关于 $\mathcal{A}_{M,\delta}$ 的积分，我们使用引理 4.2，得到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-(t-1)\lambda_1^{N,M}(\omega)}; \mathcal{A}_{M,\delta}\right] \leq \mathrm{e}^{-(t-1)B_0\delta L^{-M\alpha}}, \quad M \geq M_2$$

第二部分可以用命题 4.2 估计。事实上，注意到

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{M,\delta}^{c} &= \left\{\omega : \#\left\{v \in \mathcal{V}_0^{\langle M\rangle} : \xi_v(\omega) > \frac{D_0}{L^{M\alpha}}\right\} < \delta \cdot k_0^{\langle M\rangle}\right\} \\ &= \left\{\omega : \#\left\{v \in \mathcal{V}_0^{\langle M\rangle} : \xi_v(\omega) \leq \frac{D_0}{L^{M\alpha}}\right\} \geq (1-\delta) \cdot k_0^{\langle M\rangle}\right\}\end{aligned}$$

（回想一下， $k_0^{\langle M\rangle}$ 是 $\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$ 的基数）。我们希望在 $n = k_0^{\langle M\rangle}$，$p = p_M = F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})$ 和 $\gamma = 1-\delta$. 的情形下使用命题 4.2。我们需要确保 $\gamma > p_M \Leftrightarrow \delta < 1 - p_M$.。但由于 $\lim_{M\to\infty} p_M = F_\xi(0) \in [0,1)$, 这不是问题。此外，由于 $\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{1-\delta}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{\delta}{1-\delta}} = 1$ 和 $M \mapsto p_M$ 是非增的，我们可以找到 $M_3 \geq M_2$ 和一个普适常数 $\delta_0 > 0$，使得对于 $M \geq M_3$，我们同时有 $1 - p_M > \delta_0$ 和

$$\left(\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^{\frac{\delta_0}{1-\delta_0}}\frac{1}{1-\delta_0}\right)^{1-\delta_0} p_M^{(1-\delta_0)/2} \leq 1.$$

因此，由 (4.23) 和估计式 (2.6) 可得，对于 $M \geq M_3$:

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left[\mathcal{A}_{M,\delta_0}^{c}\right] &\leq \left(\left(\frac{1-p_M}{\delta_0}\right)^{\delta_0}\left(\frac{p_M}{1-\delta_0}\right)^{1-\delta_0}\right)^{k_0^{\langle M\rangle}} \\ &\leq \left(\left(\frac{1}{\delta_0}\right)^{\frac{\delta_0}{1-\delta_0}}\frac{\sqrt{p_M}}{1-\delta_0}\right)^{(1-\delta_0)k_0^{\langle M\rangle}} p_M^{(1-\delta_0)k_0^{\langle M\rangle}/2} \\ &\leq {p_M}^{(1-\delta_0)k_0^{\langle M\rangle}/2} \\ &\leq \exp\left(-\frac{1-\delta_0}{2}\cdot L^{Md}\log\frac{1}{p_M}\right).\end{aligned}$$

现在令

$$c_1 = B_0\delta_0, \qquad c_2 = (1-\delta_0)/2.$$

因此，我们得到存在 $t_1 \geq t_0 \vee 1$ （回忆一下， t_0 已在 (4.5) 中定义），使得对于每个 $t \geq t_1$ 和 $M \geq M_3$，都有：取适当的常数 $c_3 > 0$,

$$\begin{aligned}\Lambda(t) &\leq A^* \left(\exp\left(-\frac{c_1(t-1)}{L^{M\alpha}} \right) + \exp\left(-c_2 \cdot L^{Md} \log \frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})} \right) \right) \\ &\leq A^* \left(\exp\left(-\frac{c_3 t}{(L^{M-1})^\alpha} \right) + \exp\left(-c_2 \cdot L^{Md} \log \frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})} \right) \right).\end{aligned}$$

我们令 M 依赖于 t，使得当 $t \to \infty$. 时 $M \to \infty$ 。令 x_t 由 (4.5) 定义。由于当 $t \to \infty$时 $x_t \to \infty$，存在唯一的 $M = M(t)$，使得

$$L^{M-1} \leq x_t < L^M, \qquad t \geq t_1. \tag{4.25}$$

事实上，我们定义 $M(t) := \lfloor \log_L x_t \rfloor + 1, t \geq t_1$。于是存在 $t_2 \geq t_1$，使得对于 $t \geq t_2$，我们有 $M \geq M_3$. 。根据 (4.6),

$$(L^{M-1})^\alpha \leq x_t^\alpha = \left(\frac{t}{\log \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^\alpha)}} \right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}$$

and

$$\frac{t}{(L^{M-1})^\alpha} \geq t^{\frac{d}{d+\alpha}} \left(\log \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}, \qquad t \geq t_2.$$

由于函数 $x \mapsto x^d \log F_\xi^{-1}(D_0/x^\alpha)$ 是递增的，~~且 $x_t < L^M$~~，我们还得到

$$L^{Md} \log \frac{1}{F_\xi(D_0/L^{M\alpha})} \geq x_t^d \log \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^\alpha)} = t^{\frac{d}{d+\alpha}} \left(\log \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}},$$

这意味着，在 $c_4 = c_2 \wedge c_3$,: 的条件下,

$$\Lambda(t) \leq 2A^* \exp\left(-c_4 t^{\frac{d}{d+\alpha}} \left(\log \frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^\alpha)} \right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}} \right) = 2A^* \exp\left(-c_4 t^{\frac{d}{d+\alpha}} \left(h(t) \right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}} \right), \quad t \geq t_2.$$

最后，我们取对数、整理并令 $t \to \infty$. 趋于极限，得到公式 (4.8)。当存在位于 0 的原子时，$\lim_{t\to\infty} h(t) = \log F_\xi^{-1}(0)$，因此 (4.9) 也成立。 ——

□

4.2. 积分态密度的拉普拉斯变换下界

现在我们已经知道积分态密度渐近行为中的速率函数，可以用一个相匹配的下界补充定理 4.2。

本节的主要工具是过程 X 在离开给定复形后被杀死 $\Delta \subset \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 的费曼–卡茨半群 $\left\{T_t^{D,\Delta,V} : t \geq 0\right\}$，它针对一个（非随机）势 $V \in \mathbb{K}_{loc}^X(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})$ 定义如下:

$$T_t^{D,\Delta,V} f(x) = \mathbf{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(X_s)\mathrm{d}s} f(X_t); t < \tau_\Delta \right], \quad f \in L^2(\Delta, \mu),\ t > 0; \tag{4.26}$$

这里 τ_Δ 是该过程从复形 Δ 中的首次离开时间，即 $\tau_\Delta := \inf\{t > 0 : X_t \notin \Delta\}$.显然，这个半群具有与第 2.4 节中定义的 $\left\{T_t^{D,M,V^\omega} : t \geq 0\right\}$ 类似的性质。区别在于，这里我们考虑任意复形 Δ，而非 $\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$，且势$V$是确定性的。记作： $H^{D,\Delta}{}^V := -A^{D,\Delta,V}$，其中 $A^{D,\Delta,V}$是半群 $\left\{T_t^{D,\Delta,V} : t \geq 0\right\}$的 L^2-生成元；令 $\lambda_1^V(\Delta) := \inf \operatorname{spec}(H^{D,\Delta}{}^V)$ 为相应的基态特征值。若 $V \equiv 0$, 则简记为 $\lambda_1(\Delta)$。此外，若 (4.26) 中的 $X = Z$，也就是说，底层过程

是布朗运动，因此我们用不同的符号 $\mu_1(\Delta)$ 表示相应的基态特征值。

在继续之前，我们注意到，在我们的特定情形下，界（2.18）给出：对于每个 $t_0 > 0$，存在 $c = c(t_0)$，使得

$$p(t,x,x) \le ct^{\frac{-d}{\alpha}}, \qquad t \ge t_0,\ x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}. \tag{4.27}$$

我们还需要一个适用于当前情形的 [33, 引理 4.1]，版本。只需将空间 $\mathbb{R}^d$ 替换为 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，并逐字重复证明即可。其表述如下。

引理 4.3。 设 $0 \le V \in \mathbb{K}^X_{loc} \cap L^1(\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}, \mu)$ 。那么对于任意复数 $\Delta \subset \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，有

$$\lambda_1^V(\Delta) \le \lambda_1(\Delta) + \mathrm{e} \cdot \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} p(s,x,x)||V||_1, \ \textit{with}\ s := \frac{1}{\lambda_1(\Delta)}.$$

本节中我们使用积分态密度的另一种表示——它是带狄利克雷边界条件的有限体积表达式的极限（参见推论 3.1）。更确切地说，积分态密度的拉普拉斯变换 $\Lambda(t)$可由公式恢复

$$\Lambda(t) = \lim_{M\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Lambda_M^{D,V^\omega}(t), \tag{4.28}$$

其中

$$\Lambda_M^{D,V^\omega}(t) = \frac{1}{L^{Md}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x) \mathbf{E}_t^{x,x} \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s}; t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \right] \mu(\mathrm{d}x).$$

定理 4.3。 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 为具有 *GLP* 的 *USNF*，且满足假设 **(B)**、**(Q1)-(Q2)** 和**(W1)-(W4)** 。设 h 由 *(4.5)* 给出。则存在 $K_1' > 0$ 使得

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log \Lambda(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}} (h(t))^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}} \ge -K_1', \tag{4.29}$$

同样，当 $F_\xi(0) > 0$ 时，

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\log \Lambda(t)}{t^{\frac{d}{d+\alpha}}} \ge -K_1' \left(\log \frac{1}{F_\xi(0)} \right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}. \tag{4.30}$$

证明。 固定 $M \in \mathbb{Z}_+$， $M \ge M_0$，其中整数 M_0 来自 **(W4)**。由 **(4.28)** 还可得

$$\Lambda(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Lambda_{M+n}^{D,V^\omega}(t).$$

固定 $n \ge 1$，集合 $\mathcal{K}^{\langle M+n\rangle}$由仅通过顶点相交的 $L^{nd} = N^n$ M-复形组成。将它们记为 $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(N^n)}$。由于 $\Delta^{(i)} \subset \mathcal{K}^{\langle M+n\rangle}$，我们得到：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Lambda_{M+n}^{D,V^\omega}(t) &= \frac{1}{L^{(M+n)d}} \int_{\mathcal{K}^{\langle M+n\rangle}} p(t,x,x) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{\langle M+n\rangle}} > t\}} \right] \mu(\mathrm{d}x) \\
&= \frac{1}{L^{(M+n)d}} \sum_{i=1}^{N^n} \int_{\Delta^{(i)}} p(t,x,x) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\mathcal{K}^{\langle M+n\rangle}} > t\}} \right] \mu(\mathrm{d}x) \\
&\ge \frac{1}{L^{(M+n)d}} \sum_{i=1}^{N^n} \int_{\Delta^{(i)}} p(t,x,x) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta^{(i)}} > t\}} \right] \mu(\mathrm{d}x) \\
&\ge \inf_i \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [\Lambda_{\Delta^{(i)}}^{D,V^\omega}(t)],
\end{aligned}$$

其中，我们用 $\Lambda^{D,V^\omega}_{,\Delta^{(i)}}(t)$ 表示该表达式

$$\frac{1}{\mu(\Delta^{(i)})} \int_{\Delta^{(i)}} p(t,x,x) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_t^{x,x} \left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s} \mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta^{(i)}} > t\}} \right] \mu(\mathrm{d}x).$$

令 $\kappa>0$ 固定，具体取值将在后文确定。取某个 $i_0\in\{1,...,N^n\}$，并令

$$\mathcal{M}_{i_0}=\{\omega:\forall_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}\,\xi_v(\omega)\le\kappa\},$$

其中，$\mathcal{O}_{i_0}^{M_0}$表示度量 d_{M_0} 中 $\Delta^{(i_0)}$ 的 $1-$邻域（即属于至少有一个顶点位于 $\Delta^{(i_0)}$中的复形的那些点 x M_0-），对于集合 $A\subset\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$, 记作 $\mathcal{V}_0(A)=\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\cap A$.特别地,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Lambda^{D,V^\omega}_{\Delta^{(i_0)}}(t)]\ge\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Lambda^{D,V^\omega}_{\Delta^{(i_0)}}(t)\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}}]. \tag{4.31}$$

固定一条起始于 $x\in\Delta^{(i_0)}$ 且直到时间 t都不离开集合 $\Delta^{(i_0)}$ 的轨迹 X_t。由于假设**(W4)**，对于 $\omega\in\mathcal{M}_{i_0}$，我们有

$$V^\omega(X_s)=\sum_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}\xi_v(\omega)W(X_s,v)\le\kappa\sum_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}W(X_s,v),\qquad s\le t.$$

记为:

$$V_\kappa(x)=\kappa\sum_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}W(x,v),\quad x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}.$$

由此可知，对于这样的轨迹,

$$\mathrm{e}^{-\int_0^t V^\omega(X_s)\mathrm{d}s}\ge\mathrm{e}^{-\int_0^t V_\kappa(X_s)\mathrm{d}s}$$

因此，在集合 $\{\tau_{\Delta^{(i_0)}}>t\}$ 上有:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V(X_s,\omega)\mathrm{d}s}\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}}\right]\ \ge\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V_\kappa(X_s)\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{1}_{\mathcal{M}_{i_0}}\right]=\mathrm{e}^{-\int_0^t V_\kappa(X_s)\mathrm{d}s}\mathbb{Q}(\mathcal{M}_{i_0}). \tag{4.32}$$

因此，由 (4.32) 和 (4.31) 可得:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda^{D,V^\omega}_{\Delta^{(i_0)}}(t)]\ge\frac{\mathbb{Q}(\mathcal{M}_{i_0})}{\mu(\Delta^{(i_0)})}\int_{\Delta^{(i_0)}}p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V_\kappa(X_s)\mathrm{d}s}\mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta^{(i_0)}}>t\}}\right]\mu(\mathrm{d}x). \tag{4.33}$$

由于 $\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})$ 中的点数不超过 $\widetilde{C}_0L^{Md}$（其中 $\widetilde{C}_0>0$，参见 (2.6)），我们有

$$\mathbb{Q}[\mathcal{M}_{i_0}]=\mathbb{Q}[\forall_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}\,\xi_v\le\kappa]\ge F_\xi(\kappa)^{\widetilde{C}_0L^{Md}}=\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0L^{Md}\log\frac{1}{F_\xi(\kappa)}}$$

从而得到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Lambda^{D,V^\omega}_{\Delta^{(i_0)}}(t)]\ge\frac{1}{\mu(\Delta^{(i_0)})}\int_{\Delta^{(i_0)}}p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V_\kappa(X_s)\mathrm{d}s}\mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta^{(i_0)}}>t\}}\right]\mu(\mathrm{d}x)\cdot\mathrm{e}^{-\widetilde{C}_0L^{Md}\log\frac{1}{F_\xi(\kappa)}}. \tag{4.34}$$

记

$$I_{i_0}:=\int_{\Delta^{(i_0)}}p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[\mathrm{e}^{-\int_0^t V_\kappa(X_s)\mathrm{d}s}\mathbf{1}_{\{\tau_{\Delta^{(i_0)}}>t\}}\right]\mu(\mathrm{d}x).$$

该积分是算子 $T^{D,\ \Delta^{(i_0)},\ t}$ $^{V_\kappa}$ 的迹，见 (4.26)。因此，它不小于该算子的主特征值 $\mathrm{e}^{-\lambda_1^{V_\kappa}(\Delta^{(i_0)})\ t}$。利用引理 (4.3)，可得对于$s=\frac{1}{\lambda_1(\Delta^{(i_0)})}$，有

$$I_{i_0}\ge\mathrm{e}^{-t\lambda_1^{V_\kappa}(\Delta^{(i_0)})}\ge\mathrm{e}^{-t(\lambda_1(\Delta^{(i_0)})+e\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}p(s,x,x)||V_\kappa||_1)}.$$

现在利用 **(W4)**，我们得到

$$||V_\kappa||_1=\kappa\int_{\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\sum_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}W(x,v)\mu(\mathrm{d}x)=\kappa\sum_{v\in\mathcal{V}_0(\mathcal{O}_{i_0}^{M_0})}\int_{\mathcal{C}_{M_0}(v)}W(x,v)\mu(\mathrm{d}x)\le c_1L^{Md}\cdot\kappa.$$

此外，由 (4.27)，结合 $s = 1/\lambda_1(\Delta^{(i_0)})$，可得

$$p(s,x,x) \le c_2 \lambda_1(\Delta^{(i_0)})^{\frac{d}{\alpha}},$$

其中某个 $c_2 > 0$ 不依赖于 $M.$。此外，根据 [12, 定理 3.4],

$$\lambda_1(\Delta^{(i_0)}) \le \phi(\mu_1(\Delta^{(i_0)})),$$

其中 $\mu_1(\Delta^{(i_0)})$ 是对应于在$\Delta^{(i_0)}$中杀死布朗运动的基态特征值。由于杀死布朗运动具有平移不变性，结合尺度变换和 (2.16)，存在$M_1 \ge M_0$ 使得对于 $M \ge M_1$

$$\phi(\mu_1(\Delta^{(i_0)})) = \phi(\mu_1(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})) = \phi(L^{-Md_w}\mu_1(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle})) \le C_2 L^{-M\alpha}\phi(\mu_1(\mathcal{K}^{\langle 0\rangle})) = c_3 L^{-M\alpha}.$$

其中有一个常数 $c_3 > 0$ 不依赖于 $M.$。因此，

$$I_{i_0} \ge \exp\left(-t(c_3 L^{-M\alpha} + c_4\kappa)\right).$$

取 $\kappa = \frac{D_0}{L^{M\alpha}}$ （其中 D_0 来自 (4.2)），并代回 (4.34)，可知其成立

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Lambda^{D,V^\omega}_{\Delta^{(i_0)}}(t)\right] &\ge \frac{1}{L^{Md}}\exp\left(-c_5\frac{t}{L^{M\alpha}} - \widetilde{C}_0 L^{Md}\log\frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})}\right)\\
&\ge \frac{1}{L^{Md}}\exp\left(-c_6\left(\frac{t}{L^{(M+1)\alpha}} + L^{Md}\left(\frac{L^M}{L^{M+1}}\right)^\alpha \log\frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})}\right)\right)\\
&\ge \frac{1}{L^{Md}}\exp\left(-\frac{c_6}{L^{(M+1)\alpha}}\left(t + L^{M(d+\alpha)}\log\frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})}\right)\right).
\end{aligned}$$

类似于上界的证明，利用 (4.5)，并取满足下式的唯一 $M = M(t)$

$$L^M \le x_t < L^{M+1}, \qquad t \ge t_0. \tag{4.35}$$

由于当 $t \to \infty$ 时，存在 $t_1 \ge t_0$，使得对于 $t \ge t_1$，有 $M \ge M_1.$。由 (4.5) 和 (4.6)，

$$L^{M(d+\alpha)}\log\frac{1}{F_\xi(\frac{D_0}{L^{M\alpha}})} \le t.$$

由此可得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Lambda^{D,V^\omega}_{\Delta^{(i_0)}}(t)\right] \ge \frac{1}{L^{Md}}\exp\left(-\frac{2c_6 t}{L^{(M+1)\alpha}}\right).$$

常数 c_6 不依赖于 i_0. 这一点至关重要。由 (4.6) 可知:

$$\frac{t}{(L^{M+1})^\alpha} \le \frac{t}{x_t^\alpha} = t^{\frac{d}{d+\alpha}}\left(\log\frac{1}{F_\xi(D_0/x_t^\alpha)}\right)^{\frac{\alpha}{d+\alpha}} = t^{\frac{d}{d+\alpha}}(h(t))^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}$$

从而，对于充分大的 t，我们得到（回想一下，$M = M(t)$ 随着 t 趋于 ∞）

$$\log[\Lambda(t)] \ge -\log L^{Md} - 2c_6 t^{\frac{d}{d+\alpha}}(h(t))^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}.$$

现在，我们将等式两边除以 $t^{\frac{d}{d+\alpha}}(h(t))^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}$，并令 $t \to \infty$. 趋于极限。为了消去不需要的项，我们需要验证

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log L^{Md}}{t^{\frac{d}{d+\alpha}}(h(t))^{\frac{\alpha}{d+\alpha}}} = 0.$$

确实如此：我们有 $L^{Md} \sim x_t^d$，且 $t = x_t^{d+\alpha}h(t)$。因此 $(d+\alpha)\log x_t = \log t - \log h(t)$，这意味着 $\log L^{Md}$ 在相差一个常数的意义下，表现为 $\log t - \log h(t)$。由于当 $t \to \infty$，时，$h(t)$ 有一个正的（可能为无穷大的）极限，所需结论以及定理便随之成立。□

4.3. 积分态密度的界

为了根据定理 4.1 的陈述，将估计式 (4.8) 和 (4.29) 分别转化为关于积分态密度本身的陈述，我们使用 [33, 中证明的混合型陶伯定理。1]我们可以按照 [33] 中的方法，结合 (4.7) 得出结论。□

附录 A. 从属过程的技术引理

我们需要以下技术结果。

引理 A.1. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是满足 *GLP* 的 *USNF*，且假设 **(B)** 成立。对于每个 $t>0$ 和 $a>1$，有

$$\sum_{M=1}^{\infty}\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\mathbf{P}^{x}\left[\sup_{s\le t}|X_s-x|>a^{M}\right]<\infty.$$

证明。 证明思路与 [30, 引理 2.3] 类似。唯一的区别是，现在我们使用欧几里得距离而不是测地距离，并应用[20, 引理 5.6、注 3.7]中的次高斯估计。最后，我们也像之前一样使用求和性质 (2.20)。□

回顾一下，对于 $1\le i\le N$，我们用 $\Delta_{M,\,i}$ 表示 $\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}$ 中的 M-复形，见定义 2.1 (9)。

引理 A.2. 设 $\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$ 是一个具有 *GLP* 的 *USNF*，并且假设 **(B)** 成立。我们有如下结论。

(a) 对于

$$C(M,t):=\sup_{x,y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\sum_{\substack{y'\in\pi_M^{-1}(y)\\ y'\notin\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}}}p(t,x,y'),\quad t>0,\quad M\in\mathbb{Z}\tag{A.1}$$

我们有

$$\sum_{M=1}^{\infty}C(M,t)<\infty,\quad t>0;$$

特别地，对于每个 $t>0$, $C(M,t)\to 0$，满足 $M\to\infty$。

(b) 对每个 $t>0$,

$$\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\left|p(t,x,x)-p_M(t,x,x)\right|\mu(\mathrm{d}x)<\infty;\tag{A.2}$$

特别是

$$\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\left|p(t,x,x)-p_M(t,x,x)\right|\mu(\mathrm{d}x)\to 0,\quad as\ M\to\infty.\tag{A.3}$$

证明。由 Tonelli 定理、 [53,公式 (3.3) 和引理 3.5],可得

$$\begin{aligned}
C(M,t) &= \sup_{x,y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \int_0^\infty \sum_{\substack{y'\in\pi_M^{-1}(y)\\ y'\notin\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}}} g(t,x,y')\eta_t(\mathrm{d}u) \\
&\le c_1 \int_0^\infty L^{-dM}\left(\frac{L^M}{t^{1/d_w}}\vee 1\right)^{d-\frac{d_w}{d_J-1}} \exp\left(-c_2\left(\frac{L^M}{t^{1/d_w}}\vee 1\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}\right)\eta_t(\mathrm{d}u) \\
&\le c_1 \int_0^{L^{d_w M}} L^{-dM}\left(\frac{L^M}{u^{1/d_w}}\right)^{d-\frac{d_w}{d_J-1}} \exp\left(-c_2\left(\frac{L^M}{u^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}\right)\eta_t(\mathrm{d}u) \\
&\qquad + c_3 L^{-dM}\eta_t\left(L^{d_w M},\infty\right).
\end{aligned}$$

证明的后续步骤完全沿用引理 2.5 (b) 的证明思路。 (b) 的证明与引理 2. 的证明类似，即我们从

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} |p(t,x,x)-p_M(t,x,x)|\,\mu(\mathrm{d}x) \\
&\le \frac{N}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sup_{\substack{x'\in\pi_M^{-1}(x)\\ x'\in\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}\setminus\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}} p(t,x,x')\mu(\mathrm{d}x) + \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{\substack{x'\in\pi_M^{-1}(x)\\ x'\notin\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}}} p(t,x,x')\mu(\mathrm{d}x) \\
&=: \mathcal{A}_M(t)+\mathcal{B}_M(t)
\end{aligned}$$

并首先注意到，根据 (a)， $\mathcal{B}_M(t)$ 是一个收敛级数中的项。为了证明 $\mathcal{A}_M(t)$ 也具有同样的性质，我们只需修改所引引理证明中的估计。不同之处在于，必须将 $\mathcal{A}_M(t)$ 中的积分区域划分为两个不同的集合E_M^1 和 E_M^2。在当前的一般情形下，我们无法使用测地球。这里我们将采用图距离。

记 $V_M^{\langle M\rangle}=\{v_1,\ldots,v_k\}$ 和

$$E_M^1=\bigcap_{i=1}^k\left\{y\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}: d_{\lfloor M/2\rfloor}(y,v_i)>1\right\},\quad E_M^2=\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\setminus E_M^1. \tag{A.4}$$

回顾一下，根据引理 2.1 (a)，$\sup_{(x,y)\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} p(t,\ x,\ y)<\infty$。由于 E_M^2由 k $\lfloor M/2\rfloor$-复形组成（每个复形都附着在 $V_M^{\langle M\rangle}$ 中的一个顶点上），因此我们有

$$\frac{\mu\left(E_M^2\right)}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}=\frac{k\cdot N^{\lfloor M/2\rfloor}}{N^M}. \tag{A.5}$$

因此， $\mathcal{A}_M(t)$中包含对 E_M^2 积分的部分是一个收敛级数中的一项。

当 $x\in E_M^1$ 和 $x'\in\pi_M^{-1}(x)\setminus\mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 时， $d_{\lfloor M/2\rfloor}(x,x')>2$，因此由 [29, 引理 A.2] 可得 $|x-x'|>c_4L^{M/2}$。利用密度 $p(t,x,y)$ 的从属公式以及 [42] 中关于密度 $g(u,x,y)$ 的亚高斯估计，我们便得到

$$\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{E_M^1}\sup_{\substack{x'\in\pi_M^{-1}(x)\\ x'\in\mathcal{K}^{\langle M+1\rangle}\setminus\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}} p(t,x,x')\mu(\mathrm{d}x)\le c_5\int_0^\infty u^{-d_s/2}\mathrm{e}^{-c_6\left(\frac{L^{M/2}}{u^{1/d_w}}\right)^{\frac{d_w}{d_J-1}}}\eta_t(\mathrm{d}u).$$

汇总这些估计，我们得到

$$\mathcal{A}_M(t) \le c_7 \left(N^{-M/2} + \int_0^\infty u^{-d_s/2} \mathrm{e}^{-c_6 \left(\frac{L^{M/2}}{u^{1/d_w}} \right)^{\frac{d_w}{d_J - 1}}} \eta_t(\mathrm{d}u) \right),$$

其中常数 c_6, c_7 与 M 无关，由此证明可按引理 2.7] 的相同方式继续。□

附录 B. 第 3 节中各陈述的证明

命题 *3.1* 的证明。固定 $t > 0$。对于 μ-几乎所有的 $x \in \mathcal{K}^{\langle M+1 \rangle}$，由引理 2.2(a)、3.1 以及包含关系 $\pi_{M+1}^{-1}(x) \subset \pi_M^{-1}(\pi_M(x))$，可写为

$$\begin{aligned}
& p_{M+1}(t,x,x) \mathbf{E}_{M+1,t}^{x,x} [\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathrm{e}^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega (X_s^{M+1}) \mathrm{d}s}] \\
&= \sum_{x' \in \pi_{M+1}^{-1}(x)} p(t,x,x') \mathbf{E}_t^{x,x'} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathrm{e}^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega (\pi_{M+1}(X_s)) \mathrm{d}s} \right] \\
&\le \sum_{x' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(x))} p(t,x,x') \mathbf{E}_t^{x,x'} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathrm{e}^{-\int_0^t V_{M+1}^\omega (\pi_{M+1}(X_s)) \mathrm{d}s} \right] \\
&\le \sum_{x' \in \pi_M^{-1}(\pi_M(x))} p(t,x,x') \mathbf{E}_t^{x,x'} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \mathrm{e}^{-\int_0^t V_M^\omega (\pi_M(X_s)) \mathrm{d}s} \right].
\end{aligned}$$

利用这一估计、$\Lambda_{M*}^N(t, \omega)$ 的定义以及引理 2.2(b)，现在可以沿用定理 3.1], 证明的第二部分中的论证，得到

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Lambda_{M+1}^{N,V_{M+1}^\omega}(t)] \le \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Lambda_M^{N,V_M^\omega}(t)], \quad M \in \mathbb{Z}_+.$$

由于 $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \Lambda^{N, V_M^\omega}_{M}(t) \ge 0$，当 $M \to \infty$ 时，它收敛到有限极限 $\Lambda(t)$。证明完毕。 □

下文给出的引理 3.2 和引理 3.3 的证明具有技术性。证明沿用了 [30] 中命题 3.1 和引理 3.1-3.2 证明的步骤和思路。主要区别在于，我们现在研究的是不同类型的随机势，状态空间也变为一般的 USNF（需要强调的是，所引论文研究的 Sierpi´nski 三角形是正则性很高、最简单的平面嵌套分形之一）。这会带来一些额外的几何问题，我们通过使用图距离（测地度量可能根本无法定义）以及 [29, 引理 A.2] 中的比较原理来解决这些问题。因此，我们只会介绍证明中受这些变化影响的主要步骤，并着重说明最关键的差异。

引理 *3.2* 的证明。我们先证明 (a)。沿用 [30, 命题 3.1] 开头的论证可得，对于每个固定的 $t > 0$，都存在一个常数 $c = c(t)$，使得

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(\Lambda_M^{D,V^\omega}(t) - \Lambda_M^{N,V^\omega}(t) \right)^2 \le c \left(R_{1,M}(t) + R_{2,M}(t) \right), \quad M \in \mathbb{Z}_+,$$

其中

$$R_{1,M}(t) = \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[t \geq \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x)$$

$$R_{2,M}(t) = \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \sum_{x'\in\pi_M^{-1}(x), x'\neq x} p(t,x,x')\mu(\mathrm{d}x)$$

$$= \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} (p_M(t,x,x) - p(t,x,x))\mu(\mathrm{d}x).$$

注意，上述界与 ω 无关。根据引理 A.2 (b)，$R_{2,\ M}(t)$ 是收敛级数中的一项，因此我们只需估计 $R_{1,\ M}(t)$。

将来自 $\mathcal{V}_M^{\langle M\rangle}$ 的顶点记为 v_i, $1 \leq i \leq k$，并令 $\Delta_{\lfloor M/2\rfloor,\ v_i} \subset \mathcal{K}^{\langle M\rangle}$ 为附着于 v_i 的 $\lfloor M/2\rfloor$-复形。如果过程从 $x \in \mathcal{D}_M := \mathcal{K}^{\langle M\rangle} \setminus \bigcup_{i=1}^k \Delta_{\lfloor M/2\rfloor,\ v_i}$ 开始，那么利用 [29, 引理 A.2], , 我们有

$$\{t \geq \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\} \subseteq \left\{\sup_{0<s\leq t} d_{\lfloor M/2\rfloor}(x, X_s) > 2\right\} \subseteq \left\{\sup_{0<s\leq t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\},$$

其中常数 c_1 与 M 无关。我们还有

$$\left\{\sup_{0<s\leq t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\} \subseteq \left\{\sup_{0<s\leq t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\} \cup \left\{\sup_{t/2<s\leq t} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right\}.$$

回忆一下，$\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\setminus\mathcal{D}_M\right) = kN^{\lfloor M/2\rfloor}$。然后，利用引理 2.1(a) 中的上界、公式 (2.25) 以及桥测度的对称性，可得

$$\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{P}_{x,x}^t\left[t \geq \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x)$$

$$\leq c_2\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\setminus\mathcal{D}_M\right) + \int_{\mathcal{D}_M} p(t,x,x)\mathbf{P}_t^{x,x}\left[t \geq \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x)$$

$$\leq c_3\left(N^{M/2} + N^M \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \mathbf{P}^x\left[\sup_{0<s\leq t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right]\right).$$

因此

$$R_{1,M}(t) \leq c_3\left(N^{-M/2} + \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} \mathbf{P}^x\left[\sup_{0<s\leq t/2} |x - X_s| > c_1 L^{M/2}\right]\right),$$

它 根据引理 A.1，是一个收敛级数中的项。(a) 的证明至此完成 .
(b) 中第一个收敛性的证明与 (a) 的证明思路相同，故略去。我们只证明第二个收敛性。

首先注意到

$$\left|\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\Lambda_M^{D,V^\omega}(t) - \Lambda_M^{D,V_M^\omega}(t)\right)\right| \leq \frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[|F(t,M)|\,; t < \tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x),$$

其中

$$F(t,M) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Bigg(\exp\left(-\int_0^t \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}} \xi_y(\omega)W\left(X_s, y\right)\ \mathrm{d}s\right)$$

$$- \exp\left(-\int_0^t \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} \xi_y(\omega) \sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)} W\left(X_s, y'\right)\ \mathrm{d}s\right)\Bigg).$$

通过使用精确的 采用与 (a) 部分证明中完全相同的记号和论证，我们可以写出

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[|F(t,M)|\,;t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x)\\
&\qquad\le \frac{c_4\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\backslash\mathcal{D}_M\right)}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}+\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{D}_M} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[|F(t,M)|\,;t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x)\\
&\qquad= c_4\frac{kN^{\lfloor M/2\rfloor}}{N^M}+\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{D}_M} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[|F(t,M)|\,;t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}\right]\mu(\mathrm{d}x).
\end{aligned}$$

我们看到，第一项当 $M\to\infty$ 时收敛到 0。只需证明第二项也趋于零；将其记为 $I(t,\ M)$。我们有

$$\begin{aligned}
I(t,M)&\le\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{D}_M} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[|F(t,M)|\,;t<\tau_{\mathcal{D}_M}\right]\mu(\mathrm{d}x)\\
&\qquad+\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)}\int_{\mathcal{D}_M} p(t,x,x)\mathbf{P}_t^{x,x}\left[t\ge\tau_{\mathcal{D}_M}\right]\mu(\mathrm{d}x)\\
&=: I_1(t,M)+I_2(t,M).
\end{aligned}$$

为了估计 $I_1(t,\ M)$，我们将使用不等式 $|\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-y}|\le|x-y|,\ x,\ y>0$，以及 W 和 ξ_y 非负这一事实。

$$\begin{aligned}
&|F(t,M)|\\
&\le\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left|\exp\left(-\int_0^t\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(X_s,y\right)\ \mathrm{d}s\right)-\exp\left(-\int_0^t\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_y(\omega)\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)}W\left(X_s,y'\right)\ \mathrm{d}s\right)\right|\\
&\le\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left|\int_0^t\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(X_s,y\right)\ \mathrm{d}s-\int_0^t\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_y(\omega)\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)}W\left(X_s,y'\right)\ \mathrm{d}s\right|.
\end{aligned}$$

现在注意，对每个 $x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}$，我们都有

$$\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(x,y\right)=\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(x,y\right)+\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\backslash\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(x,y\right)$$

and

$$\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)}\xi_{y'}(\omega)W\left(x,y'\right)=\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(x,y\right)+\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\backslash\{y\}}\xi_{y'}(\omega)W\left(x,y'\right).$$

根据这一观察、富比尼定理，以及所有格点随机变量和轮廓函数 W 均非负这一事实，我们得到上述期望的上界为

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\int_0^t\left(\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\backslash\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\xi_y(\omega)W\left(X_s,y\right)+\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}\sum_{y'\in\pi_M^{-1}(y)\backslash\{y\}}\xi_{y'}(\omega)W\left(X_s,y'\right)\right)\mathrm{d}s\\
&\qquad\qquad\le 2\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\xi\int_0^t\sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\backslash\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}}W\left(X_s,y\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由于 $X_s \in \mathcal{D}_M$ 对于 $0 \le s \le t$ 和 $y \in \mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle} \setminus \mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}$，我们有 $d_{\lfloor M/2\rfloor}(X_s,\ y) > 2$，对于 $0 \le s \le t$。由此可得

$$\begin{aligned} I_1(t,M) &\le \frac{2\kappa}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{D}_M} p(t,x,x)\mathbf{E}_t^{x,x}\left[\int_0^t \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{V}_0^{\langle M\rangle}} W(X_s(\omega),y)\mathrm{d}s; t<\tau_{\mathcal{D}_M}\right]\mu(\mathrm{d}x) \\ &\le c_5 \sup_{z\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\setminus B_{\lfloor M/2\rfloor}(z,1)} W(z,y), \end{aligned}$$

其中一个收敛级数项，且与 M 无关。由**(W3)** 可知，这是一项收敛级数。

为证明 $I_2(t,M)$ 是收敛级数的一项，只需针对适当的集合 $\mathcal{D}_M' \subset \mathcal{D}_M$，沿用 (a) 的证明步骤。(b) 的证明至此完成。□

引理 *3.3* 的证明。本引理的证明沿用了 [30, 引理 3.2]，证明中的主要步骤，但在一些对论证至关重要的细节上有较大差异。我们将重点说明这些差异。

首先注意到，由引理 3.2(a) 可知，与引理 3.2]，的证明类似，我们只需证明 (3.2)。我们考虑如下由测度组成的测度族 $(\nu_M)_{M\in\mathbb{Z}_+}$：

$$\nu_M := \left(\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x)\mathbf{P}_t^{x,x}\mu(dx)\right)^{\otimes 2} \otimes \mathbb{Q}^{\otimes 3}, \quad M \in \mathbb{Z}_+, \tag{B.1}$$

它定义在乘积空间 $\widetilde{\Omega} = D([0,t],\ \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})^2 \times \Omega^3$, 上，并由满足 $a_M \le M$, $M \in \mathbb{Z}_+$ 的正整数非递减序列 $(a_M)_{M\in\mathbb{Z}_+}$ 给出。其取值将在证明的后续部分确定。

对于 $m \in \mathbb{Z}_+$，我们定义

$$V^{\omega,m}(x) := \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\cap B_m(x,1)} \xi_y(\omega)W(x,y) \tag{B.2}$$

and

$$\widetilde{V}^{\omega,m}(x) := \sum_{y\in\mathcal{V}_0^{\langle\infty\rangle}\setminus B_m(x,1)} \xi_y(\omega)W(x,y), \tag{B.3}$$

其中，球 $B_m(x,\ 1)$取自 m-图度量；也就是说，对于 $x \in \mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}\setminus\mathcal{V}_m^{\langle\infty\rangle}$，它等于 $\Delta_m(x)$——唯一包含 x 的 m-复形；对于 $x \in \mathcal{V}_m^{\langle\infty\rangle}$，它是附着在 x 上的 m-复形之和（共有 $\mathrm{rank}(x)$ 个这样的复形）。对于 $M \in \mathbb{Z}_+$，我们也记

$$F_M(w,\omega) := \mathrm{e}^{-\int_0^t V^{\omega,a_M}(X_s(w))\mathrm{d}s} \quad \text{and} \quad \widetilde{F}_M(w,\omega) := \mathrm{e}^{-\int_0^t \widetilde{V}^{\omega,a_M}(X_s(w))\mathrm{d}s}.$$

采用这一记号，我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Lambda_M^D - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Lambda_M^D\right]^2 &= \int_{\widetilde{\Omega}} \prod_{i=1}^2 \Big(F_M(w_i,\omega_0)\widetilde{F}_M(w_i,\omega_0) - F_M(w_i,\omega_i)\widetilde{F}_M(w_i,\omega_i)\Big) \\ &\qquad \times \mathbf{1}_{\{t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}}(w_i)\}} \cdot \mathrm{d}\nu_M(w_1,w_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2) \\ &=: \int_{\widetilde{\Omega}} \mathcal{X}(w_1,w_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2)\mathrm{d}\nu_M(w_1,w_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2). \end{aligned}$$

~现在我们将 Ω 划分为三个互不相交的集合:

$$D_0^M := \left\{(w_1,w_2)\in D([0,t],\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})^2 : \text{for every } s_1,s_2\in[0,t]\ d_{a_M}\left(X_{s_1}(w_1),X_{s_2}(w_2)\right)>2\right\}\times\Omega^3,$$

$$D_1^M := \Big\{(w_1,w_2)\in D([0,t],\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle})^2 : d_{a_M+3}\left(X_0(w_1),X_0(w_2)\right)>2 \text{ and there exist } s_1,s_2\in(0,t]$$
$$\text{such that } d_{a_M}\left(X_{s_1}(w_1),X_{s_2}(w_2)\right)\le 2\Big\}\times\Omega^3,$$

$$D_2^M := \widetilde{\Omega}\backslash\left(D_0^M\cup D_1^M\right).$$

我们将分别在这些集合上对 $\mathcal{X}$ 进行积分。需要指出的是，现在所有这些集合都是用 m-图度量 $d_m(x,\ y)$ 定义的。我们也借此机会更正 [30]中第1272页上集合 D_0^M和 D_1^M的定义：与上文一样，它们也应使用 $s_1,\ s_2\in[0,t]$ 来定义，而不是单个的 $s\in[0,t]$。此外，定义 D_0^M时应使用 a_M，而不是 c_M。

沿用所引引理证明中的论证，我们得到

$$\prod_{i=1}^{2}\left(F_M(w_i,\omega_0)\widetilde{F}_M(w_i,\omega_0)-F_M(w_i,\omega_i)\widetilde{F}_M(w_i,\omega_i)\right)$$
$$\le\prod_{i=1}^{2}\left(F_M(w_i,\omega_0)-F_M(w_i,\omega_i)\right)$$
$$+2-\left(\widetilde{F}_M(w_1,\omega_0)\widetilde{F}_M(w_2,\omega_2)+\widetilde{F}_M(w_2,\omega_0)\widetilde{F}_M(w_1,\omega_1)\right).$$

对于给定的 $M\in\mathbb{Z}_+$和路径 $X_s(w)$，泛函 $F_M(w,\ \cdot)$仅取决于 $V_0^{\langle\infty\rangle}$ 中属于集合$X_{[0,t]}^{a_M}(w)$:
$=\bigcup_{s\in[0,t]}B_{a_M}(X_s(w),\ 1)$的那些分形格点。由$D_0^M$的定义可知，在此集合上有 $X_{[0,t]}^{a_M}(w_1)\cap X_{[0,t]}^{a_M}(w_2)=\emptyset$，因此，随机变量 $F_M(w_1,\ \omega_0)-F_M(w_1,\ \omega_1)$ 和 $F_M(w_2,\ \omega_0)-F_M(w_2,\ \omega_2)$ 是 $\mathbb{Q}^{\otimes 3}$- 独立的。因此，

$$\int_{D_0^M}\prod_{i=1}^{2}\left(F_M(w_i,\omega_0)-F_M(w_i,\omega_i)\right)\mathbf{1}_{\{t<\tau_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}(w_i)}\}}\mathrm{d}\nu_M(w_1,w_2,\omega_0,\omega_1,\omega_2)=0$$

并且，按照所引引理证明中的论证，包括使用詹森不等式以及假设所有格点随机变量均非负且可积，可得

$$\int_{D_0^M}\mathcal{X}\ \mathrm{d}\nu_M\le ct\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\xi\sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}}\sum_{y\notin B_{a_M}(x,1)}W(x,y),\tag{B.4}$$

其中常数 $c>0$ 与 M 无关。

在集合 D_1^M 上，我们有

$$\sup_{s\in(0,t]}d_{a_M}\left(X_0(w_i),X_s(w_i)\right)>2,\quad\text{for } i=1 \text{ or } i=2.\tag{B.5}$$

这一点可以如下看出（示意图见图1）。根据 D_1^M的定义，我们有 $d_{a_M+3}(X_0(w_1)\ X_0(w_2))>2$，这意味着 $X_0(w_1)$和 $X_0(w_2)$位于彼此分离的（a_M+3）-复形中（图中的浅灰色复形）。相反，如果对于 $i\in\{1,2\}$和所有 $s\in(0,t]$，都有 $d_{a_M}(X_0(w_i)\ X_s(w_i))\le 2$，那么对于 $i=1,2$，整条路径 $X_s(w_i)$都会被限制在 $B_{a_M}(X_0(w_i),2)$之内（图中的深灰色复形）。这意味着，过程截至时间 t 的这两条路径，彼此间的距离并不比位于两个不同的、连接到某个共同（a_M+3）-复形顶点上的a_M-复形更近。事实上，它们会分别处于两个不同（a_M+2）-复形内部彼此分离的（a_M+1）-复形中。这将

意味着，对于所有 $s_1, s_2 \in (0, t]$，都有 $d_{a_M}(X_{s_1}(w_1)\ X_{s_2}(w_2)) \geq 6$，因为实现图距离的路径必须先经过包含 $X_{s_1}(w_1)$的（a_M+1）-复形内的另一个 a_M-复形，然后再经过包含 $X_{s_1}(w_1)$的（a_M+2）-复形内的另一个（a_M+1）-复形，因此至少还要经过两个 a_M-复形。根据对称性，它接下来必须经过包含 $X_{s_2}(w_2)$的（a_M+2）-复形内至少三个 a_M-复形。

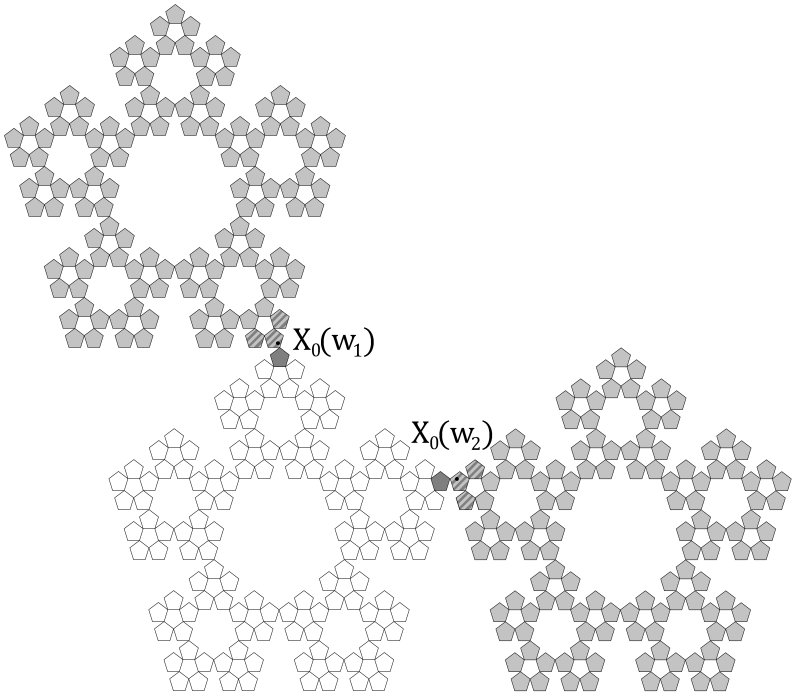

FIGURE 1. $X_0(w_i)$ 位于可分的（a_M+3）复形（浅灰色）中。如果（B.5）不成立，那么整个路径 $X_s(w_i)$、 $s \in [0,t]$ 都必须限制在各自的深灰色 a_M-复形中，这与 D_1^M 的定义矛盾。

由 [29, 引理 A.2]可知

$$\sup_{s\in(0,t]} |X_0(w_i), X_s(w_i)| \geq c_1 L^{a_M}, \quad \text{for } i = 1 \text{ or } i = 2,$$

其中常数 c_1 与 M 无关，并且由于 $0 \leq F_M(w_i, \omega_k) \leq 1$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$, 关于 D_1^M 的积分可估计为

$$\frac{1}{\mu\left(\mathcal{K}^{\langle M\rangle}\right)} \int_{\mathcal{K}^{\langle M\rangle}} p(t,x,x) \mathbf{P}_t^{x,x} \left[\sup_{s\in(0,t]} |X_0(w_i), X_s(w_i)| \geq c_1 L^{a_M} \right] \mu(\mathrm{d}x). \tag{B.6}$$

使用与所引引理证明中相同步骤相同的论证，我们便得到上述表达式小于或等于

$$c_2 \sup_{x\in\mathcal{K}^{\langle\infty\rangle}} \mathbf{P}^x \left[\sup_{s\in(0,t/2]} |X_0(w_i), X_s(w_i)| \geq c_1 L^{a_M} \right], \tag{B.7}$$

其中某个 c_2 与 M 无关。

由于积分 且 $\mathcal{X}$ 不大于 1，因此只需估计 D_2^M 的测度。我们有 e

$$\nu_M(D_2^M) \le \frac{c_3\mu\{(x,y)\in \mathcal{K}^{\langle M\rangle}\times\mathcal{K}^{\langle M\rangle} : d_{a_M+3}(x,y)\le 2\}}{\left(\mu(\mathcal{K}^{\langle M\rangle})\right)^2} \le \frac{4c_3N^{a_M+3}}{N^M}, \tag{B.8}$$

其中某些量与 M 无关。

我们可以选择 $a_M=\lfloor M/4\rfloor$。那么，根据 **(W3)**，**(B.4)** 是一个收敛级数的项；根据引理 A.1，**(B.7)** 是一个收敛级数的项。□

参考文献

[1] E. Akkermans, J. P. Chen, G. Dunne, L. G Rogers, A. Teplyaev: *Fractal AC circuits and propagating waves on fractals.* 557 567, 分形上的分析、概率与数学物理，–《分形、动力学、数学科学、艺术、理论与应用》5，世界科学出版社，新泽西州哈肯萨克，[2020], 2020。[2] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev: *Besov class via heat semigroup on Dirichlet spaces I: Sobolev type inequalities.* 278 2020 11, 108459, 48 《泛函分析杂志》（），第，页[3] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev: *Besov class via heat semigroup on Dirichlet spaces II: BV functions and Gaussian heat kernel estimates.* 《微积分变分与偏微分方程》59（2020年），第3期，论文第103号，共32页。[4] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev: *Besov class via heat semigroup on Dirichlet spaces III: BV functions and sub-Gaussian heat kernel estimates.* 《微积分变分与偏微分方程》60（2021年），第5期，论文第170号，共38页。[5] P. Alonso-Ruiz, F. Baudoin, L. Chen, L. G. Rogers, N. Shanmugalingam, A. Teplyaev: *BV functions and fractional Laplacians on Dirichlet spaces* 1910 13330 ，arXiv：。。[6] H. Balsam, K. Kaleta, M. Olszewski, K. Pietruska-Pa - luba, ，预印本 *IDS for subordinate Brownian motions in Poisson random environment on nested fractals: existence and Lifschitz tail* 2022 [7] M. Benderskii, L. Pastur: *On the spectrum of the one-dimensional Schrödinger equation with random potential*，《数学文集》82（1970年）245-256。[8] J. Bourgain, C. E. Kenig: *On localization in the continuous Anderson-Bernoulli model in higher dimension*《数学发明》161（2005年），389-426。[9] R. Carmona, J. Lacroix, *Spectral theory of random Schrödinger operators*。《概率及其应用》。Birkh¨auser Boston, Inc.，马萨诸塞州波士顿，1990年。[10] L. Chaumont, G. Uribe Bravo, *Markovian bridges: weak continuity and pathwise constructions*，《概率年刊》39（2）（2011年），第609-647页。[11] J. P. Chen, M. Hinz, A. Teplyaev: *From non-symmetric particle systems to non-linear PDEs on fractals.* 随机偏微分方程及相关领域，503–513，《施普林格数学与统计学会议录》229，施普林格，查姆，2018[12] Chen Z.-Q., Song R, *Two sided eigenvalue estimates for subordinate processes in domains* 226, ，《泛函分析杂志》–。2005, 90 113 [13] K.L. Chung, Z. Zhao：从布¨朗运动到薛定谔方程，施普林格，纽约，1995年。[14] J. M. Combes, P. D. Hislop: *Localization for some continuous, random Hamiltonians in d-dimensions.*《泛函分析杂志》124，149-180（1994年）。[15] A. Dekkers, A. Rozanova-Pierrat, A. Teplyaev: *Mixed boundary valued problems for linear and nonlinear wave equations in domains with fractal boundaries.* 61 2022 2, 《微积分变分与偏微分方程》（），论文第75号，共44页。[16] M. Demuth, J.A. van Casteren：自伴费勒算子的随机谱理论。泛函分析方法。Birkh¨auser，巴塞尔，2000年。[17] R. Friedberg, J. Luttinger: *Density of electronic energy levels in disordered systems*，《物理评论B辑》12（1975年）4460-4474。[18] M. Fukushima: *On the spectral distribution of a disordered system and a range of a random walk*，《Osaka J. Math.》11，1974年，73-85。[19] M. Fukushima: *Dirichlet forms diffusion processes Ideas and methods in stochastic analysis stochastics and applications* 151 161 1992 *and spectral dimensions for nested fractals.* 载于：，，–。剑桥大学出版社，剑桥。[20] P. J. Fitzsimmons, B. M. Hambly, T. Kumagai: *Transition density estimates for Brownian motion on affine nested fractals* 165 1994 3, 595 620 ，《数学物理通讯》（），第–。[21] M. Fukushima: *On the spectral distribution of a disordered system and a range of a random walk*，《Osaka J. Math.》11，1974年，73-85。

[22] M. Fukushima,
Dirichlet forms diffusion processes and spectral dimensions for nested fractals Ideas and，，。载于：，，–。*methods in stochastic analysis stochastics and applications* 151 161 1992
剑桥大学出版社，剑桥，。[23] M. Fukushima, H. Nagai, and S. Nakao：
On an asymptotic property of spectra of a random difference operator，《日本学士院纪要》51（1975年）100-102。[24] M. Gebert, C. Rojas-Molina：*Lifshitz tails for the fractional Anderson model*，《J. Stat. Phys.》179（2020年）341-353。[25] F. Germinet, P. D. Hislop, A. Klein：*Localization for Schrödinger operators with Poisson random potential.*《J. Eur. Math. Soc. (JEMS)》9（2007年），第3期，577-607。[26] M. Hinz, A. Rozanova-Pierrat, A. Teplyaev：
Non-Lipschitz uniform domain shape optimization in linear acoustics.《SIAM J. Control Optim.》59（2021年），第2期，1007-1032。[27] T. Kumagai,C. Nakamura：*Lamplighter random walks on fractals.*《J. Theoret. Probab.》31（2018年），第1期，68–92。[28] M. Hinz, A. Teplyaev：*Dirac and magnetic Schrödinger operators on fractals.*《泛函分析杂志》265 11，2830 2013 2854（），第-。[29] K. Kaleta, M. Olszewski, K. Pietruska-Pa-luba：*Reflected Brownian motion on simple nested fractals*，《分形》27（ 6 2019, 1950104 1 29），- K. Kaleta, K. Pietruska-Pa
[30]
- *Integrated density of states for Poisson-Schrödinger perturbations of subordinate* luba：《*Brownian motions on the Sierpiński gasket* 125 4 2015, 1244 1281
Stochastic Process. Appl.》（），-。[31] K. Kaleta, K. Pietruska-Pa
- *Lifschitz singularity for subordinate Brownian motions in presence of the Pois-* luba：《*sonian potential on the Sierpiński triangle* 128 11 2018, 3897 3939
Stochastic Process. Appl.》（），-。[32] K. Kaleta, K. Pietruska-Pa-luba：
Lifschitz tail for alloy-type models driven by the fractional Laplacian，《Journal of Functional Analysis》279（5），2020年，108575。[33] K. Kaleta, K. Pietruska-Pa-luba：*Lifschitz tail for continuous Anderson models driven by Lévy operators*，《Communications in Contemporary Mathematics》23（6），2021年，2050065。[34] D. Kelleher, B. Steinhurst and C-M.M. Wong，*From Self-Similar Structures to Self-Similar Groups*，《Internat. J. Algebra Comput. (IJAC)》22:7（2012年），1250056。[35] J. Kigami：*Time changes of the Brownian motion: Poincaré inequality, heat kernel estimate and protodistance.*《Mem. Amer. Math. Soc.》259（2019年），第1250期，v+118 页。[36] W. Kirsch, F. Martinelli：
On the density of states of Schrödinger operators with a random potential，《J. Phys. A》15（1982年）2139-2156。[37] W. Kirsch, F. Martinelli：*Large deviations and Lifshitz singularity of the integrated density of states of random Hamiltonians* 89 1983 27 40 ，《数学物理通讯》（）-。[38] W. Kirsch, B. Simon：*Lifshitz Tails for Periodic Plus Random Potentials*，《J. Stat. Phys.》42:5/6（1986年）799-808。[39] W. Kirsch, I. Veseli´c：*Lifshitz Tails for a Class of Schrödinger Operators with Random Breather-Type Potential*，《Lett. Math. Phys.》94（2010年）27-39。[40] F. Klopp：*Weak Disorder Localization and Lifshitz Tails*，《Commun. Math. Phys.》232（2002年）125-155。[41] F. Klopp：*Weak Disorder Localization and Lifshitz Tails: Continuous Hamiltonians*，《Ann. Henri Poincar´e》3（2002年）711-737。[42] T. Kumagai,
Estimates of transition densities for Brownian motion on nested fractals，《Probab. Theory Related Fields》96（1993年），第2期，205–224。[43] T. Kumagai：*Anomalous random walks and diffusions: from fractals to random media.*《2014年首尔国际数学家大会论文集》第IV卷，75–94，Kyung Moon Sa，首尔，2014年。[44] S. Kusuoka,
Dirichlet forms on fractals and products of random matrices.《Publ. RIMS Kyoto Univ.》25，659–680（1989年）。[45] T. Lindstrom，*Brownian motion on nested fractals*，《Mem. Amer. Math. Soc.》83（1990年），第420期，iv+128 页。[46] J.M. Luttinger：*New variational method with applications to disordered systems*，《Phys. Rev. Lett.》37（1976年）609-612。[47] G. Mezincescu：*Bounds on the integrated density of electronic states for disordered Hamiltonians*，《物理评论B辑》32（1985年）6272-6277。[48] H. Nagai：*On an exponential character of the spectral distribution function of a random difference operator*，《Osaka J. Math.》14（1977年）111-116。[49] S. Nakao：
On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential，《Japan J. Math.》第3卷（1977年）111-139。[50] V. Nekrashevych and A. Teplyaev，*Groups and analysis on fractals*，《图上的分析及其应用》，《纯数学讨论会论文集》，美国数学学会，77（2008年），143-180。[51] M. Nieradko, M. Olszewski，*Good labeling property of simple nested fractals*，预印本，2021年，可见于 arXiv:2110.15921[52] H. Okura,
On the spectral distributions of certain integro-differential operators with random potential，《Osaka J. Math.》16（3）（1979年）633-666。[53] M. Olszewski,
Estimates for the transition densities of the reflected Brownian motion on simple nested fractals，《Prob. Math. Statist.》39（2019年），第2期，423-440。

[54] Pastur: *The behavior of certain Wiener integrals as $t \to \infty$ and the density of states of Schrödinger equations with random potential* 32 1977 88 95 , （俄文）

Teoret. Mat. Fiz. ( ) - .[55] K. Pietruska-Pa-luba, *The Lifschitz singularity for the density of states on the Sierpinski gasket*, Probab. Theory Related Fields 89 (1991), 第1期, 1-33。[56] K. Pietruska-Pa-luba, *The Wiener Sausage Asymptotics on Simple Nested Fractals*, 《随机分析与应用》, 23:1 (2005), 111-135。[57] K. Pietruska-Pa-luba, A. Stos, *Poincaré inequality and Hajlasz-Sobolev spaces on nested fractals*, Studia Math. 218(1) (2013), 1–28。[58] M. Romerio, W. Wreszinski: *On the Lifshitz singularity and the tailing in the density of states for random lattice systems* 21 1979 169 179 , J. Stat. Phys. ( ) - .[59] M. Reed, B. Simon: *Methods on Modern Mathematical Physics. Vol. 4: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978。[60] R. Schilling, R. Song, Z. Vondra˘cek, *Bernstein functions*, Walter de Gruyter, 2010。[61] T. Shima, *Lifschitz tails for random Schrödinger operators on nested fractals*, Osaka J. Math. **29** (1992), 749–770。[62] B. Simon: *Lifshitz tails for the Anderson model*, J. Stat. Phys. 38 (1985) 65-76。[63] P. Stollmann, *Caught by Disorder: Bound States in Random Media*, Birkh¨auser Boston, 2001。[64] A.S. Sznitman, *Lifschitz tail and Wiener sausage on hyperbolic space*, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 1033–1065。[65] A.S. Sznitman, *Lifschitz tail on hyperbolic space: Neumann conditions*, Comm. Pure Appl. Math.**43** (1990), 1-30。

H. Balsam and K. Pietruska-Pałuba, Institute of Mathematics, University of Warsaw, ul. Banacha2, 02-097 Warszawa, Poland*Email address*: hubert.balsam@gmail.com, kpp@mimuw.edu.pl

K. Kaleta and M. Olszewski, Faculty of Pure and Applied Mathematics Wrocław University of , , Science and Technology Wyb. Wyspiańskiego 27 50-370 Wrocław Poland „*Email address*: kamil.kaleta@pwr.edu.pl, mariusz.olszewski@pwr.edu.pl